M2201
Outil logiciels II

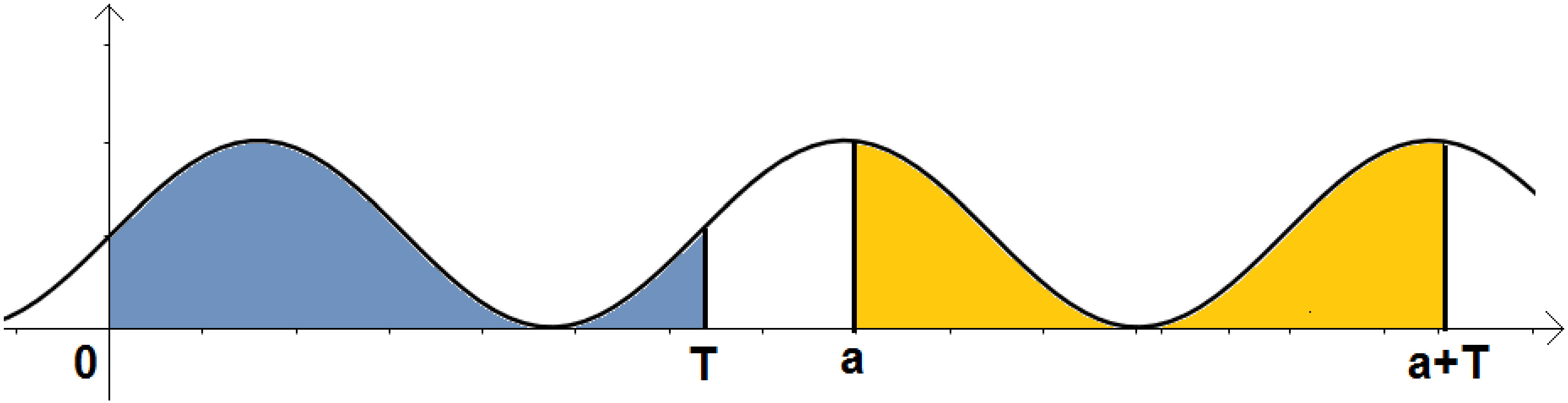
Simon Plouffe
IUT

Hiver 2019

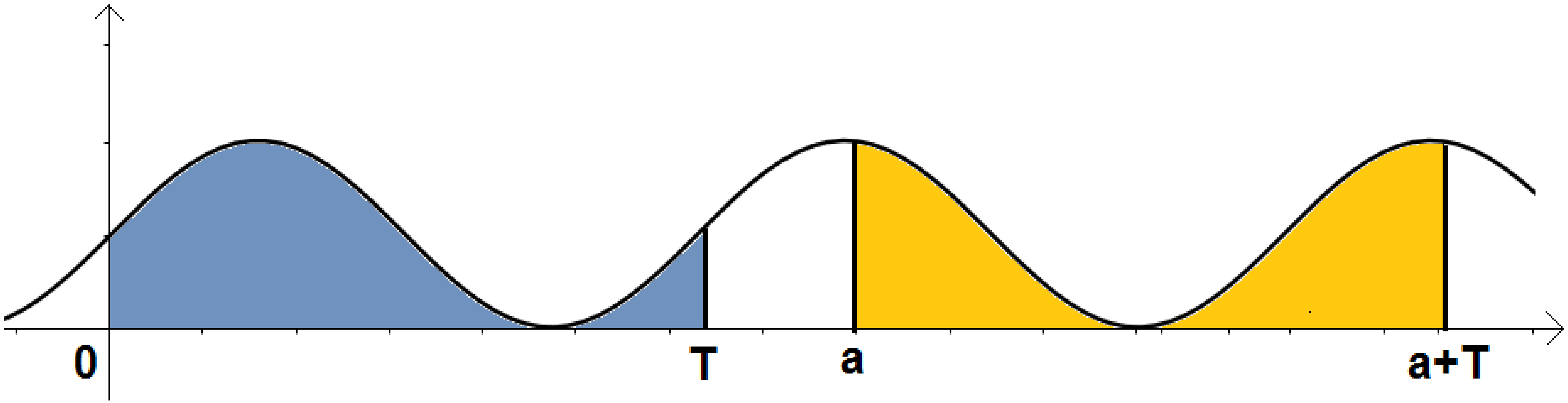
Fortement inspiré des CM de Youri Osadtchy

LES SÉRIES DE FOURIER

SIGNAL PÉRIODIQUE



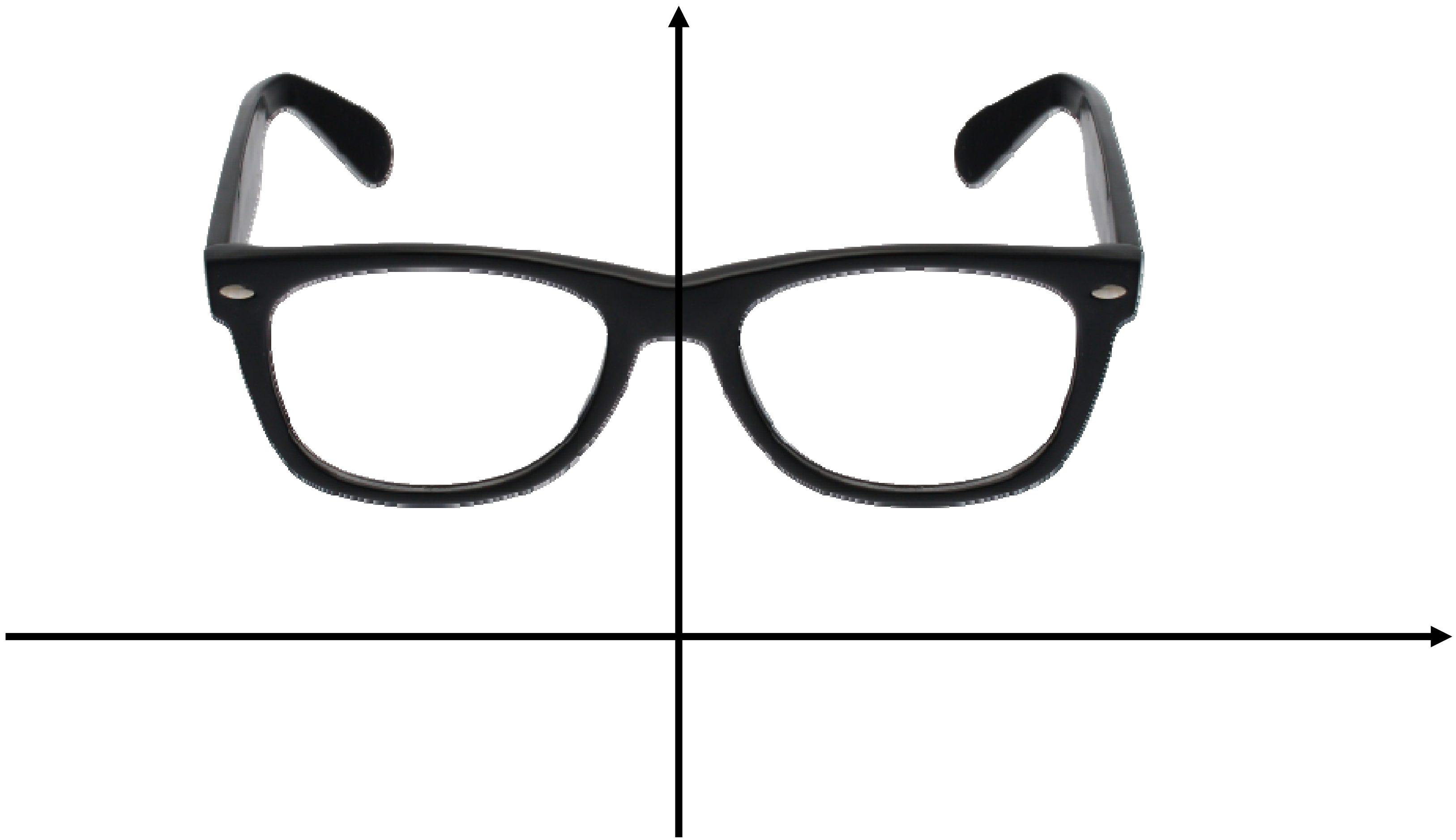
SIGNAL PÉRIODIQUE



Si s est un signal périodique de période T alors:

$$\int_0^T s(t)dt = \int_a^{a+T} s(t)dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t)dt$$

Une fonction paire



Une autre fonction paire

Paire oui mais pourquoi ?

On dit paire à cause de la parité comme
Ici avec $y = x^2$, question de signe, c'est la même chose à droite qu'à gauche.
Comme avec la fonction cosinus :

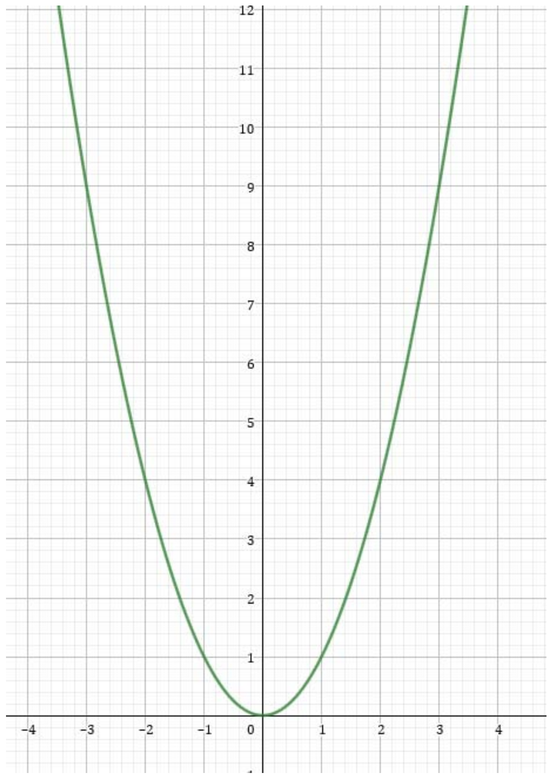
$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \cdots$$

Ça est le développement en série de cosinus, tous les exposants sont pairs.

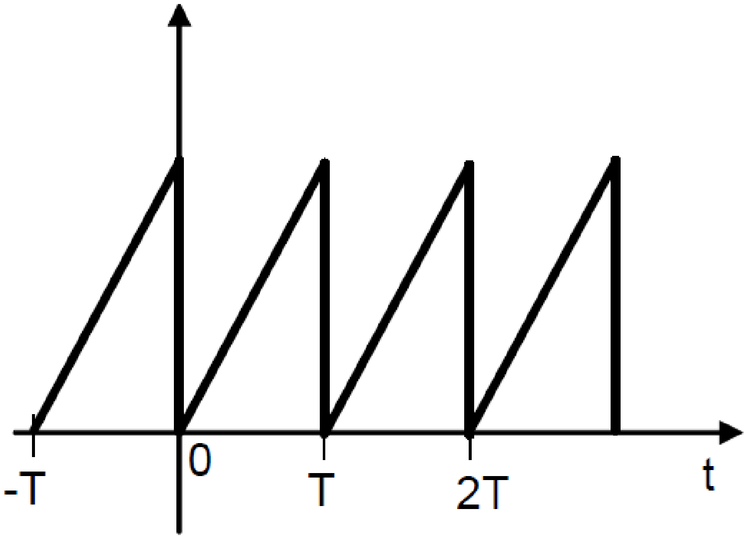
Si c'est PAIR alors : $f(-x) = f(x)$

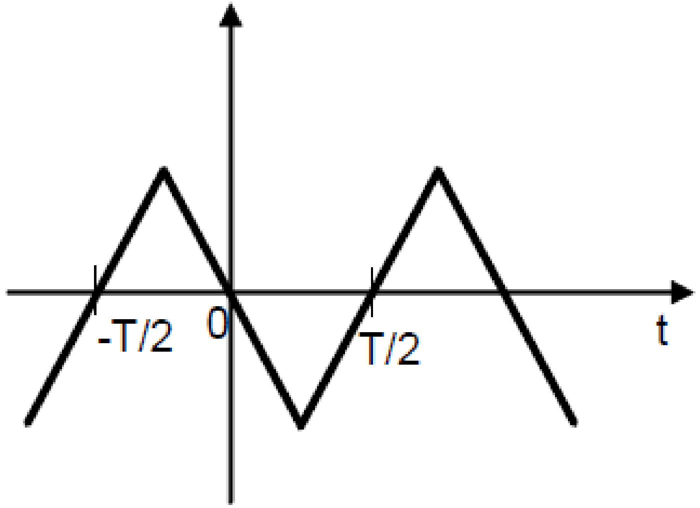
Si c'est IMPAIR alors : $f(-x) = -f(x)$.

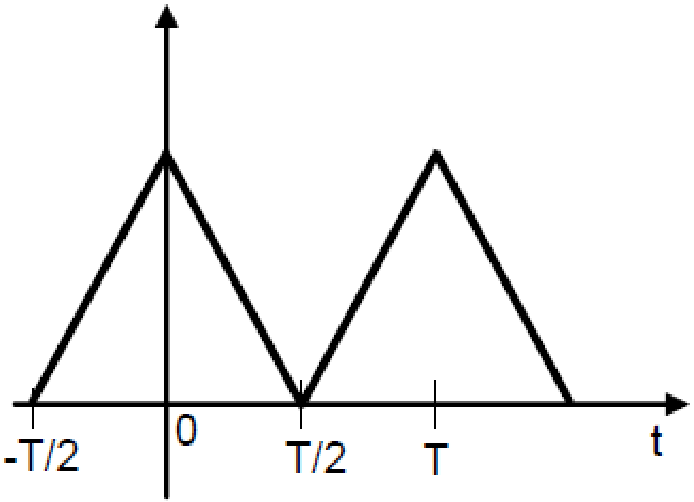
Mais attention une fonction peut être ni PAIRE, ni IMPAIRE.

