4.2.4 Transformée de la dérivée

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = p\,F(p) - f(0^+)$$

Pour la dérivée seconde:

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right] = p^2\,F(p) - p\,f(0^+) - f'(0^+)$$

4.2.5 Transformée de l'intégrale

$f(t) = \dfrac{dg(t)}{dt}$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(u)du\right] = \frac{F(p)}{p} + \frac{g(0^+)}{p}$$

4.2.6 Remarques

Si les conditions initiales sont nulles (conditions d'Heaviside)

- **dériver par rapport à t** dans le domaine temporel revient à **multiplier par p** dans le domaine symbolique
- **intégrer** dans le domaine temporel revient à **diviser** par p dans le domaine symbolique.

4.2.7 Théorème de la valeur initiale

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{p\to\infty} pF(p)$$

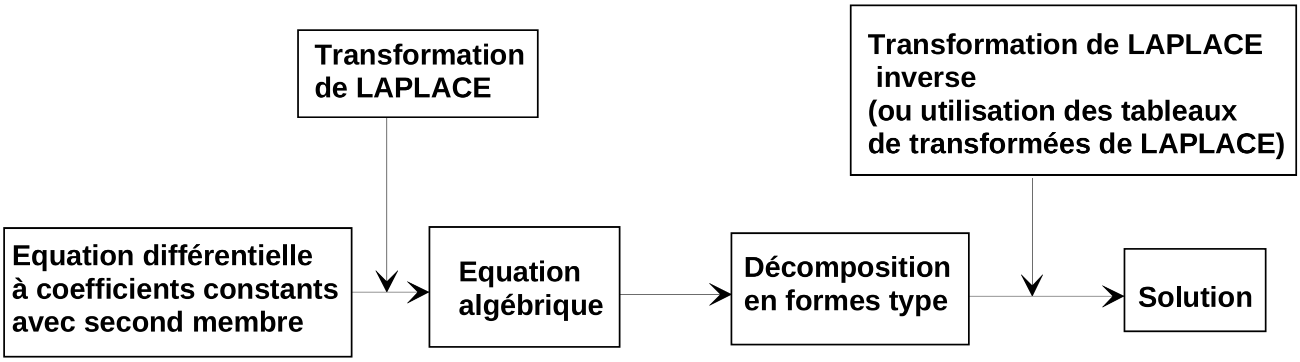
4.2.8 Théorème de la valeur finale

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{p\to 0} pF(p)$$

<u>Remarque:</u> ces deux derniers résultats n'ont de sens que si les limites existent.

4.5 Transformée inverse

4.5.1 Démarche



L'utilisation de cet outil mathématique permet de remplacer des équations différentielles linéaires par des équations algébriques.

Exemple: soit un système régi par l'équation différentielle

$$\frac{d^2s(t)}{dt^2} + 5\frac{ds(t)}{dt} + 6s(t) = e(t)$$

avec s(0) = 2, s'(0) = 2   et   e(t) = 6 u(t)

On applique la transformation de Laplace à cette équation:

$$L\left[\frac{d^2s(t)}{dt^2}\right] + 5\,L\left[\frac{ds(t)}{dt}\right] + 6\,S(p) = E(p)$$

$$p^2\,S(p) - p\,s(0) - s'(0) + 5\,[p\,S(p) - s(0)] + 6\,S(p) = E(p)$$

$$p^2\,S(p) - 2\,p - 2 + 5[p\,S(p) - 2] + 6\,S(p) = \frac{6}{p}$$

soit

$$S(p) = \frac{2p^2+12p+6}{p(p^2+5p+6)} = \frac{2p^2+12p+6}{p(p+2)(p+3)}$$

On décompose cette fraction en éléments simples: $S(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+2} + \frac{C}{p+3}$

Par identification, on trouve $S(p) = \frac{1}{p} + \frac{5}{p+2} - \frac{4}{p+3}$

On retourne au domaine temporel en prenant les transformées inverses, d'où: