RENÉ LAGRANGE

Quelques résultats dans la métrique des permutations

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 79, nº 3 (1962), p. 199-241.

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1962_3_79_3_199_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
3e série, t. 79, 1962, p. 199 à 241.

QUELQUES RÉSULTATS
DANS LA MÉTRIQUE DES PERMUTATIONS

PAR M. RENÉ LAGRANGE.

(Dijon).

INTRODUCTION.

Étant données une suite P_0 de n objets distincts $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et une permutation $P = b_1, b_2, \ldots, b_n$ de ces mêmes objets, nous appelons « écart de a_i entre P_0 et P » la valeur absolue de la différence de ses rangs dans P_0 et P. Si a_i a le rang k_i dans P, cet écart $e(a_i) = |k_i - i|$. Nous appelons « écart des deux permutations » en question la borne supérieure de l'ensemble des $e(a_i)$, soit

$$|P_0, P| = \sup\{e(a_i)\}_{i=1,2,\ldots,n}.$$

Cet écart satisfait les axiomes de la distance dans une métrique, et l'ensemble des $n!$ permutations devient ainsi un espace métrique fini. Il est de plus homogène, en ce sens que le nombre des éléments composant une boule $\mathcal{B}(P; \rho)$ ne dépend que du rayon ρ de cette boule. Nous nous proposons d'évaluer ce nombre pour $\rho < 4$, c'est-à-dire le nombre des permutations situées aux distances 1, 2 ou 3 d'une permutation donnée. Nous nous en tenons à ces valeurs de ρ, et c'est déjà très compliqué pour l'écart 3.

Outre les permutations orientées dont il vient d'être question, on peut considérer les permutations non orientées. Chacune de celle-ci est la classe $P^\star$ formée par deux permutations orientées opposées $P = b_1, b_2, \ldots, b_n$ et $\overline{P} = b_n, \ldots, b_2, b_1$. Leur nombre est $\frac{n!}{2}$ si $n \geqq 2$. On peut faire de leur ensemble un espace métrique en définissant la distance de deux telles permutations $P_0^\star$, $P^\star$ par l'écart

$$|P_0^\star, P^\star| = \inf\{|P_0, P|, |P_0, \overline{P}|\}.$$

Les permutations P et P^* sont ouvertes. On peut aussi former des permutations fermées en plaçant les a_i aux n sommets d'un polygone ; elles sont elles-mêmes orientées ou non. Une permutation fermée orientée est la classe ϖ des n permutations ouvertes orientées déduites de l'une d'elles P par permutation circulaire. Par exemple, ϖ_0 est la classe formée par les permutations

$$P_0^k = a_k, a_{k+1}, \quad \ldots, \quad a_n, a_1, \quad \ldots, \quad a_{k-1} \quad (k=1, 2, \ldots, n).$$

Leur nombre est $(n-1)$! Leur espace est métrisé avec l'écart

$$|\varpi_0, \varpi| = \inf\{|P_0^k, P^h|\}_{k, h=1, 2, \ldots, n}.$$

Enfin, une permutation fermée non orientée est la classe ϖ^* formée par les deux permutations orientées opposées ϖ, $\overline{\varpi}$ engendrées par deux permutations ouvertes opposées P et $\overline{P}$. Leur nombre est $\frac{(n-1)!}{2}$ si $n > 2$. On peut encore en faire un espace métrique avec l'écart

$$|\varpi_0^*, \varpi^*| = \inf\{|\varpi_0, \varpi|, |\varpi_0, \overline{\varpi}|\}.$$

Ces divers espaces sont homogènes, et nous résolvons également pour eux le problème énoncé pour le premier.

CHAPITRE I.

Permutations ouvertes, orientées et non orientées.

1. Permutations orientées. — Il est commode de représenter les a_i par les nombres entiers $i (i=1, 2, \ldots, n)$. Dans ces conditions, $P_0 = 1, 2, \ldots, n$, et, si $P = b_1, b_2, \ldots, b_n$,

$$e(b_i) = |b_i - i|;$$

l'écart des deux permutations est

$$|P_0, P| = \sup\{|b_i - i|\}_{i=1, 2, \ldots, n}.$$

Cet écart $|P_0, P|$ est évidemment symétrique et n'est nul que si tous les $b_i - i = 0$, donc si $P = P_0$. Considérons une troisième permutation $P' = b'_1, b'_2, \ldots, b'_n$; son écart avec P_0 est

$$|P_0, P'| = \sup\{|b'_i - i|\}_{i=1, 2, \ldots, n}.$$

D'autre part,

$$|P, P'| = \sup\{|k(i) - h(i)|\}_{i=1, 2, \ldots, n},$$

où k et h sont définis par $b_k = b'_h = i$. Avec ces notations, on a encore

$$|P_0, P| = \sup\{|k(i) - i|\}_{i=1, 2, \ldots, n}, \qquad |P_0, P'| = \sup\{|h(i) - i|\}_{i=1, 2, \ldots, n}.$$

Or

$$|k(i)-h(i)|\leqq|k(i)-i|+|h(i)-i|$$

entraîne

$$|k(i)-h(i)|\leqq|P_0, P|+|P_0, P'|,$$

donc

$$|P, P'|\leqq|P_0, P|+|P_0, P'|.$$

Les trois axiomes caractéristiques d'une métrique sont satisfaits et l'ensemble des permutations P constitue, avec cet écart, un espace métrique fini de $n!$ éléments. Les distances sont des nombres entiers, et le diamètre est $n-1$.

Nous désignons par $\Phi(\alpha; n)$ le nombre des permutations dont la distance à une permutation donnée P est inférieure ou égale à α; il ne dépend évidemment que de α, et le nombre des permutations à la distance α de P est

$$\varphi(\alpha; n)=\Phi(\alpha; n)-\Phi(\alpha-1; n). \tag{1}$$

2. D'une manière générale, un espace métrique fini homogène E est caractérisé par les distances l_k des éléments entre eux deux à deux, soit

$$l_0=0<l_1<l_2<\ldots<l_p,$$

l_p étant le diamètre, et par les nombres $N_k (N_0=1)$ des éléments situés à la distance l_k d'un même élément. $N=\sum_{k=0}^{p} N_k$ est le nombre cardinal de E. Par exemple, pour $n=3$, le nombre N des permutations formant E est 6; les distances sont 0, 1, 2, avec (¹) $N_1=\varphi(1; 3)=2$, $N_2=\varphi(2; 3)=3$. Un schéma est formé par les six sommets d'un hexagone dont les côtés sont égaux et mesurent 1 et les diagonales 2. Bien entendu, on peut construire bien d'autres espaces métriques homogènes de six éléments. Par exemple, on peut supposer

$$0<l_1<l_2<l_3<l_4, \qquad \text{avec} \quad N_0=N_1=N_2=N_4=1 \quad \text{et} \quad N_3=2.$$

Le schéma serait un hexagone, avec ses côtés et les 9 cordes joignant ses sommets; trois des côtés non adjacents deux à deux mesurent l_1 les trois autres l_2; les cordes sous-tendant deux côtés consécutifs mesurent l_3 et les diagonales mesurent l_4;

Pour $n=4$, le nombre N des permutations constituant E est 24, et les distances sont 0, 1, 2, 3, avec

$$N_0=1, \qquad N_1=\varphi(1; 4)=4, \qquad N_2=\varphi(2; 4)=9 \qquad \text{et} \qquad N_3=\varphi(3; 4)=10.$$

En voici un schéma. Désignons par P_1 la permutation 1, 2, 3, 4. Plaçons aux sommets d'un quadrilatère plan $P_1P_2P_4P_3$ cette permutation P_1 et

$$P_2=1, 2, 4, 3, \qquad P_3=2, 1, 3, 4, \qquad P_4=2, 1, 4, 3.$$

(¹) Ces valeurs de N_1, N_2 sont immédiates, mais elles se trouvent également dans les résultats qui seront obtenus plus loin. Cette observation s'applique aussi à l'exemple suivant.

On donne la mesure 1 aux six côtés et diagonales de ce quadrilatère. Élevons quatre segments perpendiculaires de mesure 1 au plan de ce quadrilatère, aux quatre sommets, soit P_1P_5, P_2P_9, P_3P_{13}, P_4P_{17}, les extrémités représentant les permutations

$$P_5 = 1, 3, 2, 4, \qquad P_9 = 1, 4, 2, 3, \qquad P_{13} = 2, 3, 1, 4, \qquad P_{17} = 2, 4, 1, 3;$$

chacune diffère du sommet associé par transposition des deux chiffres médians. Dans ce second plan, chacune de ces quatre permutations est le sommet d'un quadrilatère qui s'en déduit comme $P_1P_2P_3P_4$ de P_1, par transposition des deux derniers chiffres, ou des deux premiers, ou par ces deux transpositions simultanées. Ainsi, P_5 fournit le quadrilatère $P_5P_6P_8P_7$, où

$$P_6 = 1, 3, 4, 2, \qquad P_7 = 3, 1, 2, 4, \qquad P_8 = 3, 1, 4, 2;$$

P_9 fournit $P_9P_{10}P_{12}P_{11}$, où

$$P_{10} = 1, 4, 3, 2, \qquad P_{11} = 4, 1, 2, 3, \qquad P_{12} = 4, 1, 3, 2;$$

P_{13} engendre $P_{13}P_{14}P_{16}P_{15}$, avec

$$P_{14} = 2, 3, 4, 1, \qquad P_{15} = 3, 2, 1, 4, \qquad P_{16} = 3, 2, 4, 1;$$

enfin, P_{17} engendre $P_{17}P_{18}P_{20}P_{19}$, avec

$$P_{18} = 2, 4, 3, 1, \qquad P_{19} = 4, 2, 1, 3, \qquad P_{20} = 4, 2, 3, 1.$$

Dans ce plan, outre les seize côtés et les huit diagonales qui mesurent 1, on relie par des segments de même mesure 1 les couples P_6P_{10}, P_7P_{15}, $P_{11}P_{19}$, $P_{14}P_{18}$. Les quatre sommets qui sont encore adjacents à trois sommets seulement sont P_8, P_{12}, P_{16}, P_{20}, opposés aux sommets qui sont reliés au premier plan. Il suffit de les relier à un troisième plan par quatre perpendiculaires au second plan, de mesure 1 ; les extrémités associées représentent les permutations P_{21}, P_{23}, P_{22}, P_{24} qui se déduisent respectivement de P_8, P_{12}, P_{16}, P_{20} par transposition des deux éléments médians comme dans le passage du premier plan au deuxième; ces permutations, dans l'ordre $P_{21} = 3, 4, 1, 2$, $P_{22} = 3, 4, 2, 1$, $P_{24} = 4, 3, 2, 1$, $P_{23} = 4, 3, 1, 2$ forment un quadrilatère déduit de P_{21} suivant la loi de formation des cinq quadrilatères précédents, et les quatre côtés et les deux diagonales complètent l'ensemble des 48 segments de mesure 1, à raison de quatre segments issus de chaque sommet. Les neuf P_i dont la distance à P_1 est 2 sont naturellement, dans le deuxième plan, P_6, P_7, P_8, P_9, P_{13}, P_{17}, mais aussi P_{10}, P_{15}, et, dans le troisième plan, P_{21}. Les permutations dont la distance à P_1 est 3 sont les sept sommets P_{11}, P_{12}, P_{14}, P_{16}, P_{18}, P_{19}, P_{20} du deuxième plan, et les trois sommets P_{22}, P_{23}, P_{24} du troisième.

3. Calcul de $\Phi(1; n)$. — Le premier élément 1 de P_0 ne peut occuper que les rangs 1 ou 2 dans P. Les permutations $P = b_1, b_2, \ldots, b_n$, où $b_1 = 1$

forment l'ensemble $\{1, (2, 3, \ldots, n)_1\}$ où nous convenons de désigner par $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ l'ensemble des permutations formées par ces n éléments, et par $(a_1, a_2, \ldots, a_n)_\alpha$ le sous-ensemble de ces permutations dont l'écart avec $a_1, a_2, \ldots, a_n$ est inférieur ou égal à α; le nombre des permutations P où $b_1 = 1$ est donc $\Phi(1; n-1)$. Lorsque $1 = b_2$, b_1 est nécessairement 2 et les permutations correspondantes forment l'ensemble $\{2, 1, (3, 4, \ldots, n)_1\}$; leur nombre est $\Phi(1; n-2)$. Nous obtenons ainsi la relation de récurrence

$$\Phi(1; n) = \Phi(1; n-1) + \Phi(1; n-2). \tag{2}$$

Il est clair que le raisonnement conduit à faire $\Phi(1; 0) = 1$ et $\Phi(1; p) = 0$ pour $p < 0$. La suite des $\Phi(1; n)$ n'est rien d'autre que la suite de Fibonacci, avec les valeurs initiales $\Phi(1; 0) = \Phi(1; 1) = 1$. Les premières valeurs $\Phi(1; n)$ et $\varphi(1; n)$ sont fournies par le tableau :

n........	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.
$\Phi(1; n)$....	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987
$\varphi(1; n)$....	0	0	1	2	4	7	12	20	33	54	88	143	232	376	609	986

où l'on utilise, pour la troisième ligne, la formule

$$\varphi(1; n) = \Phi(1; n) - \Phi(0; n) = \Phi(1; n) - 1$$

de la relation (1).

4. Autres expressions de $\Phi(1; n)$. — L'étude classique de la relation de récurrence (2) conduit à l'expression

$$\Phi(1; n) = A x_1^n + B x_2^n,$$

où x_1, x_2 sont les racines de $x^2 - x - 1 = 0$, et où A, B sont tels que

$$\Phi(1; 0) = A + B = 1,$$
$$\Phi(1; 1) = A x_1 + B x_2 = 1.$$

On en déduit

$$\Phi(1; n) = \frac{x_1^{n+1} - x_2^{n+1}}{x_1 - x_2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right] \tag{3}$$
$$= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n+1}{2k+1} 5^k.$$

Théorème. — *On a également*

$$\Phi(1; n) = \sum_{q=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (n-2q, q), \tag{4}$$

où

$$(\alpha, \beta) = \frac{(\alpha+\beta)!}{\alpha!\,\beta!}.$$

En effet, (4) donne bien

$$\Phi(1\,;\,0) = \Phi(1\,;\,1) = 1$$

et il suffit de montrer que son expression vérifie la relation de récurrence (2). Grâce à l'identité

$$(\alpha,\,\beta) = (\alpha-1,\,\beta) + (\alpha,\,\beta-1),$$

(4) donne, pour $n \geqq 2$,

$$\Phi(1\,;\,n) = 1 + \sum_{q=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} [(n-1-2q,\,q) + (n-2q,\,q-1)] + \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair;} \\ \left(0,\,\dfrac{n}{2}\right) & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

Ceci s'écrit encore

$$\Phi(1\,;\,n) = \sum_{q=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (n-1-2q,\,q) + \sum_{q=0}^{\left[\frac{n-3}{2}\right]} (n-2-2q,\,q) + \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair;} \\ 1 & \text{si } n \text{ est pair,} \end{cases}$$

$$= \Phi(1\,;\,n-1) + \sum_{q=0}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]} (n-2-2q,\,q) = \Phi(1\,;\,n-1) + \Phi(1\,;\,n-2).$$

C. Q. F. D.

(4) s'interprète de manière intéressante. Classons en effet les permutations P en classes C_q, d'après le nombre $2q$ des éléments de P_0 dont l'écart est 1 avec P_0, ou, ce qui est équivalent, d'après le nombre q des transpositions effectuées dans P_0 pour former P. Soit $N_q(n)$ le nombre des permutations de C_q. Il est clair que $N_0(n) = 1$. Dans C_1, la transposition unique intéresse deux éléments consécutifs i, $i+1$, pour $i = 1, 2, \ldots, n-1$, donc

$$N_1(n) = n-1 = (n-2,\,1).$$

Dans C_2, les permutations déduites de P_0 par deux transpositions dont la première est celle de p avec $p+1$ sont au nombre de

$$N_1(n-p-1) = (n-p-3,\,1),$$

donc, en vertu de l'identité

$$\sum_{r=0}^{n} (r,\,\alpha) = (n,\,\alpha+1),$$

$$N_2(n) = \sum_{p=1}^{n-3} (n-p-3,\,1) = \sum_{r=0}^{n-4} (r,\,1) = (n-4,\,2).$$

D'une manière générale, si l'on admet que $N_q(n) = (n-2q,\,q)$ jusqu'à une certaine valeur q de l'indice, les permutations de la classe C_{q+1}, dont la première des $q+1$ transpositions effectuées sur P_0 est celle de p avec $p+1$ sont au nombre de

$$N_q(n-p-1)=(n-1-2q-p,\ q),$$

donc

$$N_{q+1}(n)=\sum_{p=1}^{n-1-2q}(n-1-2q-p,\ q)=\sum_{r=0}^{n-2-2q}(r,\ q)=(n-2q-2,\ q+1).$$

L'expression de $N_q(n)$ est générale pour $1\leqq q\leqq\left[\frac{n}{2}\right]$, ce qui démontre (4).

Remarque. — Dans l'expression (3) de $\Phi(1\,;\,n)$,

$$|x_2|=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=0{,}618\,016\ldots,$$

donc $\dfrac{-x_2^{n+1}}{\sqrt{5}}$ est du signe de $(-1)^n$, inférieur à 1 en valeur absolue, et rapidement très petit quand n croît. $\Phi(1\,;\,n)$ est ainsi la valeur approchée à une unité près de $\dfrac{1}{\sqrt{5}}x_1^{n+1}$, par défaut ou par excès suivant que n est impair ou pair. Il suffit donc de connaître une valeur très approchée du logarithme de x_1 et du cologarithme de $\sqrt{5}$ pour calculer aisément $\Phi(1\,;\,n)$. Malheureusement la précision des logarithmes risque d'être insuffisante. Par exemple, avec les logarithmes élémentaires à cinq décimales, on aurait

$$\log\frac{1+\sqrt{5}}{2}=0{,}208\,984,\qquad \log\sqrt{5}=0{,}349\,485,\qquad \operatorname{colog}\sqrt{5}=\bar{1}{,}650\,515,$$

d'où résulte

$$\log\Phi(1\,;\,19)\,\#\,20\times0{,}208\,984+\bar{1}{,}650\,515=3{,}830\,195\,;$$

n étant impair, on est amené à la valeur $\Phi(1\,;\,n)=6\,764$, au lieu du nombre exact 6 765.

5. Calcul de $\Phi(2\,;\,n)$. — Il est clair que $\Phi(2\,;\,n)=n\,!$ pour $n\leqq3$. Supposons donc $n\geqq4$. Il sera commode de préciser la convention faite au début du paragraphe 3. Parmi l'ensemble de permutations représentées par $(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)_\alpha$, nous serons conduits à distinguer des sous-ensembles définis par des restrictions concernant l'écart de certains des premiers éléments. Par exemple, nous représenterons par $(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)_\alpha^i$ l'ensemble des permutations dont l'écart avec la permutation écrite entre parenthèses ne dépasse pas α, mais telles que a_1 présente un écart au plus égal à $i\,(i<\alpha)$; de même $(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)_\alpha^{i,j}(j<\alpha)$ représente le sous-ensemble de celles où a_2 a un écart au plus égal à j, l'écart de a_1 ne dépassant pas i. Dans le même esprit, nous distinguerons plus loin des sous-ensembles $(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)_\alpha^{i,j,k}(k<\alpha)$ en limitant à $i,\ j,\ k$ les écarts respectifs des éléments $a_1,\ a_2,\ a_3$. Les nombres des permutations de ces divers ensembles seront désignés respectivement par $\Phi^i(\alpha\,;\,n)$, $\Phi^{i,j}(\alpha\,;\,n)$, $\Phi^{i,j,k}(\alpha\,;\,n)$.