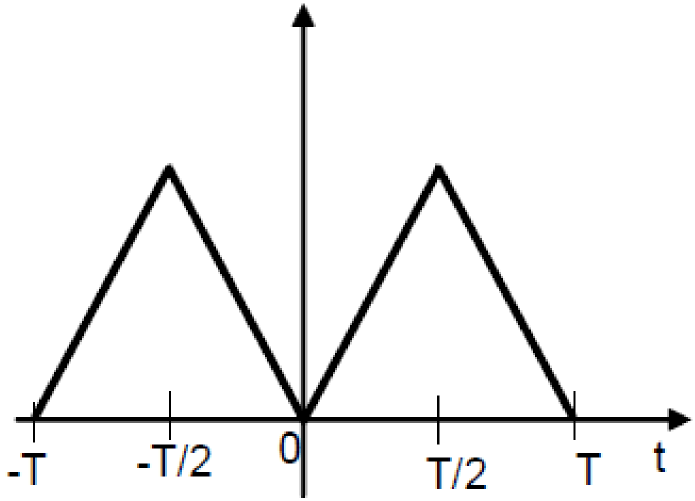


Fonction paire et impaire

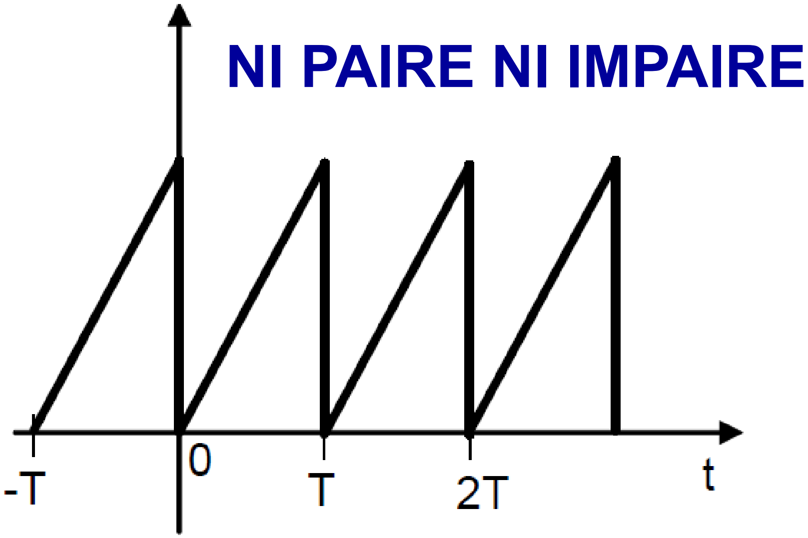


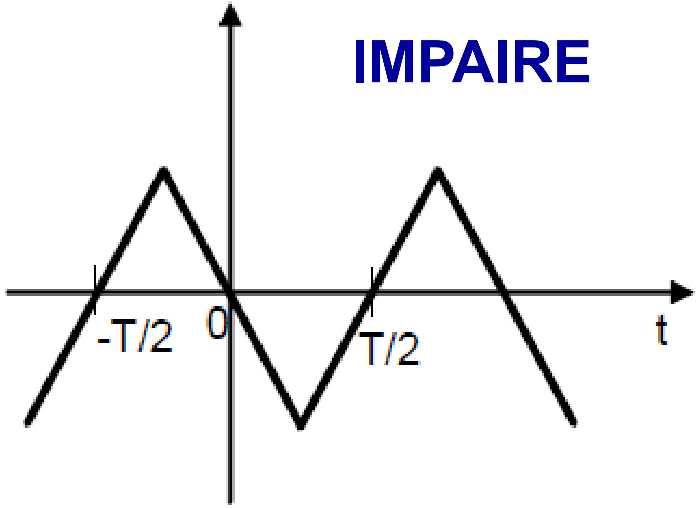


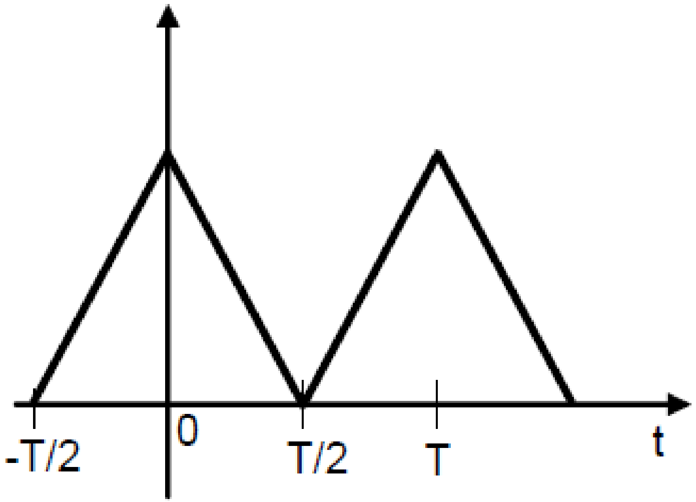


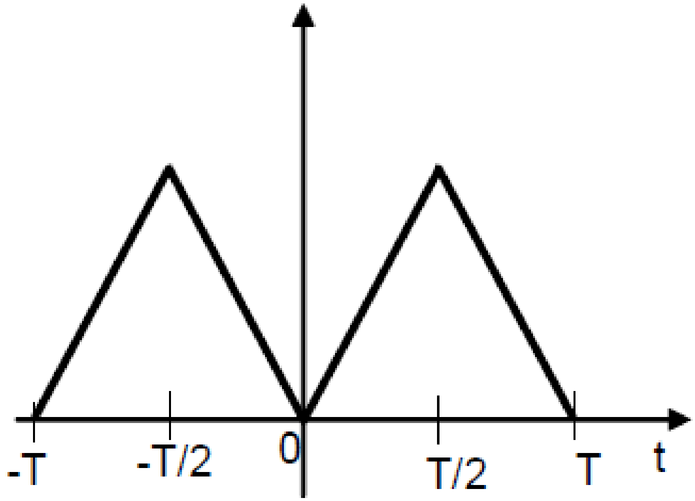


Fonction paire et impaire

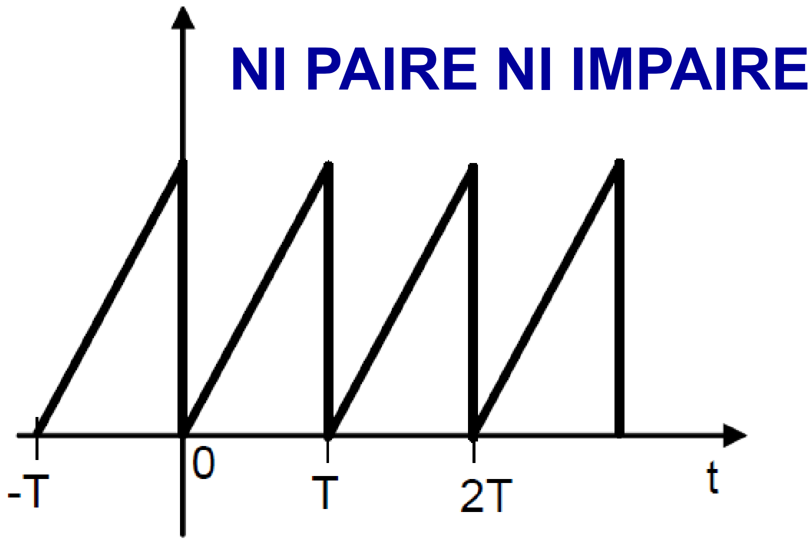


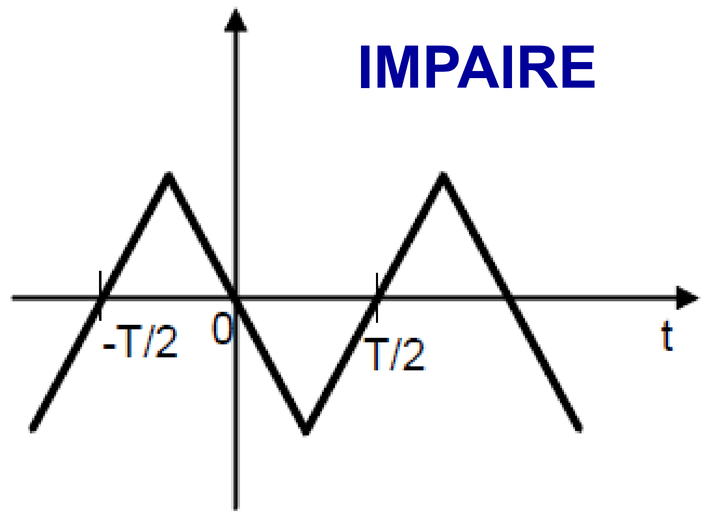


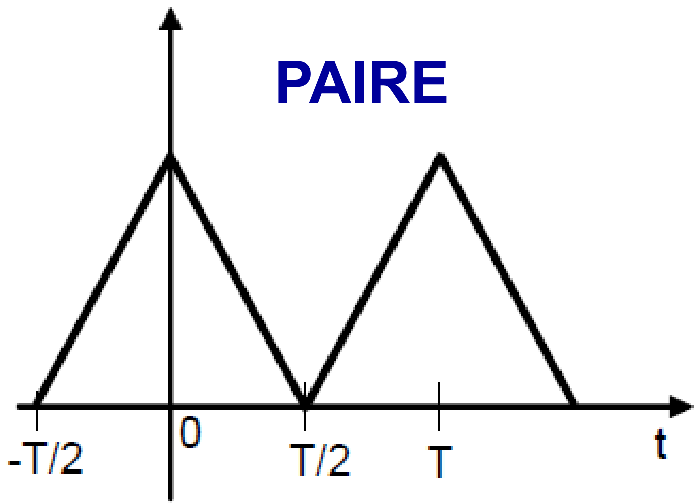


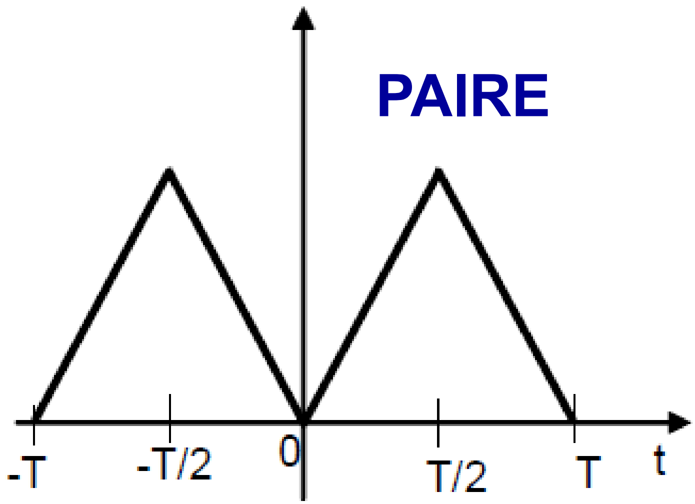


Fonction paire et impaire

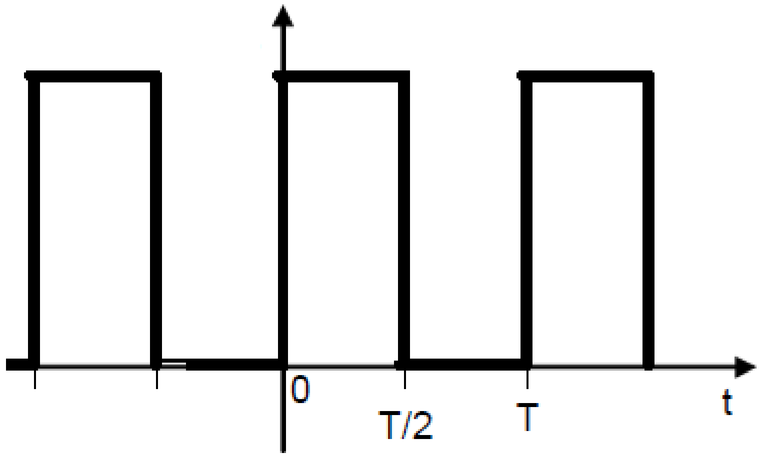


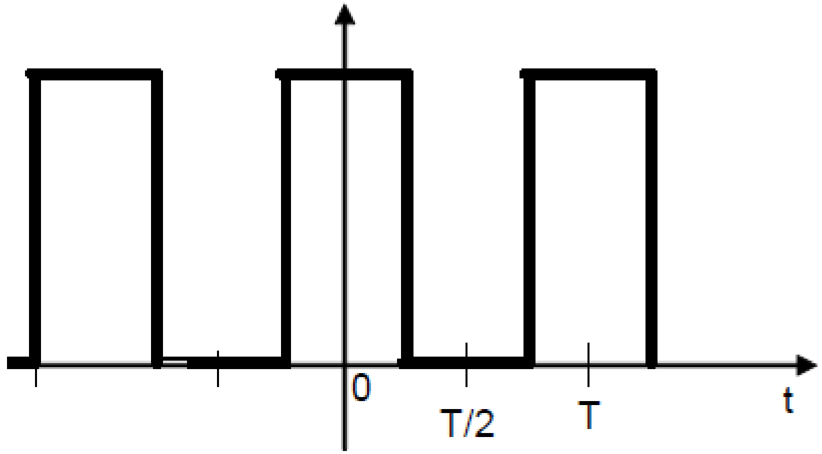


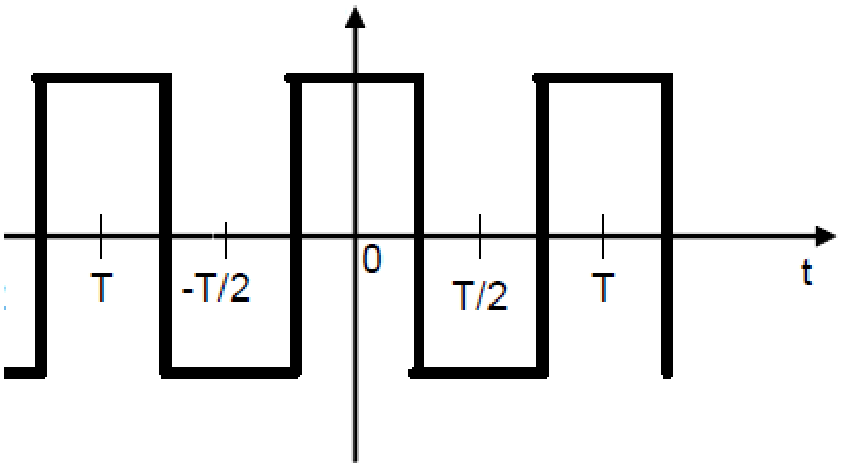


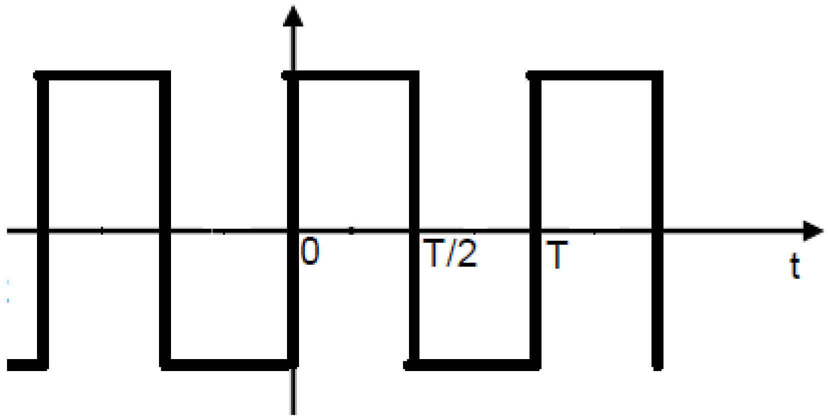


Fonction paire et impaire



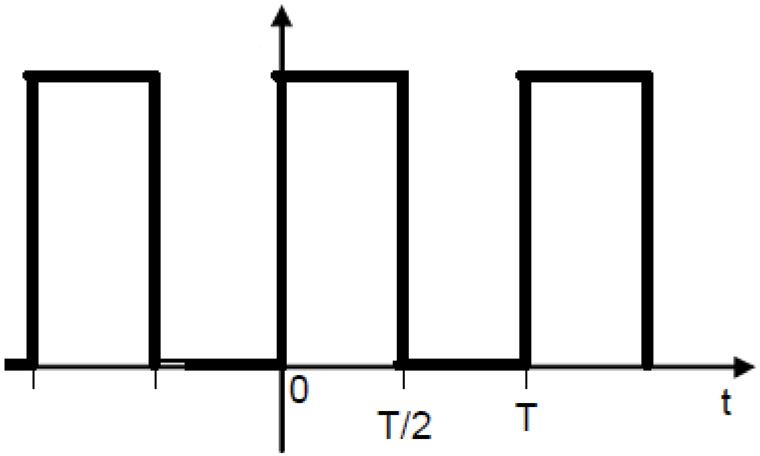




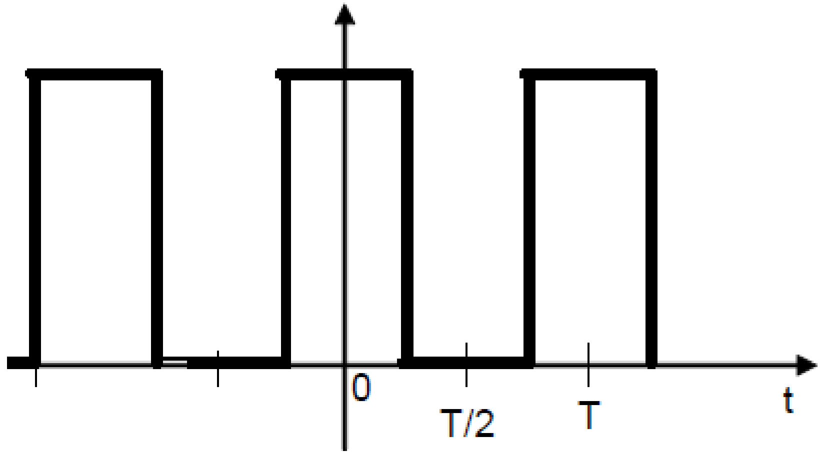


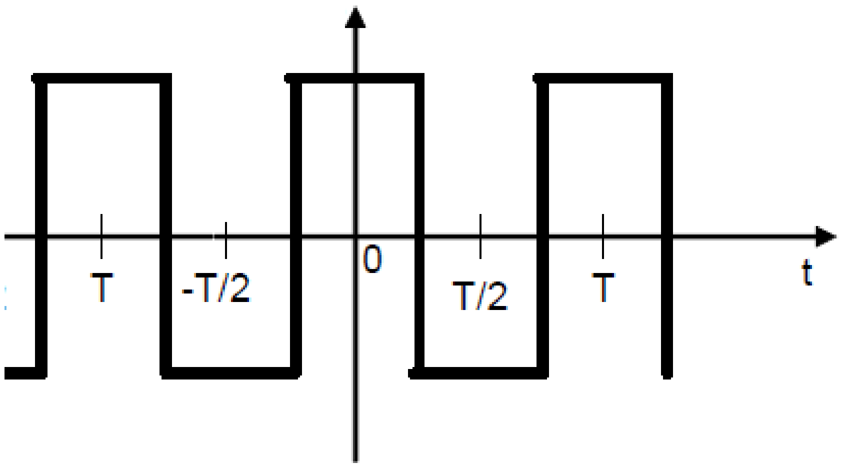
Fonction paire et impaire

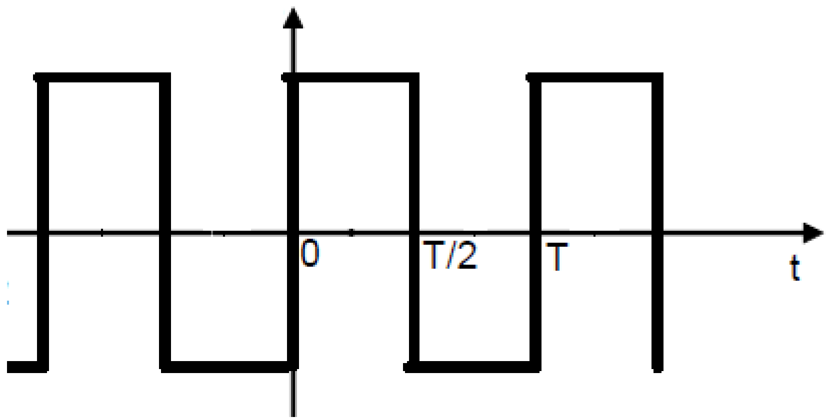
Ni paire ni



paire

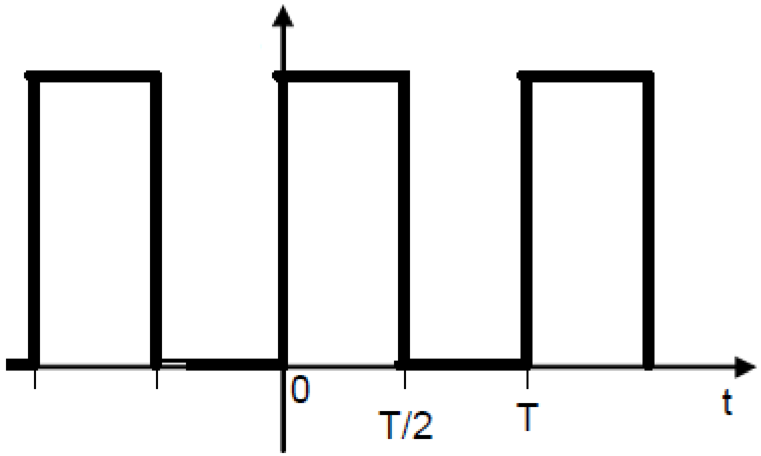




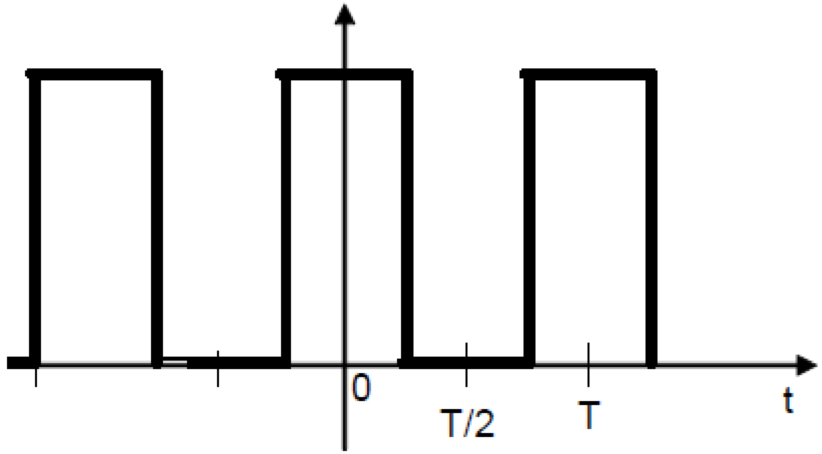


Fonction paire et impaire

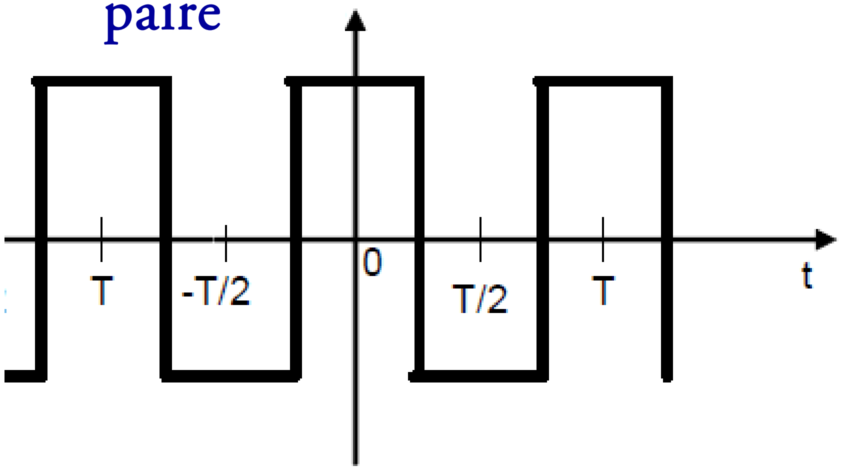
Ni paire ni impaire



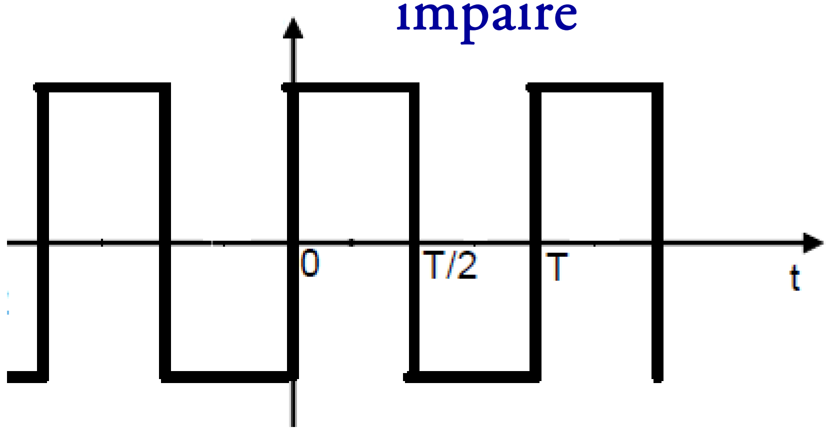
paire



paire

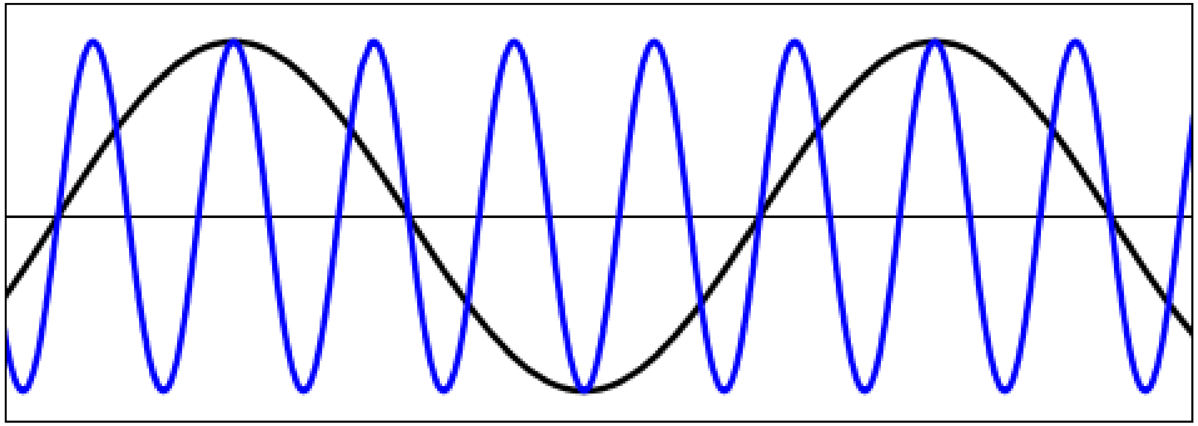


impaire



LA PULSATION

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \text{ et s'exprime en rad/s}$$



