Le calcul de p_n et $\pi(n)$

Simon Plouffe
21 février 2020

Résumé

Une nouvelle approche est présentée pour le calcul de p_n et $\pi(n)$ qui utilise la fonction W de Lambert. Une approximation est d'abord trouvée et à l'aide d'une technique de calcul elle permet d'avoir une estimation de ces deux quantités plus précises que celles connues de Cipolla et de Riemann. Le calcul de p_n utilise une approximation à l'aide de la fonction W de Lambert et une estimation basée sur une courbe des moindres carrés logarithmique (LLS en anglais) $c(n)$. La fonction $c(n)$ est la même dans les deux cas. Les deux formules sont :

$$p_n \approx -nW_{-1}\left(\frac{-e}{n}\right) - \frac{n\,c(n)}{W_0(n)} \qquad 1$$

$$\pi(n) \approx \left\{-nW_{-1}\left(\frac{-e}{n}\right) - \frac{n\,c(n)}{W_0(n)}\right\}^{-1} \qquad 2$$

Les résultats présentés sont empiriques et s'appliquent jusqu'à n $\approx 10^{16}$.

Abstract

A new approach is presented for the calculation of p_n and $\pi(n)$ which uses the Lambert W function. An approximation is first found and using a calculation technique it makes it possible to have an estimate of these two quantities more precise than those known from Cipolla and Riemann. The calculation of p_n uses an approximation using the Lambert W function and an estimate based on a logarithmic least square curve (LLS) c (n). The function c (n) is the same in both cases. The two formulas are:

$$p_n \approx -nW_{-1}\left(\frac{-e}{n}\right) - \frac{n\,c(n)}{W_0(n)} \qquad 1$$

$$\pi(n) \approx \left\{-nW_{-1}\left(\frac{-e}{n}\right) - \frac{n\,c(n)}{W_0(n)}\right\}^{-1} \qquad 2$$

The results presented are empirical and apply up to n $\approx 10^{16}$.

Introduction

En 2010, Dusart prouvait que $\pi(n) \approx \frac{n}{\log(n)-1}$ si n > 5393. Nous utiliserons cette approximation pour donner une approximation de p_n en inversant la formule.

$$\text{Si } \pi(n) \approx \frac{n}{\ln(n)-1} \text{ alors } p_n = -nW_{-1}\left(\frac{-e}{n}\right).$$

Cette formule est assez précise, pour n = 10^{24}, on a p_n précis à 99.9 %.

En analysant le reste de p_n et $-nW_{-1}\left(\frac{-e}{n}\right)$, on trouve rapidement que c'est assez proche de $\frac{n}{W(n)}$, donc que $p_n \approx -\,nW_{-1}\left(\frac{-e}{n}\right) - \frac{n}{W(n)}$.

Ici $W(n)$ est la fonction Lambert W d'ordre 0.

La formule classique pour p_n est $p_n \approx n\,ln(n)$ ou mieux encore celle qui a été trouvée par Cipolla en 1902 stipule que

$$p_n \sim n\left(ln(n) + ln(ln(n)) - 1 + \frac{ln(ln(n)) - 2}{ln(n)} - \frac{ln(ln(n))^2 - 6\,ln(ln(n)) + 11}{2\,ln(n)^2} + \cdots\right).$$

Le calcul a été poussé plus loin en 1994 avec Salvy qui en a extirpé une procédure permettant de pousser plus loin l'approximation.

Ce qui est remarquable est la similitude avec le développement asymptotique de $W(n)$.

$$W(n) \approx L_1 - L_2 + \frac{L_2}{L_1} + \frac{L_2(-2+L_2)}{2L_1^2} + \frac{L_2(6-9L_2+2L_2^2)}{6L_1^3} + \frac{L_2(-12+36L_2-22L_2^2+36L_2^3)}{12L_1^4} + \cdots$$

$L_1 = ln(n)\ et\ L_2 = ln\ (ln\ (n))$.

Encore une fois, si on analyse le reste par rapport à la vraie valeur de p_n on trouve

Donc, avec n = 10^{24} (est la meilleure valeur connue de p_n). On trouve

$$p_n \approx 58308642550474983476717666$$

La vraie valeur étant 58310039994836584070534263, on a donc une approximation à 0.999976, soit 99.9976 % près. On a donc gagné 2 ordres de grandeur.

