Pour commencer

Exercice 1 ⭐ - Ensembles de définition [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé

Représenter les ensembles de définition des fonctions suivantes :

$$f_1(x,y)=\ln(2x+y-2)\qquad f_2(x,y)=\sqrt{1-xy}$$
$$f_3(x,y)=\frac{\ln(y-x)}{x}\qquad f_4(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}+\sqrt{4-x^2-y^2}.$$

Indication

Il suffit de regarder à quelles conditions les racines, etc..., sont définies

Corrigé

1. Le logarithme est défini si $2x+y-2>0$. On trouve donc le demi-plan supérieur délimité par la droite d'équation $2x+y-2=0$.
2. $1-xy\geq 0$ si et seulement si $y\leq 1/x$, dans le cas où $x>0$, $y\geq\frac{1}{x}$ si $x<0$. Le domaine de définition est la réunion de la partie située sous l'hyperbole $y=1/x$ pour $x>0$, de la partie située au-dessus de l'hyperbole pour $x<0$, et de l'axe des ordonnées.
3. Les conditions sont $x\neq 0$ et $y-x>0$. On trouve donc un demi-plan, auquel on a retiré une (portion de) droite.
4. Les conditions sont cette fois $x^2+y^2-1>0$ et $x^2-y^2\leq 4$. On trouve donc la couronne située entre les cercles de centre O et de rayon respectifs 1 et 2, le premier cercle n'étant pas dans le domaine, le second si.

Exercice 2 ⭐ - Lignes de niveau [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé

Représenter les lignes de niveau (c'est-à-dire les solutions (x,y) de l'équation $f(x,y)=k$) pour :

$$f_1(x,y)=y^2,\ \text{avec } k=-1 \text{ et } k=1\qquad f_2(x,y)=\frac{x^4+y^4}{8-x^2y^2}\text{ avec } k=2.$$

Indication

Il s'agit de résoudre les équations $f(x,y)=k$.

Corrigé

1. D'abord, l'équation $y^2=-1$ n'a pas de solutions, donc la courbe de niveau... est vide. D'autre part, l'équation $y^2=1$ admet pour solution les droites $y=1$ et $y=-1$.
2. L'équation $f(x,y)=2$ implique

$$(x^2+y^2)^2=16,$$

ce qui, compte tenu du fait que $x^2+y^2\geq 0$, donne le cercle

$$x^2+y^2=4,$$

cercle centré à l'origine et de rayon 2. Il faut retirer à ce cercle les points pour lesquels $x^2y^2=8$, points pour lesquels la fonction f n'est pas définie. Les points du cercle vérifiant cette relation vérifient aussi

$$x^2+\frac{8}{x^2}=4\implies x^4-4x^2+8=0.$$

Posons $X=x^2$. Alors X vérifie $X^2-4X+8=0$. Le discriminant de cette équation est

$16 - 4 \times 8 = -16 < 0$. Ainsi, l'équation n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$. La courbe de niveau recherché est bien le cercle de centre l'origine et de rayon 2.

Exercice 3 - Lignes de niveau [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé

Représenter les lignes de niveau des fonctions suivantes :

