4 Résolution des équations différentielles par transformée de Laplace

Nous avons vu que le comportement d'un SLCI peut être modélisé par une équation différentielle linéaire à coefficients constants. La résolution de cette équation peut rapidement se révéler ardue.

La transformée de Laplace est une transformation mathématique qui permet de transformer une équation différentielle en une fraction polynomiale. Cela simplifie considérablement la résolution des équations.

4.1 *Définition*

La transformée de Laplace de la fonction f(t) est notée: $F(p) = \mathcal{L}[f(t)]$.

$$\boxed{f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)\,dt}$$

domaine temporel (variable *t*) → domaine symbolique (variable *p* réelle ou complexe)

Dans la pratique, on ne calcule que les transformées de Laplace de fonctions **causales** c'est-à-dire telles que $f(t) = 0$ pour $t < 0$. Ces fonctions f représentent des grandeurs physiques: *intensité, température, effort, vitesse,…*

4.2 *Théorèmes*

4.2.1 Unicité

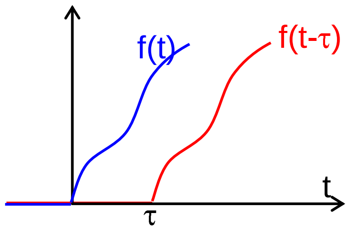
L est bijective:
à f(t) correspond F(p) unique,
à F(p) correspond f(t) unique.

4.2.2 Linéarité

$$\mathcal{L}[f_1(t) + f_2(t)] = \mathcal{L}[f_1(t)] + \mathcal{L}[f_2(t)] = F_1(p) + F_2(p)$$
$$\mathcal{L}[\lambda f(t)] = \lambda \mathcal{L}[f(t)] = \lambda F(p)$$

4.2.3 Théorème du retard

$$\boxed{\mathcal{L}[f(t-\tau)] = e^{-\tau p} F(p)}$$



4.2.4 Transformée de la dérivée

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = p\,F(p) - f(0^+)}$$

Pour la dérivée seconde:

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right] = p^2\,F(p) - p\,f(0^+) - f'(0^+)}$$

4.2.5 Transformée de l'intégrale

$f(t) = \dfrac{dg(t)}{dt}$

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\int_0^t f(u)du\right] = \frac{F(p)}{p} + \frac{g(0^+)}{p}}$$

4.2.6 Remarques

Si les conditions initiales sont nulles (conditions d'Heaviside)

- **dériver par rapport à t** dans le domaine temporel revient à **multiplier par p** dans le domaine symbolique
- **intégrer** dans le domaine temporel revient à **diviser** par p dans le domaine symbolique.

4.2.7 Théorème de la valeur initiale

$$\boxed{\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{p\to\infty} pF(p)}$$

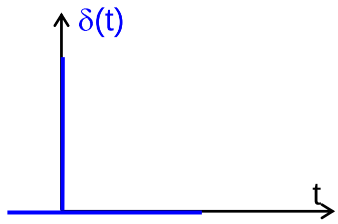
4.2.8 Théorème de la valeur finale

$$\boxed{\lim_{t\to \infty} f(t) = \lim_{p\to 0} pF(p)}$$

Remarque: ces deux derniers résultats n'ont de sens que si les limites existent.

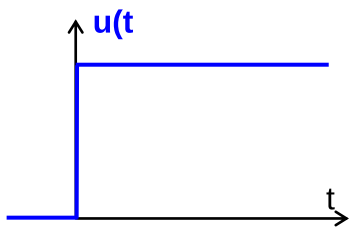
4.3 Transformée des signaux test

4.3.1 Fonction de Dirac (ou impulsion unité) δ(t)



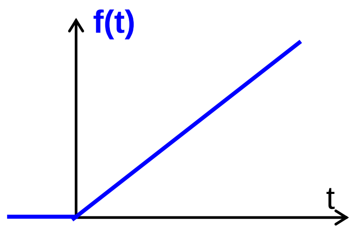
$$\boxed{\mathcal{L}\,[\delta\,(t)] = 1}$$

4.3.2 Fonction échelon unité u(t)



$$\boxed{\mathcal{L}\,[u\,(t)] = \frac{1}{p}}$$

4.3.3 Fonction rampe de pente unitaire



$$\boxed{\mathcal{L}\,[t.u(t)] = \frac{1}{p^2}}$$

4.3.4 Fonctions sinusoïdales

$$\boxed{\mathcal{L}\,[\sin \omega t.u(t)] = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}} \qquad \boxed{\mathcal{L}\,[\cos \omega t.u(t)] = \frac{p}{P^2+\omega^2}}$$