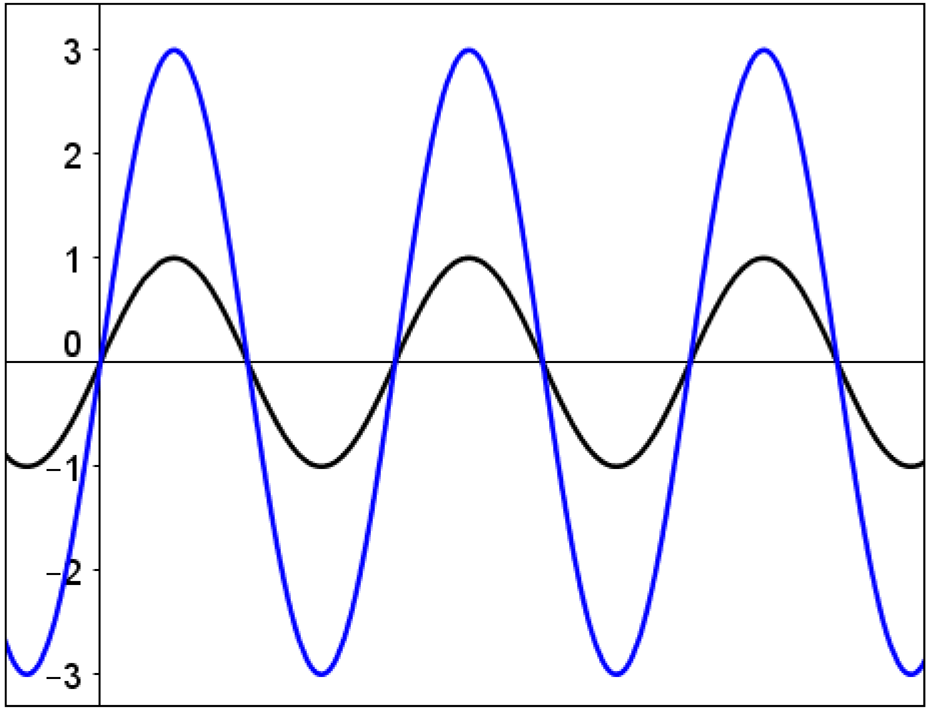
Courbe en noir:

$f(t) = \sin(t)$

Courbe en bleu:

$g(t) = \sin(5t)$

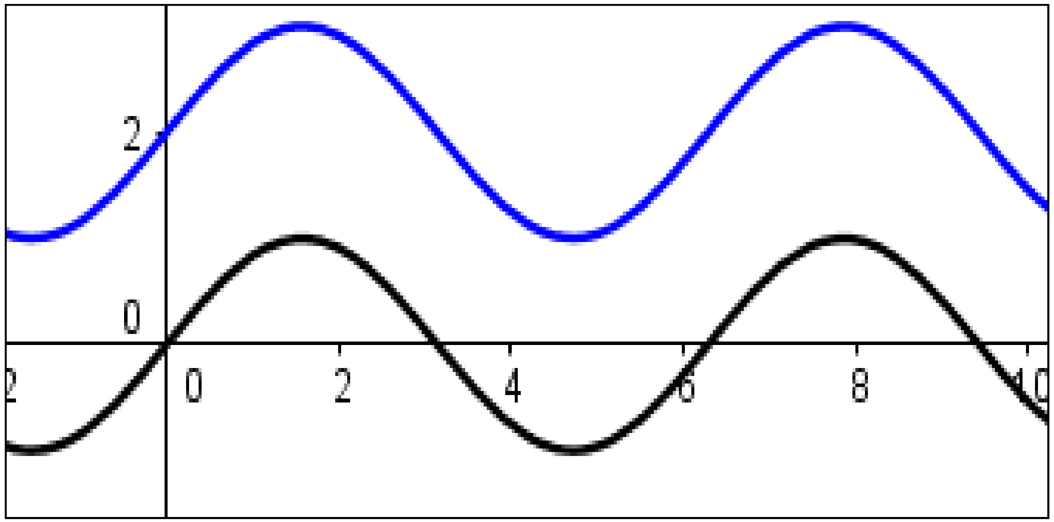
Amplitude



Courbe en noir: $f(t) = \sin(t)$

Courbe en bleu: $g(t) = 3\sin(t)$

Valeur moyenne



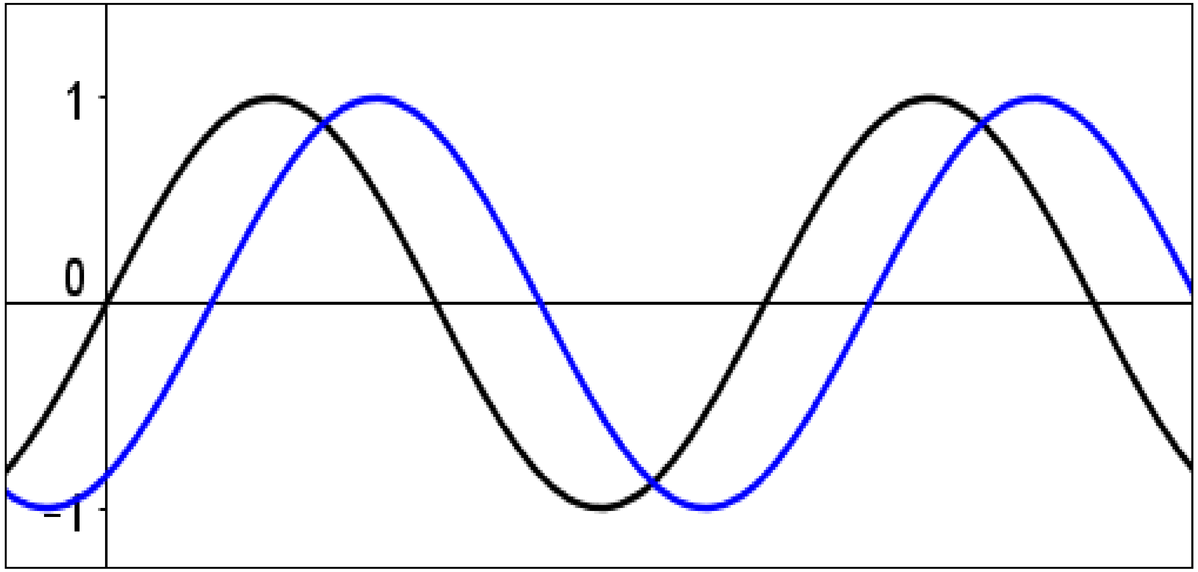
Courbe en noir:

$$f(t) = \sin(t)$$

Courbe en bleu:

$$g(t) = 2 + \sin(t)$$

Phase



Courbe en noir:

$f(t) = \sin(t)$

Courbe en bleu:

$g(t) = \sin(t-1)$

le signal sinusoïdal

$$\left.\begin{array}{l} s(t) = b + A\cos(\omega t - \varphi) \\ s(t) = b + A\sin(\omega t - \varphi) \end{array}\right\} \text{ signaux sinusoïdaux}$$

b est la valeur moyenne de $s(t)$

$|A|$ est l'amplitude de $s(t)$

ω est la pulsation de $s(t)$

φ est la phase de $s(t)$

le signal sinusoïdal visuellement

Le sinus peut être généré avec une droite de longueur 1 qui tourne autour du point 0. (déjà vu ça non ?).

L'amplitude $|A|$ correspond à la longueur de la tige.
La phase φ est l'angle de départ, 0 degrés = sinus, 90 degrés = cos.
La pulsation ou vitesse est la vitesse de rotation de la tige.
La valeur moyenne est le centre de rotation du tout.

Une série de Fourier n'est rien d'autre que des tiges d'une certaine longueur, de phase et de pulsation différentes mises bout à bout !

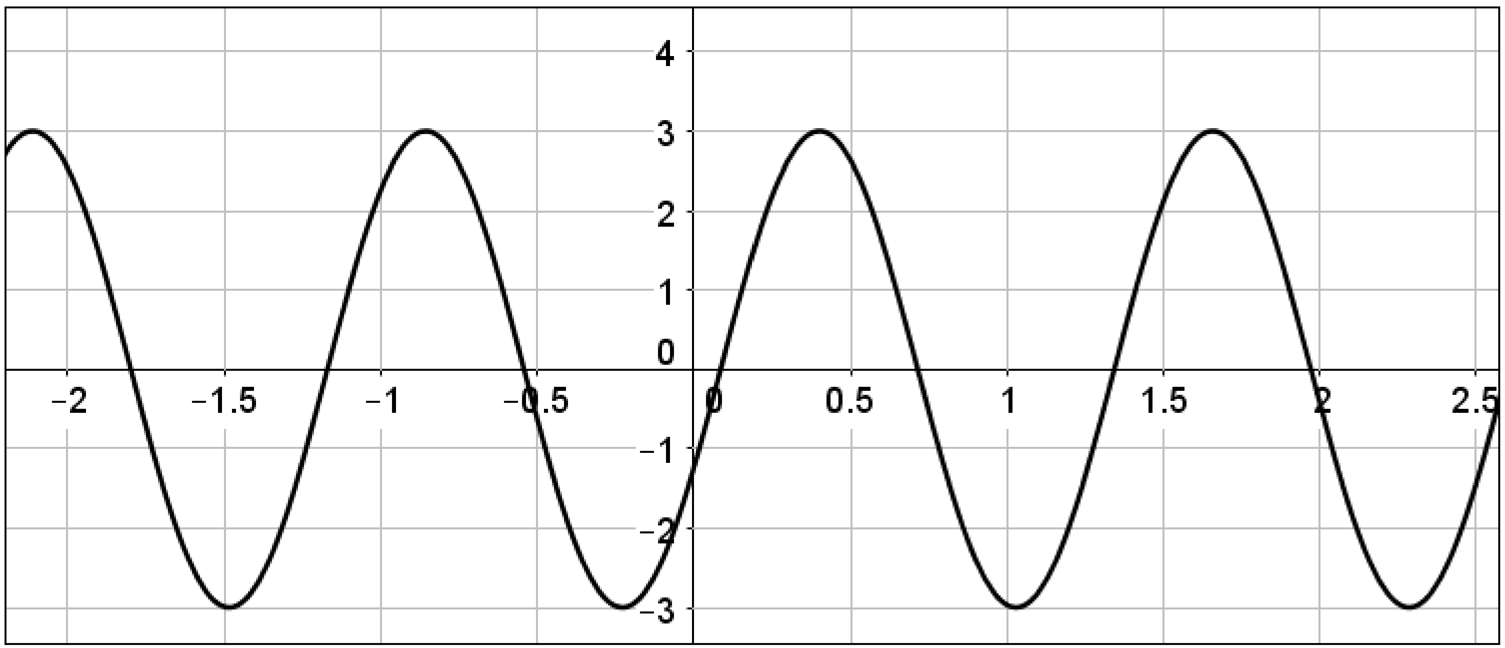
Voici une animation très intéressante :

http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Elec/Fourier/fourier1.html

On comprend enfin pourquoi le phénomène de Gibbs existe.

le signal sinusoïdal

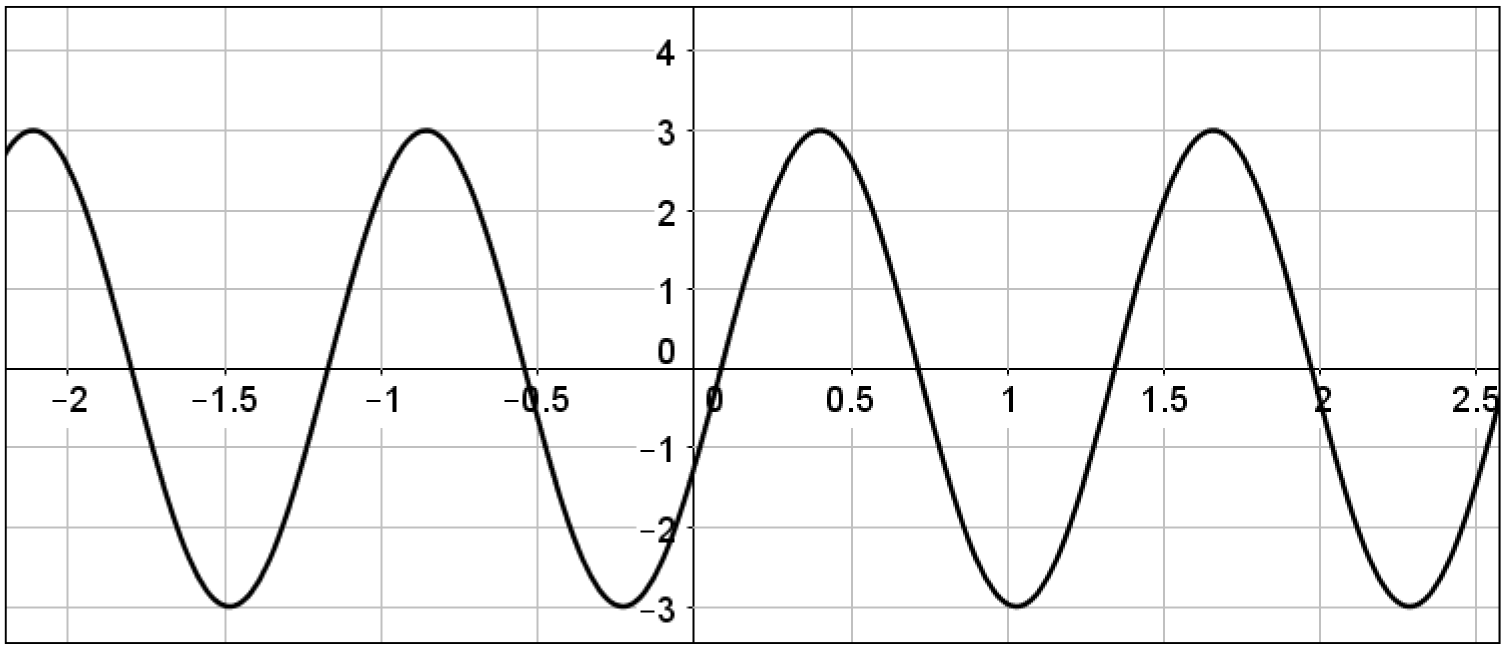
$$s(t) = A\cos(\omega t - 2)$$



le signal sinusoïdal

$$s(t) = A\cos(\omega t - 2)$$

$$s(t) = 3\cos(\omega t - 2)$$

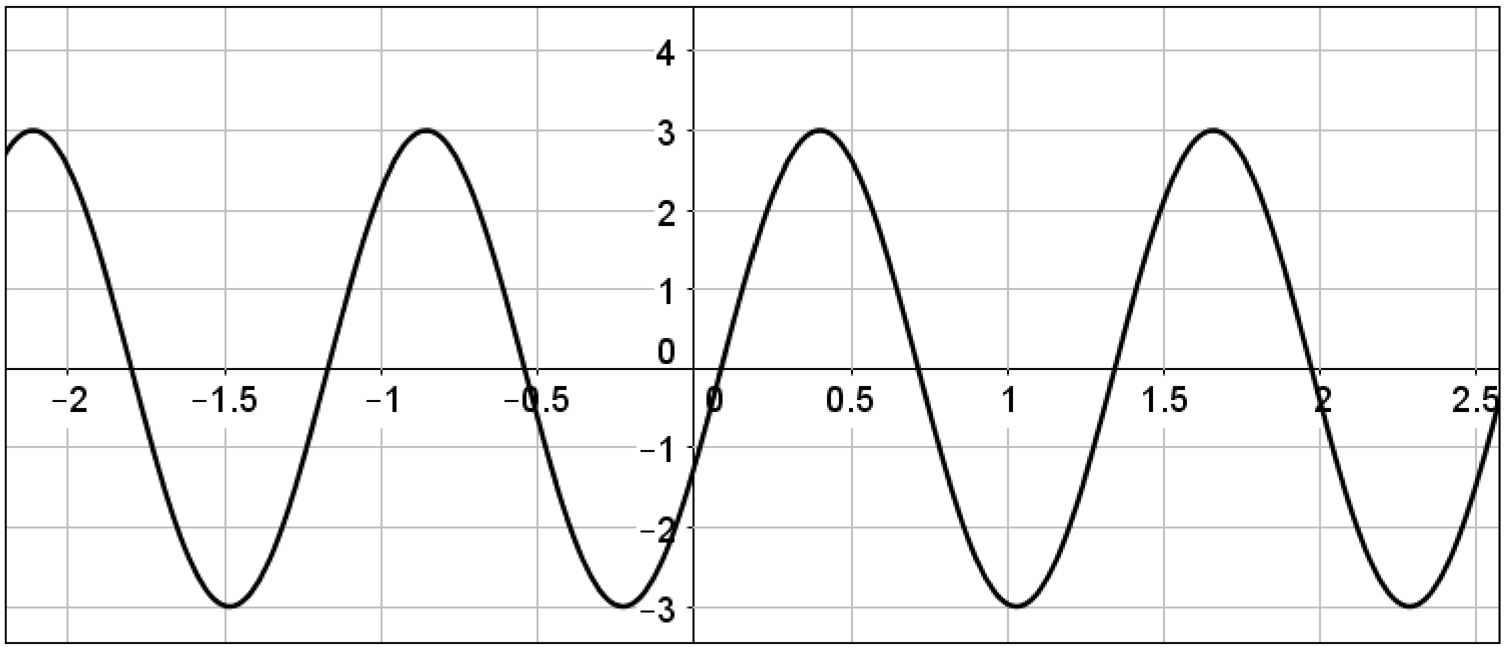


le signal sinusoïdal

$$s(t) = A\cos(\omega t - 2)$$

$$s(t) = 3\cos(\omega t - 2)$$

$$T = 1.3\ \text{s} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} \approx 4.8\ \text{rad/s}$$