Une meilleure approximation

Une analyse sommaire indique que le reste après les 2 termes $W_{-1}(n)$ et $W(n)$ est de nature logarithmique. Une idée simple est alors de calculer la courbe des moindres carrés logarithmique. On peut remarquer aussi qu'en ne prenant qu'un seul terme pour l'approximation de p_n , cette forme est équivalente à plusieurs termes du développement de Cipolla. Si on prend les 2 termes ce sera encore plus précis. En d'autres mots, étant donné la nature du développement asymptotique de $W(n)$, chaque terme est l'équivalent à plusieurs termes du développement de Cipolla.

On fait ici l'hypothèse que le reste après les 2 termes est une courbe logarithmique et qu'une fois calculée elle collera à la réalité.

Se pose alors la question de savoir quelle est la nature de ce qui reste ? En fait, on ne le sait pas exactement. La meilleure formule connue pour $\pi(n)$ est celle de Li(n). Riemann a proposé une 2ème formule qui semble bien meilleure à première vue mais qui a été invalidée par Littlewood en 1914. Cette 2ème formule, appelée Riemann R ou de façon équivalente, la série de Gram est

$$\pi(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(x)^k}{k\, k!\, \zeta(k+1)}$$

Numériquement, l'approximation de $\pi(n)$ par la formule de Riemann R ou de la série de Gram (converge plus rapidement) est excellente. Mais Littlewood a montré qu'après 10^9 , l'approximation dérive. Quant à la fonction Li(n), elle a un meilleur comportement à des échelles beaucoup plus grandes, le premier croisement à été évalué à 10^{316} environ. C'est-à-dire que $Li(n) - \pi(n) = 0$ aux environs de 1.397×10^{316}.

Un motif intéressant apparait dans ces calculs. Si on analyse de près l'erreur avec le premier terme pour la formule (1) on trouve assez vite une courbe de type logarithmique, alors se pose la question : quelle précision peut-on atteindre si on utilise une approximation de cette dernière ? Par exemple avec

$$p_n = -nW_{-1}\left(\frac{-e}{n}\right)$$

Le ratio entre les deux est de l'ordre de 1 dès le départ et avoisine 0,999 quand $n = 10^{24}$. Donc, en calculant une courbe de type $a\, log(n) + b$, on trouve un coefficient r^2 assez près de 1. L'approximation est décevante même si le coefficient est très élevé. Plusieurs formules ont été testées [11] pour obtenir la meilleure précision.

La meilleure approximation qui a été trouvée empiriquement est :

$$p_n = -nW_{-1}\left(\frac{-e}{n}\right) - \frac{n\, c(n)}{W_0(n)}$$

où $c(n)$ est de la forme $a\, log(n) + b$.

Ce qui se passe est un effet des poupées russes, les matrioshkas. Le reste avec le premier terme est une courbe qui est à peu près une droite si on regarde de loin, le reste après 2 termes est encore une 'droite' vue de loin mais qui est toujours de type logarithmique. Et même avec la correction finale avec c(n) : le reste est encore une courbe de type logarithmique. Toutes ces courbes semblent équivalentes mais c'est lorsqu'on analyse de près l'erreur que ça varie.

En prenant un échantillonnage des valeurs de p_n entre 10^2 à 10^{16}

Valeur du pas	Nombre de valeurs	Étendue
10^2	27117419	2711741900

10^3	32082085	32082085000
10^4	45020269	450202690000
10^5	10000000	10^{12}
10^6	4046531	4.046531 x 10^{12}
10^7	5000000	5 x 10^{13}
10^8	454060	4.54060 x 10^{13}
10^9	2200000	2.2 x 10^{15}
10^{10}	1112394	1.112394 x 10^{16}
10^{11}	111239	1.11239 x 10^{16}
10^{12}	54974	5.4974 x 10^{16}
10^{13}	12317	1.2317 x 10^{17}
10^{14}	2162	2.162 x 10^{17}

On résoud l'équation pour chaque n de la table choisie.