Ici $\alpha = 2$, donc l'élément 1 de P_0 ne peut être que b_1, b_2 ou b_3 dans P. Les permutations P où $1 = b_1$ ou b_2 sont, avec nos conventions, au nombre de $\Phi^1(2; n)$. Lorsque $1 = b_3$, b_1 est nécessairement 2 ou 3, et b_2 est 2, 3 ou 4. Les permutations où $b_1 = 2$ forment la réunion des deux ensembles $\{2, 3, 1, (4, 5, \ldots, n)_2\}$ et $\{2, 4, 1, (3, 5, \ldots, n)_2^1\}$, car, dans le deuxième, 3 ne peut être que b_4 ou b_5; leur nombre est $\Phi(2; n-3) + \Phi^1(2; n-3)$. Celles où $b_1 = 3$ forment la réunion des deux ensembles $\{3, 2, 1, (4, 5, \ldots, n)_2\}$ et $\{3, 4, 1, 2, (5, 6, \ldots, n)_2\}$, et leur nombre est $\Phi(2; n-3) + \Phi(2; n-4)$. Nous obtenons ainsi une première relation

$$\Phi(2; n) = \Phi^1(2; n) + 2\Phi(2; n-3) + \Phi^1(2; n-3) + \Phi(2; n-4). \tag{5}$$

Exprimons, d'autre part, $\Phi^1(2; n)$ en fonction des $\Phi(2; k)$. Les permutations en question, où $b_1 = 1$, sont au nombre de $\Phi(2; n-1)$; celles où $b_2 = 1$ forment la réunion des deux ensembles $\{2, 1, (3, 4, \ldots, n)_2\}$ et $\{3, 1, (2, 4, \ldots, n)_2^1\}$; leur nombre est $\Phi(2; n-2) + \Phi^1(2; n-2)$. Nous avons ainsi une deuxième relation

$$\Phi^1(2; n) = \Phi(2; n-1) + \Phi(2; n-2) + \Phi^1(2; n-2). \tag{6}$$

Compte tenu de (6), (5) est remplacé par la relation de récurrence

$$\begin{aligned}\Phi(2; n) = \Phi(2; n-1) &+ \Phi(2; n-2) + 2\Phi(2; n-3) \\ &+ \Phi(2; n-4) + \Phi^1(2; n-2) + \Phi^1(2; n-3).\end{aligned} \tag{7}$$

L'ensemble (6), (7) est une relation de récurrence vectorielle portant sur un vecteur d'ordre 6. Mais il est plus simple de déduire de ces deux relations une relation de récurrence pour $\Phi(n)$ en retranchant les deux formules (7) relatives à $\Phi(2; n)$ et $\Phi(2; n-1)$. Compte tenu de (6), on obtient tout de suite la relation de récurrence du cinquième ordre seulement ([2])

$$\Phi(2; n) = 2\Phi(2; n-1) + 2\Phi(2; n-3) - \Phi(2; n-5). \tag{8}$$

Dans ces formules, on doit faire $\Phi(2; 0) = 1$, mais $\Phi^1(2; 0) = 0$. L'addition des relations (6) d'indices n, $n-2$, $n-4$, ... donne dans tous les cas

$$\Phi^1(2; n) = \sum_{k=0}^{n-1} \Phi(2; k), \tag{9}$$

qui exprime $\Phi^1(2; n)$ en fonction du symbole Φ. Réciproquement, on déduit de (9) l'expression de $\Phi(2; n)$ en fonction du symbole Φ^1, savoir

$$\Phi(2; n) = \Phi^1(2; n+1) - \Phi^1(2; n).$$

([2]) On peut associer en effet l'expression (6) de $\Phi^1(2; n-1)$ à (7), ce qui conduit à former le vecteur d'éléments $\Phi(2; n-i)$ ($i = 0, 1, 2, 3$) et $\Phi^1(2; n-j)$ ($j = 1, 2$). La matrice d'ordre 6 de la relation de récurrence vectorielle a les valeurs caractéristiques de la matrice associée à (8), et, en plus, la valeur caractéristique -1.

Pour les premières valeurs de n, (8) fournit aisément le tableau :

n.........	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.
$\Phi(2;n)$...	1	1	2	6	14	31	73	172	400	932	2 177	5 081	11 854	27 662	64 554

Grâce à ce tableau et à celui des valeurs de $\Phi(1;n)$, on peut former les valeurs de $\varphi(2;n)=\Phi(2;n)-\Phi(1;n)$ pour ces valeurs de n.

Remarque. — (8) conduit à l'expression

$$\Phi(2;n)=\sum_{k=1}^{5}\lambda_k x_k^n, \tag{10}$$

où les x_k sont les cinq racines de l'équation

$$\theta(x)\equiv x^5-2x^4-2x^2+1=0,$$

qui sont simples, trois d'entre elles étant réelles, respectivement comprises dans les intervalles $(-1, 0)$, $(0, 1)$ et $(2, 3)$, et les deux dernières imaginaires conjuguées. Les λ_k seraient fournis par les valeurs de $\Phi(2;n)$ pour $0\leqq n\leqq 4$. Ces observations sont d'un caractère plus théorique que pratique.

6. $\Phi^1(2;n)$ n'est pas sans intérêt. Il résulte de (9) qu'il vérifie la même relation de récurrence (8) que $\Phi(2;n)$. Seules les valeurs initiales diffèrent, et l'on obtient, à l'aide de (6) ou de (9), le tableau ;

n..........	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.
$\Phi^1(2;n)$....	0	1	2	4	10	24	55	128	300	700	1 632	3 809	8 890	20 744	48 406

7. Étude de $\Phi(3;n)$. — $\Phi(3;n)=n!$ lorsque n est inférieur à 5. Supposons donc $n\geqq 5$. Pour simplifier l'écriture, nous écrirons $\Phi(n)$ pour $\Phi(3;n)$.

Le nombre des permutations P où $b_1=1$ est $\Phi(n-1)$. Lorsque $1=b_2$, b_1 est 2, ou 3, ou 4. Les permutations où $b_1=2$ forment l'ensemble $\{2, 1, (3, 4, \ldots, n)_3\}$, au nombre de $\Phi(n-2)$. Celles où $b_1=3$ se répartissent entre quatre ensembles, d'après la valeur 2, 4, 5 ou 6 de b_3, qui sont

$$\{3, 1, 2, (4, 5, \ldots, n)_3\}, \qquad \{3, 1, 4, (2, 5, \ldots, n)_3^1\},$$
$$\{3, 1, 5, (2, 4, 6, \ldots, n)_3^{1,2}\}, \quad \{3, 1, 6, (2, 4, 5, 7, \ldots, n)_3^{1,2,2}\},$$

et qui contiennent respectivement $\Phi(n-3)$, $\Phi^1(n-3)$, $\Phi^{1,2}(n-3)$, $\Phi^{1,2,2}(n-3)$ de ces permutations. Les permutations P où $b_1=4$ se répartissent de même entre les quatre ensembles

$$\{4, 1, 2, (3, 5, \ldots, n)_3^2\}, \qquad \{4, 1, 3, (2, 5, \ldots, n)_3^1\},$$
$$\{4, 1, 5, (2, 3, 6, \ldots, n)_3^{1,1}\}, \quad \{4, 1, 6, (2, 3, 5, 7, \ldots, n)_3^{1,1,2}\},$$

contenant respectivement $\Phi^2(n-3)$, $\Phi^1(n-3)$, $\Phi^{1,1}(n-3)$, $\Phi^{1,1,2}(n-3)$ de celles-ci.

Considérons maintenant les permutations P où $1 = b_3$. b_1 est encore 2, 3 ou 4. Celles où $b_1 = 2$ se répartissent, d'après la valeur 3, 4 ou 5 de b_2, entre les trois ensembles

$$\{2, 3, 1, (4, 5, \dots, n)_3\}, \quad \{2, 4, 1, (3, 5, \dots, n)_3^2\}, \quad \{2, 5, 1, (3, 4, 6, \dots n)_3^{2,2}\},$$

contenant respectivement $\Phi(n-3)$, $\Phi^2(n-3)$, $\Phi^{2,2}(n-3)$ de celles-ci. Celles où $b_1 = 3$ se répartissent entre

$$\{3, 2, 1, (4, 5, \dots, n)_3\}, \quad \{3, 4, 1, (2, 5, \dots, n)_3^1\}, \quad \{3, 5, 1, (2, 4, 6, \dots, n)_3^{1,2}\},$$

contenant respectivement $\Phi(n-3)$, $\Phi^1(n-3)$, $\Phi^{1,2}(n-3)$ permutations. Celles où $b_1 = 4$ donnent de même les sous-ensembles

$$\{4, 2, 1, (3, 5, \dots, n)_3^2\}, \quad \{4, 3, 1, (2, 5, \dots, n)_3^1\}, \quad \{4, 5, 1, (2, 3, 6, \dots, n)_3^{1,1}\}$$

de $\Phi^2(n-3)$, $\Phi^1(n-3)$, $\Phi^{1,1}(n-3)$ éléments.

Enfin, lorsque $1 = b_4$, donc $b_1 = 2$, 3 ou 4, b_2 est 2, 3, 4 ou 5 et b_3 est 2, 3, 4, 5 ou 6. Les permutations où $b_1 = 2$ forment trois ensembles d'après la valeur 3, 4 ou 5 de b_2, partagés eux-mêmes en trois sous-ensembles chacun, d'après la valeur admissible de b_3. $b_2 = 3$ fournit ainsi les trois sous-ensembles

$$\{2, 3, 4, 1, (5, 6, \dots, n)_3\}, \quad \{2, 3, 5, 1, (4, 6, \dots, n)_3^2\}, \quad \{2, 3, 6, 1, (4, 5, 7, \dots, n)_3^{2,2}\},$$

contenant respectivement $\Phi(n-4)$, $\Phi^2(n-4)$, $\Phi^{2,2}(n-4)$ permutations. $b_2 = 4$ donne les trois ensembles

$$\{2, 4, 3, 1, (5, 6, \dots, n)_3\}, \quad \{2, 4, 5, 1, (3, 6, \dots, n)_3^1\}, \quad \{2, 4, 6, 1, (3, 5, 7, \dots, n)_3^{1,2}\}$$

de $\Phi(n-4)$, $\Phi^1(n-4)$, $\Phi^{1,2}(n-4)$ éléments. $b_2 = 5$ donne de même

$$\{2, 5, 3, 1, (4, 6, \dots, n)_3^2\}, \quad \{2, 5, 4, 1, (3, 6, \dots, n)_3^1\}, \quad \{2, 5, 6, 1, (3, 4, 7, \dots, n)_3^{1,1}\},$$

donc $\Phi^2(n-4)$, $\Phi^1(n-4)$, $\Phi^{1,1}(n-4)$ permutations. Pour $b_1 = 3$, b_2 est 2, 4 ou 5, et chaque valeur de b_2 fournit trois ensembles de permutations d'après la valeur de b_3. On obtient ainsi les neuf ensembles

$$\begin{array}{ll}
\{3, 2, 4, 1, (5, 6, \dots, n)_3\}, & \{3, 4, 2, 1, (5, 6, \dots, n)_3\}, \\
\{3, 2, 5, 1, (4, 6, \dots, n)_3^2\}, & \{3, 4, 5, 1, 2, (6, 7, \dots, n)_3\}, \\
\{3, 2, 6, 1, (4, 5, 7, \dots, n)_3^{2,2}\}, & \{3, 4, 6, 1, 2, (5, 7, \dots, n)_3^2\},
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\{3, 5, 2, 1, (4, 6, \dots, n)_3^2\}, \\
\{3, 5, 4, 1, 2, (6, 7, \dots, n)_3\}, \\
\{3, 5, 6, 1, 2, (4, 7, \dots, n)_3^1\},
\end{array}$$

ce qui donne en tout

$$2\Phi(n-4) + 2\Phi(n-5) + \Phi^1(n-5) + 2\Phi^2(n-4) + \Phi^2(n-5) + \Phi^{2,2}(n-4)$$

permutations. Enfin, pour $b_1 = 4$, b_2 est 2, 3 ou 5, et les permutations correspondantes se répartissent entre les neuf ensembles

$$\{4, 2, 3, 1, (5, 6, \ldots, n)_3\}, \qquad \{4, 3, 2, 1, (5, 6, \ldots, n)_3\},$$
$$\{4, 2, 5, 1, (3, 6, \ldots, n)_3^1\}, \qquad \{4, 3, 5, 1, 2, (6, 7, \ldots, n)_3\},$$
$$\{4, 2, 6, 1, (3, 5, 7, \ldots, n)_3^{1,2}\}, \quad \{4, 3, 6, 1, 2, (5, 7, \ldots, n)_3^2\},$$
$$\{4, 5, 2, 1, (3, 6, \ldots, n)_3^1\},$$
$$\{4, 5, 3, 1, 2, (6, 7, \ldots, n)_3\},$$
$$\{4, 5, 6, 1, 2, 3, (7, 8, \ldots, n)_3\},$$

et leur nombre est ainsi

$$2\Phi(n-4) + 2\Phi(n-5) + \Phi(n-6) + 2\Phi^1(n-4) + \Phi^2(n-5) + \Phi^{1,2}(n-4).$$

L'addition de tous ces résultats exprime $\Phi(n)$ en fonction de certains $\Phi(k)$, $\Phi^1(k)$, $\Phi^2(k)$, $\Phi^{1,2}(k)$, $\Phi^{2,2}(k)$ d'argument k inférieur à n, et de $\Phi^{1,1,2}(n-3)$, $\Phi^{1,2,2}(n-3)$, soit

$$\begin{aligned}(11) \quad \Phi(n) = {} & \Phi(n-1) + \Phi(n-2) + 3\Phi(n-3) + 6\Phi(n-4) + 4\Phi(n-5) + \Phi(n-6) \\ & + 4\Phi^1(n-3) + 4\Phi^1(n-4) + \Phi^1(n-5) + 3\Phi^2(n-3) + 4\Phi^2(n-4) \\ & + 2\Phi^2(n-5) + 2\Phi^{1,1}(n-3) + \Phi^{1,1}(n-4) + 2\Phi^{1,2}(n-3) + 2\Phi^{1,2}(n-4) \\ & + \Phi^{2,2}(n-3) + 2\Phi^{2,2}(n-4) + \Phi^{1,1,2}(n-3) + \Phi^{1,2,2}(n-3).\end{aligned}$$

8. Exprimons les deux derniers termes de cette somme en fonction des symboles Φ ayant moins de trois indices. Soit d'abord $\Phi^{1,1,2}(n)$. Dans les permutations $b_1, b_2, \ldots, b_n$ correspondantes, 1 est b_1 ou b_2. Celles où $b_1 = 1$ forment l'ensemble $\{1, (2, 3, \ldots, n)_3^{1,2}\}$, et celles où $b_2 = 1$ se répartissent entre les trois ensembles

$$\{2, 1, (3, 4, \ldots, n)_3^2\}, \quad \{3, 1, 2, (4, 5, \ldots, n)_3\}, \quad \{4, 1, 2, (3, 5, \ldots, n)_3^1\},$$

On a donc

$$(12) \qquad \Phi^{1,1,2}(n) = \Phi(n-3) + \Phi^1(n-3) + \Phi^2(n-2) + \Phi^{1,2}(n-1).$$

Les permutations de l'ensemble $\{(1, 2, 3, \ldots, n)_3^{1,2,2}\}$ se répartissent en quatre sous-ensembles suivant que $1 = b_1$, ou $1 = b_2$ avec la valeur 2, 3 ou 4 de b_1. Ce sont

$$\{1, (2, 3, \ldots, n)_3^{2,2}\}, \quad \{2, 1, (3, 4, \ldots, n)_3^2\},$$
$$\{3, 1, (2, 4, \ldots, n)_3^1\}, \quad \{4, 1, (2, 3, 5, \ldots, n)_3^{1,1}\},$$

d'où résulte la formule

$$(13) \qquad \Phi^{1,2,2}(n) = \Phi^1(n-2) + \Phi^2(n-2) + \Phi^{1,1}(n-2) + \Phi^{2,2}(n-1).$$

$\Phi^{1,1}(n)$ s'exprime aisément en fonction des symboles à un indice. Dans les permutations P en question, 1 est b_1 ou b_2. Celles où $1 = b_1$ forment l'ensemble $\{1, (2, 3, \ldots, n)_3^1\}$, et sont au nombre de $\Phi^1(n-1)$. Celles où $1 = b_2$ forment les trois ensembles

$$\{2, 1, (3, 4, \ldots, n)_3\}, \quad \{3, 1, 2, (4, 5, \ldots, n)_3\}, \quad \{4, 1, 2, (3, 5, \ldots, n)_3^2\},$$

donc

$$\Phi^{1,1}(n) = \Phi(n-2) + \Phi(n-3) + \Phi^1(n-1) + \Phi^2(n-3). \tag{14}$$

Enfin $\Phi^1(n)$ s'exprime en fonction des seuls symboles Φ, Φ^2, $\Phi^{2,2}$. Les permutations correspondantes se répartissent entre quatre ensembles fournis respectivement par la valeur 1 de b_1, et par $1 = b_2$ avec $b_1 = 2$, 3 ou 4. Ce sont

$$\{1, (2, 3, \ldots, n)_3\}, \quad \{2, 1, (3, 4, \ldots, n)_3\},$$
$$\{3, 1, (2, 4, \ldots, n)_3^2\}, \quad \{4, 1, (2, 3, 5, \ldots, n)_3^{2,2}\},$$

donc

$$\Phi^1(n) = \Phi(n-1) + \Phi(n-2) + \Phi^2(n-2) + \Phi^{2,2}(n-2). \tag{15}$$

Grâce à (15), les relations (14), (12) et (13) sont remplacées successivement par

$$\left\{\begin{aligned} \Phi^{1,1}(n) &= 2\Phi(n-2) + 2\Phi(n-3) + 2\Phi^2(n-3) + \Phi^{2,2}(n-3), \\ \Phi^{1,1,2}(n) &= \Phi(n-3) + \Phi(n-4) + \Phi(n-5) \\ &\quad + \Phi^2(n-2) + \Phi^2(n-5) + \Phi^{1,2}(n-1) + \Phi^{2,2}(n-5), \\ \Phi^{1,2,2}(n) &= \Phi(n-3) + 3\Phi(n-4) + 2\Phi(n-5) + \Phi^2(n-2) \\ &\quad + \Phi^2(n-4) + 2\Phi^2(n-5) + \Phi^{2,2}(n-1) + \Phi^{2,2}(n-4) + \Phi^{2,2}(n-5), \end{aligned}\right. \tag{16}$$

puis, enfin, (11) par

$$\begin{aligned} \Phi(n) &= \Phi(n-1) + \Phi(n-2) + 3\Phi(n-3) + 10\Phi(n-4) \\ &\quad + 16\Phi(n-5) + 14\Phi(n-6) + 7\Phi(n-7) + 3\Phi(n-8) + 3\Phi^2(n-3) \\ &\quad + 4\Phi^2(n-4) + 8\Phi^2(n-5) + 8\Phi^2(n-6) + 4\Phi^2(n-7) + 3\Phi^2(n-8) \\ &\quad + 2\Phi^{1,2}(n-3) + 3\Phi^{1,2}(n-4) + \Phi^{2,2}(n-3) + 3\Phi^{2,2}(n-4) + 4\Phi^{2,2}(n-5) \\ &\quad + 6\Phi^{2,2}(n-6) + 3\Phi^{2,2}(n-7) + 2\Phi^{2,2}(n-8). \end{aligned} \tag{17}$$

9. Il reste à exprimer $\Phi^2(n)$, $\Phi^{1,2}(n)$ et $\Phi^{2,2}(n)$ en fonction des quatre symboles conservés dans (17).