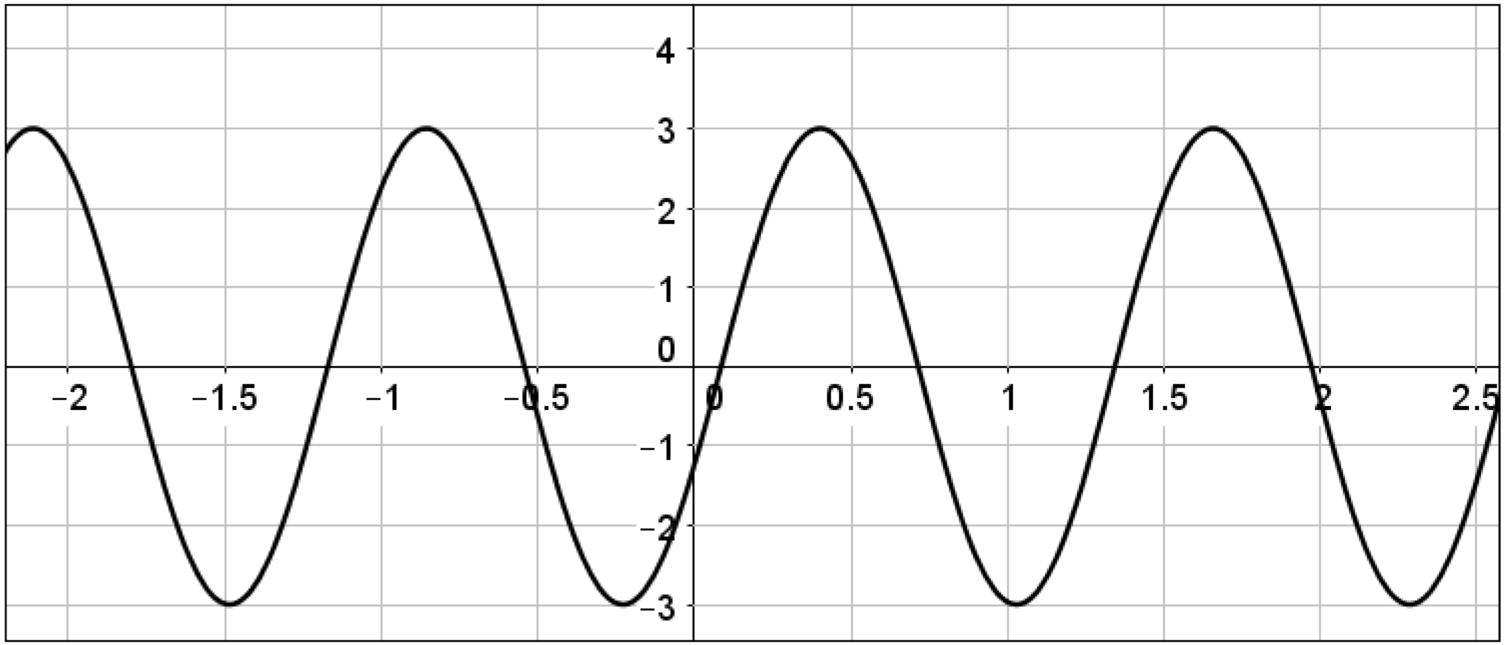
le signal sinusoïdal

$$s(t) = A\cos(\omega t - 2)$$

$$s(t) = 3\cos(\omega t - 2)$$

$$T = 1.3 \text{ s} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} \approx 4.8 \text{ rad/s}$$

$$\boxed{s(t) = 3\cos(4.8t - 2)}$$



Découverte de Joseph Fourier

Le mathématicien français Fourier a établi que
sous certaines conditions
un signal périodique quelconque
peut se décomposer en une
somme infinie de signaux sinusoïdaux

Découverte de Fourier

Le mathématicien français Fourier a établi que
sous certaines conditions
un signal périodique quelconque
peut se décomposer en une
somme infinie de signaux sinusoïdaux

Quelles *sont les conditions?*

Le signal doit être continu par morceaux et
sa dérivée doit être continue par morceaux

Découverte de Fourier

Le mathématicien français FOURIER a établi que
sous certaines conditions un signal périodique quelconque
peut se décomposer en une somme infinie de signaux sinusoïdaux

Quelles sont les conditions?

Le signal doit être continu par morceaux et
sa dérivée doit être continue par morceaux

Tous les signaux électriques usuels vérifient ces conditions

Découverte de Fourier

Soit $s(t)$ un signal périodique de pulsation ω :

$$s(t) = \sum \cos + \sum \sin$$

Découverte de Fourier

Soit $s(t)$ un signal périodique de pulsation ω :

$$s(t) = \sum \cos + \sum \sin$$

$$s(t) = a_1 \cos(\omega) + a_2 \cos(2\omega) + \ldots + b_1 \sin(\omega) + b_2 \sin(2\omega) + \ldots$$

Découverte de Fourier

Soit $s(t)$ un signal périodique de pulsation ω :

$$s(t) = \sum \cos + \sum \sin$$

$$s(t) = a_1 \cos(\omega) + a_2 \cos(2\omega) + \ldots + b_1 \sin(\omega) + b_2 \sin(2\omega) + \ldots$$

$\left(a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots\right)$ inconnues à déterminer

Découverte de Fourier

Soit $s(t)$ un signal périodique de pulsation ω :

$$s(t) = \sum \cos + \sum \sin$$

$$s(t) = a_1 \cos(\omega) + a_2 \cos(2\omega) + \ldots + b_1 \sin(\omega) + b_2 \sin(2\omega) + \ldots$$

$\left(a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots\right)$ inconnues à déterminer

$$s(t) = a_0 + a_1 \cos(\omega) + a_2 \cos(2\omega) + \ldots + b_1 \sin(\omega) + b_2 \sin(2\omega) + \ldots$$

Découverte de Fourier

Théorème:

Soit $s(t)$ un signal électrique périodique de pulsation ω alors la décomposition en série de Fourier du signal $s(t)$ s'écrit:

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

Découverte de Fourier

Théorème:

Soit $s(t)$ un signal électrique périodique de pulsation ω alors la décomposition en série de Fourier du signal $s(t)$ s'écrit:

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

$$\left.\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)dt \text{ (valeur moyenne de } s) \\
a_n &= \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)\cos(n\omega t)dt \\
b_n &= \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)\sin(n\omega t)dt
\end{aligned}\right\} \underline{\text{coefficients de fourier}}$$

Fondamental

La décomposition en série de Fourier du signal $s(t)$ s'écrit:

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

$$s(t) = a_0 + \underbrace{a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t)}_{\text{fondamental}} + a_2 \cos(2\omega t) + b_2 \sin(2\omega t) + \ldots$$

Fondamental

La décomposition en série de Fourier du signal $s(t)$ s'écrit:

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

$$s(t) = a_0 + \underbrace{a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t)}_{\text{fondamental}} + a_2 \cos(2\omega t) + b_2 \sin(2\omega t) + \ldots$$

<u>Définition:</u>

Le fondamental est le signal $u_1(t) = a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t)$

Il a la même pulsation que le signal $s(t)$

Le fondamental n'est <u>jamais nul</u> !

Harmoniques

La décomposition en série de Fourier du signal $s(t)$ s'écrit:

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

$$s(t) = a_0 + \underbrace{a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t)}_{\text{fondamental}} + \underbrace{a_2 \cos(2\omega t) + b_2 \sin(2\omega t)}_{\text{harmonique de rang 2}} + \ldots$$

Harmoniques

La décomposition en série de Fourier du signal $s(t)$ s'écrit:

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

$$s(t) = a_0 + \underbrace{a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t)}_{\text{fondamental}} + \underbrace{a_2 \cos(2\omega t) + b_2 \sin(2\omega t)}_{\text{harmonique de rang 2}} + \ldots$$

<u>Définition:</u>

L'harmonique de rang n est le signal $u_n(t) = a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$

La pulsation de l'harmonique de rang n est $n\omega$

Harmoniques

La décomposition en série de Fourier du signal $s(t)$ s'écrit:

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

$$s(t) = a_0 + \underbrace{a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t)}_{\text{fondamental}} + \underbrace{a_2 \cos(2\omega t) + b_2 \sin(2\omega t)}_{\text{harmonique de rang 2}} + \ldots$$

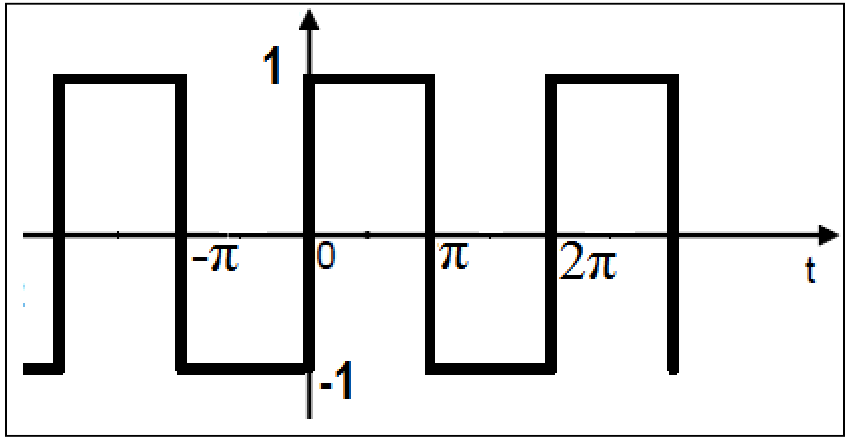
<u>Définition:</u>

L'harmonique de rang n est le signal $u_n(t) = a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$

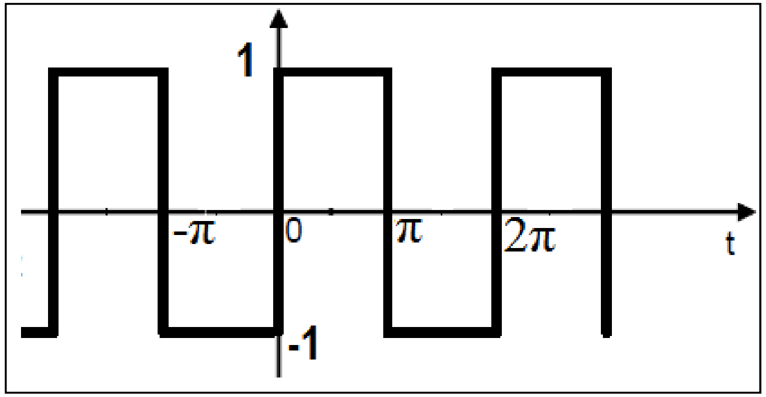
La pulsation de l'harmonique de rang n est $n\omega$

Il peut s'écrire sous la forme $u_n(t) = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \cos\left(n\omega t - \arctan\left(\frac{b_n}{a_n} \right) \right)$

Exemple

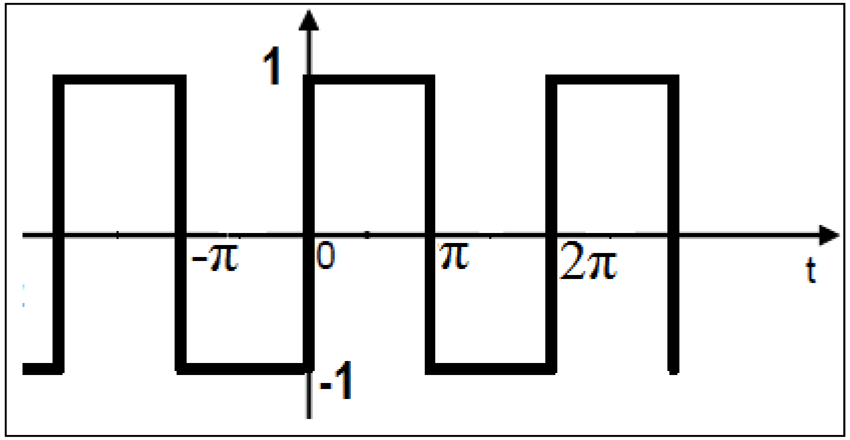


Exemple



$$T = 2\pi \text{ s} \Rightarrow \omega = 1 \text{ rad/s}$$

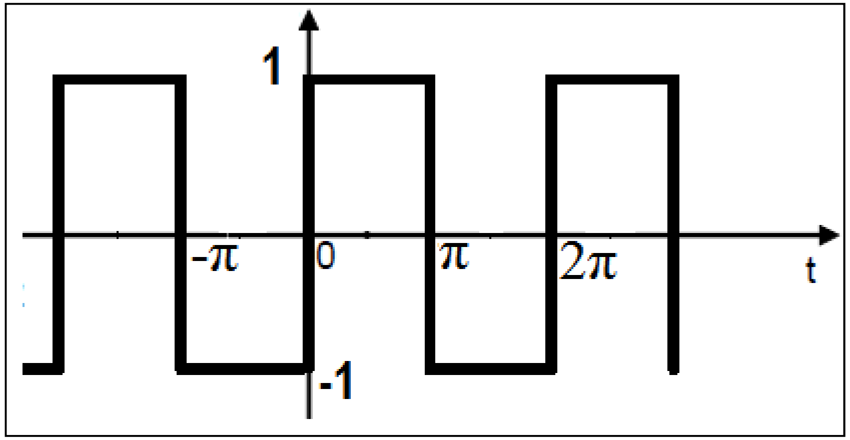
Exemple



$$T = 2\pi \text{ s} \Rightarrow \omega = 1 \text{ rad/s}$$

$$a_0 = \text{valeur moyenne} = 0$$

Exemple



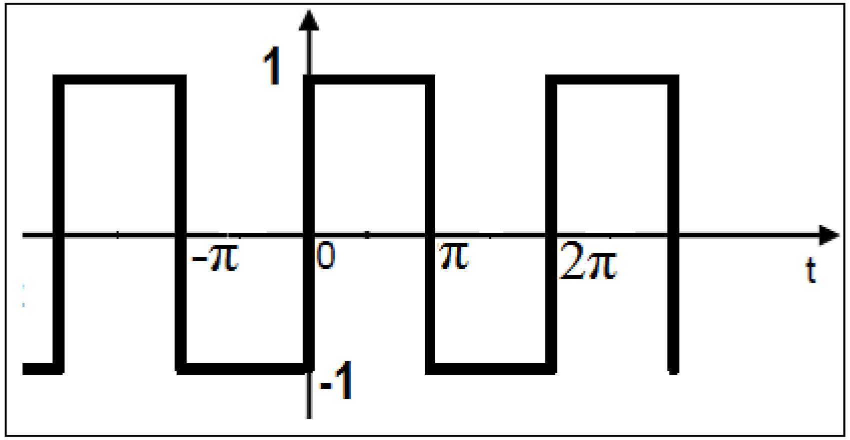
$$T = 2\pi \text{ s} \Rightarrow \omega = 1 \text{ rad/s}$$

$$a_0 = \text{valeur moyenne} = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)\cos(n\omega t)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} s(t)\cos(nt)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(nt)dt + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} -\cos(nt)dt$$

Ici une animation de cette série de Fourier:
https://sara.ng/apps/square-wave/

Exemple



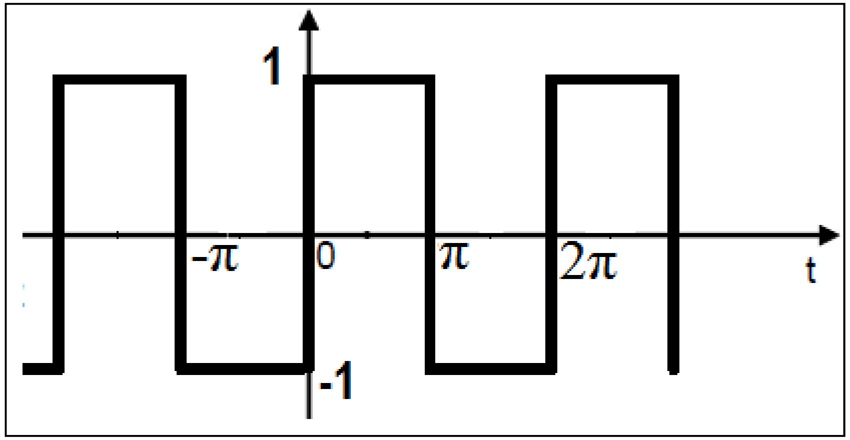
$$T = 2\pi \text{ s} \Rightarrow \omega = 1 \text{ rad/s}$$

$$a_0 = \text{valeur moyenne} = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)\cos(n\omega t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} s(t)\cos(nt)dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos(nt)dt + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} -\cos(nt)dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)\sin(n\omega t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} s(t)\sin(nt)dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin(nt)dt + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} -\sin(nt)dt$$

Exemple



$T = 2\pi \text{ s} \Rightarrow \omega = 1 \text{ rad/s}$

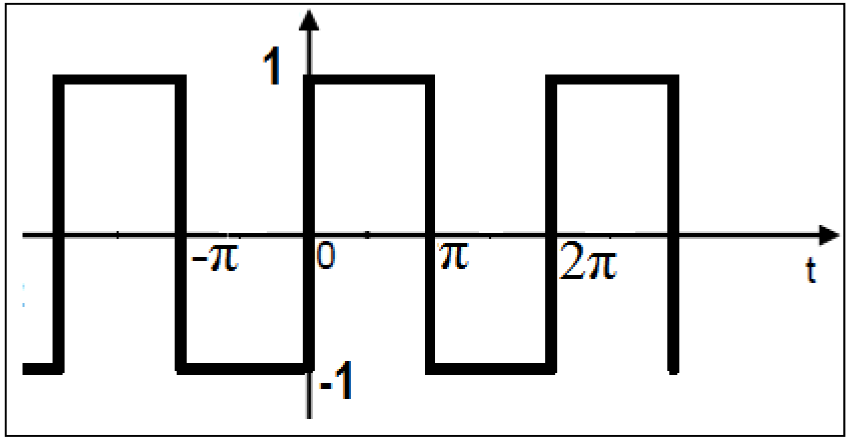
$a_0 = \text{valeur moyenne} = 0$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)\cos(n\omega t)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} s(t)\cos(nt)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(nt)dt + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} -\cos(nt)dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)\sin(n\omega t)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} s(t)\sin(nt)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(nt)dt + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} -\sin(nt)dt$$

Le calcul des intégrales donne $a_n = 0$ et $b_n = \dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{1-(-1)^n}{n}\right)$