$$-nW_{-1}\left(\frac{-e}{n}\right) - \frac{n\,x}{W_0(n)} - p_n = 0$$

par la méthode dichotomique ou bisection. Les valeurs se situent entre 0,8 et 1. On calcule ensuite la courbe des moindres carrés logarithmique. Le coefficient r^2 indiquera si la courbe est juste. Le calcul des coefficients a et b se fait selon la formule :

$$b = \frac{n\sum_{i=1}^{n}(y_i \ln x_i) - \sum_{i=1}^{n} y_i \ \sum_{i=1}^{n} \ln x_i}{n\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i)^2 - (\sum_{i=1}^{n} \ln x_i)^2}$$

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i - b\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i)}{n}$$

Rappel, le coefficient r^2 indique si les données expérimentales collent à la droite. Si r^2 est près de 1 ou de 0, la courbe suit une droite de très près. La droite LLS (logarithmimic least-squares) est simplement le log des valeurs qui sont alignées sur une droite.

Pour la plage 100000 (10^5) … 10^{12} on trouve :

$$0.00074741174603301665420395275429537\, ln(n) + 0.88596350453664534160747106131754$$

Une fois obtenue cette formule, il reste à comparer avec la formule de Cipolla. Nous prendrons ici 16 termes de la formule de Cipolla. En appendice, les 16 termes du développement de Cipolla (programme de B. Salvy).

Comparaison avec l'échelle 100000 ($\mathbf{10^5}$) … $\mathbf{10^{12}}$

$c(n) = 0.88596350453664534160747106131754 + 0.00074741174603301665420395275429537\ ln(n)$

Formule pour p_n	Formule de Cipolla (Salvy)	Formule avec Lambert W
Écart min	1624.006	.0031723
Écart max	7963203	3257663
Écart moyen	3893600	617551

La formule avec Lambert W est clairement plus précise sur tout l'intervalle. De plus, certaines valeurs sont exactes puisque l'erreur est inférieure à 0,5.

Comparaison avec l'échelle 10000000000 ($\mathbf{10^{10}}$) … $\mathbf{1.112394}$ x $\mathbf{10^{16}}$

$c(n) = 0..88281106024067112695415355478542 + .00085618370164044557239133114214399 * ln(n)$

Formule pour p_n	Formule de Cipolla (Salvy)	Formule avec Lambert W
Écart min	640495	261
Écart max	1004659553	513851652
Écart moyen	4.64302e+08	1.25614e+08

Plus de 11 valeurs atteignent une précision de 14 chiffres décimaux.

Résultats pour $\boldsymbol{\pi(n)}$

Pour le calcul de $\pi(n)$, il suffit d'inverser la formule pour p_n. Numériquement tout d'abord c'est très rapide et surtout très précis et même plus précis que Li(n).

Nous posons donc que

$$\pi(n) \approx \left(-nW_{-1}\left(\frac{-e}{n}\right) - \frac{n\,c(n)}{W_0(n)}\right)^{-1}$$

C'est-à-dire qu'on résoud l'équation pour une valeur $\pi(n)$ de la table choisie.

Avec la même expression pour $c(n)$.

Comparaison avec l'échelle 100000 ($\mathbf{10^5}$) … 744000000000

$c(n) = 0.88596350453664534160747106131754 + 0.00074741174603301665420395275429537\ ln(n)$

Formule pour p_n	Li(n)	Formule avec Lambert W inversée	Formule de Gram ou Riemann R
Écart min	37.8	.0006565	0.0002465
Écart max	53330.90	19292.58	19205.24
Écart moyen	24433.6	3659.52	3713.91

La formule avec Lambert W inversée pour le calcul de $\pi(n)$ est plus précise que Li(n) et arrive à avoir une meilleure valeur moyenne avec l'échelle 10^5 mais n'est pas plus précise pour l'échelle 10^{10} (de justesse).