Tout d'abord $\Phi^2(n)$ est la somme de $\Phi^1(n)$ et du nombre des permutations P où 1 a effectivement l'écart 2 avec P_0, c'est-à-dire que $1 = b_3$. b_1 est alors 2, 3 ou 4, tandis que $b_2 = 2$, 3, 4 ou 5. Les permutations où $b_1 = 2$ se répartissent entre les trois ensembles

$$\{2, 3, 1, (4, 5, \ldots, n)_3\}, \quad \{2, 4, 1, (3, 5, \ldots, n)_3^2\}, \quad \{2, 5, 1, (3, 4, 6, \ldots, n)_3^{2,2}\};$$

celles où $b_1 = 3$ se répartissent entre

$$\{3, 2, 1, (4, 5, \ldots, n)_3\}, \quad \{3, 4, 1, (2, 5, \ldots, n)_3^1\}, \quad \{3, 5, 1, (2, 4, 6, \ldots, n)_3^{1,2}\},$$

et celles où $b_1 = 4$ entre

$$\{4, 2, 1, (3, 5, \ldots, n)_3^2\}, \quad \{4, 3, 1, (2, 5, \ldots, n)_3^1\}, \quad \{4, 5, 1, (2, 3, 6, \ldots, n)_3^{1,1}\}.$$

Il vient ainsi

$$\begin{aligned} \Phi^2(n) &= \Phi^1(n) + 2\Phi(n-3) + 2\Phi^1(n-3) + 2\Phi^2(n-3) \\ &\quad + \Phi^{1,1}(n-3) + \Phi^{1,2}(n-3) + \Phi^{2,2}(n-3), \end{aligned}$$

ou, compte tenu de (15) et (16),

$$(18)\quad \Phi^2(n) = \Phi(n-1) + \Phi(n-2) + 2\Phi(n-3) + 2\Phi(n-4) + 4\Phi(n-5) + 2\Phi(n-6) + \Phi^2(n-2) + 2\Phi^2(n-3) + 2\Phi^2(n-5) + 2\Phi^2(n-6) + \Phi^{1,2}(n-3) + \Phi^{2,2}(n-2) + \Phi^{2,2}(n-3) + 2\Phi^{2,2}(n-5) + \Phi^{2,2}(n-6).$$

Chez les permutations correspondant à $\Phi^{1,2}(n)$, 1 est b_1 ou b_2. Celles où $1 = b_1$ forment l'ensemble $\{1, (2, 3, \ldots, n)_3^2\}$, et leur nombre est $\Phi^2(n-1)$. Celles où $1 = b_2$ se répartissent entre les trois ensembles

$$\{2, 1, (3, 4, \ldots, n)_3\}, \quad \{3, 1, (2, 4, \ldots, n)_3^1\}, \quad \{4, 1, (2, 3, 5, \ldots, n)_3^{1,2}\},$$

et leur nombre est

$$\Phi(n-2) + \Phi^1(n-2) + \Phi^{1,2}(n-2).$$

Compte tenu de (15), on a donc

$$(19)\quad \Phi^{1,2}(n) = \Phi(n-2) + \Phi(n-3) + \Phi(n-4) + \Phi^2(n-1) + \Phi^2(n-4) + \Phi^{1,2}(n-2) + \Phi^{2,2}(n-4).$$

Enfin $\Phi^{2,2}(n)$ est la somme de $\Phi^{1,2}(n)$ et du nombre des permutations P dans lesquelles l'écart $e(1) = 2$. Dans ces conditions, $1 = b_3$, tandis que $b_1 = 2$, 3 ou 4. Les permutations où $b_1 = 2$ forment les trois ensembles

$$\{2, 3, 1, (4, 5, \ldots, n)_3\}, \quad \{2, 4, 1, (3, 5, \ldots, n)_3^2\}, \quad \{2, 5, 1, (3, 4, 6, \ldots, n)_3^{2,2}\};$$

celles où $b_1 = 3$ se répartissent entre

$$\{3, 2, 1, (4, 5, \ldots, n)_3\}, \quad \{3, 4, 1, 2, (5, 6, \ldots, n)_3\}, \quad \{3, 5, 1, 2, (4, 6, \ldots, n)_3^2\},$$

et celles où $b^1 = 4$ entre

$$\{4, 2, 1, (3, 5, \ldots, n)_3^2\}, \quad \{4, 3, 1, 2, (5, 6, \ldots, n)_3\}, \quad \{4, 5, 1, 2, (3, 6, \ldots, n)_3^1\};$$

par suite,

$$\Phi^{2,2}(n) = \Phi^{1,2}(n) + 2\Phi(n-3) + 2\Phi(n-4) + \Phi^1(n-4) + 2\Phi^2(n-3) + \Phi^2(n-4) + \Phi^{2,2}(n-3).$$

Compte tenu de (15) et (19), on a donc

$$(20)\quad \Phi^{2,2}(n) = \Phi(n-2) + 3\Phi(n-3) + 3\Phi(n-4) + \Phi(n-5) + \Phi(n-6) + \Phi^2(n-1) + 2\Phi^2(n-3) + 2\Phi^2(n-4) + \Phi^2(n-6) + \Phi^{1,2}(n-2) + \Phi^{2,2}(n-3) + \Phi^{2,2}(n-4) + \Phi^{2,2}(n-6).$$

Pour les calculs numériques, il est commode de conserver $\Phi^{1,2}(n)$ dans l'expression de $\Phi^{2,2}(n)$, sous la forme

$$\Phi^{2,2}(n) = \Phi^{1,2}(n) + 2\Phi(n-3) + 2\Phi(n-4) + \Phi(n-5) + \Phi(n-6) + 2\Phi^2(n-3) + \Phi^2(n-4) + \Phi^2(n-6) + \Phi^{2,2}(n-3) + \Phi^{2,2}(n-6).$$

10. L'ensemble des relations (17), (18), (19), (20) constitue une relation de récurrence vectorielle d'ordre 28 si l'on associe aux 8 éléments $\Phi(n-i)$ $(i=0, 1, \ldots, 7)$ les 8 éléments $\Phi^2(n-j)$ $(j=0, 1, \ldots, 7)$, les 4 éléments $\Phi^{1,2}(n-k)$ $(k=0, 1, 2, 3)$ et les 8 éléments $\Phi^{2,2}(n-h)$ $(h=0, 1, \ldots, 7)$. Mais cet ordre peut être abaissé à 23 en observant que (17) ne fait intervenir que les $\Phi^2(n-j)$, où $j=3, 4, \ldots, 8$ au lieu de $1, 2, \ldots, 8$, les $\Phi^{1,2}(n-k)$, où $k=3, 4$ au lieu de $1, 2, 3, 4$, et les $\Phi^{2,2}(n-h)$, où $h=3, 4, \ldots, 8$ au lieu de $1, 2, \ldots, 8$. Nous associerons ainsi à l'expression (17) de $\Phi(n)$ les expressions [3]

$$(18') \quad \begin{aligned} \Phi^2(n-1) = {} & \Phi(n-2) + \Phi(n-3) + 2\Phi(n-4) + 2\Phi(n-5) + 4\Phi(n-6) \\ & + 2\Phi(n-7) + \Phi^2(n-3) + 2\Phi^2(n-4) + 2\Phi^2(n-6) + 2\Phi^2(n-7) \\ & + \Phi^{1,2}(n-4) + \Phi^{2,2}(n-3) + \Phi^{2,2}(n-4) + 2\Phi^{2,2}(n-6) + \Phi^{2,2}(n-7), \end{aligned}$$

$$(19') \quad \begin{aligned} \Phi^{1,2}(n-2) = {} & \Phi(n-4) + \Phi(n-5) + \Phi(n-6) \\ & + \Phi^2(n-3) + \Phi^2(n-6) + \Phi^{1,2}(n-4) + \Phi^{2,2}(n-6), \end{aligned}$$

et

$$(20') \quad \begin{aligned} \Phi^{2,2}(n-2) = {} & \Phi(n-4) + 3\Phi(n-5) + 3\Phi(n-6) + \Phi(n-7) \\ & + \Phi(n-8) + \Phi^2(n-3) + 2\Phi^2(n-5) + 2\Phi^2(n-6) + \Phi^2(n-8) \\ & + \Phi^{1,2}(n-4) + \Phi^{2,2}(n-5) + \Phi^{2,2}(n-6) + \Phi^{2,2}(n-8). \end{aligned}$$

Nous prenons pour vecteur V_n la colonne des éléments $\Phi(n-i)$ $(i=0, 1, \ldots, 7)$, $\Phi^2(n-j)$ $(j=1, 2, \ldots, 7)$, $\Phi^{1,2}(n-2)$, $\Phi^{1,2}(n-3)$ et les $\Phi^{2,2}(n-h)$ $(h=2, 3, \ldots, 7)$. Les lignes de rang 1, 9, 16, 18 de la matrice H de la récurrence

$$(21) \qquad V_n = HV_{n-1}$$

sont les coefficients des formules (17), (18'), (19'), (20'), tandis que chacune des 19 autres lignes a tous ses éléments nuls, sauf un seul égal à 1. Le premier vecteur V_0 a tous ses éléments nuls, sauf le premier $\Phi(0)=1$. Il vient ainsi

$$V_n = H^n V_0,$$

et l'on sait que, lorsque n croît indéfiniment, chaque élément de V_n a une valeur asymptotique de la forme $K\xi^n$ si les invariants de structure de H sont tous égaux à 1, et, dans le cas contraire, de la forme $Kn^r\xi^n$, à condition qu'il y ait une valeur caractéristique ξ de valeur absolue maximale; ξ est alors réel. Dans tous les cas, $\Phi(3; n) = o(n!)$. Il serait intéressant de rechercher les invariants de structure de H, mais c'est très compliqué. Voici le tableau des premières

(3) Nous prenons l'expression $\Phi^2(n-1)$ au lieu de $\Phi^2(n-2)$ car celle-ci introduit $\Phi^{1,2}(n-5)$ alors que l'argument minimal de $\Phi^{1,2}$ dans les autres formules est $n-4$.

valeurs des quatre éléments $\Phi(3;n)$, $\Phi^2(3;n)$, $\Phi^{1,2}(3;n)$, $\Phi^{2,2}(3;n)$ calculés à l'aide de (17), (18), (19), (20) :

n	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
$\Phi(3;n)$	1	1	2	6	24	78	230	675	2 069	6 404	19 708	60 216	183 988
$\Phi^2(3;n)$	0	1	2	6	18	60	184	560	1 695	5 200	15 956	48 916	–
$\Phi^{1,2}(3;n)$	0	0	2	4	12	32	108	336	1 036	3 120	9 540	29 244	–
$\Phi^{2,2}(3;n)$	0	0	2	6	18	46	146	460	1 436	4 352	13 252	40 532	–
$n!$	1	1	2	6	24	120	720	5 040	40 320	362 880	3 628 800	39 916 800	–

11. Observations numériques. — Dans les quatre lignes de résultats de ce tableau le rapport de deux nombres consécutifs doit tendre vers la valeur caractéristique ξ de valeur absolue maximale, si celle-ci est unique. Le tableau des valeurs de ces rapports est

n	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.
$\dfrac{\Phi(3;n+1)}{\Phi(3;n)}$	1	2	3	4	3,25	2,95	2,93	3,065	3,095	3,077	3,055	3,055
$\dfrac{\Phi^2(3;n+1)}{\Phi^2(3;n)}$	∞	2	3	3	3,33	3,066	3,043	3,027	3,067	3,068	3,066	–
$\dfrac{\Phi^{1,2}(3;n+1)}{\Phi^{1,2}(3;n)}$	–	∞	2	3	2,66	3,375	3,111	3,083	3,011	3,058	3,065	–
$\dfrac{\Phi^{2,2}(3;n+1)}{\Phi^{2,2}(3;n)}$	–	∞	3	3	2,55	3,174	3,15	3,122	3,03	3,045	3,058	–

et la convergence vers une limite voisine de 3,06 est manifeste. Il est à présumer que H a une caractéristique de valeur absolue maximale, voisine de cette valeur.

La même observation relative aux valeurs de $\Phi(1;n)$, $\Phi(2;n)$ et $\Phi^1(2;n)$ est encore plus nette car leurs tableaux sont plus riches. Avec $\Phi(1;n)$ on obtient la suite des valeurs :

n	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
$\dfrac{\Phi(1;n+1)}{\Phi(1;n)}$	1	2	1,5	1,66	1,6	1,625	1,616	1,619
n	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	
$\dfrac{\Phi(1;n+1)}{\Phi(1;n)}$	1,617	1,618	1,618	1,618	1,618	1,6180	1,6180	

qui tend rapidement, comme prévu, vers le nombre d'or $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2} = 1{,}618\,016$.

Avec $\Phi(2;n)$ et $\Phi^1(2;n)$ on obtient les suites de valeurs :

n	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
$\dfrac{\Phi(2;n+1)}{\Phi(2;n)}$	1	2	3	2,333	2,214	2,355	2,493	2,325
$\dfrac{\Phi^1(2;n+1)}{\Phi^1(2;n)}$	∞	2	2	2,5	2,4	2,29	2,327	2,344

n	8.	9.	10.	11.	12.	13.
$\dfrac{\Phi(2;n+1)}{\Phi(2;n)}$	2,33	2,336	2,334	2,333	2,333	2,333
$\dfrac{\Phi^1(2;n+1)}{\Phi^1(2;n)}$	2,333	2,331	2,334	2,334	2,333	2,333

Aux millième près, 2,333 est la plus grande racine de l'équation $\theta(x)=0$ du paragraphe 5.

12. Remarque. — On peut se débarrasser des éléments $\Phi^{1,2}(k)$ en observant que (19) fournit l'expression de $\Phi^{1,2}(n)-\Phi^{1,2}(n-2)$ en fonction des seuls symboles Φ, Φ^2, $\Phi^{2,2}$. Il suffit donc de former, à partir de (17), (18) et (20) les différences

$$\Phi(n)-\Phi(n-2),\qquad \Phi^2(n)-\Phi^2(n-2),\qquad \Phi^{2,2}(n)-\Phi^{2,2}(n-2)$$

pour éliminer $\Phi^{1,2}$. Les expressions ainsi obtenues pour $\Phi(n)$, $\Phi^2(n-2)$, $\Phi^{2,2}(n-2)$ en fonction de celles d'argument plus petit, et que je ne reproduis pas ici, conduisent à former le vecteur V_n d'éléments $\Phi(n-i)\,(i=0,1,\ldots,9)$, $\Phi^2(n-j)\,(j=2,3,\ldots,9)$, $\Phi^{2,2}(n-k)\,(k=2,3,\ldots,9)$; son ordre est 26 au lieu de 23, de sorte que ce qu'on gagne du côté des symboles est perdu, et au-delà, sur l'ordre de la relation de récurrence.

13. Permutations non orientées. — Chaque permutation ouverte non orientée $P^\star$ est la réunion de deux permutations orientées $P=b_1, b_2, \ldots, b_n$ et $\overline{P}=b_n, \ldots, b_2, b_1$, dites opposées. Le nombre des classes $P^\star$ ainsi formées est $\frac{1}{2}n!$ si $n\geqq 2$. De même, $P_0^\star$ est la classe formée par $P_0=1,2,\ldots,n$ et $\overline{P}_0=n,\ldots,2,1$. Par définition, l'écart de $P_0^\star$ et $P^\star$ est

$$|P_0^\star, P^\star| = \inf\{|P_0, P|, |P_0, \overline{P}|\}.$$

Il vérifie les axiomes d'une métrique. Il est, en effet, symétrique, car l'écart de deux permutations ouvertes est égal à celui de leurs opposées. Il ne peut être nul que si $P_0=P$ ou $\overline{P}$, donc si $P_0^\star=P^\star$. Soit enfin une troisième classe $P'^\star$, formée par P' et $\overline{P}'$. D'après les inégalités

$$\begin{aligned}|P, P'| = |\overline{P}, \overline{P}'| &\leqq |P_0, P| + |P_0, P'| \quad \text{et} \quad |P_0, \overline{P}| + |P_0, \overline{P}'|,\\ |\overline{P}, P'| = |P, \overline{P}'| &\leqq |P_0, \overline{P}| + |P_0, P'| \quad \text{et} \quad |P_0, P| + |P_0, \overline{P}'|,\end{aligned}$$

l'écart $|P^\star, P'^\star|$ est majoré par les quatre seconds membres, alors que

$$\begin{aligned}|P_0^\star, P^\star| + |P_0^\star, P'^\star| = \inf\{&|P_0, P| + |P_0, P'|,\quad |P_0, P| + |P_0, \overline{P}'|,\\ &|P_0, \overline{P}| + |P_0, P'|,\quad |P_0, \overline{P}| + |P_0, \overline{P}'|\}\end{aligned}$$

est le plus petit de ces quatre seconds membres, donc

$$|P^\star, P'^\star| \leqq |P_0^\star, P^\star| + |P_0^\star, P'^\star|.$$

14. Il est facile de déduire de la valeur de $\Phi(\alpha; n)$ le nombre $\Phi^\star(\alpha; n)$ des permutations $P^\star$ dont la distance à $P_0^\star$ ne dépasse pas α. Tout d'abord, on voit aisément que $\Phi^\star(\alpha; n) = \Phi(\alpha; n)$ dès que n est assez grand par rapport à α. Il suffit que n soit tel que la simultanéité de $|P_0, P| \leqq \alpha$ et $|P_0, \bar{P}| \leqq \alpha$ soit impossible; pour que celle-ci soit réalisée il est nécessaire que chacun des deux éléments extrêmes 1 et n de P_0 soit un des b_i dont l'indice vérifie simultanément les inégalités $1 \leqq i \leqq \alpha + 1$ et $n - \alpha \leqq i \leqq n$; c'est impossible si $\alpha + 1 \leqq n - \alpha$, donc si $n \geqq 2\alpha + 1$, d'où le

Théorème. — $\Phi^\star(\alpha; n) = \Phi(\alpha; n)$ *pour* $n \geqq 2\alpha + 1$.

D'une manière générale, b_i ayant le rang b_i dans P_0, et les rangs respectifs i et $n + 1 - i$ dans P et $\bar{P}$, l'inégalité $|P_0^\star, P^\star| \leqq \alpha$ exige qu'on ait simultanément, pour tous les i de $1 \leqq i \leqq n$,

$$(22) \qquad \begin{cases} i - \alpha \leqq b_i \leqq i + \alpha, \\ n + 1 - i - \alpha \leqq b_i \leqq n + 1 - i + \alpha. \end{cases}$$

La compatibilité de ces inégalités exige que i vérifie

$$\frac{n+1}{2} - \alpha \leqq i \leqq \frac{n+1}{2} + \alpha,$$

donc le segment $[1, n]$ doit être inclus dans $\left[\frac{n+1}{2} - \alpha, \frac{n+1}{2} + \alpha\right]$, ce qui s'écrit

$$\frac{n+1}{2} - \alpha \leqq 1 \leqq n \leqq \frac{n+1}{2} + \alpha.$$

On obtient ainsi pour n la double inégalité

$$(23) \qquad 1 \leqq n \leqq 2\alpha + 1.$$

Dans ces conditions, la comparaison des deux premiers membres de (22) permet de décomposer (22) en

$$(24) \qquad n + 1 - i - \alpha \leqq b_i \leqq i + \alpha \quad \text{pour} \quad 1 \leqq i \leqq \frac{n+1}{2}$$

et

$$(25) \qquad i - \alpha \leqq b_i \leqq n + 1 - i + \alpha \quad \text{pour} \quad \frac{n+1}{2} \leqq i \leqq n.$$

(25) s'écrit encore

$$(25') \qquad n + 1 - i - \alpha \leqq b_{n+1-i} \leqq i + \alpha \quad \text{pour} \quad 1 \leqq i \leqq \frac{n+1}{2},$$

de sorte que l'ensemble (24), (25') équivaut à (22).

En particulier, pour $n = 2\alpha + 1$, on retrouve tout de suite sur ces inégalités que $b_1 = b_n = \alpha + 1$. Pour $n = 2\alpha$, elles s'écrivent

$$\alpha + 1 - i \leqq \begin{cases} b_i \\ b_{2\alpha+1-i} \end{cases} \leqq \alpha + i \quad \text{pour} \quad 1 \leqq i \leqq \alpha.$$

On en déduit de proche en proche que

$$(b_1, b_{2\alpha}) = (\alpha, \alpha+1), \qquad (b_2, b_{2\alpha-1}) = (\alpha-1, \alpha+2), \qquad \ldots, \qquad (b_\alpha, b_{\alpha+1}) = (1, 2\alpha),$$

ce qui donne 2^α permutations P telles qu'on ait simultanément

$$|P_0, P| = |P_0, \overline{P}| \leqq \alpha,$$

et qui font double emploi dans l'évaluation de $\Phi^\star(\alpha; 2\alpha)$. On a ainsi démontré que

$$\Phi^\star(\alpha; 2\alpha) = \Phi(\alpha; 2\alpha) - 2^{\alpha-1}. \tag{26}$$

15. Ces observations suffisent pour traiter tous les cas où $\alpha \leqq 3$. Avec $\alpha = 1$, on sait en effet que

$$\Phi^\star(1; n) = \Phi(1; n) \qquad \text{pour} \quad n \geqq 3,$$

et (26) donne

$$\Phi^\star(1; 2) = \Phi(1; 2) - 1,$$

ce qui se vérifie tout de suite. Pour $\alpha = 2$,

$$\Phi^\star(2, n) = \Phi(2; n) \quad \text{pour } n \geqq 5 \qquad \text{et} \qquad \Phi^\star(2; 4) = \Phi(2; 4) - 2.$$

On voit d'ailleurs que $\Phi^\star(2; n) = \frac{1}{2} n!$ si $2 \leqq n \leqq 4$, donc

$$\begin{aligned}
\Phi^\star(2; 1) &= \Phi(2; 1) = 1,\\
\Phi^\star(2; 2) &= 1 = \Phi(2; 2) - 1,\\
\Phi^\star(2; 3) &= 3 = \Phi(2; 3) - 3,\\
\Phi^\star(2; 4) &= 12 = \Phi(2; 4) - 2.
\end{aligned}$$

De même $\Phi^\star(3; n) = \Phi(3; n)$ pour $n \geqq 7$; sa valeur est $\frac{n!}{2}$ pour $2 \leqq n \leqq 5$, car, dans ce dernier cas, la condition $b_1 < b_n$ entraîne $|P_0, P| \leqq 3$; on sait enfin que, grâce à (26), $\Phi^\star(3; 6) = \Phi(3; 6) - 4$, d'où résulte le tableau des valeurs comparées

$$\begin{aligned}
\Phi^\star(3; 1) &= \Phi(3; 1) = 1,\\
\Phi^\star(3; 2) &= 1 = \Phi(3; 2) - 1,\\
\Phi^\star(3; 3) &= 3 = \Phi(3; 3) - 3,\\
\Phi^\star(3; 4) &= 12 = \Phi(3; 4) - 12,\\
\Phi^\star(3; 5) &= 60 = \Phi(3; 5) - 18,\\
\Phi^\star(3; 6) &= 226 = \Phi(3; 6) - 4.
\end{aligned}$$

CHAPITRE II.

Permutations fermées orientées,

16. Une permutation fermée orientée est définie à une permutation circulaire près. On peut encore considérer une telle permutation ϖ comme une classe de n permutations ouvertes orientées, qu'il sera commode de qualifier

« d'équivalentes ». Par exemple, ϖ_0 est la classe engendrée par $P_0 = 1, 2, \ldots, n$, c'est-à-dire la classe des n permutations

$$P_0^k = k, \quad k+1, \quad \ldots, \quad n, \quad 1, \quad \ldots, \quad k-1 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \qquad \text{avec} \quad P_0^1 = P_0.$$

Le nombre des permutations ϖ est $\frac{1}{n} n! = (n-1)!$.

L'écart de deux permutations $\varpi = \{P^k\}_{k=1, 2, \ldots, n}$ et $\varpi' = \{P'^h\}_{h=1, 2, \ldots, n}$ est

$$|\varpi, \varpi'| = \inf\{|P^k, P'^h|\}_{k, h=1, 2, \ldots, n}.$$

Il est clair qu'on a également

$$|\varpi, \varpi'| = \inf\{|P^1, P'^h|\}_{h=1, 2, \ldots, n}.$$

Cette définition est symétrique, et $|\varpi, \varpi'| = 0$ entraîne l'égalité de P^1 avec l'un des P'^h, donc $\varpi = \varpi'$. En outre

$$|P^k, P'^h| \leqq |P_0, P^k| + |P_0, P'^h|,$$

donc

$$|\varpi, \varpi'| \leqq \inf\{|P_0, P^k| + |P_0, P'^h|\}_{k, h=1, 2, \ldots, n}.$$

D'autre part,

$$|\varpi_0, \varpi| = \inf\{|P_0, P^k|\}_{k=1, 2, \ldots, n} \qquad \text{et} \qquad |\varpi_0, \varpi'| = \inf\{|P_0, P'^h|\}_{h=1, 2, \ldots, n}$$

entraînent

$$|\varpi_0, \varpi| + |\varpi_0, \varpi'| = \inf\{|P_0, P^k| + |P_0, P'^h|\}_{k, h=1, 2, \ldots, n},$$

donc

$$|\varpi, \varpi'| \leqq |\varpi_0, \varpi| + |\varpi_0, \varpi'|.$$

L'axiome de l'inégalité triangulaire est vérifié et cet écart est assimilable à la distance dans une métrique.

17. Il s'agit de comparer à $\Phi(\alpha; n)$ le nombre $\Psi(\alpha; n)$ des permutations dont la distance à ϖ est au plus égale à α; ce nombre ne dépend pas de ϖ. Prenons donc ϖ_0, et considérons les permutations ϖ telles que $|\varpi_0, \varpi| \leqq \alpha$. On peut alors associer à $P_0 = 1, 2, \ldots, n$ une permutation $P^1 = b_1, b_2, \ldots, b_n$ de la classe ϖ telle que $|P_0, P^1| \leqq \alpha$. Dans quel cas peut-on affirmer que P^1 est le seul élément de ϖ qui vérifie cette condition ? Cherchons donc si ϖ contient une deuxième permutation $P^k = b_k, b_{k+1}, \ldots, b_n, b_1, \ldots, b_{k-1}$ telle que $|P_0, P^k| \leqq \alpha$. Observons en passant que la transposition de P^1 avec P^k équivaut au changement de k en $n+2-k$, ce qui permet de se borner aux seules valeurs de k vérifiant la double inégalité

$$2 \leqq k \leqq \frac{n+2}{2}.$$

Pour un b_i d'indice i inférieur à k, la limitation des deux écarts fournit les quatre inégalités

$$(27)\qquad \begin{cases} i-\alpha \leqq b_i \leqq i+\alpha, \\ i+n+1-k-\alpha \leqq b_i \leqq i+n+1-k+\alpha, \end{cases}$$

qui imposent à k la double inégalité

$$(28)\qquad n+1-2\alpha \leqq k \leqq \frac{n+2}{2}.$$

Pour $k \leqq i \leqq n$, on trouve de même

$$(29)\qquad \begin{cases} i-\alpha \leqq b_i \leqq i+\alpha, \\ i+1-k-\alpha \leqq b_i \leqq i+1-k+\alpha, \end{cases}$$

d'où résulte

$$(30)\qquad 2 \leqq k \leqq 2\alpha+1.$$

(28) et (30) ne sont compatibles que si $n \leqq 4\alpha$, donc $\Psi(\alpha; n) = \Phi(\alpha; n)$ pour $n > 4\alpha$.

Examinons de plus près ce qu'on peut déduire de ces systèmes pour $n = 4\alpha$, $4\alpha - 1$ et $4\alpha - 2$.

Pour $n = 4\alpha$, (28) n'admet que la valeur $k = 2\alpha + 1$. (27) donne alors $b_i = i + \alpha$ pour $1 \leqq i \leqq 2\alpha$, tandis que $b_i = i - \alpha$ pour $2\alpha + 1 \leqq i \leqq n$, d'après (29), donc $b_i = b_{2\alpha+i} = i + \alpha$ pour $1 \leqq i \leqq 2\alpha$, ce qui est impossible.

Pour $n = 4\alpha - 1$, (28) exige que k soit égal à 2α. On a encore

$$b_i = i + \alpha \qquad \text{pour} \quad 1 \leqq i \leqq 2\alpha - 1,$$

tandis que

$$i - \alpha \leqq b_i \leqq i + 1 - \alpha \qquad \text{pour} \quad 2\alpha \leqq i \leqq 4\alpha - 1.$$

Toutes les valeurs minorantes des b_i surpassent $\alpha - 1$, donc il n'y a pas de solution si α est supérieur à 1.

Soit enfin $n = 4\alpha - 2$. (28) et (30) donnent $2\alpha - 1 \leqq k \leqq 2\alpha$ si $\alpha \geqq 2$, ce que nous supposons. Pour $k = 2\alpha - 1$, on a ensuite

$$b_i = i + \alpha \qquad \text{pour} \quad 1 \leqq i \leqq 2\alpha - 2,$$

et, d'après (29),

$$i - \alpha \leqq b_i \leqq i + 2 - \alpha \qquad \text{pour} \quad 2\alpha - 1 \leqq i \leqq 4\alpha - 2;$$

la plus grande des valeurs majorantes trouvées pour b_i est 3α, qui est inférieur à n dès que $\alpha \geqq 3$. Pour $k = 2\alpha$, (27) et (29) donnent respectivement

$$i + \alpha - 1 \leqq b_i \leqq i + \alpha \qquad \text{pour} \quad 1 \leqq i \leqq 2\alpha - 1$$

et

$$i - \alpha \leqq b_i \leqq i + 1 - \alpha \qquad \text{si} \quad 2\alpha \leqq i \leqq 4\alpha - 2;$$

dès que α est supérieur ou égal à 2, on voit qu'aucun b_i ne peut atteindre la valeur n. Ainsi il n'existe pas de solution pour $n = 4\alpha - 2$ si $\alpha \geqq 3$, et l'on a établi le

THÉORÈME. — *$\Psi(\alpha; n)$ est égal à $\Phi(\alpha; n)$ pour $n \geqq 4\alpha$, ainsi que pour $n \geqq 4\alpha - 1$ si $\alpha \geqq 2$, et pour $n \geqq 4\alpha - 2$ si $\alpha \geqq 3$.*

Remarque. — Pour $n = 4\alpha - 2$ et $\alpha = 2$, la discussion qui précède a fourni la seule valeur $k = 2\alpha - 1 = 3$, avec $b_i = i + 2$ pour $1 \leqq i \leqq 2$ et $i - 2 \leqq b_i \leqq i$ pour $3 \leqq i \leqq 6$, d'où résulte immédiatement le couple unique P^1, P^3 avec $P^1 = 3, 4, 1, 2, 5, 6$. On a donc démontré en même temps que

$$\Psi(2; 6) = \Phi(2; 6) - 1 = 72.$$

18. Il est utile d'examiner encore la valeur $4\alpha - 3$ de n. Si $\alpha \geqq 2$, (28) et (30) se réduisent à $2\alpha - 2 \leqq k \leqq 2\alpha - 1$. Si $k = 2\alpha - 2$, (27) et (29) donnent respectivement

$$b_i = i + \alpha \quad \text{pour } 1 \leqq i \leqq 2\alpha - 3 \quad \text{et} \quad i - \alpha \leqq b_i \leqq i + 3 - \alpha \quad \text{pour } 2\alpha - 2 \leqq i \leqq 4\alpha - 3;$$

si donc $4 \leqq 2\alpha - 3$ et $2\alpha + 1 \leqq 4\alpha - 3$, c'est-à-dire si $\alpha \geqq 4$, les cinq éléments b_1, b_2, b_3, b_4, $b_{2\alpha+1}$ ne disposent que de quatre valeurs numériques, ce qui est impossible. Pour $k = 2\alpha - 1$, on a de même

$$i + \alpha - 1 \leqq b_i \leqq i + \alpha \quad \text{si} \quad 1 \leqq i \leqq 2\alpha - 2$$

et

$$i - \alpha \leqq b_i \leqq i - \alpha + 2 \quad \text{pour} \quad 2\alpha - 1 \leqq i \leqq 4\alpha - 3;$$

mais alors, si $3 \leqq 2\alpha - 2$, donc si $\alpha \geqq 3$, les cinq éléments b_1, b_2, b_3, $b_{2\alpha}$, $b_{2\alpha+1}$ ne disposent que des quatre valeurs α, $\alpha + 1$, $\alpha + 2$, $\alpha + 3$, et il n'y a encore aucune solution. Pour $\alpha = 3$, donc pour $n = 9$, on voit aisément que $k = 2\alpha - 2 = 4$ fournit la solution unique P^1, P^4 avec $P^1 = 4, 5, 6, 1, 2, 3, 7, 8, 9$. On a ainsi établi que

$$\Psi(3; 9) = \Phi(3; 9) - 1 = 6403.$$

Pour $\alpha = 2$, donc $n = 5$, la première valeur $k = 2$ donne $b_1 = 3$ et

$$i - 2 \leqq b_i \leqq i + 1 \quad \text{pour} \quad 2 \leqq i \leqq 5;$$

les permutations P^1 admissibles forment la famille

$$3, \left\{\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}\right., \left\{\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}\right., \left\{\begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}\right., \left\{\begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}\right.,$$

où l'on convient de représenter dans la $k^{\text{ième}}$ accolade les valeurs admissibles de b_k. $b_3 \neq 4$ réduit la famille à l'ensemble des $P^1 = 3, (1, 2), (4, 5)$ où, suivant l'habitude, $(b_2, b_3) = (1, 2)$ signifie que $b_2, b_3 = 1, 2$ ou $2, 1$ et

$(b_4, b_5) = (4, 5)$ que $b_4, b_5 = 4, 5$ ou $5, 4$; $b_3 = 4$ fournit la seule solution $P^1 = 3, 1, 4, 2, 5$. $k = 2$ fournit ainsi cinq solutions. $k = 3$ donne

$$i + 1 \leqq b_i \leqq i + 2 \qquad \text{pour} \quad 1 \leqq i \leqq 2$$

et

$$i - 2 \leqq b_i \leqq i \qquad \text{pour} \quad 3 \leqq i \leqq 5,$$

et les P^1 correspondantes ont l'une des formes

$$\begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} 3 \\ 4 \end{cases}, \quad \begin{cases} 1 \\ 2 \\ 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2 \\ 3 \\ 4 \end{cases}, \quad \begin{cases} 3 \\ 4 \\ 5 \end{cases}.$$

Ceci exige $b_3 = 1$, $b_5 = 5$, et fournit donc trois solutions : 2, 3, 1, 4, 5 ; 2, 4, 1, 3, 5 et 3, 4, 1, 2, 5. On a obtenu en tout huit couples P^1, P^k appartenant à huit classes distinctes, donc l'égalité

$$\Psi(2; 5) = \Phi(2; 5) - 8 = 23$$

19. Pour $\alpha = 1$, nous savons ainsi que

$$\Psi(1; n) = \Phi(1; n) \qquad \text{si} \quad n \geqq 4.$$

Pour $n = 2$, $(n - 1)!$ est égal à 1, donc

$$\Psi(1; 2) = 1 = \Phi(1; 2) - 1;$$

pour $n = 3$,

$$\Psi(1; 3) = (n - 1)! = 2 = \Phi(1; 3) - 1.$$

Pour $\alpha = 2$, $\Psi(2; n) = \Phi(2; n)$ si $n \geqq 7$, et nous venons de voir que

$$\Psi(2; 6) = \Phi(2; 6) - 1, \qquad \Psi(2; 5) = \Phi(2; 5) - 8.$$

Pour $n \leqq 4$, il est clair que $\Psi(2; n) = (n - 1)!$, donc [1]

$$\Psi(2; 2) = 1 = \Phi(2; 2) - 1, \qquad \Psi(2; 3) = 2 = \Phi(2; 3) - 4$$

et enfin

$$\Psi(2; 4) = 6 = \Phi(2; 4) - 8.$$

Lorsque $\alpha = 3$,

$$\Psi(3; n) = \Phi(3; n) \qquad \text{pour} \quad n \geqq 10,$$

et nous savons également que $\Psi(3; 9) = \Phi(3; 9) - 1$. Il est clair que $\Psi(3; n) = (n - 1)!$ pour $n \leqq 5$, car, alors, dans $1, b_2, b_3, b_4, b_5$ l'écart de b_2, b_3, b_4, b_5 avec 2, 3, 4, 5 ne dépasse pas 3 ; ainsi

$$\begin{aligned} \Psi(3; 2) &= \ \ 1 = \Phi(3; 2) - 1, \\ \Psi(3; 3) &= \ \ 2 = \Phi(3; 3) - 4, \\ \Psi(3; 4) &= \ \ 6 = \Phi(3; 4) - 18, \\ \Psi(3; 5) &= 24 = \Phi(3; 5) - 54. \end{aligned}$$

---

[1] *Cf.* le tableau du paragraphe 5.

La différence $\Phi(3; n) - \Psi(3; n)$ ne demeure inconnue que pour $n = 6$, 7 ou 8.

Nous évaluerons directement $\Psi(3; n)$ pour $n = 6$ et 7. Soit d'abord $n = 6$. Les classes ϖ sont celles des permutations $P^1 = 1, (2, 3, 4, 5, 6)$. Parmi ces permutations $P^1 = 1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$, celles où b_2, b_3, b_4, b_5, b_6 a un écart inférieur à 4 avec 2, 3, 4, 5, 6 ont le même écart avec P_0, et leur classe vérifie $|\varpi_0, \varpi| \leqq 3$. Leur nombre est $\Phi(3; 5) = 78$. Étudions les $5! - 78 = 42$ autres, où l'on a nécessairement $2 = b_6$ ou $6 = b_2$. Lorsque $2 = b_6$, on voit tout de suite que $|P_0, P^6| \leqq 3$; leur nombre est 24. Les 18 autres $(6 = b_2; 2 \neq b_6)$ sont telles qu'on ait

$$|P_0, P^6| \leqq 3 \quad \text{si } 5 \neq b_6 \quad \text{et} \quad 2 \neq b_5; \qquad |P_0, P^5| \leqq 3 \quad \text{si } 5 \neq b_5 \quad \text{et} \quad 2 \neq b_4;$$
$$|P_0, P^4| \leqq 3 \quad \text{si} \quad 5 \neq b_4 \quad \text{et} \quad 2 \neq b_3;$$

l'une de ces doubles conditions est toujours remplie, donc leurs classes conviennent et

$$\Psi(3; 6) = 78 + 42 = 120 = \Phi(3; 6) - 110.$$

20. Lorsque $n = 7$, les classes des permutations $P^1 = 1, b_2, b_3, \ldots, b_7$, où $b_2, b_3, \ldots, b_7$ a un écart inférieur à 4 avec 2, 3, ..., 7, ont elles-mêmes un écart inférieur à 4 avec ϖ_0; leur nombre est $\Phi(3; 6) = 230$. Les autres sont au nombre de $6! - 230 = 490$, et nous les répartissons entre six familles d'après la valeur de b_2.