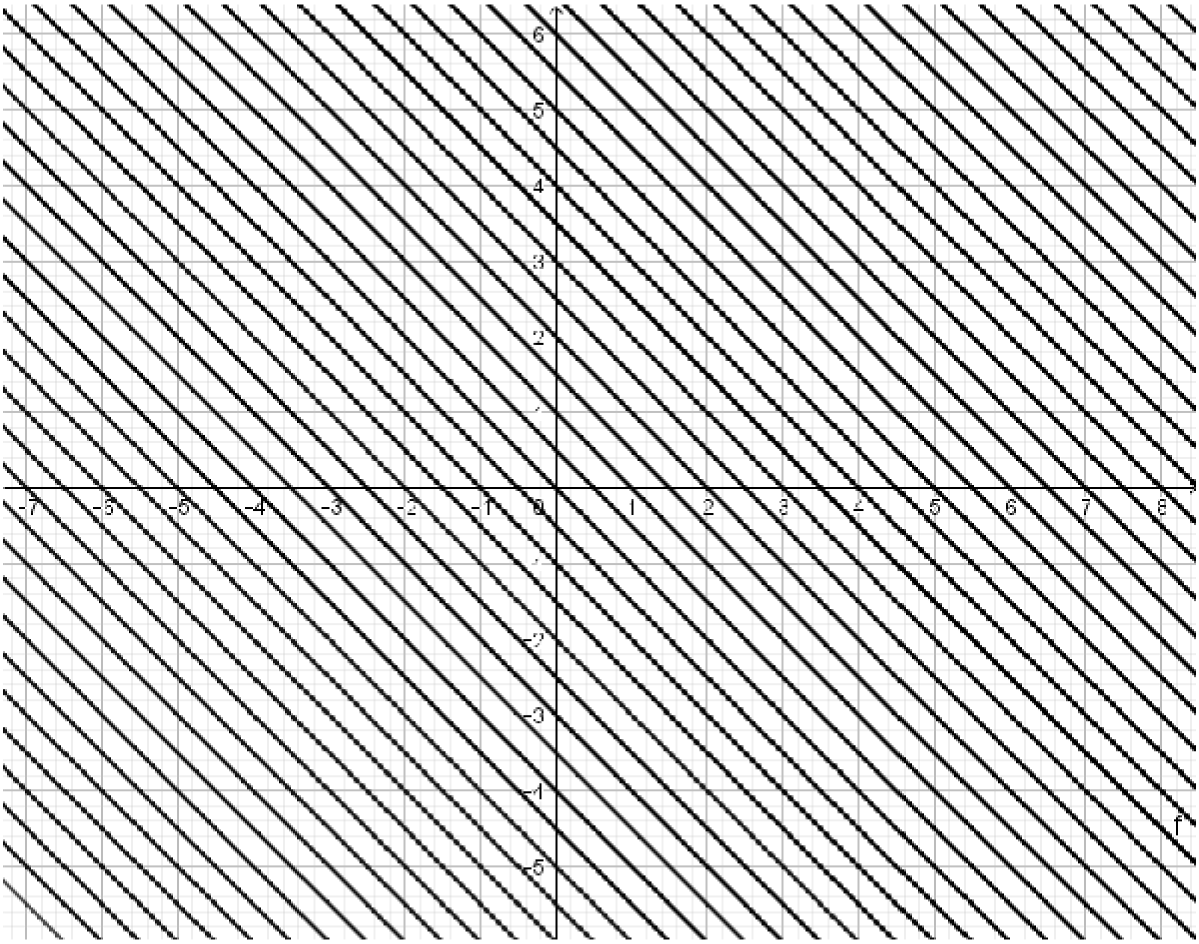
1. $f(x,y) = x + y - 1$ **2.** $f(x,y) = e^{y-x^2}$