Appendice : formule de Cipolla avec 16 termes

```
k*ln(k)*(1+(ln(ln(k))-1)/ln(k)+(ln(ln(k))-2)/ln(k)^2+(-(1/2)*ln(ln(k))^2+3*ln(ln(k))-
11/2)/ln(k)^3+((1/3)*ln(ln(k))^3-7*ln(ln(k))^2*(1/2)+14*ln(ln(k))-131/6)/ln(k)^4+(-
(1/4)*ln(ln(k))^4+23*ln(ln(k))^3*(1/6)-49*ln(ln(k))^2*(1/2)+159*ln(ln(k))*(1/2)-
1333/12)/ln(k)^5+((1/5)*ln(ln(k))^5-49*ln(ln(k))^4*(1/12)+73*ln(ln(k))^3*(1/2)-
367*ln(ln(k))^2*(1/2)+3143*ln(ln(k))*(1/6)-13589/20)/ln(k)^6+(-
(1/6)*ln(ln(k))^6+257*ln(ln(k))^5*(1/60)-1193*ln(ln(k))^4*(1/24)+1027*ln(ln(k))^3*(1/3)-
17917*ln(ln(k))^2*(1/12)+47053*ln(ln(k))*(1/12)-193223/40)/ln(k)^7+((1/7)*ln(ln(k))^7-
89*ln(ln(k))^6*(1/20)+959*ln(ln(k))^5*(1/15)-13517*ln(ln(k))^4*(1/24)+6657*ln(ln(k))^3*(1/2)-
39769*ln(ln(k))^2*(1/3)+493568*ln(ln(k))*(1/15)-32832199/840)/ln(k)^8+(-
(1/8)*ln(ln(k))^8+643*ln(ln(k))^7*(1/140)-14227*ln(ln(k))^6*(1/180)+34097*ln(ln(k))^5*(1/40)-
76657*ln(ln(k))^4*(1/12)+616679*ln(ln(k))^3*(1/18)-
642111*ln(ln(k))^2*(1/5)+36780743*ln(ln(k))*(1/120)-893591051/2520)/ln(k)^9+((1/9)*ln(ln(k))^9-
1321*ln(ln(k))^8*(1/280)+119603*ln(ln(k))^7*(1/1260)-
218809*ln(ln(k))^6*(1/180)+1328803*ln(ln(k))^5*(1/120)-
2696687*ln(ln(k))^4*(1/36)+33904723*ln(ln(k))^3*(1/90)-
40633409*ln(ln(k))^2*(1/30)+7921124011*ln(ln(k))*(1/2520)-2995314311/840)/ln(k)^10+(-
(1/10)*ln(ln(k))^10+12169*ln(ln(k))^9*(1/2520)-17841*ln(ln(k))^8*(1/160)+74603*ln(ln(k))^7*(1/45)-
12834463*ln(ln(k))^6*(1/720)+3501785*ln(ln(k))^5*(1/24)-
332109377*ln(ln(k))^4*(1/360)+199802702*ln(ln(k))^3*(1/45)-
26038842937*ln(ln(k))^2*(1/1680)+1585618043*ln(ln(k))*(1/45)-
18901604813/480)/ln(k)^11+((1/11)*ln(ln(k))^11-
12421*ln(ln(k))^10*(1/2520)+648773*ln(ln(k))^9*(1/5040)-
3144689*ln(ln(k))^8*(1/1440)+22783361*ln(ln(k))^7*(1/840)-
187923713*ln(ln(k))^6*(1/720)+716745529*ln(ln(k))^5*(1/360)-
1442721139*ln(ln(k))^4*(1/120)+47127721999*ln(ln(k))^3*(1/840)-
966062632891*ln(ln(k))^2*(1/5040)+308893960883*ln(ln(k))*(1/720)-5837964271731/12320)/ln(k)^12+(-
(1/12)*ln(ln(k))^12+139151*ln(ln(k))^11*(1/27720)-