Les permutations P^1 où $b_2 = 2$ se partagent elles-mêmes en quatre groupes, d'après la valeur 3, 4, 5 ou 6 de b_7; b_7 diffère de 7 afin que l'écart de $b_2, b_3, \ldots, b_7$ avec 2, 3, ..., 7 surpasse 3. Les 24 permutations $P^1 = 1, 2, (4, 5, 6, 7), 3$ du premier groupe conviennent car $|P_0, P^7| \leqq 3$. Dans les trois autres groupes, les P^1 où $b_3 = 7$ retiennent seules l'attention, soit six par groupe. Avec $P^1 = 1, 2, 7, (3, 5, 6), 4$, $|P_0, P^7| \leqq 3$ si $b_6 \neq 3$ et $|P_0, P^6| \leqq 3$ si $b_6 = 3$, et les six permutations conviennent; avec $P^1 = 1, 2, 7, (3, 4, 6), 5$, $|P_0, P^6| \leqq 3$ si $b_5 \neq 3$ et $b_6 \neq 6$, tandis que $|P_0, P^5| \leqq 3$ si $b_4 = 6$, de sorte que quatre permutations conviennent; avec $P^1 = 1, 2, 7, (3, 4, 5), 6$, seul P^5 peut avoir un écart inférieur à 4 avec P_0, pourvu que $b_4 \neq 3$, $b_5 \neq 5$, et l'on a trois solutions; ainsi $6 + 4 + 3 = 13$ des 18 classes de ces trois groupes conviennent. La première famille fournit 37 classes convenables sur 42.

La deuxième famille, caractérisée par $b_2 = 3$, fournit cinq groupes, suivant la valeur de b_7. Si $b_7 = 2$, $|P_0, P^1| > 3$ pour les 24 permutations, mais $|P_0, P^7| \leqq 3$; les 24 classes conviennent. Chacun des groupes où $b_7 = 4$, 5 ou 6 ne contient que dix permutations P^1 vérifiant $|P_0, P^1| > 3$, car il faut, pour chacune d'elles, $2 = b_6$ ou $7 = b_3$; dans le dernier groupe, seules les 6 permutations $P^1 = 1, 3, (4, 5, 6), 2, 7$ sont à retenir. Dans le groupe où $b_7 = 4$, les

6 permutations $P^1 = 1, 3, (5, 6, 7), 2, 4$ sont telles que $|P_0, P^6| \leqq 3$; avec les 4 permutations $P^1 = 1, 3, 7, (2, 5, 6), 4$ où $b_6 \neq 2$, on a

$$|P_0, P^7| \leqq 3 \quad \text{si} \quad 2 = b_4 \quad \text{et} \quad |P_0, P^5| \leqq 3 \quad \text{si} \quad b_4, b_5, b_6 = 6, 2, 5;$$

9 des dix classes de ce groupe conviennent. Pour $b_7 = 5$, les 6 permutations $P^1 = 1, 3, (4, 6, 7), 2, 5$ sont telles que $|P_0, P^6| \leqq 3$; parmi les 4 permutations $P^1 = 1, 3, 7, (2, 4, 6), 5$ où $b_6 \neq 2$, la permutation où $b_4, b_5, b_6 = 6, 2, 4$ convient seule, avec $|P_0, P^5| \leqq 3$; 7 des 10 classes de ce groupe conviennent. Lorsque $b_7 = 6$, $b_6 = 2$, seul P^5 peut avoir un écart inférieur à 4 avec P_0, ce qui suppose $b_5 = 4$; il en est de même pour $P^1 = 1, 3, 7, (2, 4, 5), 6$ où $b_6 \neq 2$, avec $P^5 = b_5, b_6, 6, 1, 3, 7, b_4$, si $b_4 \neq 2$, donc $2 = b_5$; 4 des 10 classes de ce groupe conviennent. Enfin on voit tout de suite que le groupe où $b_7 = 7$ ne fournit aucune classe convenable. Ainsi, 44 des 60 classes de cette famille répondent à la question.

Dans la troisième famille, définie par $b_2 = 4$, les deux groupes où $b_7 = 2$ ou 3 contiennent chacun 24 permutations P^1 telles que $|P_0, P^1| > 3$; pour $b_7 = 5$ ou 6, on retient les 10 permutations P^1 pour lesquelles $2 = b_6$ ou $7 = b_3$, et, pour $b_7 = 7$, les 6 permutations P^1 telles que $2 = b_6$. Lorsque $b_7 = 2$, $|P_0, P^7| \leqq 3$ si $3 \neq b_6$, mais $|P_0, P^6| \leqq 3$ si $3 = b_6$; les 24 classes du premier groupe conviennent. Si $b_7 = 3$, $|P_0, P^7| \leqq 3$ si $2 \neq b_5$ et b_6, mais $|P_0, P^6| \leqq 3$ si $2 = b_6$; si $2 = b_5$, seul P^5 peut avoir un écart inférieur à 4 avec P_0, ce qui exige $5 = b_6$; 20 des 24 classes du second groupe conviennent. Dans le troisième groupe, $P^1 = 1, 4, (3, 6, 7), 2, 5$ est telle que $|P_0, P^6| \leqq 3$ si $3 \neq b_5$, mais $|P_0, P^5| \leqq 3$ si $3 = b_5$; avec $P^1 = 1, 4, 7, (2, 3, 6), 5$ où $2 \neq b_6$, seul P^5 peut avoir avec P_0 un écart inférieur à 4, ce qui suppose $b_4, b_5, b_6 = 6, 2, 3$; 7 des 10 classes du troisième groupe conviennent. Lorsque $b_7 = 6$, $P^1 = 1, 4, (3, 5, 7), 2, 6$ n'est telle qu'on ait $|P_0, P^k| \leqq 3$ qu'avec $k = 5$ et $b_5 = 3$; pour $P^1 = 1, 4, 7, (2, 3, 5), 6$ avec $b_6 \neq 2$, il faut encore $k = 5$, avec $b_4, b_5, b_6 = 5, 2, 3$; 3 des 10 classes de ce groupe conviennent. Pour la même raison qu'avec la deuxième famille, aucune des classes du cinquième groupe ne convient. Cette famille fournit ainsi 54 classes acceptables sur les 74.

Dans la quatrième famille, $b_2 = 5$, et les cinq groupes fournis par les diverses valeurs de b_7 contiennent respectivement 24, 24, 10, 10 et 6 permutations P^1, telles que $|P_0, P^1|$ surpasse 3, comme dans la troisième famille. Comme dans celle-ci, on voit que les deux premiers groupes ($b_7 = 2$ et $b_7 = 3$) fournissent respectivement 24 et 20 classes convenables. Dans le troisième groupe, les 6 permutations $P^1 = 1, 5, (3, 6, 7), 2, 4$ sont telles que $|P_0, P^6| \leqq 3$ si $3 \neq b_5$ et $|P_0, P^5| \leqq 3$ si $3 = b_5$; pour les 4 permutations $P^1 = 1, 5, 7, (2, 3, 6), 4$ avec $2 \neq b_6$, $|P_0, P^7| \leqq 3$ si $b_4, b_5 = 2, 3$, et $|P_0, P^5| \leqq 3$ si $b_5, b_6 = 2, 3$, tandis que $|P_0, P^6| > 3$; ce groupe fournit 8 classes. Quatre classes du quatrième groupe ($b_7 = 6$) conviennent seulement; en effet, avec $2 = b_6$, $|P_0, P^5| \leqq 3$ pour

$b_5 \neq 7$ et $b_4 \neq 3$, tandis que $b_3 = 7$, $b_6 \neq 2$ entraînent $|P_0, P^5| \leqq 3$ pourvu que $b_4, b_5, b_6 = 4, 2, 3$. Ici encore, aucune des 6 classes du cinquième groupe ne convient, et cette famille contient 56 classes acceptables sur 74.

Dès que $b_2 = 6$ ou 7, $|P_0, P^1|$ surpasse 3 et les 120 permutations P^1 des cinquième et sixième familles sont à retenir. Chacune de celles-ci est encore partagée en cinq groupes suivant la valeur de b_7. Dans la cinquième famille, le groupe où $b_7 = 2$ fournit 24 classes, car $|P_0, P^7| \leqq 3$ si $3 \neq b_6$ et $|P_0, P^6| \leqq 3$ si $3 = b_6$. Si $b_7 = 3$, $|P_0, P^7| \leqq 3$ si $2 = b_3$ ou b_4; pour $2 = b_6$, on a $P^6 = 2, 3, 1, 6, (4, 5, 7)$, donc $|P_0, P^6| \leqq 3$; pour $2 = b_5$, $P^5 = 2, b_6, 3, 1, 6, b_3, b_4$ vérifie $|P_0, P^5| \leqq 3$ pour $b_6 = 4$ ou 5; ce groupe fournit $12 + 6 + 4 = 22$ classes convenables. Si $b_7 = 4$, $|P_0, P^7| \leqq 3$ si $2 = b_3$ ou b_4 et $3 \neq b_6$, tandis que $|P_0, P^6| \leqq 3$ pour $3 = b_6$ si $2 = b_3$; ces deux positions de 2 fournissent ainsi 10 classes; pour $2 = b_6$, $|P_0, P^6| \leqq 3$ si $3 \neq b_5$, tandis que $2 = b_6$, $3 = b_5$ entraînent $|P_0, P^5| \leqq 3$, donc les 6 classes correspondantes conviennent; pour $2 = b_5$, $|P_0, P^5| \leqq 3$ pourvu que $b_4 = 5$ ou 7 et $b_6 = 3$ ou 5, ce qui fournit 3 classes; ce groupe fournit 19 classes convenables. Dans le quatrième groupe, $b_7 = 5$ et $|P_0, P^k|$ ne peut être inférieur à 4 qu'avec $k = 5$ ou 6; avec $P^5 = b_5, b_6, 5, 1, 6, b_3, b_4$, il faut $b_3 \neq 2$, $b_4 \neq 2$ et 3, $7 \neq b_5$ et b_6, tandis que dans $P^6 = b_6, 5, 1, 6, b_3, b_4, b_5$, il faut $2 \neq b_4$ et b_5, $3 \neq b_5$, $7 \neq b_6$; on ne retient donc que les P^1 où $7 \neq b_6$. Discutons d'après la valeur de b_5 : si $b_5 = 2$, il faut $k = 5$, avec $b_4 = 4$ ou 7, $b_6 = 3$ ou 4, ce qui donne 3 classes; si $b_5 = 3$, il faut encore $k = 5$, avec $(b_3, b_4) = (4, 7)$, donc $b_6 = 2$, ce qui donne 2 classes; si $b_5 = 4$, on a $b_6 = 2$ ou 3; dans le premier cas, $|P_0, P^6| \leqq 3$; dans le deuxième, $|P_0, P^5| > 3$, car $2 = b_3$ ou b_4, mais $|P_0, P^6| \leqq 3$ pour $b_3 = 2$, $b_4 = 7$, ce qui donne respectivement 2 et 1 classes; si $b_5 = 7$, il faut $k = 6$, avec $b_4 = 3$ ou 4, ce qui donne 4 classes. Ce groupe fournit ainsi 12 classes. Aucune des classes du cinquième groupe ne convient, et cette famille donne 77 classes acceptables sur 120.

Dans la famille définie par $b_2 = 7$, seules P^5 et P^6 peuvent avoir un écart inférieur à 4 avec P_0, dans chacun des 5 groupes. Dans le premier, $P^6 = b_6, 2, 1, 7, b_3, b_4, b_5$ et $P^5 = b_5, b_6, 2, 1, 7, b_3, b_4$, donc $|P_0, P^6| \leqq 3$ pour $b_6 = 3$ ou 4 et $b_5 \neq 3$, et $|P_0, P^5| \leqq 3$ pour $b_4 \neq 3$, $b_5 = 3$ ou 4, $b_6 \neq 6$; on voit ainsi que les 6 classes où $b_6 = 3$ conviennent, ainsi que les 6 classes où $b_6 = 4$; pour $b_6 = 5$, $b_5 = 3$ fournit 2 classes et $b_5 = 4$ en fournit 1; 15 classes de ce groupe conviennent. Si $b_7 = 3$, $P^6 = b_6, 3, 1, 7, b_3, b_4, b_5$, donc $|P_0, P^6| \leqq 3$ pour $b_6 = 2$ ou 4, $2 \neq b_4$ et b_5, tandis que $P^5 = b_5, b_6, 3, 1, 7, b_3, b_4$ montre que $|P_0, P^5| \leqq 3$ pour $2 \neq b_3$ et b_4, $b_5 = 2$ ou 4, $b_6 \neq 6$; on voit ainsi que $b_6 = 2$ fournit 6 classes; $b_6 = 4$ en fournit 2 avec $b_3 = 2$, et 2 avec $b_5 = 2$; $b_6 = 5$ en fournit 2 avec $b_5 = 2$; ce groupe fournit 12 classes sur 24. Avec $b_7 = 4$, $P^6 = b_6, 4, 1, 7, b_3, b_4, b_5$, donc $|P_0, P^6| \leqq 3$ pour $b_6 = 2$ ou 3, $b_5 = 5$ ou 6, $b_4 \neq 2$, et $P^5 = b_5, b_6, 4, 1, 7, b_3, b_4$, donc $|P_0, P^5| \leqq 3$ pour $b_3 \neq 2$, $b_4 = 5$ ou 6, $b_5 = 2$ ou 3, $b_6 \neq 6$; par suite, les 6 classes de $b_6 = 2$ conviennent; pour $b_6 = 3$, 2 des permutations P^6 conviennent ainsi que 2 des P^5, ce qui donne 4 classes; $b_6 = 5$

fournit une seule classe, donc 11 classes de ce groupe conviennent. Avec $b_7 = 5$, $P^6 = b_6, 5, 1, 7, b_3, b_4, b_5$, donc $|P_0, P^6| \leqq 3$ pour $b_4 \neq 2$, $b_5 = 4$ ou 6, $b_6 \neq 6$, et $P^5 = b_5, b_6, 5, 1, 7, b_3, b_4$ est tel que $|P_0, P^5| \leqq 3$ pour $b_3 \neq 2$, $b_4 = 4$ ou 6, $6 \neq b_5$ et b_6; si $b_6 = 2$, les 4 permutations P^6 où $b_5 = 4$ ou 6 conviennent, tandis que $b_5 = 3$ est associé à 2 permutations P^5 acceptables; on obtient ici 6 classes; avec $b_6 = 3$, les 2 permutations P^6 où $b_3 = 2$ conviennent, ainsi que les 2 permutations P^5 où $b_5 = 2$, ce qui fait 4 classes acceptables; avec $b_6 = 4$, il faut $b_3, b_4, b_5 = 2, 3, 6$ dans P^6 et $b_3, b_4, b_5 = 3, 6, 2$ dans P^5, ce qui donne 2 classes; ce groupe fournit 12 classes, car $b_6 = 6$ ne donne rien. Enfin, lorsque $b_7 = 6$, seule $P^5 = b_5, b_6, 6, 1, 7, b_3, b_4$ peut avoir un écart inférieur à 4 avec P_0; les conditions sont $b_3 \neq 2$, $b_4 = 4$ ou 5, $b_5 \neq 5$, ce qui donne 7 classes. La famille définie par $b_2 = 7$ fournit 57 classes sur 120.

Les 490 permutations étudiées nous ont ainsi donné

$$37 + 44 + 54 + 56 + 77 + 57 = 325 \text{ classes}$$

dont l'écart avec ϖ_0 ne surpasse pas 3, donc

$$\Psi(3; 7) = 230 + 325 = 555,$$

et, par suite,

$$\Psi(3; 7) = \Phi(3; 7) - 120.$$

21. Pour $n = 8$, le calcul direct de $\Psi(3; 8)$ est encore plus laborieux que le précédent, mais la différence $\Phi(3; 8) - \Psi(3; 8)$ est faible et s'évalue aisément à l'aide des inégalités (27) à (30) du paragraphe 17. Tout d'abord, (28) et (30) limitent k aux valeurs 3, 4, 5.

Pour $k = 3$, (27) et (29) donnent respectivement $b_i = i + 3$ pour $i = 1$ et 2, et $i - 3 \leqq b_i \leqq i + 1$ pour $3 \leqq i \leqq 8$. $b_1, b_2 = 4, 5$, et la permutation b_3, $b_4, \ldots, b_8$ est l'une de celles représentées en

$$\begin{cases} 1 \\ 2, \\ 3 \end{cases} \begin{cases} 1 \\ 2, \\ 3 \end{cases} \begin{cases} 2 \\ 3, \\ 6 \end{cases} \begin{cases} 3 \\ 6, \\ 7 \end{cases} \begin{cases} 6 \\ 7, \\ 8 \end{cases} \begin{cases} 6 \\ 7; \\ 8 \end{cases}$$

elles ont donc l'une des formes

$$(1, 2), \quad 3, \quad \begin{cases} 6 \\ 7 \end{cases}, \quad \begin{cases} 6 \\ 7, \\ 8 \end{cases} \begin{cases} 6 \\ 7, \\ 8 \end{cases}$$

$$(1, 2), \quad 6, \quad 3, \quad (7, \quad 8),$$

$$(1, 3), \quad 2, \quad \begin{cases} 6 \\ 7 \end{cases}, \quad \begin{cases} 6 \\ 7, \\ 8 \end{cases} \begin{cases} 6 \\ 7, \\ 8 \end{cases}$$

et sont au nombre de 20.

Pour $k = 4$, on voit de même que

$$i + 2 \leqq b_i \leqq i + 3 \quad \text{pour } 1 \leqq i \leqq 3 \qquad \text{et} \qquad i - 3 \leqq b_i \leqq i \quad \text{pour } 4 \leqq i \leqq 8.$$

P^1 est l'une des permutations représentées en

$$\begin{cases}3\\4\end{cases}, \quad \begin{cases}4\\5\end{cases}, \quad \begin{cases}5\\6\end{cases}, \quad \begin{cases}1\\2\\3\\4\end{cases}, \quad \begin{cases}2\\3\\4\\5\end{cases}, \quad \begin{cases}3\\4\\5\\6\end{cases}, \quad \begin{cases}4\\5\\6\\7\end{cases}, \quad \begin{cases}5\\6\\7\\8\end{cases}.$$

On voit tout de suite qu'on a nécessairement $b_4 = 1$, $b_5 = 2$, $b_8 = 8$, $b_7 = 7$, ce qui réduit les possibilités aux 4 éléments de

$$\begin{cases}3\\4\end{cases}, \quad \begin{cases}4\\5\end{cases}, \quad \begin{cases}5\\6\end{cases}, \quad 1, \quad 2, \quad \begin{cases}3\\4\\5\\6\end{cases}, \quad 7, \quad 8.$$

Pour $k = 5$, on a de même

$$i+1 \leqq b_i \leqq i+3 \qquad \text{pour} \quad 1 \leqq i \leqq 4,$$

et

$$i-3 \leqq b_i \leqq i-1 \qquad \text{pour} \quad 5 \leqq i \leqq 8,$$

donc aucune solution puisque aucun b_i ne peut être 1 ou 8.

Les 24 permutations P^1 obtenues appartenant à 24 classes différentes, on a ainsi démontré que

$$\Psi(3; 8) = \Phi(3; 8) - 24 = 2\,045.$$

CHAPITRE III.

Permutations fermées non orientées.