Exemple



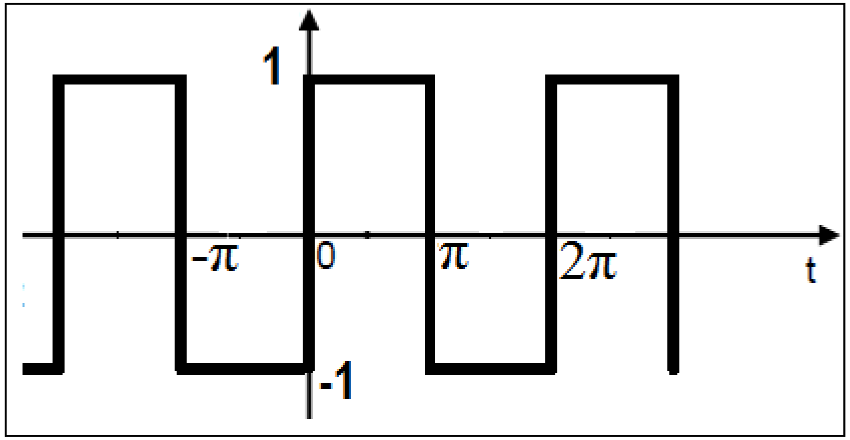
$T = 2\pi \text{ s} \Rightarrow \omega = 1 \text{ rad/s}$

$a_0 = \text{valeur moyenne} = 0$

La décomposition en série de Fourier du signal $s(t)$ s'écrit:

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

Exemple



$$T = 2\pi \text{ s} \Rightarrow \omega = 1 \text{ rad/s}$$

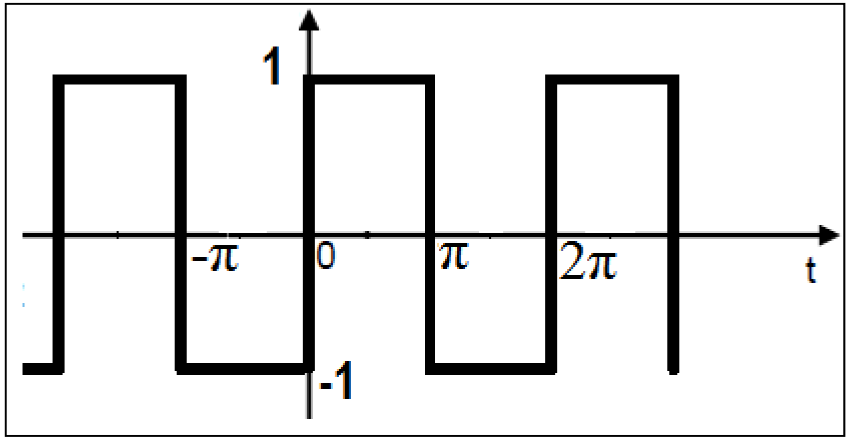
$$a_0 = \text{valeur moyenne} = 0$$

La décomposition en série de Fourier du signal $s(t)$ s'écrit:

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

$$\Leftrightarrow s(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi}\left(\frac{1-(-1)^n}{n}\right)\sin(nt)$$

Exemple



$$T = 2\pi \text{ s} \Rightarrow \omega = 1 \text{ rad/s}$$

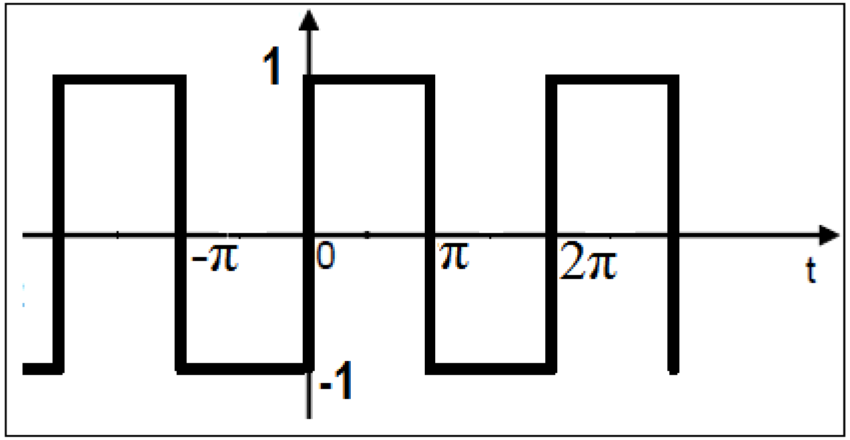
$$a_0 = \text{valeur moyenne} = 0$$

La décomposition en série de Fourier du signal $s(t)$ s'écrit:

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

$$\Leftrightarrow s(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi} \left(\frac{1-(-1)^n}{n} \right) \sin(nt) \approx \underbrace{1.27 \sin(t)} + \underbrace{0.42 \sin(3t)} + \underbrace{0.25 \sin(5t)} + \ldots +$$

Exemple



$$T = 2\pi \text{ s} \Rightarrow \omega = 1 \text{ rad/s}$$

$$a_0 = \text{valeur moyenne} = 0$$

La décomposition en série de Fourier du signal $s(t)$ s'écrit:

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

$$\Leftrightarrow s(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi}\left(\frac{1-(-1)^n}{n}\right)\sin(nt) \approx \underbrace{1.27\sin(t)}_{\text{fondamental}} + \underbrace{0.42\sin(3t)}_{\substack{\text{harmonique}\\ \text{rang 3}}} + \underbrace{0.25\sin(5t)}_{\substack{\text{harmonique}\\ \text{rang 5}}} + \ldots +$$

Amplitudes des harmoniques

La décomposition en série de Fourier du signal $s(t)$ s'écrit:

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

ou

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \cos\left(n\omega t - \varphi_n\right) \text{ avec } \varphi_n = \arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

Amplitudes des harmoniques

Définition:

L'amplitude A_n de l'harmonique de rang n est le réel positif défini par:

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

La décomposition en série de Fourier du signal $s(t)$ s'écrit:

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

ou

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \cos\left(n\omega t - \varphi_n\right) \text{ avec } \varphi_n = \arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

Parité

Propriété:

Si le signal est pair alors $b_n = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

Si le signal est impair alors $a_n = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

Parité

<u>Propriété:</u>

Si le signal est pair alors $b_n = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

Si le signal est impair alors $a_n = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

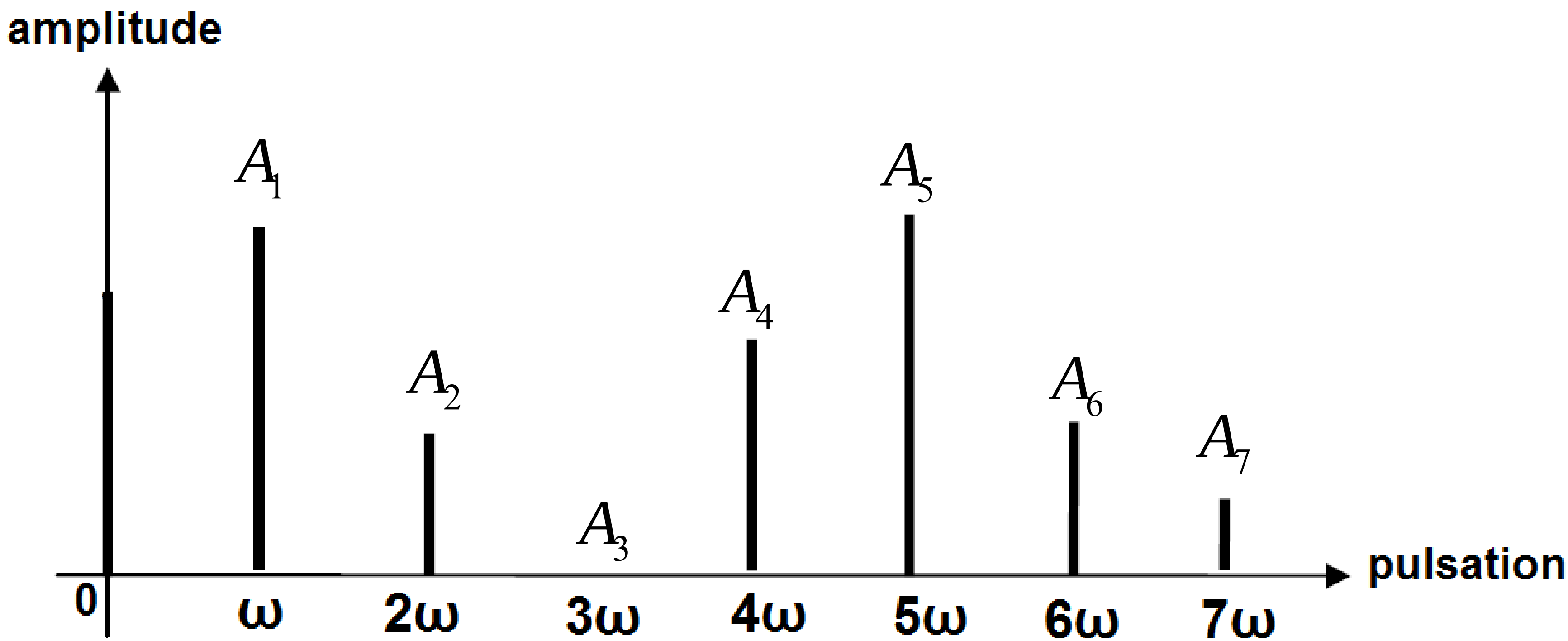
AVANT de calculer les coefficients a_n et b_n,

TOUJOURS étudier la parité du signal !!!

Spectre d'amplitude

<u>Définition:</u>

Le spectre d'amplitude est le diagramme en bâtons de l'amplitude des harmoniques en fonction de ω ou f

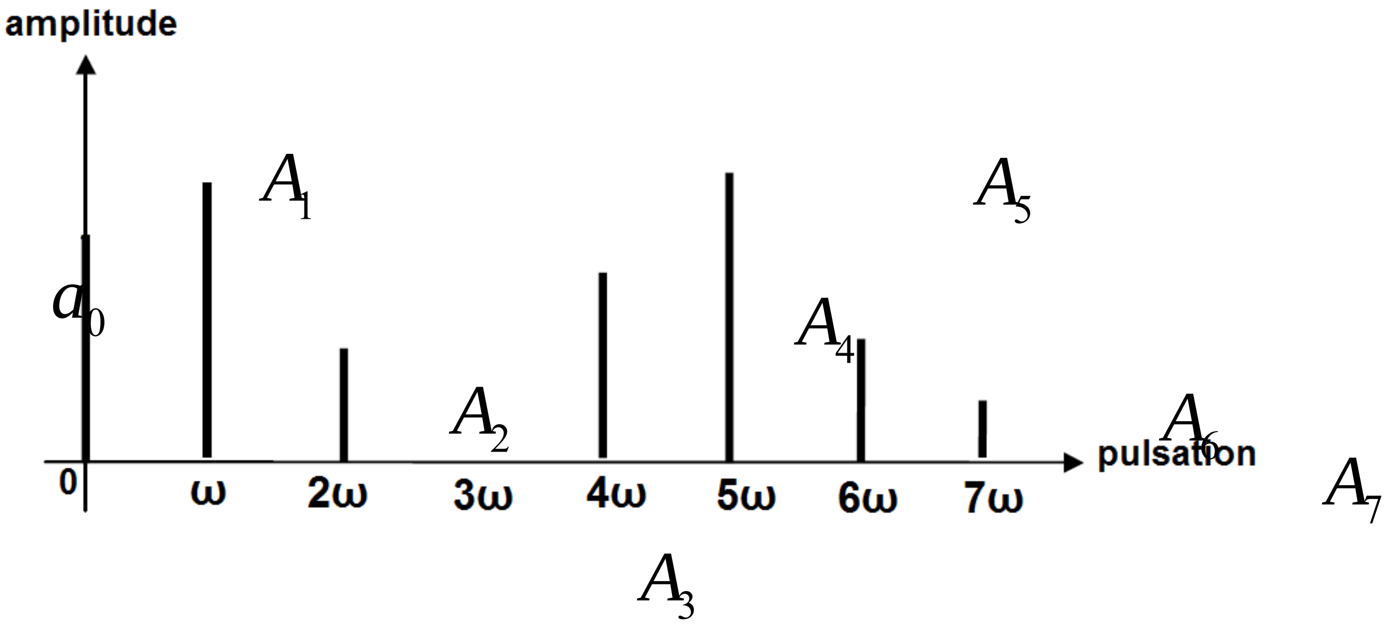


Spectre d'amplitude

<u>Définition:</u>

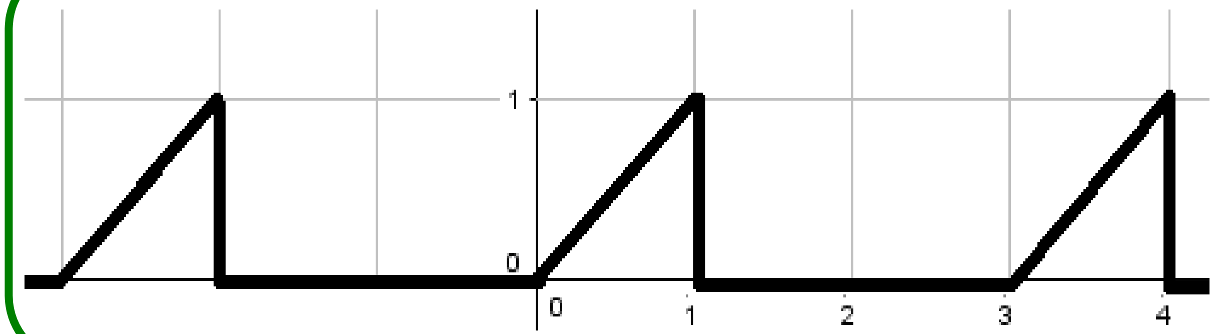
Le spectre d'amplitude est le diagramme en bâtons

de l'amplitude des harmoniques en fonction de ω ou f

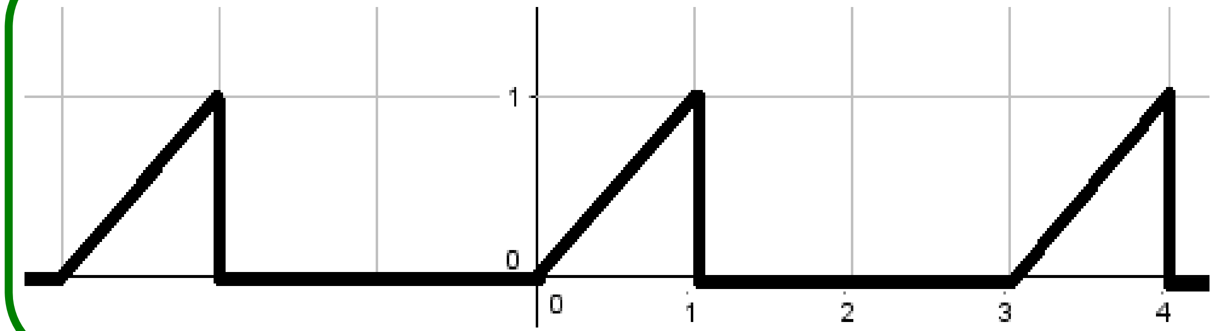


http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Ondes/son/analyseur.php

Spectre d'amplitude

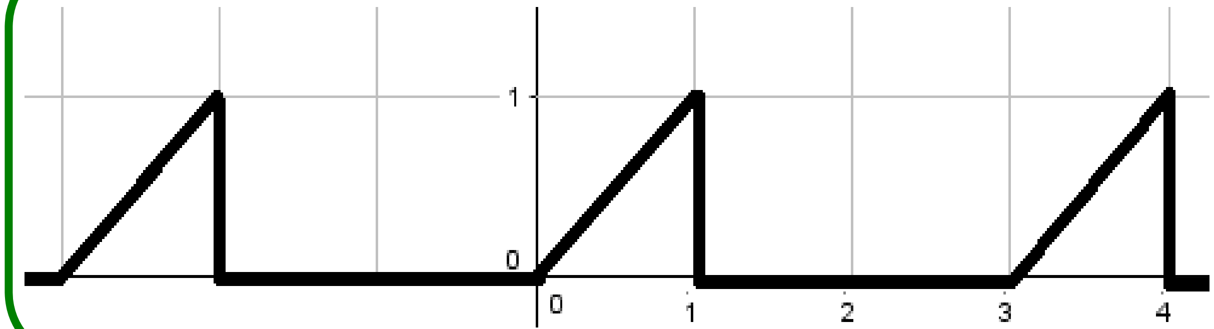


Spectre d'amplitude



$T = 3\text{ s}$

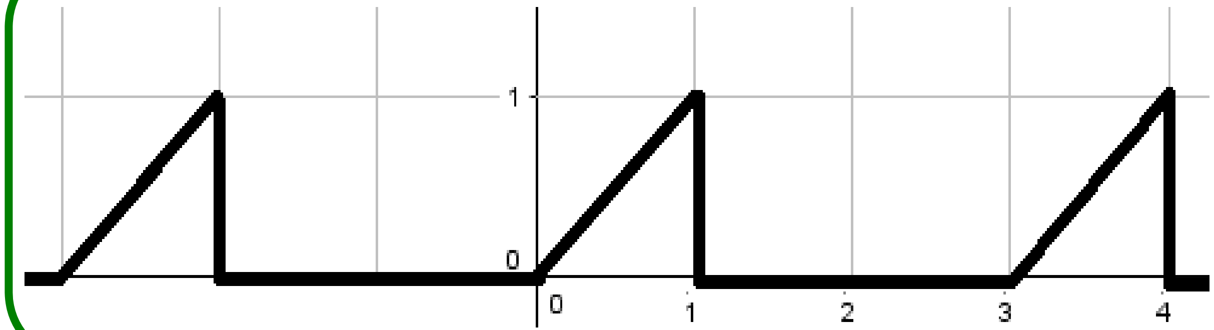
Spectre d'amplitude



$$T = 3 \text{ s}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{3} \text{ rad/s} \approx 2 \text{ rad/s}$$