3. $f(x,y) = \sin(xy)$

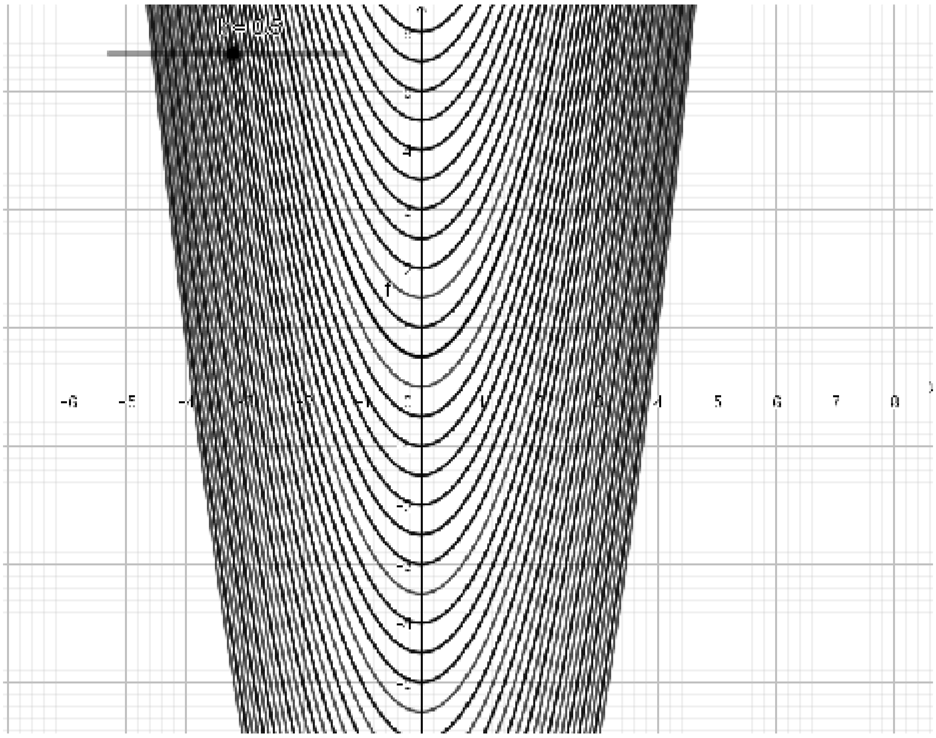
Indication

Corrigé

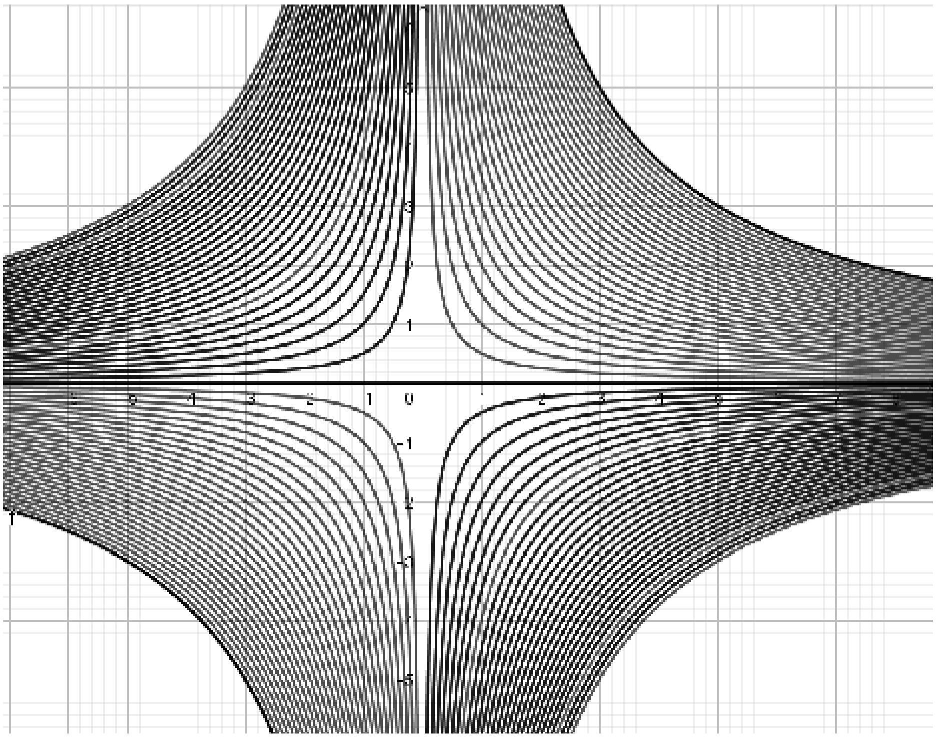
1. Soit $k \in \mathbb{R}$. On a $f(x,y) = k \iff y = 1 - x + k$. Les courbes de niveau de f sont donc les droites $y = 1 - x + k$.