4.3.5 Fonction exponentielle

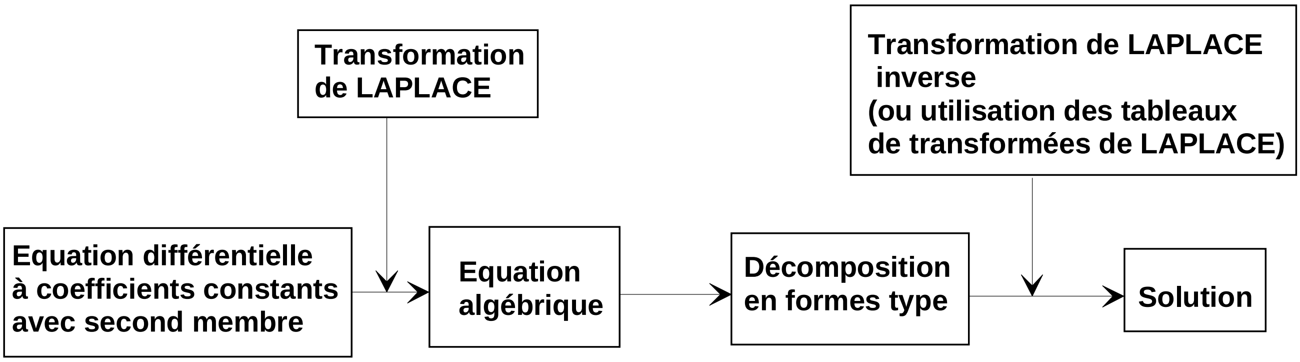
$$\boxed{\mathcal{L}\,[e^{-at}.u(t)] = \frac{1}{p+a}}$$

4.4 Tableau récapitulatif

x(t) avec $x(t) \langle 0$	X(p)
$\delta(t)$: impulsion de DIRAC	1
A	$\frac{A}{p}$
at	$\frac{a}{p^2}$
e^{-at} avec $a \rangle 0$	$\frac{1}{p+a}$
te^{-at} avec $a \rangle 0$	$\frac{1}{(p+a)^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
$e^{-at} \sin \omega t$ avec $a \rangle 0$	$\frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at} \cos \omega t$ avec $a \rangle 0$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$

4.5 Transformée inverse

4.5.1 Démarche



L'utilisation de cet outil mathématique permet de remplacer des équations différentielles linéaires par des équations algébriques.

Exemple: soit un système régi par l'équation différentielle

$$\frac{d^2s(t)}{dt^2} + 5\frac{ds(t)}{dt} + 6s(t) = e(t)$$

avec s(0) = 2, s'(0) = 2   et   e(t) = 6 u(t)

On applique la transformation de Laplace à cette équation:

$$L\left[\frac{d^2s(t)}{dt^2}\right] + 5\,L\left[\frac{ds(t)}{dt}\right] + 6\,S(p) = E(p)$$

$$p^2\,S(p) - p\,s(0) - s'(0) + 5\,[p\,S(p) - s(0)] + 6\,S(p) = E(p)$$

$$p^2\,S(p) - 2\,p - 2 + 5[p\,S(p) - 2] + 6\,S(p) = \frac{6}{p}$$

soit

$$S(p) = \frac{2p^2 + 12p + 6}{p(p^2 + 5p + 6)} = \frac{2p^2 + 12p + 6}{p(p+2)(p+3)}$$

On décompose cette fraction en éléments simples: S(p) = $\frac{A}{p} + \frac{B}{p+2} + \frac{C}{p+3}$

Par identification, on trouve S(p) = $\frac{1}{p} + \frac{5}{p+2} - \frac{4}{p+3}$

On retourne au domaine temporel en prenant les transformées inverses, d'où:

$$s(t) = (1 + 5\, e^{-2t} - 4\, e^{-3t}).\, u(t)$$

4.5.2 Circuit RL (résistance + bobine)

Ce système est décrit par l'équation différentielle : $\frac{L}{R}\dot{u}(t) + u(t) = e(t)$. En appliquant la transformée de LAPLACE à cette équation, nous obtenons : $\frac{L}{R}pU(p) + U(p) = E(p)$. Nous pouvons donc écrire :

$$U(p) = H(p).E(p) \text{ avec } H(p) = \frac{1}{1 + \frac{L}{R}p}$$

4.5.3 Masse + ressort + amortisseur

Ce système est décrit par l'équation différentielle : $\ddot{y}(t) + \frac{f}{M}\dot{y}(t) + \frac{k}{M}y(t) = \frac{x(t)}{M}$. En appliquant la transformée de LAPLACE à cette équation, nous obtenons : $p^2Y(p) + \frac{f}{M}pY(p) + \frac{k}{M}Y(p) = \frac{X(p)}{M}$. Cette équation peut encore s'écrire : $Y(p)\left(Mp^2 + fp + k\right) = X(p)$. Nous obtenons donc : $kY(p)\left(\frac{M}{k}p^2 + \frac{f}{k}p + 1\right) = X(p)$. Or au paragraphe 2.3, nous avons posé $\frac{k}{M} = \omega_0^2$ et $\frac{f}{k} = 2\frac{\xi}{\omega_0}$. Nous avons donc : $kY(p)\left(\frac{p^2}{\omega_0^2} + 2\frac{\xi}{\omega_0}p + 1\right) = X(p)$. Nous pouvons donc écrire :

$$Y(p) = H(p).X(p) \text{ avec } H(p) = \frac{\frac{1}{k}}{\frac{p^2}{\omega_0^2} + 2\frac{\xi}{\omega_0}p + 1}$$

On voit que la transformée de Laplace de la sortie peut s'exprimer simplement par le produit d'une fonction H(p) par la transformée de Laplace de l'entrée E(p). La fonction **H(p) est appelée fonction de transfert** (ou transmitance) du système.