Spectre d'amplitude

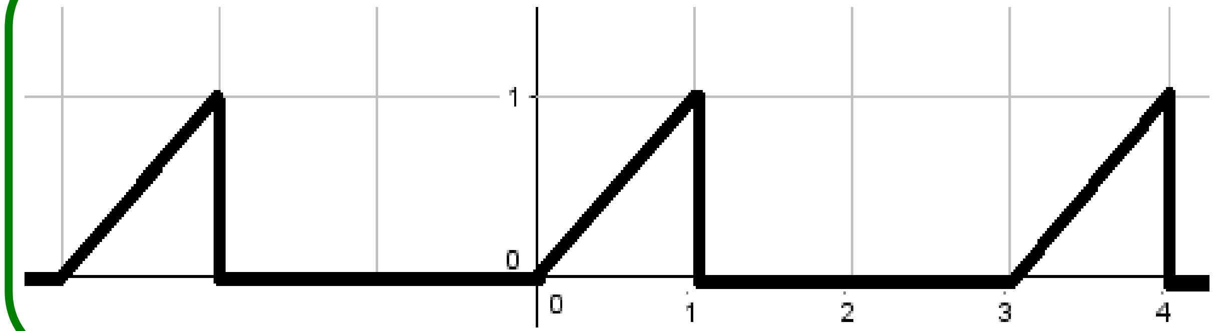


$$T = 3 \text{ s}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{3} \text{ rad/s} \approx 2 \text{ rad/s}$$

$$a_0 = \frac{0.5}{3} = \frac{1}{6} \approx 0.17$$

Spectre d'amplitude



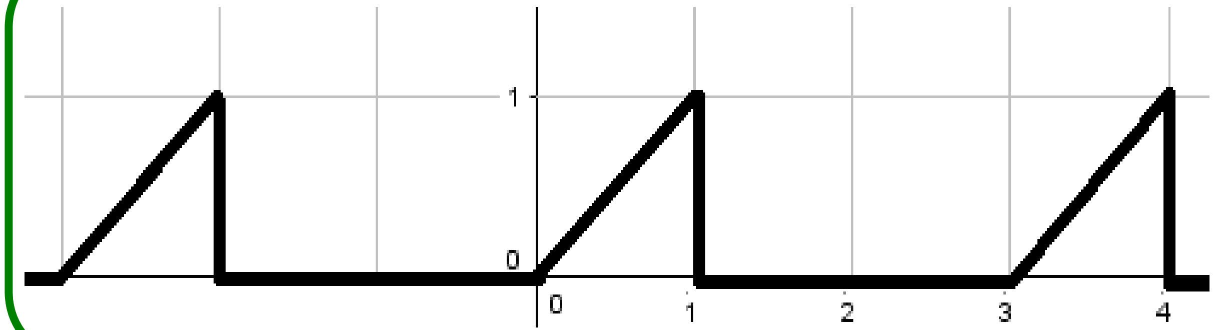
$$T = 3 \text{ s}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{3} \text{ rad/s} \approx 2 \text{ rad/s}$$

$$a_0 = \frac{0.5}{3} = \frac{1}{6} \approx 0.17$$

n	a_n	b_n	A_n
1			
2			
3			
4			
5			

Spectre d'amplitude



$T = 3 \text{ s}$

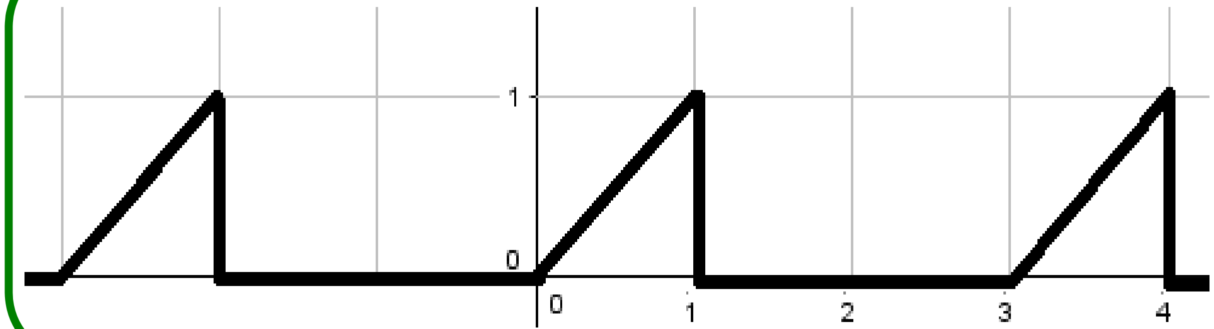
$\omega = \frac{2\pi}{3} \text{ rad/s} \approx 2 \text{ rad/s}$

$a_0 = \frac{0.5}{3} = \frac{1}{6} \approx 0.17$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)\cos(n\omega t)dt = \frac{2}{3}\int_0^1 t\cos\left(n\frac{2\pi}{3}t\right)dt$$

n	a_n	b_n	A_n
1			
2			
3			
4			
5			

Spectre d'amplitude



$$T = 3 \text{ s}$$

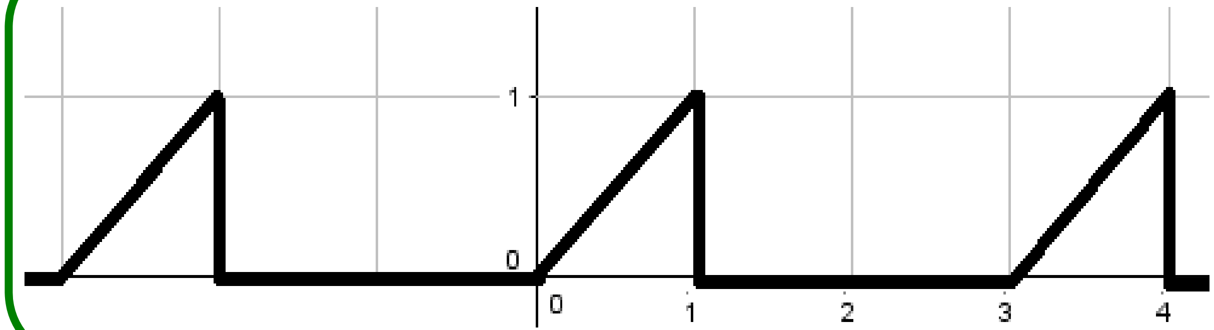
$$\omega = \frac{2\pi}{3} \text{ rad/s} \approx 2 \text{ rad/s}$$

$$a_0 = \frac{0.5}{3} = \frac{1}{6} \approx 0.17$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)\cos(n\omega t)dt = \frac{2}{3}\int_0^1 t\cos\left(n\frac{2\pi}{3}t\right)dt$$

n	a_n	b_n	A_n
1	0.048		
2	-0.064		
3	0.025		
4	-0.006		
5	0.003		

Spectre d'amplitude



$$T = 3 \text{ s}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{3} \text{ rad/s} \approx 2 \text{ rad/s}$$

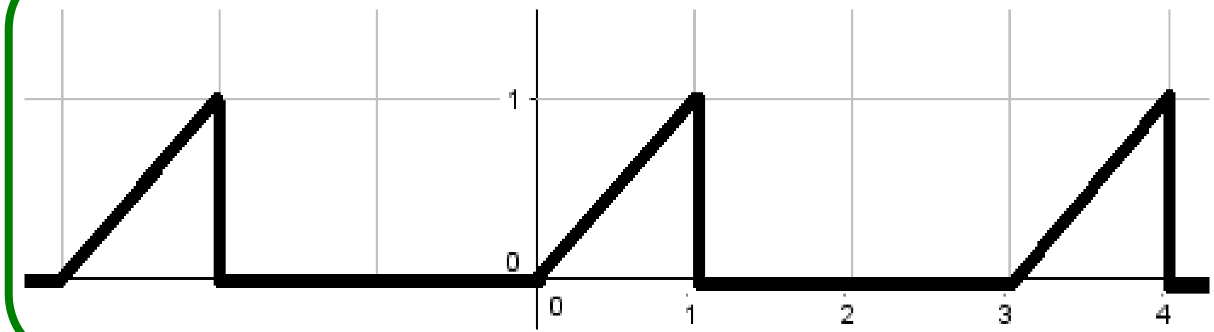
$$a_0 = \frac{0.5}{3} = \frac{1}{6} \approx 0.17$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)\cos(n\omega t)dt = \frac{2}{3}\int_0^1 t\cos\left(n\frac{2\pi}{3}t\right)dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)\sin(n\omega t)dt = \frac{2}{3}\int_0^1 t\sin\left(n\frac{2\pi}{3}t\right)dt$$

n	a_n	b_n	A_n
1	0.048		
2	-0.064		
3	0.025		
4	-0.006		
5	0.003		

Spectre d'amplitude



$T = 3$ s

$$\omega = \frac{2\pi}{3} \text{ rad/s} \approx 2 \text{ rad/s}$$

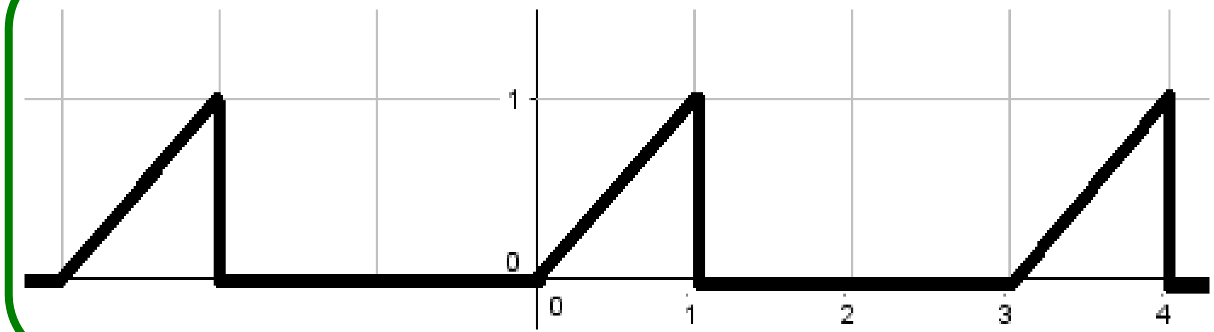
$$a_0 = \frac{0.5}{3} = \frac{1}{6} \approx 0.17$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)\cos(n\omega t)dt = \frac{2}{3}\int_0^1 t\cos\left(n\frac{2\pi}{3}t\right)dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)\sin(n\omega t)dt = \frac{2}{3}\int_0^1 t\sin\left(n\frac{2\pi}{3}t\right)dt$$

n	a_n	b_n	A_n
1	0.048	0.291	
2	-0.064	0.027	
3	0.025	0.017	
4	-0.006	0.003	
5	0.003	0.002	

Spectre d'amplitude



$$T = 3 \text{ s}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{3} \text{ rad/s} \approx 2 \text{ rad/s}$$

$$a_0 = \frac{0.5}{3} = \frac{1}{6} \approx 0.17$$

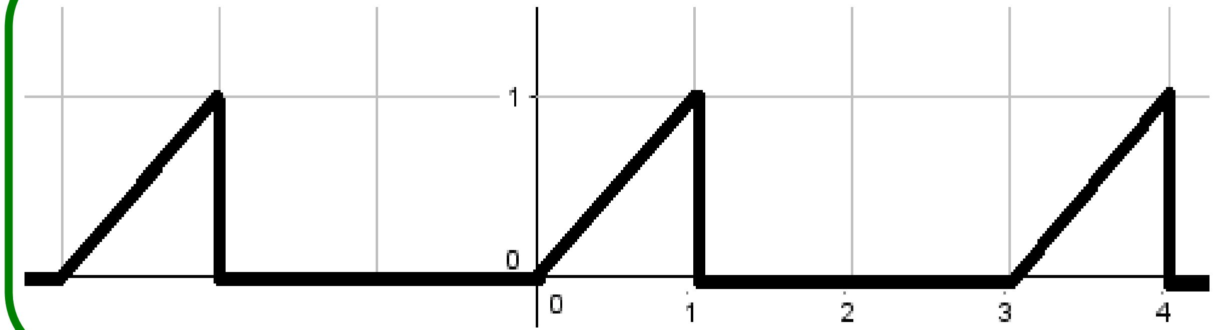
$$a_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)\cos(n\omega t)dt = \frac{2}{3}\int_0^1 t\cos\left(n\frac{2\pi}{3}t\right)dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)\sin(n\omega t)dt = \frac{2}{3}\int_0^1 t\sin\left(n\frac{2\pi}{3}t\right)dt$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

n	a_n	b_n	A_n
1	0.048	0.291	**0.29**
2	-0.064	0.027	**0.20**
3	0.025	0.017	**0.11**
4	-0.006	0.003	**0.07**
5	0.003	0.002	**0.07**

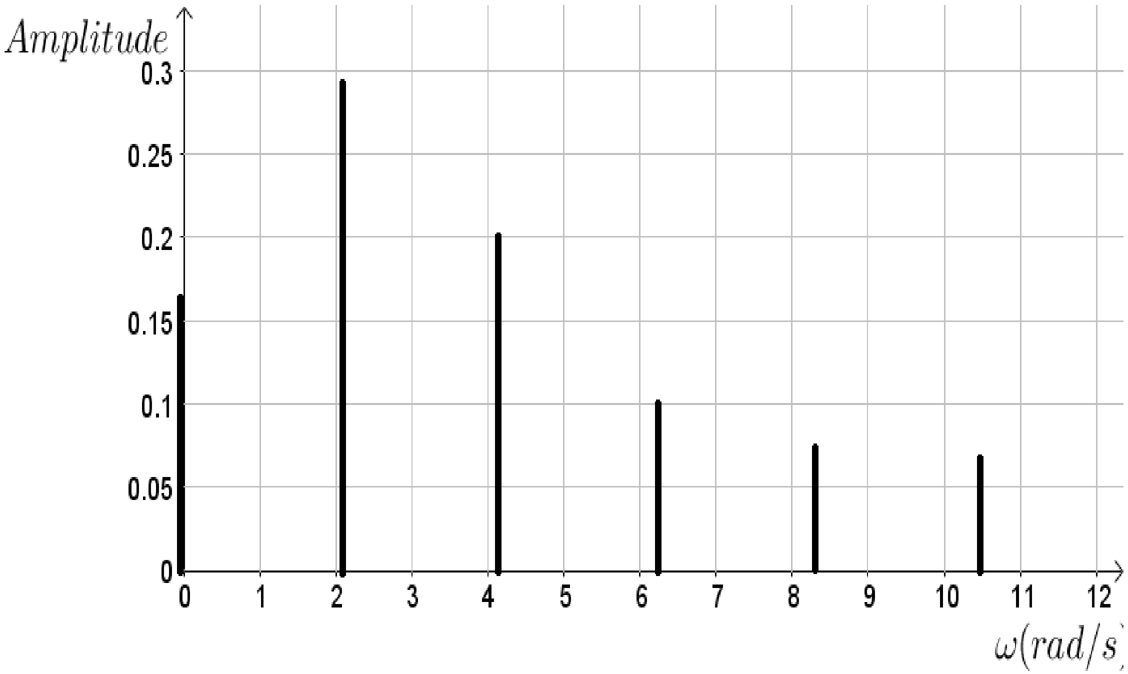
Spectre d'amplitude



$T = 3\ \text{s}$

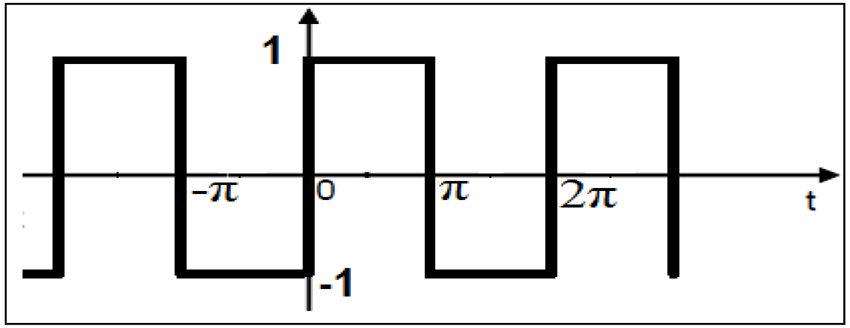
$\omega = \dfrac{2\pi}{3}\ \text{rad/s} \approx 2\ \text{rad/s}$

$a_0 = \dfrac{0.5}{3} = \dfrac{1}{6} \approx 0.17$



n	a_n	b_n	A_n
1	0.048	0.291	**0.29**
2	-0.064	0.027	**0.20**
3	0.025	0.017	**0.11**
4	-0.006	0.003	**0.07**
5	0.003	0.002	**0.07**

Spectre d'amplitude

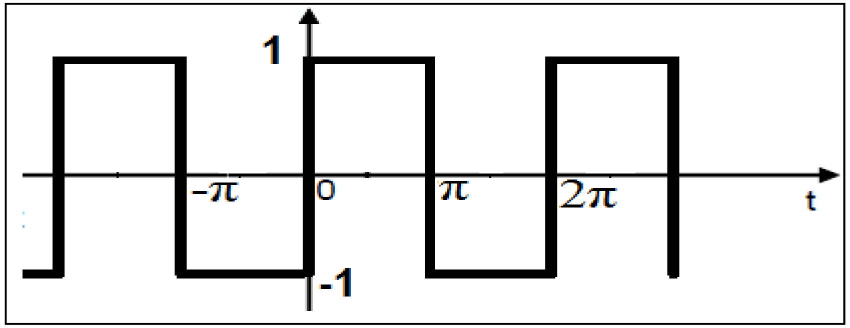


$T = 2\pi$ s $\qquad \omega = 1$ rad/s $\qquad a_0 = 0$

La décomposition en série de Fourier du signal $s(t)$ s'écrit:

$s(t) \approx 1.27\sin(t) + 0.42\sin(3t) + 0.25\sin(5t) + \ldots +$

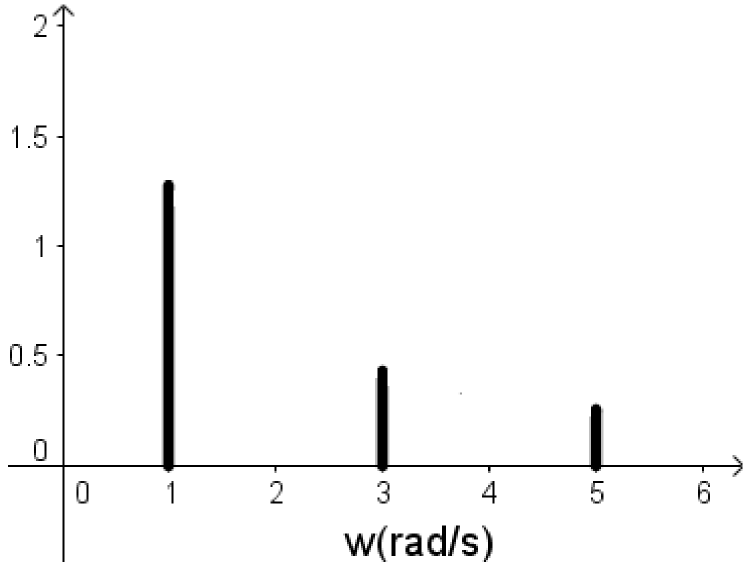
Spectre d’amplitude

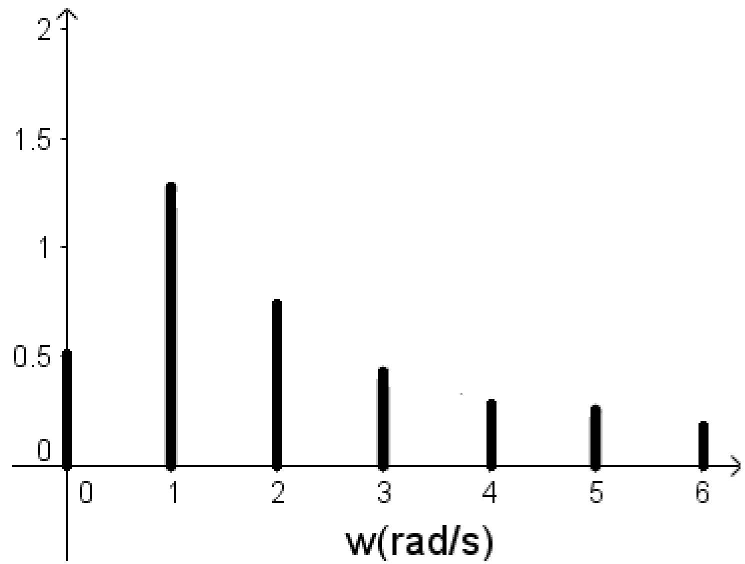


$T = 2\pi$ s $\qquad \omega = 1$ rad/s $\qquad a_0 = 0$

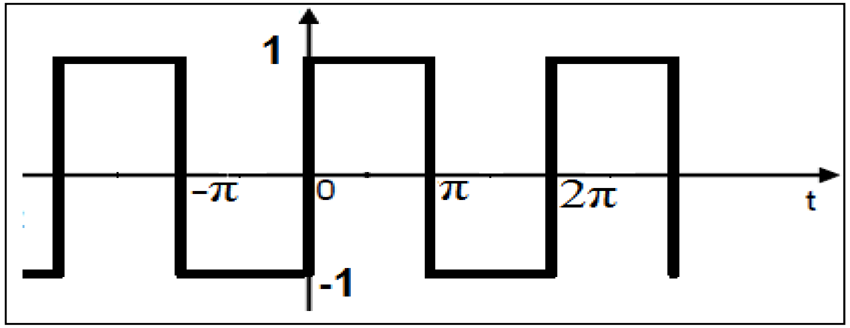
La décomposition en série de Fourier du signal $s(t)$ s'écrit:

$s(t) \approx 1.27\sin(t) + 0.42\sin(3t) + 0.25\sin(5t) + \ldots +$





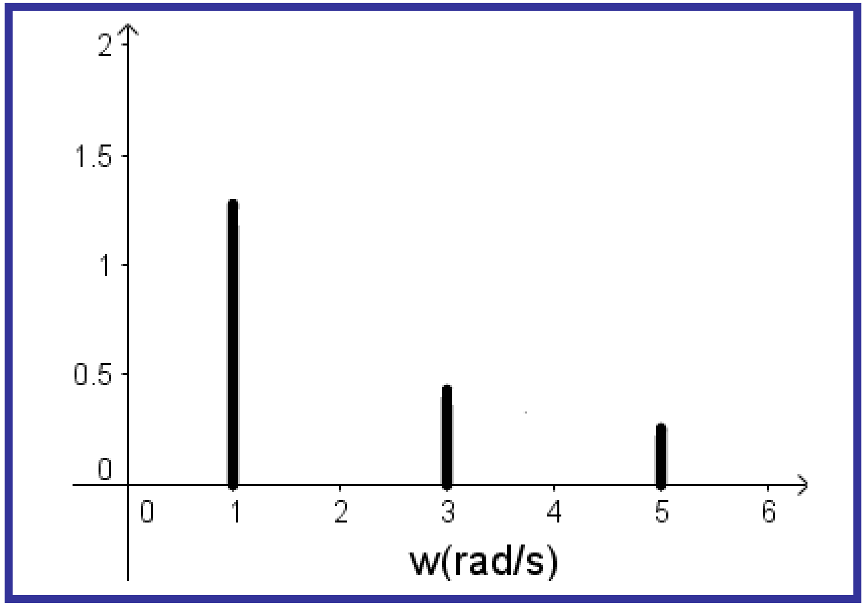
Spectre d'amplitude

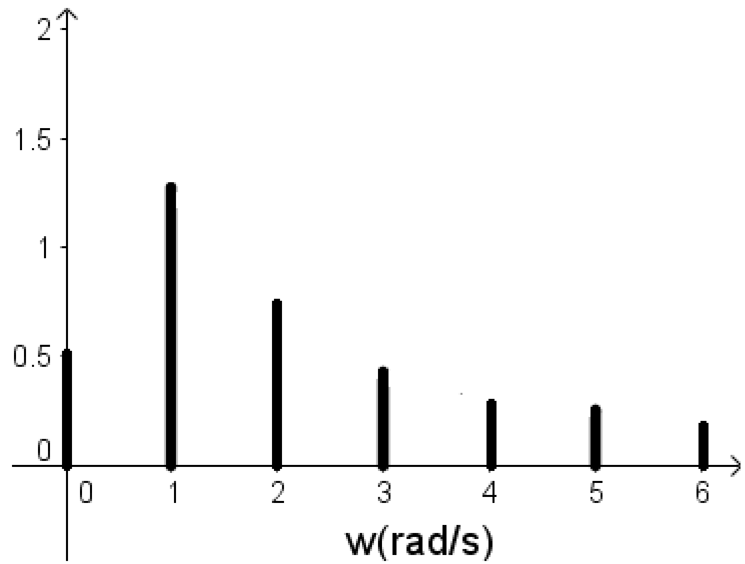


$T = 2\pi$ s $\qquad \omega = 1$ rad/s $\qquad a_0 = 0$

La décomposition en série de Fourier du signal $s(t)$ s'écrit:

$$s(t) \approx 1.27\sin(t) + 0.42\sin(3t) + 0.25\sin(5t) + \ldots +$$





Vrai ou faux

- **La décomposition en série de Fourier peut s'appliquer à tout type de signal**
- **Une harmonique est un signal sinusoïdal d'amplitude** a_n **ou** b_n
- **L'harmonique qui a la même pulsation que le signal s'appelle le fondamental**
- **Si la pulsation de s(t) vaut 4 alors la pulsation de l'harmonique de rang 4 vaut 4 rad/s**
- **Si on somme** a_0 **et les premières harmoniques, on retrouve l'allure du signal**
- **Plus on augmente le rang de l'harmonique, plus son amplitude est grande**

Vrai ou faux

- La décomposition en série de Fourier peut s'appliquer à tout type de signal **F**
- Une harmonique est un signal sinusoïdal d'amplitude a_n ou b_n
- L'harmonique qui a la même pulsation que le signal s'appelle le fondamental
- Si la pulsation de s(t) vaut 4 alors la pulsation de l'harmonique de rang 4 vaut 4 rad/s
- Si on somme a_0 et les premières harmoniques, on retrouve l'allure du signal
- Plus on augmente le rang de l'harmonique, plus son amplitude est grande

Vrai ou faux

- La décomposition en série de Fourier peut s'appliquer à tout type de signal **F**
- Une harmonique est un signal sinusoïdal d'amplitude a_n ou b_n **F**
- L'harmonique qui a la même pulsation que le signal s'appelle le fondamental
- Si la pulsation de s(t) vaut 4 alors la pulsation de l'harmonique de rang 4 vaut 4 rad/s
- Si on somme a_0 et les premières harmoniques, on retrouve l'allure du signal
- Plus on augmente le rang de l'harmonique, plus son amplitude est grande

Vrai ou faux

- **La décomposition en série de Fourier peut s'appliquer à tout type de signal** **F**
- **Une harmonique est un signal sinusoïdal d'amplitude** a_n **ou** b_n **F**
- **L'harmonique qui a la même pulsation que le signal s'appelle le fondamental** **V**
- **Si la pulsation de s(t) vaut 4 alors la pulsation de l'harmonique de rang 4 vaut 4 rad/s**
- **Si on somme** a_0 **et les premières harmoniques, on retrouve l'allure du signal**
- **Plus on augmente le rang de l'harmonique, plus son amplitude est grande**

Vrai ou faux

- La décomposition en série de Fourier peut s'appliquer à tout type de signal F
- Une harmonique est un signal sinusoïdal d'amplitude a_n ou b_n F
- L'harmonique qui a la même pulsation que le signal s'appelle le fondamental V
- Si la pulsation de s(t) vaut 4 alors la pulsation de l'harmonique de rang 4 vaut 4 rad/s F
- Si on somme a_0 et les premières harmoniques, on retrouve l'allure du signal
- Plus on augmente le rang de l'harmonique, plus son amplitude est grande

Vrai ou faux

- **La décomposition en série de Fourier peut s'appliquer à tout type de signal** **F**
- **Une harmonique est un signal sinusoïdal d'amplitude** a_n **ou** b_n **F**
- **L'harmonique qui a la même pulsation que le signal s'appelle le fondamental** **V**
- **Si la pulsation de s(t) vaut 4 alors la pulsation de l'harmonique de rang 4 vaut 4 rad/s** **F**
- **Si on somme** a_0 **et les premières harmoniques, on retrouve l'allure du signal** **V**
- **Plus on augmente le rang de l'harmonique, plus son amplitude est grande**

Vrai ou faux

- La décomposition en série de Fourier peut s'appliquer à tout type de signal F
- Une harmonique est un signal sinusoïdal d'amplitude a_n ou b_n F
- L'harmonique qui a la même pulsation que le signal s'appelle le fondamental V
- Si la pulsation de s(t) vaut 4 alors la pulsation de l'harmonique de rang 4 vaut 4 rad/s F
- Si on somme a_0 et les premières harmoniques, on retrouve l'allure du signal V
- Plus on augmente le rang de l'harmonique, plus son amplitude est grande F

Puissance moyenne

Définition:

La puissance moyenne d'un signal $s(t)$ de période T vaut: $P_{s(t)} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s^2(t)dt$

Propriété :

La puissance moyenne de l'harmonique de rang n vaut $\frac{1}{2}A_n^2$

Propriété :

La puissance moyenne de la valeur moyenne a_0 vaut a_0^2

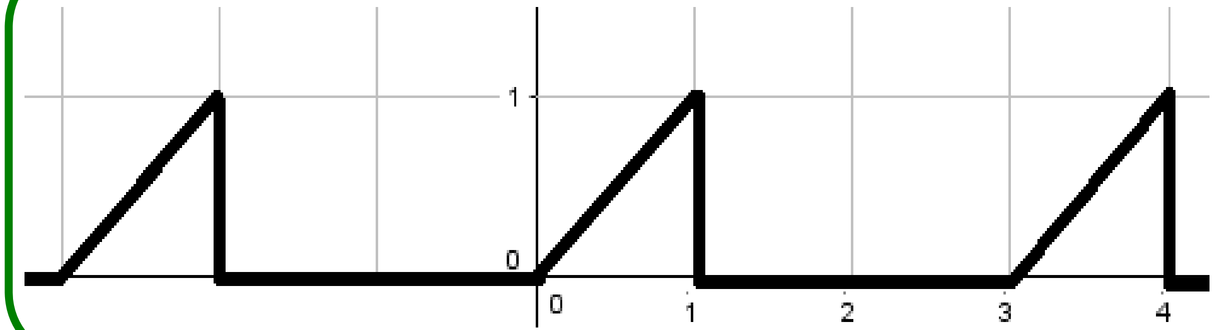
Puissance moyenne

Egalité de Parseval :

La puissance moyenne d'un signal périodique est égale à
la somme de la puissance moyenne de chacune de ses harmoniques
et de la puissance moyenne de la valeur moyenne a_0

$$P_{s(t)} = a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2} A_n^2$$

Exemple

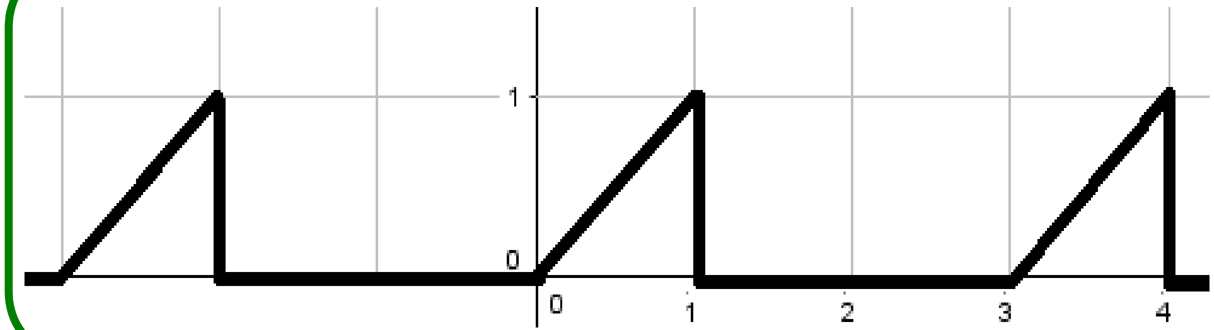


$$T = 3 \text{ s}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{3} \text{ rad/s} \approx 2 \text{ rad/s}$$

$$a_0 = \frac{0.5}{3} = \frac{1}{6} \approx 0.17$$

Exemple



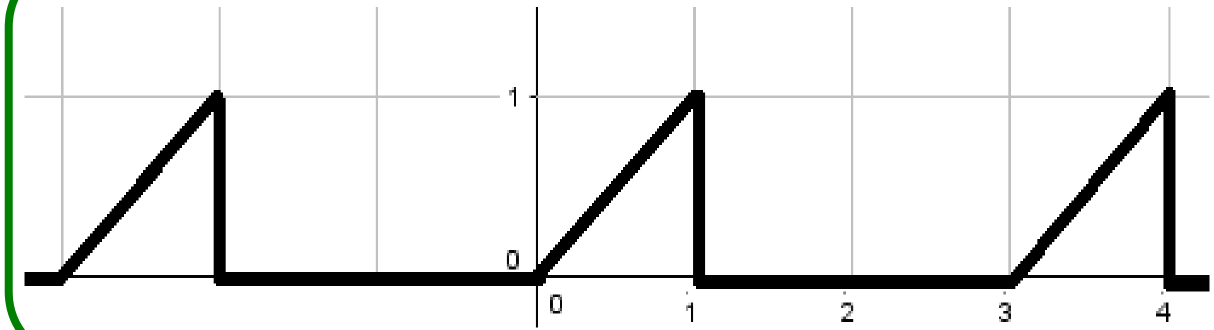
$$T = 3 \text{ s}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{3} \text{ rad/s} \approx 2 \text{ rad/s}$$

$$a_0 = \frac{0.5}{3} = \frac{1}{6} \approx 0.17$$

$$P_{s(t)} = \frac{1}{T}\int_0^T s^2(t)dt =$$

Exemple



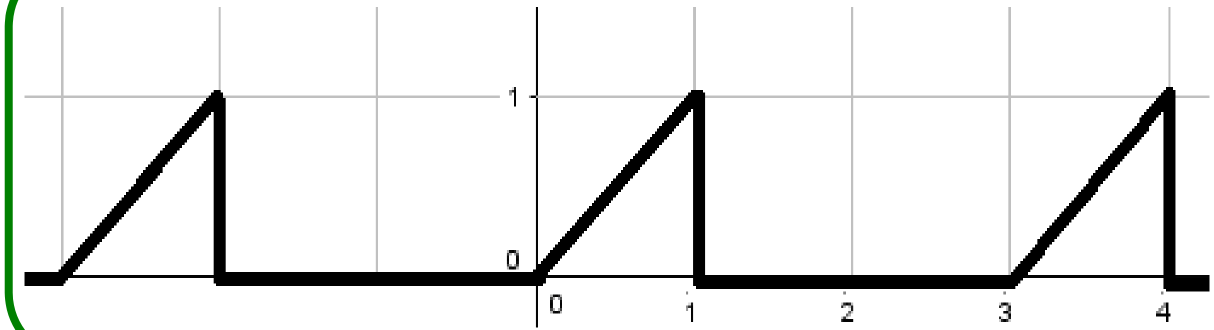
$$T = 3 \text{ s}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{3} \text{ rad/s} \approx 2 \text{ rad/s}$$

$$a_0 = \frac{0.5}{3} = \frac{1}{6} \approx 0.17$$

$$P_{s(t)} = \frac{1}{T}\int_0^T s^2(t)dt = \frac{1}{3}\int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 \approx 0.11 \text{ W}$$

Exemple



$T = 3$ s

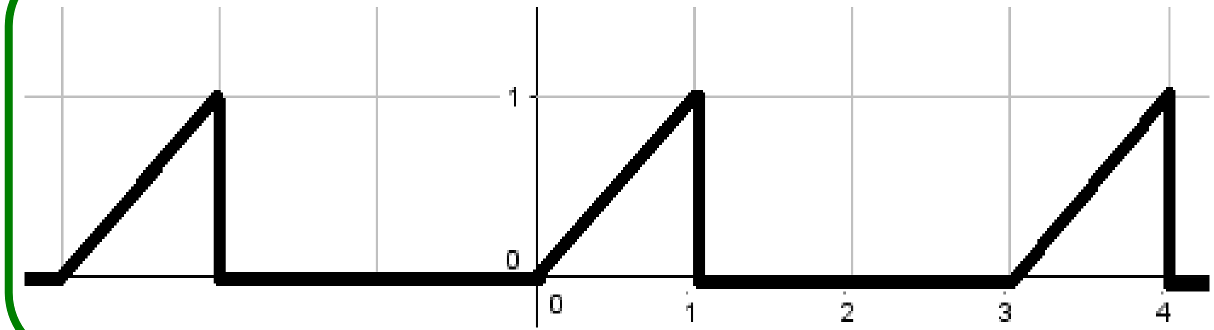
$\omega = \dfrac{2\pi}{3}$ rad/s ≈ 2 rad/s

$a_0 = \dfrac{0.5}{3} = \dfrac{1}{6} \approx 0.17$

$$P_{s(t)} = \frac{1}{T}\int_0^T s^2(t)dt = \frac{1}{3}\int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 \approx 0.11 \text{ W}$$

$$P_{a_0} = {a_0}^2 \approx 0.029 \text{ W}$$

Exemple



$$T = 3 \text{ s}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{3} \text{ rad/s} \approx 2 \text{ rad/s}$$

