WIKIPÉDIA

# Application de la transformée de Laplace aux équations différentielles

Dans la résolution des **équations différentielles linéaires** à coefficients constants, les propriétés de la **transformation de Laplace**, concernant la linéarité et la transformée de la dérivée, offrent un moyen de résoudre certaines d'entre elles. Cette technique est un outil pratique pour les ingénieurs.

## Principe

La transformation de Laplace transforme une fonction $f$ en une fonction $\mathcal{L}\{f\}$ définie par

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt.$$

En pratique, la recherche de $\mathcal{L}\{f\}$ se fait plus facilement à l'aide de tables de transformées de Laplace (voir quelques transformées usuelles)

La transformation de Laplace possède les propriétés suivantes

- Linéarité :

$$\mathcal{L}\left\{af + bg\right\} = a\,\mathcal{L}\left\{f\right\} + b\,\mathcal{L}\left\{g\right\}$$

- Transformée d'une dérivée :

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}\{f'\} = s\mathcal{L}(f) - f(0)\\
&\mathcal{L}\{f''\} = s^2\mathcal{L}(f) - sf(0) - f'(0)\\
&\mathcal{L}\left\{f^{(n)}\right\} = s^n\mathcal{L}\{f\} - s^{n-1}f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)
\end{aligned}$$

Ces propriétés peuvent s'appliquer à une équation différentielle linéaire. Supposons que l'on veuille résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i f^{(i)} = \varphi$$

En appliquant la transformation de Laplace à cette égalité on obtient l'équation équivalente suivante :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \mathcal{L}\{f^{(i)}\} = \mathcal{L}\{\varphi\}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{L}\{f\} = \frac{\mathcal{L}\{\varphi\} + \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{i} s^{i-j} f^{(j-1)}(0)}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}$$

où $f^{(k)}(0)$ sont les conditions initiales.

Il suffit alors de trouver $f$ en appliquant la transformation inverse sur $\mathcal{L}\{f\}$. Cette opération se révèle parfois difficile sauf dans le cas où $\mathcal{L}\{f\}$ est une somme de transformées de Laplace classiques figurant dans un tableau de transformées de Laplace.

## Un exemple

On cherche à résoudre :

$$f^{(2)}(t) + 4f(t) = \sin(2t)$$

avec les conditions initiales $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$

On note : $\varphi(t) = \sin(2t)$

Le tableau de transformées de Laplace donne :

$$\mathcal{L}\{\varphi\}(s) = \frac{2}{s^2 + 4}$$

L'équation devient :

$$s^2\mathcal{L}\{f\} - sf(0) - f^{(1)}(0) + 4\mathcal{L}\{f\} = \mathcal{L}\{\varphi\}$$

On en déduit :

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \frac{2}{(s^2 + 4)^2}$$

Il s'agit maintenant de retrouver la fonction $f$, c'est-à-dire d'appliquer la transformation de Laplace inverse. Dans ce cas, la fonction $\mathcal{L}\{f\}$ est une fonction rationnelle qu'il suffit de décomposer en éléments simples. La lecture inverse du tableau de transformées de Laplace fournira alors la valeur de $f$

$$\frac{2}{(s^2 + 4)^2} = \frac{\frac{1}{16i}}{s - 2i} - \frac{\frac{1}{16i}}{s + 2i} - \frac{\frac{1}{8}}{(s + 2i)^2} - \frac{\frac{1}{8}}{(s - 2i)^2} = \frac{1}{4}\frac{1}{s^2 + 4} - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{(s + 2i)^2} + \frac{1}{(s - 2i)^2}\right)$$

Toutes ces différentes fractions figurent dans la colonne de droite du tableau de transformées de Laplace et permettent de retrouver $f$ :

$$f(t) = \frac{1}{8}\sin(2t) - \frac{1}{8}\left(te^{-2it} + te^{2it}\right) = \frac{1}{8}\sin(2t) - \frac{t}{4}\cos(2t)$$

---