117221*ln(ln(k))^10*(1/800)+253818967*ln(ln(k))^9*(1/90720)-
795876559*ln(ln(k))^8*(1/20160)+314837287*ln(ln(k))^7*(1/720)-
4223985979*ln(ln(k))^6*(1/1080)+6399190654*ln(ln(k))^5*(1/225)-
186267044627*ln(ln(k))^4*(1/1120)+1639283993969*ln(ln(k))^3*(1/2160)-
2857440028197*ln(ln(k))^2*(1/1120)+56866193897941*ln(ln(k))*(1/10080)-
8799795072177107/1425600)/ln(k)^13+((1/13)*ln(ln(k))^13-
141461*ln(ln(k))^12*(1/27720)+5712631*ln(ln(k))^11*(1/34650)-
529792703*ln(ln(k))^10*(1/151200)+5029078321*ln(ln(k))^9*(1/90720)-
14019042613*ln(ln(k))^8*(1/20160)+3999527649*ln(ln(k))^7*(1/560)-
328281081287*ln(ln(k))^6*(1/5400)+5387564881553*ln(ln(k))^5*(1/12600)-
24626379317209*ln(ln(k))^4*(1/10080)+165776749480421*ln(ln(k))^3*(1/15120)-
122304707880473*ln(ln(k))^2*(1/3360)+132580053003639763*ln(ln(k))*(1/1663200)-
1122784789749582O419/129729600)/ln(k)^14+(-(1/14)*ln(ln(k))^14+1866713*ln(ln(k))^13*(1/360360)-
38193059*ln(ln(k))^12*(1/207900)+1023073061*ln(ln(k))^11*(1/237600)-
9793824913*ln(ln(k))^10*(1/129600)+3052471597*ln(ln(k))^9*(1/2880)-
495982820159*ln(ln(k))^8*(1/40320)+1296463478011*ln(ln(k))^7*(1/10800)-
8292697622023*ln(ln(k))^6*(1/8400)+113897730216643*ln(ln(k))^5*(1/16800)-
328979431306961*ln(ln(k))^4*(1/8640)+728776729471327*ln(ln(k))^3*(1/4320)-
263517478549855027*ln(ln(k))^2*(1/475200)+12023328215517658997*ln(ln(k))*(1/9979200)-
12489685656838855823/9609600)/ln(k)^15+((1/15)*ln(ln(k))^15-
1892453*ln(ln(k))^14*(1/360360)+1097406347*ln(ln(k))^13*(1/5405400)-
51963846821*ln(ln(k))^12*(1/9979200)+35812996787*ln(ln(k))^11*(1/356400)-
50524883881*ln(ln(k))^10*(1/32400)+130863766133*ln(ln(k))^9*(1/6480)-
134493163147463*ln(ln(k))^8*(1/604800)+158343801542491*ln(ln(k))^7*(1/75600)-
847040297248639*ln(ln(k))^6*(1/50400)+4286267926497719*ln(ln(k))^5*(1/37800)-
181013884586875*ln(ln(k))^4*(1/288)+61402203444117317*ln(ln(k))^3*(1/22275)-
6406940325583612039*ln(ln(k))^2*(1/712800)+629213463986068329377*ln(ln(k))*(1/32432400)-
540034620553479284266 3/259459200)/ln(k)^16)
```