22. Deux permutations sont maintenant équivalentes lorsqu'elles donnent la même suite d'éléments pourvu qu'on fixe convenablement le premier élément et le sens de la succession. Chaque permutation fermée non orientée peut être conçue comme une classe comprenant deux permutations fermées orientées opposées ϖ, $\overline{\varpi}$, déduites l'une de l'autre en changeant l'orientation ; désignons-la par $\varpi^\star$. Ainsi, $\varpi_0^\star$ est la réunion de $P_0 = 1, 2, \ldots, n$, $\overline{P}_0 = n, \ldots, 2, 1$ et des permutations P^k, $\overline{P}^k$ qui s'en déduisent par permutation circulaire. Le nombre des $\varpi^\star$ est $\frac{(n-1)!}{2}$ si $n \geqq 3$. La distance de deux permutations $\varpi^\star$, $\varpi'^\star$ est l'écart

$$|\varpi^\star, \varpi'^\star| = \inf\{|\varpi, \varpi'|, |\varpi, \overline{\varpi'}|\}.$$

Cette définition satisfait les axiomes d'une métrique. Il est clair en effet que, en changeant les sens de ϖ et $\overline{\varpi}'$ dans le dernier terme, on a également

$$|\varpi^\star, \varpi'^\star| = \inf\{|\varpi, \varpi'|, |\overline{\varpi}, \varpi'|\} = |\varpi'^\star, \varpi^\star|,$$

ce qui établit la symétrie. Cette distance ne s'annule que si $\varpi = \varpi'$ ou $\varpi = \overline{\varpi}'$, donc si $\varpi^\star = \varpi'^\star$. Soit enfin une troisième permutation, qu'on peut supposer être $\varpi_0^\star$, Il vient

$$(1)\qquad \begin{cases} |\varpi_0^\star, \varpi^\star| = \inf\{|\varpi_0, \varpi|, |\varpi_0, \overline{\varpi}|\}, \\ |\varpi_0^\star, \varpi'^\star| = \inf\{|\varpi_0, \varpi'|, |\varpi_0, \overline{\varpi}'|\}, \end{cases}$$

tandis que

$$|\varpi, \varpi'| \leqq |\varpi_0, \varpi| + |\varpi_0, \varpi'|, \qquad |\overline{\varpi}, \varpi'| \leqq |\varpi_0, \overline{\varpi}| + |\varpi_0, \varpi'|,$$
$$|\varpi, \overline{\varpi}'| \leqq |\varpi_0, \varpi| + |\varpi_0, \overline{\varpi}'|, \qquad |\overline{\varpi}, \overline{\varpi}'| \leqq |\varpi_0, \overline{\varpi}| + |\varpi_0, \overline{\varpi}'|.$$

On en déduit qu'on a à la fois

$$|\varpi^\star, \varpi'^\star| \leqq \inf\{|\varpi_0, \varpi| + |\varpi_0, \varpi'|, |\varpi_0, \varpi| + |\varpi_0, \overline{\varpi}'|\},$$
$$|\varpi^\star, \varpi'^\star| \leqq \inf\{|\varpi_0, \overline{\varpi}| + |\varpi_0, \varpi'|, |\varpi_0, \overline{\varpi}| + |\varpi_0, \overline{\varpi}'|\},$$

donc

$$|\varpi^\star, \varpi'^\star| \leqq \inf\{|\varpi_0, \varpi| + |\varpi_0, \varpi'|, |\varpi_0, \varpi| + \varpi_0, \overline{\varpi}'|,$$
$$|\varpi_0, \overline{\varpi}| + |\varpi_0, \varpi'|, |\varpi_0, \overline{\varpi}| + |\varpi_0, \overline{\varpi}'|\},$$

tandis que le second membre est justement $|\varpi_0^\star, \varpi^\star| + |\varpi_0^\star, \varpi'^\star|$, d'après (1).

23. On établit aisément que le nombre $\Psi^\star(\alpha; n)$ des permutations $\varpi^\star$ dont la distance à une permutation donnée $\varpi'^\star$ ne dépasse pas α est égal à $\Psi(\alpha; n)$ dès que n surpasse 4α. Il suffit de prendre $\varpi'^\star = \varpi_0^\star$. Si $|\varpi_0^\star, \varpi^\star| \leqq \alpha$, il existe une permutation $P^1 = b_1, b_2, \ldots, b_n$ de la classe $\varpi^\star$ telle que $|P_0, P^1| \leqq \alpha$, où P_0 désigne toujours la permutation $P_0^1 = 1, 2, \ldots, n$. Pour que $\Psi^\star(\alpha; n)$ soit inférieur à $\Psi(\alpha; n)$, il faut et il suffit qu'il existe une telle classe $\varpi^\star$ contenant une deuxième permutation

$$\overline{P}^k = b_{k-1}, \quad b_{k-2}, \quad \ldots, \quad b_1, \quad b_n, \quad \ldots, \quad b_k, \qquad \text{avec } |P_0, \overline{P}^k| \leqq \alpha,$$

pour une valeur k de l'intervalle $1 \leqq k \leqq n$. Bien entendu, on peut permuter P^1 et $\overline{P}^k$, ce qui ne change pas k, car $P^1 = \overline{(\overline{P}^k)^k}$. Dans $\overline{P}^k$, le rang de b_i est $k - i$ lorsque $1 \leqq i \leqq k - 1$ et $n + k - i$ pour $k \leqq i \leqq n$. Les deux conditions d'écart se traduisent par le système ([5])

$$(2)\qquad \begin{cases} i - \alpha \leqq b_i \leqq i + \alpha, \\ k - i - \alpha \leqq b_i \leqq k - i + \alpha & \text{si } 1 \leqq i \leqq k - 1, \\ n + k - i - \alpha \leqq b_i \leqq n + k - i + \alpha & \text{si } k \leqq i \leqq n. \end{cases}$$

Les conditions imposées à i sont ainsi

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{k}{2} - \alpha \leqq i \leqq \dfrac{k}{2} + \alpha & \text{si } 1 \leqq i \leqq k - 1, \\ \dfrac{n+k}{2} - \alpha \leqq i \leqq \dfrac{n+k}{2} + \alpha & \text{si } k \leqq i \leqq n. \end{cases}$$

([5]) Pour $k = 1$, la deuxième ligne de (2) disparaît. D'ailleurs $k = 1$ ne peut convenir dès que n surpasse $2\alpha + 1$, et même si $n = 2\alpha + 1$, car alors les conditions (2) donnent $b_1 = b_n = \alpha + 1$.

(3) doit être vérifié par toutes les valeurs de i mentionnées, donc, dans chacune des deux lignes, le deuxième intervalle est inclus dans le premier, ce qui conduit, pour k, aux conditions

$$\frac{k}{2} - \alpha \leqq 1 \leqq k - 1 \leqq \frac{k}{2} + \alpha,$$

$$\frac{n+k}{2} - \alpha \leqq k \leqq n \leqq \frac{n+k}{2} + \alpha,$$

soit

$$n - 2\alpha \leqq k \leqq 2\alpha + 2.$$

Plus précisément, si $k = 2\alpha + 2$, (2) donne

$$b_1 = b_{2\alpha+1} = \alpha + 1,$$

et, si $k = n - 2\alpha$,

$$b_{n-2\alpha} = b_n = n - \alpha;$$

ces deux valeurs de k ne fournissent aucune solution et les seules valeurs utiles sont celles de l'intervalle

$$n + 1 - 2\alpha \leqq k \leqq 2\alpha + 1. \tag{4}$$

Ceci suppose $n \leqq 4\alpha$. C. Q. F. D.

24. Pour examiner ce que donnent de telles valeurs de n, faisons une remarque importante sur le système (2). Si l'on y remplace k par $n+2-k$ et i par $n+1-j$, (2) devient

$$(2')\quad \left\{\begin{array}{lr} j - \alpha \leqq n + 1 - b_{n+1-j} \leqq j + \alpha, & \\ k - j - \alpha \leqq n + 1 - b_{n+1-j} \leqq k - j + \alpha & \text{si}\quad 1 \leqq j \leqq k - 1, \\ n + k - j - \alpha \leqq n + 1 - b_{n+1-j} \leqq n + k - j + \alpha & \text{si}\quad k \leqq j \leqq n. \end{array}\right.$$

Les valeurs k et $n+2-k$ fournissent ainsi des permutations qui se déduisent l'une de l'autre en remplaçant b_i par $n+1-b_{n+1-i}$, donc le même nombre de solutions faisant double emploi.

Pour $n = 4\alpha$, (4) n'autorise que la valeur $2\alpha+1$ de k; les deux premières lignes de (2) donnent alors

$$\begin{array}{lr} \alpha + 1 - i \leqq b_i \leqq \alpha + i & \text{si}\quad 1 \leqq i \leqq \alpha, \\ i - \alpha \leqq b_i \leqq 3\alpha + 1 - i & \text{si}\quad \alpha + 1 \leqq i \leqq 2\alpha, \end{array}$$

soit, pour $1 \leqq i \leqq \alpha$,

$$\alpha + 1 - i \leqq \left\{\begin{array}{l} b_i \\ b_{2\alpha+1-i} \end{array}\right. \leqq \alpha + i. \tag{5}$$

La transformation de (2) en (2′) donne de même

$$\alpha + 1 - i \leqq \left\{\begin{array}{l} 4\alpha + 1 - b_{4\alpha+1-i} \\ 4\alpha + 1 - b_{4\alpha+1-(2\alpha+1-i)} \end{array}\right. \leqq \alpha + i,$$

soit

$$(6) \qquad 3\alpha+1-i \leqq \left\{ \begin{matrix} b_{2\alpha+i} \\ b_{4\alpha+1-i} \end{matrix} \right. \leqq 3\alpha+i \qquad (1 \leqq i \leqq \alpha).$$

(5) montre, pour $i=1, 2, \ldots$, que

$$(b_1, b_{2\alpha}) = (\alpha, \alpha+1),$$

puis

$$(b_2, b_{2\alpha-1}) = (\alpha-1, \alpha+2),$$

et, d'une manière générale,

$$(b_i, b_{2\alpha+1-i}) = (\alpha+1-i, \alpha+i) \qquad (i=1, 2, \ldots, \alpha).$$

(6) donne de même

$$(b_{2\alpha+i}, b_{4\alpha+1-i}) = (3\alpha+1-i, 3\alpha+i) \qquad (i=1, 2, \ldots, \alpha).$$

Le nombre des permutations P^1 vérifiant (2) est donc $2^{2\alpha}$, appartenant à $2^{2\alpha-1}$ classes ϖ. Nous avons ainsi démontré que

$$(7) \qquad \Psi^\star(\alpha; n) = \left\{ \begin{array}{ll} \Psi(\alpha; n) = \Phi(\alpha; n) & \text{pour } n > 4\alpha, \\ \Psi(\alpha; n) - 2^{2\alpha-1} = \Phi(\alpha; n) - 2^{2\alpha-1} & \text{pour } n = 4\alpha. \end{array} \right.$$

En particulier,

$$\Psi^\star(1; n) = \Phi(1; n) \qquad \text{pour } n > 4,$$

tandis que

$$\Psi^\star(1; 4) = \Phi(1; 4) - 2 = 3;$$

$$\Psi^\star(2; n) = \Phi(2; n) \quad \text{pour } n > 8 \quad \text{et} \quad \Psi^\star(2; 8) = \Phi(2; 8) - 8 = 392;$$

$$\Psi^\star(3; n) = \Phi(3; n) \quad \text{pour } n > 12 \quad \text{et} \quad \Psi^\star(3; 12) = \Phi(3; 12) - 32 = 183\,956.$$

25. Pour $n = 4\alpha - 1$, les valeurs de k permises par (4) sont, 2α, $2\alpha+1$ et il suffit d'examiner la première. Pour $k = 2\alpha$, (2) se décompose en quatre doubles inégalités

$$\begin{array}{rll} \alpha - i \leqq b_i \leqq \alpha + i & \text{si} & 1 \leqq i \leqq \alpha, \\ i - \alpha \leqq b_i \leqq 3\alpha - i & \text{si} & \alpha+1 \leqq i \leqq 2\alpha - 1, \\ 5\alpha - 1 - i \leqq b_i \leqq \alpha + i & \text{si} & 2\alpha \leqq i \leqq 3\alpha - 1, \\ i - \alpha \leqq b_i \leqq 7\alpha - 1 - i & \text{si} & 3\alpha \leqq i \leqq 4\alpha - 1, \end{array}$$

qu'on peut encore écrire sous la forme

$$(8) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \alpha - i \leqq \left\{ \begin{matrix} b_i \\ b_{2\alpha-i} \end{matrix} \right. \leqq \alpha + i, \\ 3\alpha - i \leqq \left\{ \begin{matrix} b_{2\alpha-1+i} \\ b_{4\alpha-i} \end{matrix} \right. \leqq 3\alpha - 1 + i, \end{array} \right.$$

pour $1 \leqq i \leqq \alpha$. La deuxième ligne donne de proche en proche

$$(9) \qquad \left\{ \begin{array}{l} (b_{2\alpha}, b_{4\alpha-1}) \quad = (3\alpha-1, 3\alpha), \\ (b_{2\alpha+1}, b_{4\alpha-2}) = (3\alpha-2, 3\alpha+1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ (b_{3\alpha-1}, b_{3\alpha}) \quad = (2\alpha, 4\alpha-1); \end{array} \right.$$

les valeurs réservées aux autres b_i sont donc $1, 2, \ldots, 2\alpha - 1$; la suite b_1, $b_2, \ldots, b_{2\alpha-1}$ est formée à l'aide de la suite des α accolades

$$(10) \qquad \left\{\begin{matrix} \alpha - 1 \\ \alpha \\ \alpha + 1 \end{matrix}\right., \quad \left\{\begin{matrix} \alpha - 2 \\ \alpha - 1 \\ \alpha \\ \alpha + 1 \\ \alpha + 2 \end{matrix}\right., \quad \ldots, \quad \left\{\begin{matrix} \alpha - i \\ \alpha - i + 1 \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ \alpha + i - 1 \\ \alpha + i \end{matrix}\right., \quad \ldots, \quad \left\{\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \cdots \\ \cdots \\ 2\alpha - 2 \\ 2\alpha - 1 \end{matrix}\right., \quad \left\{\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \cdots \\ \cdots \\ 2\alpha - 2 \\ 2\alpha - 1 \end{matrix}\right. ;$$

l'accolade générale fournissant les valeurs du couple $b_i, b_{2\alpha-i} (i = 1, 2, \ldots, \alpha - 1)$, et la dernière celle de b_α. Le nombre de suites fournies par (9) est 2^α et le nombre N_α de celles fournies par (10) est $6^{\alpha-1}$; en effet, il est clair que $N_2 = 6$; d'autre part, lorsqu'on a choisi l'une des six solutions que la première accolade réserve à $b_1, b_{2\alpha-1}$, la suppression dans les autres accolades des deux valeurs choisies conduit, pour la suite des autres b_i, au même problème que pour $\alpha - 1$ accolades, donc à la relation de récurrence $N_\alpha = 6 N_{\alpha-1}$. Ainsi, le nombre des permutations P^1, P^k fournies par la valeur $k = 2\alpha$ est $2 \times 12^{\alpha-1}$, et le nombre de celles qui font double emploi est $12^{\alpha-1}$. $k = 2\alpha + 1$ en donne autant, et elles appartiennent à de nouvelles classes. En effet, $4\alpha - 1$ est accolé à 2α dans les suites obtenues en (9), (10); avec $k = 2\alpha + 1$, (2′) montre que ces deux valeurs sont celles de deux éléments b'_i, b'_j tels que

$$b'_i = n + 1 - b_{n+1-i} = 4\alpha - b_{4\alpha-i}, \qquad b'_j = 4\alpha - b_{4\alpha-j},$$

soit, par exemple, $b_{4\alpha-i} = 1$ et $b_{4\alpha-j} = 2\alpha$; or ces deux valeurs $1, 2\alpha$ ne sont pas accolées dans (9), (10), tout au moins si $3\alpha - 2 > 2\alpha - 1$, soit $\alpha > 1$.

Nous avons ainsi démontré que

$$(11) \qquad \Psi^\star(\alpha; n) = \Psi(\alpha; n) - 2 \times 12^{\alpha-1} \qquad \text{pour} \quad n = 4\alpha - 1 \qquad (\alpha \geqq 2).$$

Pour $\alpha = 1$, il est clair que $\Psi^\star(1; 3) = 1$ puisqu'il n'y a qu'une permutation $\varpi^\star$; pour $\alpha = 2$ et 3, il vient

$$\Psi^\star(2;\ 7) = \Psi(2;\ 7) - \ 24 = \Phi(2;\ 7) - \ 24 = \quad 148,$$
$$\Psi^\star(3;\ 11) = \Psi(3;\ 11) - 288 = \Phi(3;\ 11) - 288 = 59\,928.$$

26. Il reste à calculer $\Psi^\star(\alpha; n) (\alpha = 2 \text{ ou } 3)$ pour les valeurs de n exclues des formules (7) et (11).

Soit d'abord $\alpha = 2$. Si n est inférieur à 6, $\Psi^\star(2; n)$ est égal au nombre des permutations $\varpi^\star$, donc

$$\Psi^\star(2; 3) = 1, \qquad \Psi^\star(2; 4) = 3 = \Psi(2; 4) - 3, \qquad \Psi^\star(2; 5) = 12 = \Psi(2; 5) - 11.$$

Cette observation ne vaut plus pour $n = 6$, où la classe de 1, 5, 4, 3, 2, 6, par exemple, a l'écart 3 avec $\varpi_0^\star$. (4) s'écrit $3 \leqq k \leqq 5$. Pour $k = 3$, (2) s'écrit

$$i - 2 \leqq b_i \leqq i + 2,$$
$$1 \leqq b_i \leqq 5 - i \qquad \text{si} \quad 1 \leqq i \leqq 2,$$
$$7 - i \leqq b_i \leqq 11 - i \qquad \text{si} \quad 3 \leqq i \leqq 6,$$

et donne de proche en proche

$$(b_3, b_6) = (4, 5), \qquad (b_4, b_5) = (3, 6), \qquad (b_1, b_2) = (1, 2),$$

donc 8 permutations P^1, $\bar{P}^3$ faisant double emploi. $k = 5$ en donne autant, avec, d'après la correspondance entre (2) et (2'),

$$(b_1, b_4) = (2, 3), \qquad (b_2, b_3) = (1, 4) \qquad (b_5, b_6) = (5, 6).$$

Pour $k = 4$, (2) s'écrit

$$\begin{aligned} &i - 2 \leqq b_i \leqq i + 2, \\ &2 - i \leqq b_i \leqq \ 6 - i \qquad \text{si} \quad 1 \leqq i \leqq 3, \\ &8 - i \leqq b_i \leqq 12 - i \qquad \text{si} \quad 4 \leqq i \leqq 6, \end{aligned}$$

et P^1 est l'une quelconque des permutations de la famille représentée par

$$\left\{\begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix}\right., \quad \left\{\begin{matrix}1\\2\\3\\4\end{matrix}\right., \quad \left\{\begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix}\right., \quad \left\{\begin{matrix}4\\5\\6\end{matrix}\right., \quad \left\{\begin{matrix}3\\4\\5\\6\end{matrix}\right., \quad \left\{\begin{matrix}4\\5\\6\end{matrix}\right..$$

$b_2 = 4$ entraîne $(b_4, b_6) = (5, 6)$, $b_5 = 3$, puis $(b_1, b_3) = (1, 2)$, ce qui fait 4 solutions; pour $b_2 \neq 4$, on obtient les 36 solutions correspondant à

$$(b_1, b_2, b_3) = (1, 2, 3), \quad (b_4, b_5, b_6) = (4, 5, 6);$$

ces 40 solutions forment 20 classes, distinctes des 8 précédentes; parmi ces dernières, la classe de 1, 2, 5, 6, 3, 4 est fournie à la fois par $k = 3$ et $k = 5$, et 27 seulement des 28 classes obtenues sont distinctes.

Ainsi,

$$\Psi^\star(2; 6) = \Psi(2; 6) - 27 = 72 - 27 = 45.$$

27. L'étude de $\Psi^\star(3; n)$ est plus laborieuse pour $7 \leqq n \leqq 10$. Pour $n \leqq 6$, $\Psi^\star(3; n)$ est égal au nombre des permutations $\varpi^\star$, donc $\Psi^\star(3; 1) = \Psi^\star(3; 2) = 1$,

$$\begin{aligned} &\Psi^\star(3; 3) = \ 1 = \Psi(3; 3) - \ 1, \qquad &&\Psi^\star(3; 4) = \ 3 = \Psi(3; 4) - \ 3, \\ &\Psi^\star(3; 5) = 12 = \Psi(3; 5) - 12, \qquad &&\Psi^\star(3; 6) = 60 = \Psi(3; 6) - 60. \end{aligned}$$

Pour les quatre valeurs suivantes de n, la formation des permutations P^1, $\bar{P}^k$ qui font double emploi dans les classes $\varpi^\star$, et que fournissent (2), (3), (4), est relativement aisée, mais, pour une même valeur de n, les diverses valeurs de k associées donnent des solutions communes, dont la réduction à des classes distinctes, qui porte sur des centaines de permutations, est très pénible. Voici un procédé de résolution. Les solutions multiples de (2) sont les permutations P^1 associées à diverses permutations $\bar{P}^k$, $\bar{P}^{k'}$, ..., $\bar{P}^{k^{(r)}}$, avec $k < k' < \ldots < k^{(r)}$. Soit $G_{k,k'\ldots k^{(r)}}$ la famille de ces P^1, et $N_{k,k'\ldots k^{(r)}}$ leur nombre. Pour $r = 0$, P^1 et $\bar{P}^k$ jouent le même rôle, et nous désignons par N_k le nombre des classes correspondantes, c'est-à-dire la moitié du nombre des permutations obtenues [6]. Le nombre des classes distinctes est alors

$$\sum_k N_k - \sum_{k<k'} N_{,kk'} + \sum_{k<k'<k''} N_{k,k',k''} + \ldots + (-1)^r \sum_{k<k'<\ldots<k^{(r)}} N_{k,k',\ldots,k^{(r)}} + \ldots$$

puisque chaque P^1, associée à s de ces indices k, est comptée un nombre de fois égal à

$$C_s^1 - C_s^2 + C_s^3 + \ldots + (-1)^{s-1} C_s^s = 1.$$

En résumé, on a la formule générale

$$\Psi^\star(\alpha; n) = \Psi(\alpha; n) - \sum_k N_k + \sum_{k<k'} N_{k,k'} + \ldots + (-1)^{r+1} \sum_{k<k'<\ldots<k^{(r)}} N_{k,k',\ldots,k^{(r)}} + \ldots. \tag{12}$$

28. Formons les permutations de $G_{k,k'}$. Il résulte d'abord de (4) que

$$n - 2\alpha + 1 \leqq k < k' \leqq 2\alpha + 1, \tag{13}$$

ce qui exige $n \leqq 4\alpha - 1$. Les éléments b_i de P^1 satisfont trois groupes d'inégalités du type (2), d'après les valeurs relatives de i, k, k'. On obtient ainsi les trois systèmes

$$\begin{cases} i - \alpha \leqq b_i \leqq i + \alpha \\ k' - i - \alpha \leqq b_i \leqq k - i + \alpha \end{cases} \quad \text{si} \quad 1 \leqq i \leqq k - 1, \tag{14}$$

$$\begin{cases} i - \alpha \leqq b_i \leqq i + \alpha \\ n + k - i - \alpha \leqq b_i \leqq k' - i + \alpha \end{cases} \quad \text{si} \quad k \leqq i \leqq k' - 1, \tag{15}$$

$$\begin{cases} i - \alpha \leqq b_i \leqq i + \alpha \\ n + k' - i - \alpha \leqq b_i \leqq n + k - i + \alpha \end{cases} \quad \text{si} \quad k' \leqq i \leqq n. \tag{16}$$

Les secondes lignes établissent, entre k et k' les inégalités

$$n + k - 2\alpha \leqq k' \leqq k + 2\alpha, \tag{17}$$

dont la compatibilité exige que n soit au plus égal à 4α. Par ailleurs, (14) impose les inégalités

$$\frac{k'}{2} - \alpha \leqq i \leqq \frac{k}{2} + \alpha$$

aux valeurs de i de l'intervalle $1 \leqq i \leqq k - 1$, ce qui n'est possible que si

$$\frac{k'}{2} - \alpha \leqq 1 \leqq k - 1 \leqq \frac{k}{2} + \alpha;$$

ceci est une conséquence de (13) et (17), la condition $k \geqq 2$ étant supposée remplie d'après l'observation de la note [5].

---

[6] Pour $r > 0$, le rôle de P^1 diffère de celui des $\overline{P}^k$, $\overline{P}^{k'}$, ..., $P^{k^{(r)}}$.

De même, (15) impose les inégalités

$$\frac{n+k}{2}-\alpha \leqq i \leqq \frac{k'}{2}+\alpha,$$

aux valeurs de i de l'intervalle $k \leqq i \leqq k'-1$, d'où résultent les conditions

$$\frac{n+k}{2}-\alpha \leqq k \leqq k'-1 \leqq \frac{k'}{2}+\alpha,$$

tandis que (16) donne la triple inégalité

$$\frac{n+k'}{2}-\alpha \leqq k' \leqq n \leqq \frac{n+k}{2}+\alpha.$$

Ces deux groupes de conditions résultent de (13) et (17), qu'il suffit de retenir pour les deux paramètres k, k', et que nous rassemblons en

$$(18) \qquad \begin{cases} n-2\alpha+1 \leqq k < k' \leqq 2\alpha+1, \\ n+k-2\alpha \leqq k' \leqq k+2\alpha. \end{cases}$$

Avant d'appliquer ces généralités à $\Psi^\star(3;n)$, utilisons-les pour retrouver la valeur de $\Psi^\star(2;6)$. Avec $\alpha=2$, $n=6$, (18) se réduit à

$$3 \leqq k \leqq k'-2 \leqq 3,$$

donc la seule famille $G_{k,k'}$ non vide est $G_{3,5}$. Dans ces conditions, (15) donne tout de suite

$$b_i=7-i \quad \text{pour} \quad 3 \leqq i \leqq 4, \qquad \text{donc} \quad b_3=4, \quad b_4=3;$$

pour $5 \leqq i \leqq 6$, (16) donne respectivement

$$4 \leqq b_5 \leqq 6, \quad 4 \leqq b_6 \leqq 5, \qquad \text{donc} \quad b_6=5, \quad b_5=6;$$

(14) donne enfin les inégalités

$$2 \leqq b_1 \leqq 3, \quad 1 \leqq b_2 \leqq 3, \qquad \text{donc} \quad b_1=2, \quad b_2=1.$$

ainsi $N_{3,5}=1$, comme l'avait montré la discussion précédente, (12) s'écrivant d'ailleurs

$$\Psi^\star(2;6)=\Psi(2;6)-N_3-N_4-N_5+N_{3,5}=\Psi(2;6)-28+1=\Psi(2;6)-27.$$

29. Calcul de $\Psi^\star(3;7)$. — Déterminons d'abord les N_k, pour les valeurs de k qui vérifient (4), c'est-à-dire $2 \leqq k \leqq 7$; on peut se borner à l'examen de celles qui vérifient $2 \leqq k \leqq 4$. Le système (2), où $k=2$ se décompose en

$$\begin{aligned} &1 \leqq b_1 \leqq 4, \\ &6-i \leqq b_i \leqq i+3 \qquad \text{pour} \quad 2 \leqq i \leqq 4, \\ &i-3 \leqq b_i \leqq 12-i \qquad \text{pour} \quad 5 \leqq i \leqq 7. \end{aligned}$$

On en déduit tout de suite que $(b_2, b_7)=(4,5)$, puis $(b_3, b_6)=(3,6)$, $(b_4, b_5)=(2,7)$, donc $b_1=1$, et $N_2=\frac{1}{2}2^3=4$.

Pour $k=3$, (2) se décompose en

$$\begin{array}{ll} 1 \leqq b_i \leqq 4 & \text{pour} \quad 1 \leqq i \leqq 2, \\ 7-i \leqq b_i \leqq i+3 & \text{pour} \quad 3 \leqq i \leqq 5, \\ i-3 \leqq b_i \leqq 13-i & \text{pour} \quad 5 \leqq i \leqq 7; \end{array}$$

les permutations P^1 sont donc les éléments de l'ensemble représenté par la suite d'accolades

$$\left\{\begin{matrix}1\\2\\3\\4\end{matrix}\right., \left\{\begin{matrix}1\\2\\3\\4\end{matrix}\right., \left\{\begin{matrix}4\\5\\6\end{matrix}\right., \left\{\begin{matrix}3\\4\\5\\6\\7\end{matrix}\right., \left\{\begin{matrix}2\\3\\4\\5\\6\\7\end{matrix}\right., \left\{\begin{matrix}3\\4\\5\\6\\7\end{matrix}\right., \left\{\begin{matrix}4\\5\\6\end{matrix}\right..$$

Ainsi $(b_1, b_2)=(1, 2)$ ou $(1, 3)$ ou $(1, 4)$, et $(b_3, b_7)=(4, 5)$, $(4, 6)$ ou $(5, 6)$; si $(b_1, b_2)=(1, 2)$, chacun des trois couples de valeurs de (b_3, b_7) est associé à 6 permutations b_4, b_5, b_6, ce qui fait 72 permutations P^1; pour $(b_1, b_2)=(1, 3)$, b_5 est égal à 2, et chacun des trois couples de valeurs de (b_3, b_7) est associé à 2 permutations b_4, b_6, ce qui fait 24 permutations P^1; enfin, si $(b_1, b_2)=(1, 4)$, on a encore $b_5=2$, avec $(b_3, b_7)=(5, 6)$, donc $(b_4, b_6)=(3, 7)$, ce qui fait 8 permutations P^1. Ainsi $N_3=52$.

Pour $k=4$, (2) s'écrit

$$\begin{array}{ll} 1 \leqq b_i \leqq i+3 & \text{si} \quad 1 \leqq i \leqq 2, \\ 1 \leqq b_3 \leqq 4, & \\ 8-i \leqq b_i \leqq i+3 & \text{si} \quad 4 \leqq i \leqq 5, \\ i-3 \leqq b_i \leqq 14-i & \text{si} \quad 6 \leqq i \leqq 7, \end{array}$$

ce qui donne les permutations de la famille

$$\left\{\begin{matrix}1\\2\\3\\4\end{matrix}\right., \left\{\begin{matrix}1\\2\\3\\4\\5\end{matrix}\right. \left\{\begin{matrix}1\\2\\3\\4\end{matrix}\right., \left\{\begin{matrix}4\\5\\6\\7\end{matrix}\right., \left\{\begin{matrix}3\\4\\5\\6\\7\end{matrix}\right., \left\{\begin{matrix}3\\4\\5\\6\\7\end{matrix}\right., \left\{\begin{matrix}4\\5\\6\\7\end{matrix}\right..$$

1 et 2 ne peuvent être que l'un des trois premiers b_i; ainsi : $(b_1, b_2, b_3)=(1, 2, 3)$ est associé à

$$(b_4, b_5, b_6, b_7)=(4, 5, 6, 7);$$

$(b_1, b_2, b_3)=(1, 2, 4)$ est associé, soit à $b_5=3$, avec

$$(b_4, b_6, b_7)=(5, 6, 7),$$

soit à $b_6=3$, avec

$$(b_4, b_5, b_7)=(5, 6, 7);$$

enfin $(b_1, b_3)=(1, 2)$ et $b_2=5$ entraînent, soit $b_5=3$, avec

$$(b_4, b_6, b_7)=(4, 6, 7),$$

soit $b_6 = 3$, avec

$$(b_4, b_5, b_7) = (4, 6, 7).$$

Cela donne 240 permutations P^1, donc $N_4 = 120$. Ainsi

$$\sum_{k=2}^{7} N_k = 352.$$

30. Pour évaluer $N_{k,k'}$, on suppose naturellement

$$2 \leqq k < k' \leqq 7.$$

Soit d'abord $k = 2$. Pour $k' = 3$, (15) donne $b_2 = 4$; on voit ensuite sur (16) que $b_7 = 5$, puis, dans l'ordre, $b_3 = 6$, $b_6 = 3$, $b_4 = 7$, $b_5 = 2$, donc $b_1 = 1$, compatible avec (14); $N_{2,3} = 1$. Pour $k' = 4$, les premiers membres de (15) et (16) montrent que les b_i d'indice supérieur à 1 doivent être supérieurs à 2, donc $N_{2,4} = 0$. Pour $k' = 5$, (14), (15), (16) donnent

$$1 \leqq b_1 \leqq 4, \qquad 4 \leqq b_2 \leqq 5, \qquad 3 \leqq b_3 \leqq 5, \qquad 2 \leqq b_4 \leqq 4,$$
$$4 \leqq b_5 \leqq 7, \qquad 3 \leqq b_6 \leqq 6, \qquad 4 \leqq b_7 \leqq 5,$$

donc

$$(b_2, b_7) = (4, 5), \qquad b_3 = 3, \qquad b_6 = 6, \qquad b_5 = 7, \qquad b_4 = 2$$

et enfin $b_1 = 1$; $N_{2,5} = 2$. Pour $k' = 6$ ou 7 les premiers membres des inégalités (14), (15), (16) surpassent 1, donc $N_{2,6} = N_{2,7} = 0$.

Lorsque $k = 3$, $k' = 4$, 5 ou 6, car les premiers membres de (14), (15), (16) surpassent 1 si $k' = 7$. Pour $k' = 4$, (15) donne $b_3 = 4$; (14) donne alors

$$1 \leqq b_1 \leqq 3, \qquad 1 \leqq b_2 \leqq 3,$$

et (16) s'écrit

$$5 \leqq b_4 \leqq 7, \qquad 3 \leqq b_5 \leqq 7, \qquad 3 \leqq b_6 \leqq 7, \qquad 5 \leqq b_7 \leqq 6;$$

on a donc nécessairement $(b_1, b_2) = (1, 2)$, tandis que les permutations b_4, b_5, b_6, b_7 forment la famille

$$\left\{\begin{matrix}5\\6,\\7\end{matrix}\right. \quad \left\{\begin{matrix}3\\5\\6'\\7\end{matrix}\right. \quad \left\{\begin{matrix}3\\5\\6'\\7\end{matrix}\right. \quad \left\{\begin{matrix}5\\6'\end{matrix}\right.$$

de 8 éléments; $N_{3,4} = 16$. Pour $k' = 5$, (14) donne $1 \leqq b_i \leqq 4$ pour $i = 1, 2$; (15) donne

$$4 \leqq b_3 \leqq 5, \qquad 3 \leqq b_4 \leqq 4,$$

et l'on tire de (16)

$$4 \leqq b_5 \leqq 7, \qquad 3 \leqq b_6 \leqq 7, \qquad 4 \leqq b_7 \leqq 6;$$

par conséquent $(b_1, b_2) = (1, 2)$ et les permutations b_3, b_4, b_5, b_6, b_7 forment la famille

$$\left\{\begin{matrix}4\\5\end{matrix}\right., \quad \left\{\begin{matrix}3\\4\end{matrix}\right., \quad \left\{\begin{matrix}4\\5\\6\\7\end{matrix}\right., \quad \left\{\begin{matrix}3\\4\\5\\6\\7\end{matrix}\right., \quad \left\{\begin{matrix}4\\5\\6\end{matrix}\right.$$

de 9 éléments; $N_{3,5} = 18$. Pour $k' = 6$, il vient

$$2 \leqq b_1 \leqq 4, \qquad 1 \leqq b_2 \leqq 4, \qquad 4 \leqq b_3 \leqq 6, \qquad 3 \leqq b_4 \leqq 5,$$
$$2 \leqq b_5 \leqq 4, \qquad 4 \leqq b_6 \leqq 7, \qquad 4 \leqq b_7 \leqq 6,$$

donc $1 = b_2$ et $7 = b_6$; les éléments b_1, b_3, b_4, b_5, b_7 forment les 12 permutations de la famille

$$\left\{\begin{matrix}2\\3\\4\end{matrix}\right., \quad \left\{\begin{matrix}4\\5\\6\end{matrix}\right., \quad \left\{\begin{matrix}3\\4\\5\end{matrix}\right., \quad \left\{\begin{matrix}2\\3\\4\end{matrix}\right., \quad \left\{\begin{matrix}4\\5\\6\end{matrix}\right.$$

car chaque valeur de b_4 en fournit 4; ainsi $N_{3,6} = 12$.

Soit $k = 4$. Pour $k' = 5$, (15) impose $b_4 = 4$; (14) et (16) s'écrivent alors

$$1 \leqq b_1 \leqq 3, \qquad 1 \leqq b_2 \leqq 5, \qquad 1 \leqq b_3 \leqq 3,$$
$$5 \leqq b_5 \leqq 7, \qquad 3 \leqq b_6 \leqq 7, \qquad 5 \leqq b_7 \leqq 7;$$

les P^1 forment la famille

$$\left\{\begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix}\right., \quad \left\{\begin{matrix}1\\2\\3\\5\end{matrix}\right., \quad \left\{\begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix}\right., \quad 4, \quad \left\{\begin{matrix}5\\6\\7\end{matrix}\right., \quad \left\{\begin{matrix}3\\5\\6\\7\end{matrix}\right., \quad \left\{\begin{matrix}5\\6\\7\end{matrix}\right.;$$

$b_2 = 5$ entraîne

$$(b_5, b_7) = (6, 7), \qquad b_6 = 3 \qquad \text{et} \qquad (b_1, b_3) = (1, 2),$$

tandis que $b_2 \neq 5$ donne

$$(b_1, b_2, b_3) = (1, 2, 3) \qquad \text{et} \qquad (b_5, b_6, b_7) = (5, 6, 7);$$

ainsi $N_{4,5} = 40$. Pour $k' = 6$, il vient

$$2 \leqq b_1 \leqq 4, \qquad 1 \leqq b_2 \leqq 5, \qquad 1 \leqq b_3 \leqq 4, \qquad 4 \leqq b_4 \leqq 5,$$
$$3 \leqq b_5 \leqq 4, \qquad 4 \leqq b_6 \leqq 7, \qquad 4 \leqq b_7 \leqq 7, \qquad \text{donc} \quad (b_6, b_7) = (6, 7);$$

les permutations b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 forment la famille

$$\left\{\begin{matrix}2\\3\\4\end{matrix}\right., \quad \left\{\begin{matrix}1\\2\\3\\4\\5\end{matrix}\right., \quad \left\{\begin{matrix}1\\2\\3\\4\end{matrix}\right., \quad \left\{\begin{matrix}4\\5\end{matrix}\right., \quad \left\{\begin{matrix}3\\4\end{matrix}\right.$$

de 9 éléments, car les 3 couples b_4, $b_5 = 4, 3; 5, 3; 5, 4$ en fournissent respectivement 1, 4 et 4; $N_{4,6} = 18$. Pour $k' = 7$, on a de même

$$3 \leqq b_1 \leqq 4, \qquad 2 \leqq b_2 \leqq 5, \qquad 1 \leqq b_3 \leqq 4, \qquad 4 \leqq b_4 \leqq 6,$$
$$3 \leqq b_5 \leqq 5, \qquad 3 \leqq b_6 \leqq 4, \qquad 4 \leqq b_7 \leqq 7,$$

donc

$$b_3 = 1, \qquad b_2 = 2, \qquad b_7 = 7, \qquad b_4 = 6, \qquad b_5 = 5$$

et

$$(b_1, b_6) = (3, 4); \qquad N_{4,7} = 2.$$

Soit $k = 5$. Pour $k' = 6$, (15) donne $b_5 = 4$ et l'on a par ailleurs

$$2 \leqq b_1 \leqq 4, \qquad 1 \leqq b_2 \leqq 5, \qquad 1 \leqq b_3 \leqq 5,$$
$$1 \leqq b_4 \leqq 4 \qquad 4 \leqq b_6 \leqq 7, \qquad 4 \leqq b_7 \leqq 7;$$

on a donc nécessairement $(b_6, b_7) = (6, 7)$, tandis que les permutations b_1, b_2, b_3, b_4 forment la famille

$$\left\{\begin{matrix} 2 \\ 3' \end{matrix}\right. \quad \left\{\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3' \\ 5 \end{matrix}\right. \quad \left\{\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3' \\ 5 \end{matrix}\right. \quad \left\{\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}\right.$$

de 8 éléments; $N_{5,6} = 16$. Pour $k' = 7$, les derniers membres de (14) et (15) sont inférieurs à 6, de sorte que b_7 peut seul prendre les valeurs 6 ou 7, donc $N_{5,7} = 0$.