2. Soit $k > 0$ (la fonction exponentielle ne prend que des valeurs strictement positives). On a $f(x,y) = k \iff y - x^2 = \ln(k) \iff y = x^2 + \ln(k)$. Les lignes de niveau sont donc des translatées verticales de la parabole $y = x^2$.



3. Soit $k \in [-1,1]$ (la fonction sinus est à valeurs dans $[-1,1]$) et soit $a \in [0,\pi[$ avec $\sin(a) = k$. On a $f(x,y) = k$ si et seulement s'il existe $l \in \mathbb{Z}$ tel que $xy = a + 2l\pi$ ou $xy = 2\pi - a + 2l\pi$. Les courbes de niveau sont donc des hyperboles $y = \lambda/x$, mais deux hyperboles différentes peuvent correspondre à la même valeur de k.



Calcul de limites

Exercice 4 - Calcul de limites détaillé [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé

1. Montrer que si x et y sont des réels, on a :

$$2|xy| \leq x^2 + y^2$$

2. Soit f l'application de $A = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y)=\frac{3x^2+xy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Montrer que, pour tout (x,y) de A, on a :

$$|f(x,y)|\leq 4\|(x,y)\|_2,$$

où $\|(x,y)\|_2=\sqrt{x^2+y^2}$. En déduire que f admet une limite en $(0,0)$.

Indication

1. Utiliser le fait que $(|x|-|y|)^2$ est positif.
2. C'est une simple application de l'inégalité triangulaire.

Corrigé

1. On a :

$$0\leq (|x|-|y|)^2=x^2+y^2-2|xy|.$$

2. L'inégalité de la question précédente se réécrit encore encore en

$$|xy|\leq \frac{\|(x,y)\|_2^2}{2}.$$

On en déduit, d'après l'inégalité triangulaire

$$|f(x,y)|\leq \frac{3\|(x,y)\|_2^2+\frac{\|(x,y)\|_2^2}{2}}{\|(x,y)\|_2}\leq 4\|(x,y)\|_2.$$

Ainsi, si (x,y) tend vers 0, on a $|f(x,y)|$ qui tend vers 0.

Exercice 5 ★★ - Diverses limites [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé

Les fonctions suivantes ont-elles une limite en $(0,0)$?

1. $f(x,y)=(x+y)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$
2. $f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$
3. $f(x,y)=\frac{|x+y|}{x^2+y^2}$

Indication

Essayer, par des majorations, de voir si on peut obtenir une limite. Sinon, regarder la limite sur des droites ou des courbes, et essayer d'obtenir des limites différentes.

Corrigé

1. On a

$$|f(x,y)|\leq |x|+|y|\leq \|(x,y)\|_1.$$

La limite de f en $(0,0)$ est donc 0.

2. Non! On a

$$\lim_{x\to 0} f(x,x)=0 \text{ et } \lim_{x\to 0} f(x,2x)=-\frac{3}{5}.$$

3. Non!

$$\lim_{x\to 0} f(x,x)=+\infty.$$

Exercice 6 ★★★ - Diverses limites [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé

Les fonctions suivantes ont-elles une limite en l'origine?

1. $f(x,y,z)=\dfrac{xy+yz}{x^2+2y^2+3z^2}$;
2. $f(x,y)=\left(\dfrac{x^2+y^2-1}{x}\sin x, \dfrac{\sin(x^2)+\sin(y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$.
3. $f(x,y)=\dfrac{1-\cos(xy)}{xy^2}$.

Indication

1. Chercher la limite le long de deux demi-droites.
2. Il suffit d'étudier la fonction limite de chaque fonction coordonnée.
3. Que vaut $\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos(t)}{t^2}$?