Formule : $\{ c^n \}$, $n > 1$. $\{ x \}$ est l'entier le plus près de x. Cette formule générera 387 nombres premiers consécutivement.

Trouvée le 13 février 2020.

```
c=31622.7767185595693411819787061428809211960501987066916850926043972317850362074\
0864754895287267371526503218374753273756995351706550976656637342668814334968666\
7101253409003404462577908490644122849185117910040141357956901545395665144254926\
0368733397963027260382237357834177624731483528295517610175141894026910108773091\
9102265276155731349632552235646978900096647191268683240475690792929946636829523\
4537889911695242127537567542061489388029765753953635000339676196085538110591110\
4585141090122658582123787181713420542296072149094895524374290222132677205020669\
4445695634733625075384860598871603780178145604934183538244723142272254031969991\
1200615639448998851471276974790874283370668013877448445827189836933336932748683\
7096031634918922648353422318092987818160592340775276127611835724115334227731181\
2382996597965951469528485537607311159096901622414506311547051905763888568046565\
1049166427400916041959872354321110387678917719194813843955193371342978053712862\
0453524374293366590642009861486573168440136568062290968471195962360800157373661\
7143373070165944776420832972019845288922599364819623823506773804799606015475838\
5408260449690988543205825633919510504581682546272086621725352722128830938671472\
3701049700231880709516101390100111272624859303900292400178495789671057286940063\
2939593946897204453503410798379799657214376636228419529879327743486265567548211\
3576902297196496895449727060689840512311047588147145276057014367506675470634720\
3613695309242488801761837728748016218351333849539796405079226399842615890863407\
8599788643344554273489131657070089852713689432765198710321770400528221171272704\
0206817976260112923629070254233895740091029484512516533519548133198851927540897\
2455463807670389342975063899265873368827496362107236544910631527268372333090949\
6599079804007385491895861312920245982318590485133202228187065916469134386843632\
6710041357132606931061476180276702785264896516822792415007247720747091646449625\
4232619886412790996612644285061938042714365958818635813884068102869316665794217\
8129882233115569739186048345925987950967419367699136707185345903901351463318825\
1244196261056665156495557988992317891312059314344240462240709984206444212348221\
8190871664878419254779689447073126235375450129126837015443848876734518730078317\
2181027964646479454712955925745105851307097731929480992845429539117442668639185\
0136062499136302371850993390404927892216296025369572878087609243226453797867139\
3469752835416017623841715414916352205819923096864111587928911940669604635015684\
7581294362465199335660467818710512634839702174274066131707754882547089414783999\
5175780316883752292172422813518529901439742936742350859348052219626008764448086\
8799805941436104497986393192697940430432240135606638442974285495155375736097977\
5028072301126799837273791743647186112604934117249206784451299546711413367340501\
9569662946589302409473910039374488077465339877358211311017648701799022641035886\
3484903089265972324361003850699420234653560932806297966170293267500259491821818\
1198369337121033424541848925401516832417018610965424291916655343744273160443306\
9511466370054097794456240488450136865019379631160402883720249277945984213446264\
5988545557033239241001377665704382870870778480345318077395858285768401082992990\
6805331632859321631952446031722731370128828153399370730874506904362805691466137\
7583386102156444256251269973458369382478957925560223823273029506595199057689583\
4494612415638418972310233727907333983390896921545293647542190449362825483734461\
9136791675945740812366000990257217886571673799707804765177555198609248755512965\
3027715120275248760325555105027812428659621914108249357373916718531633964814113\
5054938247521657216756907893392593294500494373382654321063600590692748010279682\
9489802744322026037605807751069630567877106566741622790692273950877423124270171\
5917401923410677957081175116161669874591767721421034406660019253785321121319776\
9175525445047016860655132021850376701748670306588930285165633137124920560978651\
3594698267301854434353463258169713980181998659759698957791522027302972704755488\
1930524920113346550223965908425088243203667733442482257635397243984316985885847\
83136493624803906795199631755683395928864469842994618930630015739509
```

Les premiers sont :

```
1000000007
31622776952311
1000000014783746303
3162277718606267774564609
```

1000000022175619536498921059

…

The following constant c will generate 565 consecutive primes.

Formula : { c^n } , n > 1. Where { x } is the nearest integer to x.