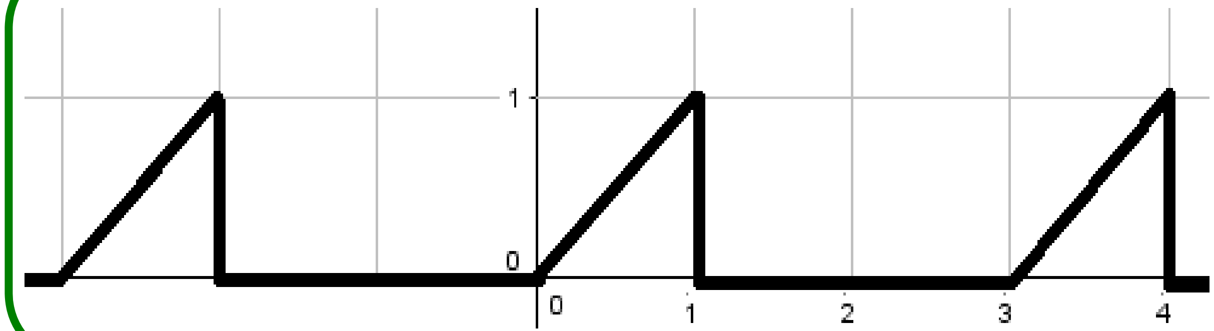
$$a_0 = \frac{0.5}{3} = \frac{1}{6} \approx 0.17$$

$$P_{s(t)} = \frac{1}{T}\int_0^T s^2(t)dt = \frac{1}{3}\int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 \approx 0.11 \text{ W}$$

$$P_{a_0} = a_0{}^2 \approx 0.029 \text{ W}$$

$$P_{harm.rang1} = \frac{1}{2}A_1^2 \approx 0.04 \text{ W}$$

Exemple



$$T = 3 \text{ s}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{3} \text{ rad/s} \approx 2 \text{ rad/s}$$

$$a_0 = \frac{0.5}{3} = \frac{1}{6} \approx 0.17$$

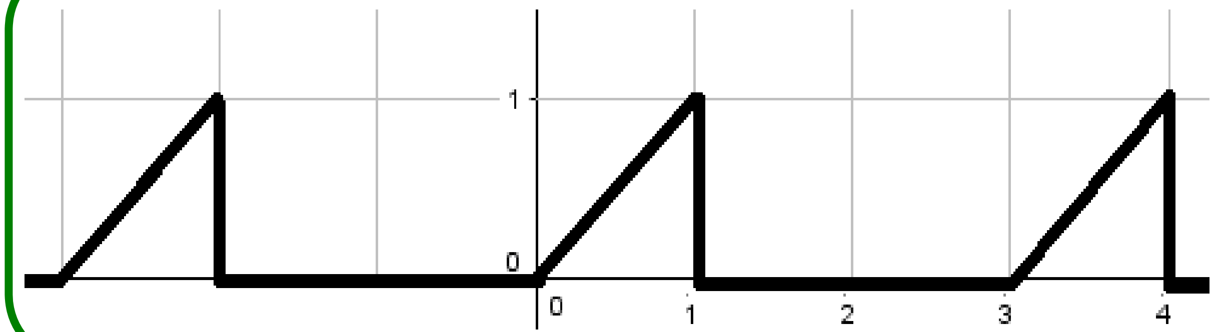
$$P_{s(t)} = \frac{1}{T}\int_0^T s^2(t)dt = \frac{1}{3}\int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 \approx 0.11 \text{ W}$$

$$P_{a_0} = a_0{}^2 \approx 0.029 \text{ W}$$

$$P_{harm.rang1} = \frac{1}{2}A_1^2 \approx 0.04 \text{ W}$$

$$P_{harm.rang2} = \frac{1}{2}A_2^2 \approx 0.02 \text{ W}$$

Exemple



$$T = 3\ \text{s}$$

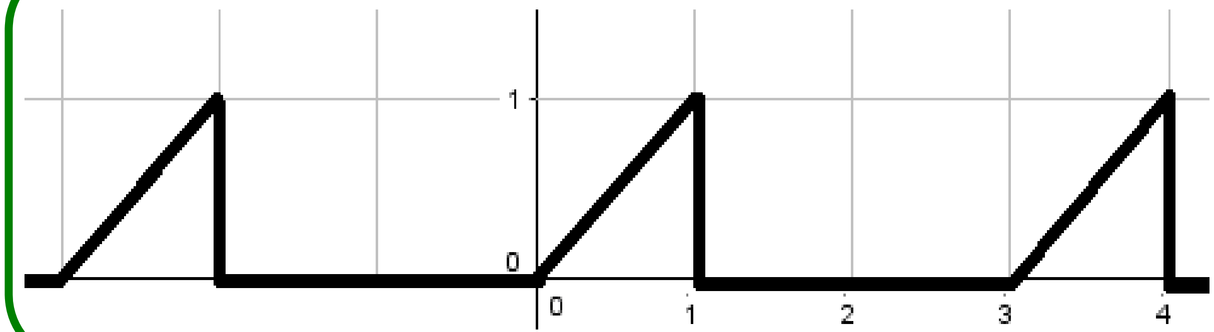
$$\omega = \frac{2\pi}{3}\ \text{rad/s} \approx 2\ \text{rad/s}$$

$$a_0 = \frac{0.5}{3} = \frac{1}{6} \approx 0.17$$

$$P_{s(t)} = \frac{1}{T}\int_0^T s^2(t)dt = \frac{1}{3}\int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 \approx 0.11\ \text{W}$$

$$\left.\begin{aligned} P_{a_0} &= {a_0}^2 \approx 0.029\ \text{W} \\ P_{harm.rang1} &= \frac{1}{2}A_1^2 \approx 0.04\ \text{W} \\ P_{harm.rang2} &= \frac{1}{2}A_2^2 \approx 0.02\ \text{W} \end{aligned}\right\}$$

Exemple



$T = 3\ \text{s}$

$\omega = \dfrac{2\pi}{3}\ \text{rad/s} \approx 2\ \text{rad/s}$

$a_0 = \dfrac{0.5}{3} = \dfrac{1}{6} \approx 0.17$

$$P_{s(t)} = \frac{1}{T}\int_0^T s^2(t)dt = \frac{1}{3}\int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 \approx 0.11\ \text{W}$$

$$P_{a_0} = a_0{}^2 \approx 0.029\ \text{W}$$

$$P_{harm.rang1} = \frac{1}{2}A_1^2 \approx 0.04\ \text{W}$$

$$P_{harm.rang2} = \frac{1}{2}A_2^2 \approx 0.02\ \text{W}$$

La valeur moyenne et les harm. de rang 1 et 2 permettent de transmettre 0.089 W soit 81% de la puissance moyenne de $s(t)$

La forme complexe des séries de Fourier

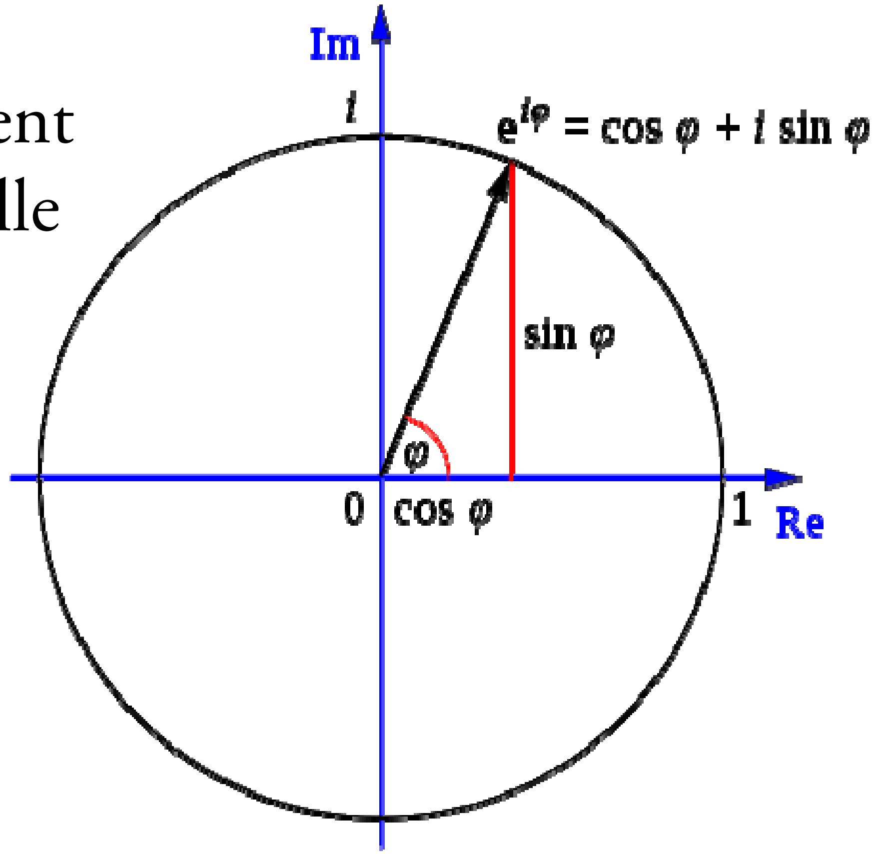
À partir de la fameuse formule d'Euler

$$e^{i\,x} = \cos(x) + i\,\sin(x)$$

Donc, $\cos(x)$ et $\sin(x)$ peuvent être exprimés par l'exponentielle

$$\cos(x) = \frac{e^{i\,x} + e^{-i\,x}}{2}$$

$$\sin(x) = \frac{e^{i\,x} - e^{-i\,x}}{2i}$$



Forme complexe

<u>Formules d'Euler:</u> $\cos\theta = \dfrac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$

On utilise les formules d'Euler pour montrer que:

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{jn\omega t} + c_{-n} e^{-jn\omega t}$$

$$\text{avec } c_n = \frac{a_n - jb_n}{2}$$

J ou I, en électronique et électricité, j est souvent employé pour $\sqrt{-1}$

Forme complexe

Formules d'Euler: $\cos\theta = \dfrac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$

On utilise les formules d'Euler pour montrer que:

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{jn\omega t} + c_{-n} e^{-jn\omega t}$$

$$\text{avec } c_n = \frac{a_n - jb_n}{2}$$

On utilise la définition de a_n et b_n pour montrer que:

$$c_n = \frac{a_n - jb_n}{2} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) e^{jn\omega t} dt$$

Forme complexe

<u>Formules d'Euler:</u> $\cos\theta = \dfrac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$

On utilise les formules d'Euler pour montrer que:

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{jn\omega t} + c_{-n} e^{-jn\omega t}$$

$$\text{avec } c_n = \frac{a_n - jb_n}{2}$$

On utilise la définition de a_n et b_n pour montrer que:

$$c_n = \frac{a_n - jb_n}{2} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s(t) e^{jn\omega t} dt \qquad \text{et donc} \qquad c_0 = a_0$$

Forme complexe

La décomposition en série de Fourier du signal $s(t)$ s'écrit:

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

ou

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \cos\left(n\omega t - \varphi_n\right) \text{ avec } \varphi_n = \arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

ou

$$s(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{jn\omega t} + c_{-n} e^{-jn\omega t} = \boxed{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega t}} \text{ avec } c_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) e^{jn\omega t} dt$$

Forme complexe

$c_n = \dfrac{a_n - jb_n}{2}$ donc $\left|c_n\right| =$

Forme complexe

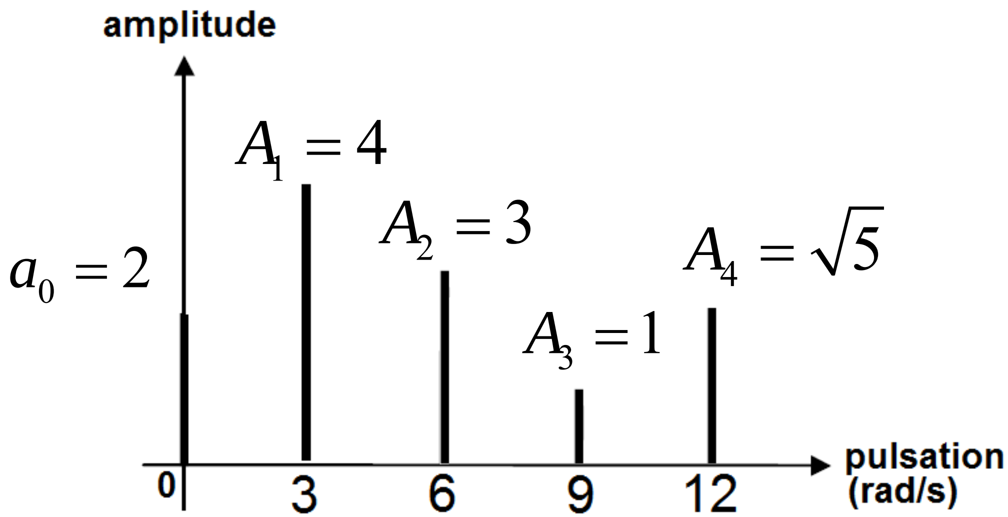
$$c_n = \frac{a_n - jb_n}{2} \text{ donc } |c_n| = \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{2} = \frac{A_n}{2}$$

Forme complexe

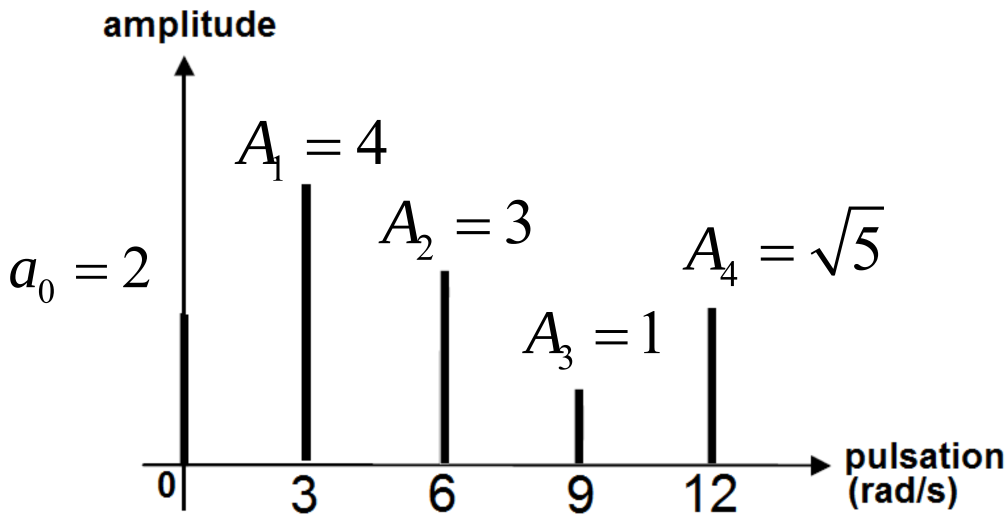
$$c_n = \frac{a_n - jb_n}{2} \text{ donc } \left|c_n\right| = \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{2} = \frac{A_n}{2}$$

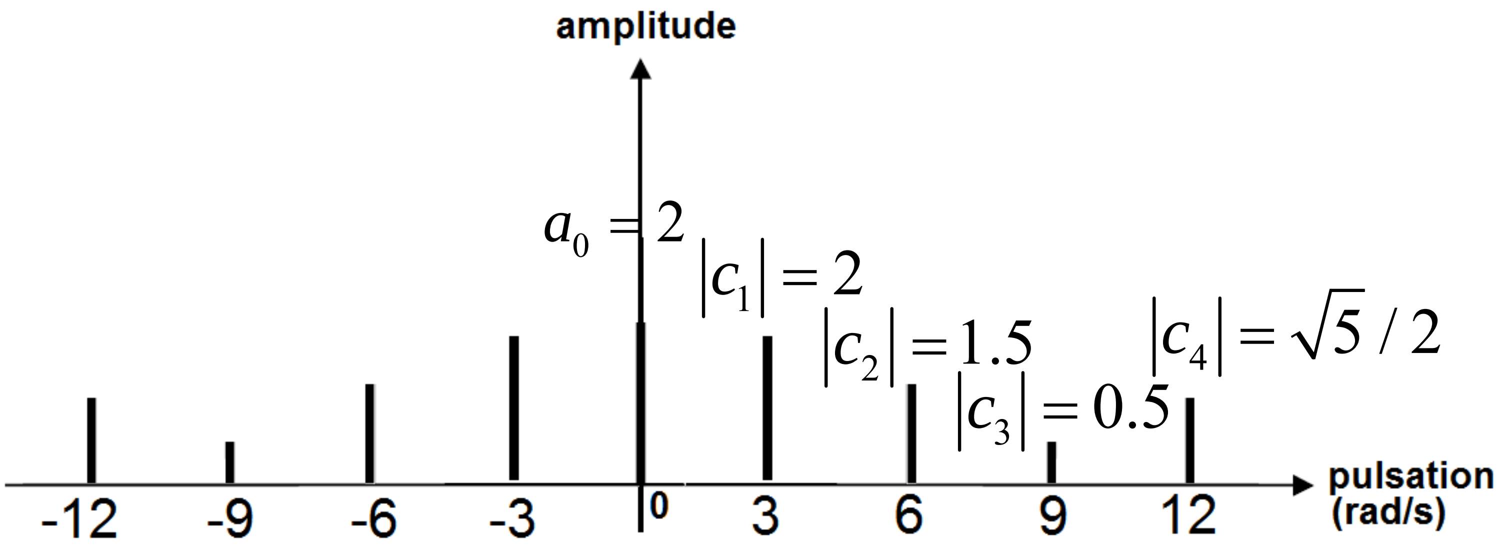
Le spectre d'amplitude en forme complexe est le diagramme en bâtons de $\left|c_n\right|$ en fonction de ω ou f

Forme complexe



Forme complexe





Ecriture complexe d'une série de Fourier

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \frac{e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}}{2} + b_n \frac{e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}}{2j})$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{a_n - jb_n}{2} e^{jn\omega t} + \frac{a_n + jb_n}{2} e^{-jn\omega t})$$

en posant

$c_n = \dfrac{a_n - jb_n}{2}$ et $c_{-n} = \dfrac{a_n + jb_n}{2} = \overline{c}_n$ pour $n \neq 0$

et $c_0 = a_0$

On peut écrire

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}c_n e^{jn\omega t}+\sum_{-n=1}^{+\infty}c_{-n}e^{-jn\omega t}=a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}c_n e^{jn\omega t}+\sum_{n=-1}^{-\infty}c_n e^{jn\omega t}$$

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n e^{jn\omega t}$$ avec

$$c_n=\frac{a_n-jb_n}{2}=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)dt-j\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)dt$$

$$c_n=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-jn\omega t}dt$$

d'où on déduit

$$\boxed{f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n e^{jn\omega t}\quad \text{avec}\quad c_n=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-jn\omega t}dt\ \text{ pour tout } n}$$

Attention : la parité de f n'intervient jamais dans le calcul des coefficients complexes (à l'exception du calcul de c_0), puisque $f(t)e^{-jn\omega t}$ est une fonction complexe, qui n'est ni paire, ni impaire

Références, liens et lectures

Le cours en PDF : http://plouffe.fr/IUT/GEII/ on y trouve aussi des exemples déjà preparés pour GeoGebra.
Les ondes sonores : http://guilhaumont.fr/opale/ts_ondes/co/sons.html
- Cours complet GEII à l'IUT de Nîmes, bons exemples et bonne documentation http://geii.iut-nimes.fr/content/cours-en-ligne
- Intensité du niveau sonore et quelques explications : https://www.youtube.com/watch?v=ouhy8kDDSUA
- Amplitude, Fourier et les ondes sonores : https://www.youtube.com/watch?v=7Lxmkno6tHI
- Expérimentation avec les séries de Fourier : https://www.geogebra.org/m/hATRwShF
Animation avec Fourier (flash nécessaire) : http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Elec/Fourier/fourier1.html

Références, liens et lectures (suite)

Sur WIKIPEDIA :

- Le produit de convolution : https://fr.wikipedia.org/wiki/Produit_de_convolution
- Le sinus cardinal : https://fr.wikipedia.org/wiki/Sinus_cardinal
- Le diagramme de BODE : https://fr.wikipedia.org/wiki/Diagramme_de_Bode
- Le diagramme de Nyquist : https://fr.wikipedia.org/wiki/Diagramme_de_Nyquist
- Onde carrée approximée par des fonctions sinus : https://sara.ng/apps/square-wave/
- Ondes carrées : https://en.wikipedia.org/wiki/Square_wave
- Ondes triangulaires : https://en.wikipedia.org/wiki/Sawtooth_wave

Références, liens et lectures (suite)

- Les séries de Fourier :
  https://fr.wikipedia.org/wiki/S%C3%A9rie_de_Fourier
- Animation avec Geogebra :
  https://www.geogebra.org/m/hATRwShF
- Animation onde en dent de scie:

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Sawtooth_Fourier_Animation.gif?uselang=fr

Exemple de calcul du signal carré :
http://public.iutenligne.net/mathematiques/analyse/arrou-vignod/series_de_fourier/2/51.html

Exemple triangulaire :
http://public.iutenligne.net/mathematiques/analyse/arrou-vignod/series_de_fourier/2/52.html

Exemple de calcul sous forme complexe :
http://public.iutenligne.net/mathematiques/analyse/arrou-vignod/series_de_fourier/2/10.html

Références, liens et lectures (suite)

Séries de fourier : exemples et calculs très bien documentés.
http://public.iutenligne.net/mathematiques/analyse/arrou-vignod/series_de_fourier/general/toc.html

Le calcul des coefficients pour les séries de Fourier complexes (youtube)
https://www.youtube.com/watch?v=Ft5iyapkSqM