Corrigé

1. On a d'une part

$$f(1/n,0,0)=0$$

et d'autre part

$$f(1/n,1/n,1/n)=\frac{2/n^2}{6/n^2}=\frac{1}{3}.$$

La limite de f en $(0,0,0)$ ne peut pas exister.

2. Il suffit d'étudier la limite des deux fonctions coordonnées (f_1,f_2). Or, x^2+y^2-1 tend vers -1, et $\frac{\sin x}{x}$ vers 1 si (x,y) tend vers $(0,0)$. f_1 tend donc vers -1 si (x,y) tend vers $(0,0)$. D'autre part, on a

$$|f_2(x,y)|\leq \frac{|\sin(x^2)|}{x^2}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{|\sin(y^2)|}{y^2}\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Mais on a $\sin(x^2)/x^2\to 1$ quand $(x,y)\to(0,0)$, et

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\leq\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\leq\sqrt{x^2+y^2}.$$

On en déduit que $f_2(x,y)$ tend vers 0 si (x,y) tend vers $(0,0)$, et donc $f(x,y)$ tend vers $(-1,0)$ si (x,y) tend vers $(0,0)$.

3. Par un classique développement limité, on sait que $\frac{1-\cos(t)}{t^2}\to\frac{1}{2}$ si $t\to 0$. Maintenant, on peut écrire

$$f(x,y)=x\frac{1-\cos(xy)}{(xy)^2}.$$

De la remarque précédente, on tire que $\frac{1-\cos(xy)}{(xy)^2}$ tend vers $1/2$ si (x,y) tend vers $(0,0)$. On en déduit que $f(x,y)$ tend vers 0 si (x,y) tend vers $(0,0)$.

Exercice 7 ★★★ - Limites à paramètres [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé

Soient $\alpha,\beta>0$. Déterminer, suivant les valeurs de α et β, si la fonction

$$f(x,y)=\frac{x^\alpha y^\beta}{x^2+y^2}$$

admet une limite en $(0,0)$.

Indication

Corrigé

Continuité

Exercice 8 ★ - Comme une limite [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}\text{ si }(x,y)\neq(0,0)\text{ et }f(0,0)=0.$$

La fonction f est-elle continue en (0,0)?

Indication

Faire tendre (x,y) vers $(0,0)$ sur la droite $y=x$.

Corrigé

On pose $x=y=t$, et on fait tendre t vers 0. On a alors

$$f(t,t)=\frac{1}{2}.$$

En faisant tendre t vers 0, on voit que ceci tend vers 1/2, qui n'est pas 0. La fonction f n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice 9 ★★★ - En deux parties [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé

Démontrer que la fonction $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y)=\begin{cases}2x^2+y^2-1 & \text{si } x^2+y^2>1\\ x^2 & \text{sinon}\end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Indication

Séparer le domaine en trois parties.

Corrigé

Posons $\mathcal{D}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;x^2+y^2<1\}$ et $\mathcal{U}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;x^2+y^2>1\}$. $\mathcal{D}$ et $\mathcal{U}$ sont deux ouverts de $\mathbb{R}^2$ sur lesquels f a une expression polynomiale. f est donc continue sur $\mathcal{D}$ et sur $\mathcal{U}$. Il reste donc à vérifier la continuité de f en un point (a,b) tel que $a^2+b^2=1$. Soit (a,b) un tel point et soit (x_n,y_n) une suite qui converge vers (a,b). Soit $n\geq 1$. Si (x_n,y_n) est élément de $\mathcal{U}$, alors $f(x_n,y_n)=2x_n^2+y_n^2-1$ tandis que si ce n'est pas le cas, $f(x_n,y_n)=x_n^2$. Mais,

$$2x_n^2+y_n^2-1\to 2a^2+b^2-1=a^2 \text{ tandis que } x_n^2\to a^2.$$

On a bien $f(x_n,y_n)\to a^2=f(a,b)$, et la fonction f est continue en (a,b).

Exercice 10 ★★★ - Prolongement par continuité [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé

Démontrer que la fonction définie par $f(x,y)=\frac{\sin(xy)}{xy}$ se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$.