Found on Feb. 13 2020.

```
c =
55237.075042967647154331247815286174172637407435349766253557408607657108195592125636580713628080659\
516106616080795117986654785234100829360288179190471423450519863363557788376392580644911222667893510\
974241988869207456699800233885605605675094352653650767616236231134331699696673981212194965780823859\
542513548714675259650029713063945705266192886108484426067463553931028213163136107111991147389991015\
758877686062480974368913148037546562272713868086591852396135188995526263750011830402068838021477394\
593977513965032757199104062980046792636993233459638498156642835757990803045249621471250672104424082\
878866148815914455770104219035162438636842947711686257926512286234815491738282106295507458532362384\
505684106687414032550750582826355233367560180044896480822312106639235650936616271234862169623992549\
833385138618768297087536703672300033186237217428446064036332101656334392544696310217306392292312346\
755485926236953371349135828375352794075586146180559619926835893629337960083779229062717369606434545\
504588267437002303613076141782628279883795320599659630590570183343898576003482100591286183029699994\
063814810222758113360617684917332500481699286072092564893192596718377047150527523498197744990143307\
282929833675274238178999906884020618788888207069859056193782391833625989458610609425161081429098397\
262673032249349165602948193254418930839358484996327532617121296457706230574672722644329006406905661\
554568488675010895335208044022297310319590454397380243261529601006290591280527131008172214873455307\
846029050480478897222168190949942116718795813290833306634424608567282733590225518704764315830836271\
488978275897499168375273014497123044786109601068205174355781381638667093810702022010186225448729564\
843554069570892699749740600074481499068166335397596759598128866132599812142485679806875565997478728\
579599986775121135628042059053876562688825014407569110828086141189304344864910568984681138439693326\
595968526026794725172753466165608103529399244710849836682979591773342594857293714440437048053941230\
653996122878378321421090271842048479506761217286571053378376179023939582745997906530137746502948611\
369781549882181582983982505032909050559730735651275262370184002886000823299644195578825239338818829\
009005332471103397114297327339949998357497688759064988837634701380224120008810932358899594679033310\
899424386453362011453921304309306255101753513619790772592057506325260396249085790892913612075380691\
884465341290649315604700955918275775183513010582557322701852913220594474896531475659948404505758397\
284564342645888377287989333791914642979499661944529260312991292926277827100616937434742056953248456\
587298551685162605999082955969802416928896773275996901278244838855444134026477182996083314227829380\
548586713169997351534962857881721058119179538424167872514362450972158935474469666661246215282353722\
715027861988650771006099035187302625072908461596058978030149206030170409631196442380060614276551970\
926605627270250694292985443529487323803634231537252407443955375906840028428946726795103538674279109\
305252398298453833184192427914947025118464433411073229232229998548264774183512099786231815537436119\
597098100360281335783116895664055052196647511656683848323002867255672125414444559705652385714381256\
419543213177862169726786883859815970771877484491333963176999672328218089760258606778864469648372530\
048191439479621468671122912958977029072870683114873071057007923640612986308009700073578476864991023\
526107715994679726723761380676198249732559976072882478851916750915834328651965761139602568673754363\
751654573271053486531734065184430869201999518794541946582655916755389400237099252306685828915033729\
852240102858047186996655465799800066232643877803395351379536362892268609582955560528056385043463200\
351115553140934102308747792441699862630954725756751795278248938131798751060195281580363339045301804\
747798756921399360782555396309549519568411517501550524600481600185965938278479165384176766538243634\
138561788071588053117168947365305522056682424792408370431444817403062202296043563769841058418488485\
894228942593266173224984794003299138402533386597073677935317794463971206544351066096664442654641680\
6402635168666758237850879891862569461
```

Primes are :
3051134459
168535743094673
9309421488742788613
514225213380301008078907
28404296700473737832215645327
1568970268386786190461323870128523
86665328455065998699156259015013574567
478713925149591995366696192531499395660543

…

Bibliographie

[1] Encyclopedia of Integer Sequences, N.J.A. Sloane, Simon Plouffe, Academic Press , San Diego 1995.
[2] Mills, W. H. (1947), *A prime-representing function, Bulletin of the American Mathematical Society 53 (6): 604, doi:10.1090/S0002-9904-1947-08849-2*.
[3] *E.* M. Wright (1951). *A prime-representing function. American Mathematical Monthly. 58 (9): 616–618. doi:10.2307/2306356. JSTOR 2306356.*
[4] The OEIS, Online Encyclopedia of Integer Sequences, sequences :
sequences A051021, A051254, A016104 and A323176.
[5] Wikipedia : formulas for primes (effective and non-effective formulas).
https://en.wikipedia.org/wiki/Formula_for_primes
[6] Baillie Robert, The Wright's fourth prime:
https://arxiv.org/pdf/1705.09741.pdf
[7] Wikipedia : Le recuit simulé : https://fr.wikipedia.org/wiki/Recuit_simul%C3%A9
[8] Wikipedia : Simulated Annealing : https://en.wikipedia.org/wiki/Simulated_annealing
[9] László Tóth, A Variation on Mills-Like Prime-Representing Functions, ArXiv :
https://arxiv.org/pdf/1801.08014.pdf
[10] Makoto Kamada Prime numbers of the form 7, 73,
https://stdkmd.net/nrr/7/73333.htm#prime
[11] Plouffe, Simon : Pi, the primes and the Lambert W function, conference in July 2019, Montréal at the ACA 2019 (ETS). https://vixra.org/abs/1907.0108