Pour $N_{6,7}$, on voit que

$$b_6 = 4, \qquad 3 \leqq b_1 \leqq 4, \qquad 2 \leqq b_2 \leqq 5, \qquad 1 \leqq b_3 \leqq 6,$$
$$1 \leqq b_4 \leqq 5, \qquad 2 \leqq b_5 \leqq 4 \qquad \text{et} \qquad 4 \leqq b_7 \leqq 7,$$

donc, de proche en proche, que

$$b_1 = 3, \qquad b_5 = 2, \qquad b_2 = 5, \qquad b_4 = 1, \qquad b_3 = 6, \qquad b_7 = 7; \qquad N_{6,7} = 1.$$

La somme double

$$\sum_{k<k'} N_{k,k'} = 126.$$

31. Toute famille $G_{k,k',k''} = G_{k,k'} \cap C_{k,k''}$. La discussion du paragraphe précédent montre que, pour $k = 2$, on a nécessairement $k' = 3$, $k'' = 5$, mais $b_4 = 7$ dans $G_{2,3}$ et $b_4 = 2$ dans $G_{2,5}$, donc $G_{2,3,5}$ est vide. Pour $k = 3$, k' et k'' valent 4, 5 ou 6; $G_{3,4,5}$ est vide car $b_4 \geqq 5$ dans $G_{3,4}$ et $3 \leqq b_4 \leqq 4$ dans $G_{3,5}$; on voit tout de suite que, dans $G_{3,4} \cap G_{3,6}$, on a nécessairement

$$b_1 = 2, \qquad b_2 = 1, \qquad b_3 = 4, \qquad b_6 = 7,$$
$$b_4 = 5, \qquad b_5 = 3, \qquad b_7 = 6, \qquad \text{et} \qquad N_{3,4,6} = 1;$$

dans $G_{3,5} \cap G_{3,6}$ on a nécessairement $b_2 = 1$, donc $b_1 = 2$, $b_6 = 7$, puis

$$b_5 = 4, \qquad b_3 = 5, \qquad b_4 = 3, \qquad b_7 = 6, \qquad \text{donc} \qquad N_{3,5,6} = 1.$$

Pour $k = 4$, k' et k'' valent 5, 6 ou 7; dans $G_{4,5}$ et $G_{4,6}$ les valeurs imposées à b_5 sont incompatibles; la valeur 6 de b_4 dans $G_{4,7}$ est incompatible avec ses valeurs dans $G_{4,5}$ et $G_{4,6}$, donc les $G_{4,k',k''}$ sont vides. Il en est de même pour $G_{5,6,7}$, donc

$$\sum_{k<k'<k''} N_{k,k',k''} = 2.$$

Les familles G à plus de trois indices sont manifestement vides, et l'on a enfin

$$\sum_k N_k - \sum_{k<k'} N_{k,k'} + \sum_{k<k'<k''} N_{k,k',k''} = 352 - 126 + 2 = 228,$$

donc

$$\Psi^\star(3;7) = \Psi(3;7) - 228 = 555 - 228 = 327.$$

32. Calcul de $\Psi^\star(3;8)$. — (4) s'écrit $3 \leq k \leq 7$ et il suffit d'étudier les trois premières valeurs de k. Pour $k = 3$, (2) s'écrit

$$1 \leq \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} \leq 4, \qquad 5 \leq \begin{Bmatrix} b_3 \\ b_8 \end{Bmatrix} \leq 6 \qquad 4 \leq \begin{Bmatrix} b_4 \\ b_7 \end{Bmatrix} \leq 7 \qquad 3 \leq \begin{Bmatrix} b_5 \\ b_6 \end{Bmatrix} \leq 8,$$

donc

$$(b_3, b_8) = (5, 6), \qquad (b_4, b_7) = (4, 7), \qquad (b_5, b_6) = (3, 8)$$

et enfin

$$(b_1, b_2) = (1, 2);$$

on obtient 16 permutations P^1, et $N_3 = 8$.

Pour $k = 4$, (2) montre que les solutions P^1 forment la famille

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{Bmatrix}.$$

1 et 2 ne peuvent être que b_1, b_2 ou b_3. Si $(b_1, b_2, b_3) = (1, 2, 3)$, les autres b_i forment la famille de 36 éléments

$$\begin{Bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{Bmatrix};$$

$(b_1, b_2, b_3) = (1, 2, 4)$ est associé à $b_6 = 3$ et aux 12 permutations b_4, b_5, b_7, b_8 de la famille

$$\begin{Bmatrix} 5 \\ 6, \\ 7 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7' \\ 8 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7' \\ 8 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} 5 \\ 6; \\ 7 \end{Bmatrix}$$

enfin, $(b_1, b_3) = (1, 2)$, $b_2 = 5$ exigent $b_6 = 3$, de sorte que

$$(b_4, b_8) = (6, 7) \quad \text{et} \quad (b_5, b_7) = (4, 8),$$

ce qui fait 8 permutations. Ainsi G_4 contient 296 permutations, et $N_4 = 148$.

Pour $k = 5$, (2) montre que les P^1 forment la famille

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3' \\ 4 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3, \\ 4 \\ 5 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3, \\ 4 \\ 5 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3' \\ 4 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7' \\ 8 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6, \\ 7 \\ 8 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6, \\ 7 \\ 8 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7' \\ 8 \end{Bmatrix}$$

dont la symétrie s'explique par la corrélation entre (2) et (2′) qui conserve la valeur de k. $(b_1, b_2, b_3, b_4) = (1, 2, 3, 4)$ est associé à $(b_5, b_6, b_7, b_8) = (5, 6, 7, 8)$, ce qui donne 576 solutions; $b_2 = 5$ suppose $(b_1, b_3, b_4) = (1, 2, 3)$ et, soit $b_6 = 4$ avec $(b_5, b_7, b_8) = (6, 7, 8)$, soit $b_7 = 4$ avec $(b_5, b_6, b_8) = (6, 7, 8)$, ce qui fait 72 solutions; on en obtient autant avec $b_3 = 5$, donc G_5 contient 720 permutations, et $N_5 = 360$. En résumé,

$$\sum_{k=3}^{7} N_k = 360 + 2(N_3 + N_4) = 672.$$

33. Pour les valeurs de $N_{k,k'}$ nous supposons $3 \leqq k < k' \leqq 7$, avec $k' - k \geqq 2$ d'après (18), ce qui réduit à 6 le nombre des familles $G_{k,k'}$ à étudier.

Soit $k = 3$. Si $k' = 5$, (15) donne $b_3 = 5$, $b_4 = 4$, tandis que (16) s'écrit

$$i - 3 \leqq b_i \leqq i + 3,$$
$$10 - i \leqq b_i \leqq 14 - i,$$

pour $5 \leqq i \leqq 8$; on en déduit que $b_8 = 6$, $b_7 = 7$, ce qui ne laisse que la valeur 8 pour b_5 et b_6; $N_{3,5} = 0$. Pour $k' = 6$, (14), (15), (16) donnent

$$2 \leqq b_1 \leqq 4, \quad 1 \leqq b_2 \leqq 4, \quad 5 \leqq b_3 \leqq 6, \quad 4 \leqq b_4 \leqq 5,$$
$$3 \leqq b_5 \leqq 4, \quad 5 \leqq b_6 \leqq 8, \quad 4 \leqq b_7 \leqq 7, \quad 5 \leqq b_8 \leqq 6;$$

on a nécessairement

$$1 = b_2, \quad 2 = b_1, \quad 8 = b_6, \quad 7 = b_7, \quad (b_3, b_8) = (5, 6),$$

donc

$$b_4 = 4, \quad b_5 = 3; \quad N_{3,6} = 2.$$

$G_{3,7}$ est vide car les valeurs majorantes fournies par (14), (15), (16) sont toutes inférieures à 8.

Soit $k=4$. Pour $k'=6$, on obtient les relations $b_4=5$, $b_5=4$, et les inégalités relatives aux autres b_i montrent que les P^1 forment la famille de 16 éléments

$$\left\{\begin{matrix}2\\3\end{matrix}\right., \quad \left\{\begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix}\right., \quad \left\{\begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix}\right., \quad 5, \quad 4, \quad \left\{\begin{matrix}6\\7\\8\end{matrix}\right., \quad \left\{\begin{matrix}6\\7\\8\end{matrix}\right., \quad \left\{\begin{matrix}6\\7\end{matrix}\right.,$$

donc $N_{4,6}=16$. Pour $k'=7$, on trouve

$$\begin{array}{llll} 3\leqq b_1\leqq 4, & 2\leqq b_2\leqq 5, & 1\leqq b_3\leqq 4, & 5\leqq b_4\leqq 6,\\ 4\leqq b_5\leqq 5, & 3\leqq b_6\leqq 4, & 5\leqq b_7\leqq 8, & 5\leqq b_8\leqq 7,\end{array}$$

ce qui exige $1=b_3$, $2=b_2$, $8=b_7$, $7=b_8$, $6=b_4$, $(b_1, b_6)=(3, 4)$, $b_5=5$; par conséquent $N_{4,7}=2$.

Dans $G_{5,7}$, (15) donne $b_5=5$, $b_6=4$ tandis que (14) fournit les valeurs majorantes $i+3$ et $8-i$ pour $1\leqq i\leqq 4$; ces quatre b_i ne disposent que des trois nombres 1, 2, 3, donc $G_{5,7}$ est vide et $N_{5,7}=0$.

La seule famille $G_{k,k',k''}$ possible est $G_{3,5,7}$, qui est vide comme $G_{3,7}$, ou $G_{5,7}$.

On a ainsi démontré que

$$\sum_{k<k'} N_{k,k'}=20,$$

donc

$$\sum_k N_k-\sum_{k<k'} N_{k,k'}+\ldots=652$$

et

$$\Psi^\star(3;8)=\Psi(3;8)-652=2\,045-652=1393.$$

34. Calcul de $\Psi^\star(3;9)$. — Pour $\alpha=3$, $n=9$, les valeurs de k conformes à (4) sont celles de l'intervalle $4\leqq k\leqq 7$, et l'étude des deux premières suffit.

Pour $k=4$, il vient

$$\begin{array}{lllll} 1\leqq b_1\leqq 4, & 1\leqq b_2\leqq 5, & 1\leqq b_3\leqq 4, & 6\leqq b_4\leqq 7, & 6\leqq b_9\leqq 7,\\ & 5\leqq b_5\leqq 8, & 5\leqq b_8\leqq 8, & 4\leqq b_6\leqq 9, & 4\leqq b_7\leqq 9;\end{array}$$

par suite, $(b_4, b_9)=(6, 7)$, puis

$$(b_5, b_8)=(5,8), \qquad (b_6, b_7)=(4, 9) \qquad \text{et} \qquad (b_1, b_2, b_3)=(1, 2, 3);$$

G_4 a 48 éléments et $N_4=24$.

On voit de même que, pour $k=5$, (2) fournit les P^1 de la famille

$$\left\{\begin{matrix}1\\2\\3\\4\end{matrix}\right., \quad \left\{\begin{matrix}1\\2\\3\\4\\5\end{matrix}\right., \quad \left\{\begin{matrix}1\\2\\3\\4\\5\end{matrix}\right., \quad \left\{\begin{matrix}1\\2\\3\\4\end{matrix}\right., \quad \left\{\begin{matrix}6\\7\\8\end{matrix}\right., \quad \left\{\begin{matrix}5\\6\\7\\8\\9\end{matrix}\right., \quad \left\{\begin{matrix}4\\5\\6\\7\\8\\9\end{matrix}\right., \quad \left\{\begin{matrix}5\\6\\7\\8\\9\end{matrix}\right., \quad \left\{\begin{matrix}6\\7\\8\end{matrix}\right..$$

$(b_1, b_2, b_3, b_4) = (1, 2, 3, 4)$ est associé aux 36 permutations b_5, b_6, b_7, b_8, b_9 de la famille

$$\left\{\begin{matrix}6\\7,\\8\end{matrix}\right. \quad \left\{\begin{matrix}5\\6\\7,\\8\\9\end{matrix}\right. \quad \left\{\begin{matrix}5\\6\\7,\\8\\9\end{matrix}\right. \quad \left\{\begin{matrix}5\\6\\7,\\8\\9\end{matrix}\right. \quad \left\{\begin{matrix}6\\7;\\8\end{matrix}\right.$$

si $b_2 = 5$, on a nécessairement $b_7 = 4$, $(b_1, b_3, b_4) = (1, 2, 3)$, et b_5, b_6, b_8, b_9 est l'une quelconque des 12 permutations de la famille

$$\left\{\begin{matrix}6\\7,\\8\end{matrix}\right. \quad \left\{\begin{matrix}6\\7\\8,\\9\end{matrix}\right. \quad \left\{\begin{matrix}6\\7\\8,\\9\end{matrix}\right. \quad \left\{\begin{matrix}6\\7;\\8\end{matrix}\right.$$

$b_3 = 5$ donne évidemment autant de solutions. Ainsi le nombre des P^1 de G_5 est $24 \times 36 + 2 \times 72 = 1\,008$, $N_5 = 504$, et

$$\sum_{k=4}^{7} N_k = 1\,056.$$

Pour l'étude des $G_{k,k'}$, (18) montre qu'on doit avoir $k' \geqq k + 3$, donc la seule famille à examiner est $G_{4,7}$. D'après (15), $b_i = 10 - i$ pour $4 \leqq i \leqq 6$, donc b_4, b_5, $b_6 = 6, 5, 4$; les seules valeurs permises alors par (14) sont $b_1 = 3$, $b_2 = 2$ et $b_3 = 1$; (16) donne également une solution unique $b_7, b_8, b_9 = 9, 8, 7$, donc $N_{4,7} = 1$.

Toutes les familles $G_{k,k',k''}$ sont vides, donc

$$\sum_k N_k - \sum_{k<k'} N_{k,k'} = 1056 - 1 = 1055,$$

et (7)

$$\Psi^*(3; 9) = \Psi(3; 9) - 1055 = 6\,403 - 1055 = 5\,348.$$

35. Calcul de $\Psi^*(3; 10)$. — Pour cette dernière valeur de n, (4) s'écrit $5 \leqq k \leqq 7$, et il suffit d'étudier les deux premiers nombres. Pour $k = 5$, (2) s'écrit

$$\begin{matrix} 1 \leqq b_1 \leqq 4, & 1 \leqq b_2 \leqq 5, & 1 \leqq b_3 \leqq 5, & 1 \leqq b_4 \leqq 4, & 7 \leqq b_5 \leqq 8, \\ 7 \leqq b_{10} \leqq 8, & 6 \leqq b_6 \leqq 9, & 6 \leqq b_9 \leqq 9, & 5 \leqq b_7 \leqq 10, & 5 \leqq b_8 \leqq 10; \end{matrix}$$

par conséquent, on a nécessairement $(b_5, b_{10}) = (7, 8)$, puis

$$(b_6, b_9) = (6, 9), \qquad (b_7, b_8) = (5, 10)$$

(7) *Cf.* § 18.

et enfin

$$(b_1, b_2, b_3, b_4) = (1, 2, 3, 4);$$

G_5 contient 192 permutations, et $N_5 = 96$.

Pour $k = 6$, on voit de même que

$$\begin{array}{lllll} 2 \leqq b_1 \leqq 4, & 1 \leqq b_2 \leqq 5, & 1 \leqq b_3 \leqq 6, & 1 \leqq b_4 \leqq 5, & 2 \leqq b_5 \leqq 4; \\ 7 \leqq b_{10} \leqq 9, & 6 \leqq b_9 \leqq 10, & 5 \leqq b_8 \leqq 10, & 6 \leqq b_7 \leqq 10, & 7 \leqq b_6 \leqq 9, \end{array}$$

qui se rattachent d'ailleurs aux cinq inégalités précédentes par la transformation de (2) en (2'); les permutations P^1 forment la famille

$$\left\{\begin{matrix} 2 \\ 3, \\ 4 \end{matrix}\right. \left\{\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3, \\ 4 \\ 5 \end{matrix}\right. \left\{\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4, \\ 5 \\ 6 \end{matrix}\right. \left\{\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3, \\ 4 \\ 5 \end{matrix}\right. \left\{\begin{matrix} 2 \\ 3, \\ 4 \end{matrix}\right. \left\{\begin{matrix} 7 \\ 8, \\ 9 \end{matrix}\right. \left\{\begin{matrix} 6 \\ 7 \\ 8, \\ 9 \\ 10 \end{matrix}\right. \left\{\begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8, \\ 9 \\ 10 \end{matrix}\right. \left\{\begin{matrix} 6 \\ 7 \\ 8, \\ 9 \\ 10 \end{matrix}\right. \left\{\begin{matrix} 7 \\ 8; \\ 9 \end{matrix}\right.$$

on observe que les trois combinaisons $(b_1, b_5) = (2, 3)$ ou $(2, 4)$ ou $(3, 4)$ et les trois combinaisons $(b_6, b_{10}) = (7, 8)$ ou $(7, 9)$ ou $(8, 9)$ ont des rôles semblables. Le nombre des permutations P^1 de G_6 est donc le produit par 9 du nombre de celles où $(b_1, b_5) = (3, 4)$ et $(b_6, b_{10}) = (8, 9)$ par exemple; les permutations $b_2, b_3, b_4, b_7, b_8, b_9$ correspondantes forment la famille

$$\left\{\begin{matrix} 1 \\ 2, \\ 5 \end{matrix}\right. \left\{\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 5, \\ 6 \end{matrix}\right. \left\{\begin{matrix} 1 \\ 2, \\ 5 \end{matrix}\right. \left\{\begin{matrix} 6 \\ 7, \\ 10 \end{matrix}\right. \left\{\begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 7, \\ 10 \end{matrix}\right. \left\{\begin{matrix} 6 \\ 7; \\ 10 \end{matrix}\right.$$

une première solution est fournie par $(b_2, b_3, b_4) = (1, 2, 5)$ associé à $(b_7, b_8, b_9) = (6, 7, 10)$ et comporte 36 éléments; si $b_3 = 6$, on a nécessairement $b_8 = 5$, $(b_2, b_4) = (1, 2)$ et $(b_7, b_9) = (7, 10)$, ce qui donne 4 éléments; le couple considéré fournit ainsi $4 \times 40 = 160$ permutations, donc G_6 en contient 1440 et $N_6 = 720$. La somme

$$\sum_{k=5}^{7} N_k = 912.$$

Si l'on observe que (18) exige $k' - k \geqq 4$, ce qui exclut toute famille $G_{k,k'}$, on a simplement

$$\Psi^*(3; 10) = \Psi(3; 10) - 912 = \Phi(3; 10) - 912 = 19\,708 - 912 = 18\,796.$$