Indication

Faire apparaitre une composée de deux fonctions.

Corrigé

Remarquons déjà que le domaine de définition de f est $D=\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^*$. Posons de plus $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $h(u)=\frac{\sin u}{u}$ si $u\neq 0$ et $h(0)=1$, et posons également $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $(x,y)\mapsto xy$. Il est bien connu que la fonction h est continue sur $\mathbb{R}$ (c'est le prolongement par continuité sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x\mapsto\frac{\sin x}{x}$). g est bien sûr continue, et donc $h\circ g$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$. Mais, si $(x,y)\in D$, alors $f(x,y)=h\circ g(x,y)$. Ainsi, $h\circ g$ est un (le!) prolongement continu de f à $\mathbb{R}^2$.

Exercice 11 ★★★★ - Avec la dérivée [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. On définit $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ par

$$F(x,y)=\begin{cases}\frac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{si } x\neq y\\ f'(x) & \text{sinon.}\end{cases}$$

Démontrer que F est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Indication

Le théorème des accroissements finis pourra être d'une grande aide!

Corrigé

Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Si $a\neq b$, on a encore $x\neq y$ pour tout (x,y) proche de (a,b) et on a bien

$$F(x,y)=\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\xrightarrow{(x,y)\to(a,b)}\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=F(a,b).$$

Si maintenant $a=b$, alors on remarque que, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, ou bien en appliquant la définition si $x=y$, ou bien en appliquant le théorème des accroissements finis, il existe $c_{x,y}$ compris entre x et y tel que

$$F(x,y)=f'(c_{x,y}).$$

Mais si $(x,y)\to(a,a)$, alors $c_{x,y}\to a$ et la continuité de f' entraîne que

$$F(x,y)\to f'(a)=F(a,a).$$

Ainsi, F est aussi continue en (a,a).

Exercice 12 ★★★★ **- Application aux fonctions d'une variable** [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé

Soit $C\subset\mathbb{R}^2$ une partie convexe et $f:C\to\mathbb{R}$ une fonction continue.

1. Démontrer que $f(C)$ est un intervalle.
2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $h:I\to\mathbb{R}$ une fonction continue et injective. Démontrer que h est strictement monotone. On pourra utiliser la fonction $f(x,y)=h(x)-h(y)$.

Indication

1. Se ramener à une fonction d'une variable réelle et au théorème des valeurs intermédiaires.
2.

Corrigé

1. Soient $y_1=f(x_1)$ et $y_2=f(x_2)$ appartenant à $f(C)$. On peut supposer $y_1\leq y_2$ et soit y dans l'intervalle $[y_1,y_2]$. On considère la fonction $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $t\mapsto f((1-t)x_1+tx_2)$. g est bien définie car C est convexe, g est continue, $g(0)=f(x_1)=y_1$, $g(1)=f(x_2)=y_2$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction d'une variable réelle g, il existe $t\in[0,1]$ avec $g(t)=y$. Posons $x=(1-t)x_1+tx_2\in C$. Alors $f(x)=y$. Ceci prouve bien que g est un intervalle.
2. Posons $C=\{(x,y)\in I;\ x>y\}$ et $f:C\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=h(x)-h(y)$. Alors C est convexe (il suffit de faire un dessin pour s'en convaincre, mais on peut vérifier très facilement la définition). $f(C)$ est un intervalle d'après la question précédente, et cet intervalle ne peut pas contenir 0 puisque h est injective. Ainsi, on a ou bien $f>0$ ou bien $f<0$. Le premier cas dit que, si $x>y$, alors $h(x)>h(y)$ et donc que h est strictement croissante. Le second cas dit que h est strictement décroissante.

Discussions des forums

Relation d'équivalence
Article sur les deux infi ...
Barycentre
ellipse
Physique Seconde C. Je s ...

Gaston Julia (1893-1978)