

# Application de la transformée de Laplace aux équations différentielles

Dans la résolution des **équations différentielles linéaires** à coefficients constants, les propriétés de la **transformation de Laplace**, concernant la linéarité et la transformée de la dérivée, offrent un moyen de résoudre certaines d'entre elles. Cette technique est un outil pratique pour les ingénieurs.

## Principe

La transformation de Laplace transforme une fonction  $f$  en une fonction  $\mathcal{L}\{f\}$  définie par

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

En pratique, la recherche de  $\mathcal{L}\{f\}$  se fait plus facilement à l'aide de tables de transformées de Laplace (voir [quelques transformées usuelles](#)).

La transformation de Laplace possède les propriétés suivantes

- Linéarité :

$$\mathcal{L}\{af + bg\} = a \mathcal{L}\{f\} + b \mathcal{L}\{g\}$$

- Transformée d'une dérivée :

$$\mathcal{L}\{f'\} = s\mathcal{L}\{f\} - f(0)$$

$$\mathcal{L}\{f''\} = s^2\mathcal{L}\{f\} - sf(0) - f'(0)$$

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}\} = s^n\mathcal{L}\{f\} - s^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

Ces propriétés peuvent s'appliquer à une équation différentielle linéaire. Supposons que l'on veuille résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\sum_{i=0}^n a_i f^{(i)} = \varphi$$

En appliquant la transformation de Laplace à cette égalité on obtient l'équation équivalente suivante :

$$\sum_{i=0}^n a_i \mathcal{L}\{f^{(i)}\} = \mathcal{L}\{\varphi\}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{L}\{f\} = \frac{\mathcal{L}\{\varphi\} + \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=1}^i s^{i-j} f^{(j-1)}(0)}{\sum_{i=0}^n a_i s^i}$$

où  $f^{(k)}(0)$  sont les conditions initiales.

Il suffit alors de trouver  $f$  en appliquant la transformation inverse sur  $\mathcal{L}\{f\}$ . Cette opération se révèle parfois difficile sauf dans le cas où  $\mathcal{L}\{f\}$  est une somme de transformées de Laplace classiques figurant dans un tableau de transformées de Laplace.

## Un exemple

On cherche à résoudre :

$$f^{(2)}(t) + 4f(t) = \sin(2t)$$

avec les conditions initiales  $f(0) = 0$  et  $f'(0) = 0$

On note :  $\varphi(t) = \sin(2t)$

Le tableau de transformées de Laplace donne :

$$\mathcal{L}\{\varphi\}(s) = \frac{2}{s^2 + 4}$$

L'équation devient :

$$s^2 \mathcal{L}\{f\} - sf(0) - f^{(1)}(0) + 4\mathcal{L}\{f\} = \mathcal{L}\{\varphi\}$$

On en déduit :

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \frac{2}{(s^2 + 4)^2}$$

Il s'agit maintenant de retrouver la fonction  $f$ , c'est-à-dire d'appliquer la transformation de Laplace inverse. Dans ce cas, la fonction  $\mathcal{L}\{f\}$  est une fonction rationnelle qu'il suffit de décomposer en éléments simples. La lecture inverse du tableau de transformées de Laplace fournira alors la valeur de  $f$

$$\frac{2}{(s^2 + 4)^2} = \frac{1}{s - 2i} - \frac{1}{s + 2i} - \frac{\frac{1}{8}}{(s + 2i)^2} - \frac{\frac{1}{8}}{(s - 2i)^2} = \frac{1}{4} \frac{1}{s^2 + 4} - \frac{1}{8} \left( \frac{1}{(s + 2i)^2} + \frac{1}{(s - 2i)^2} \right)$$

Toutes ces différentes fractions figurent dans la colonne de droite du tableau de transformées de Laplace et permettent de retrouver  $f$  :

$$f(t) = \frac{1}{8} \sin(2t) - \frac{1}{8} (te^{-2it} + te^{2it}) = \frac{1}{8} \sin(2t) - \frac{t}{4} \cos(2t)$$

---

Ce document provient de «[https://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Application\\_de\\_la\\_transformée\\_de\\_Laplace\\_aux\\_équations\\_différentielles&oldid=141182088](https://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Application_de_la_transformée_de_Laplace_aux_équations_différentielles&oldid=141182088)».

La dernière modification de cette page a été faite le 3 octobre 2017 à 13:12.

Droit d'auteur : les textes sont disponibles sous licence Creative Commons attribution, partage dans les mêmes conditions d'autres conditions peuvent s'appliquer. Voyez les conditions d'utilisation pour plus de détails, ainsi que les crédits graphiques. En cas de réutilisation des textes de cette page, voyez comment citer les auteurs et mentionner la licence. Wikipedia® est une marque déposée de la Wikimedia Foundation, Inc, organisation de bienfaisance régie par le paragraphe 501(c)(3) du code fiscal des États-Unis.