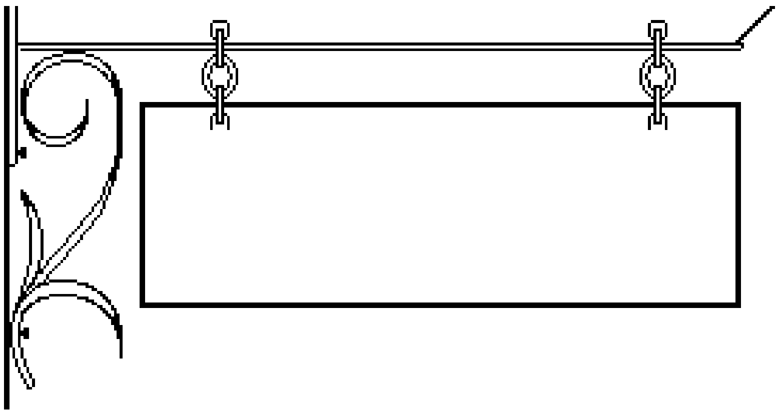
I.

A propos de quelques modes de représentation des entiers.

L'expérimentateur qui ne sait pas ce qu'il cherche
ne comprend pas ce qu'il trouve.

(Claude Bernard, 1867)



I. Numération -.les systèmes universels, avec base.-

Un système de numération n'est qu'un algorithme permettant de représenter tout entier par une suite de caractères (càd. par un mot sur un alphabet). Ainsi, il s'agit tout d'abord de construire une bijection des nombres entiers positifs sur les mots d'un langage. Inversement, tout mot du langage est interprété -par la bijection inverse- comme la représentation d'un entier.

L'entier zéro est habituellement représenté par le mot vide.

Nous allons nous attarder sur trois modes de représentation:
-les systèmes dits avec base,
-le système de numération fondé sur la suite de Fibonacci,
-et enfin, celui induit par la suite des factorielles des entiers.

Les systèmes de numération dits avec base nous sont particulièrement familiers. La donnée d'un entier $b>1$, que l'on appelle précisément la base du système, permet d'associer à tout entier n non-négatif un mot sur un alphabet de b lettres, par le processus de calcul récurrent suivant:

l'entier n, divisé par la base, fournit un reste r (inférieur à la base), et un quotient q sur lequel le processus va se poursuivre. Le reste détermine une lettre du mot cherché (par exemple, en base 10, un des dix chiffres de la base, entre 0 et 9). Le processus est itéré sur le quotient, tant que l'on n'obtient pas un quotient nul. On calcule ainsi un mot m, sur l'alphabet des entiers de 0 à b-1, par la récurrence $m(bq+r)=r.m(q)$, sous l'initialisation $m(0)=e$, mot vide.

<u>Remarque</u> 1:

Nous construisons ainsi un mot dont les caractères de poids les plus faibles sont au début du mot, ce qui est contraire à l'usage courant, mais, compte tenu de l'inversion du sens de lecture, est cohérent avec la source historique: ces systèmes, originaires de l'Inde, sont parvenus en Europe, probablement par l'intermédiaire des commerçants arabes, vers la fin du Moyen-âge.
Il semble que les systèmes de numération de position aient été connus (et inventés), de manière

Il semble que les systèmes de numération de position aient été connus (et inventés), de manière indépendante par au moins trois civilisations...
(voir le volumineux ouvrage de référence en langue française, comptant 850 pages, auquel **Geneviève Guitel** a consacré une vie entière, pillé à de multiples occasions:
Histoire comparée des systèmes de numération, Flammarion-1975)).

Le système de base 2, dont on sait les avantages et l'importance particulière due à des impératifs techniques, a été depuis longtemps utilisé, notamment en Afrique pour les opérations de pesage.
En effet un système de poids impose de pouvoir représenter tout entier (jusqu'à un certain maximum: la capacité du système) comme combinaison additive d'une collection finie d'entiers (ou poids).
Quoi de plus naturel que de partir d'une masse m, de la diviser en deux parts égales (à condition que la technique le permette, avec une erreur qui puisse être considérée comme négligeable), et d'itérer sur l'une des parts jusqu'à obtention d'un poids minimal (la *résolution* du sytème de poids), lequel sera pris pour unité de mesure; la masse m est alors mesurée par un entier qui est une puissance de 2, et c'est le maximum des entiers représentables par le système de poids (sa capacité).\

Remarque 2:

Le vocabulaire qui nous concerne, comme celui de beaucoup de sciences, porte les traces de cette influence historique. On peut s'étonner de ce que la cosmologie de l'antiquité grecque ait pu produire ses remarquables résultats, oubliés ou volontairement ignorés du Moyen-âge, sans connaître de numération de position. On trouve, dans la plupart des dictionnaires, les filiations suivantes:

algorithme: ce nom commun apparaît dans le latin du 16^{e} siècle; il provient du nom propre Al-Khawarizmi - mathématicien du 9^{e}siècle.
algèbre: (*al-djabr*): proprement, réduction, réparation - se dit aussi de la réduction des fractures; se trouve dans le latin du 14^{e}siècle; apparaît dans le titre d'un livre de Al-Khawarizmi.
zéro: a remplacé chiffre lorsque celui-ci a changé de sens; provient de l'italien *zefiro*, qui était une traduction de l'arabe *sifr*.
chiffre: emprunté de l'italien *cifra* - symbole numérique - qui provient également, par le latin médiéval, de l'arabe *sifr*, avec la signification "vide". ....
hasard: de l'espagnol *azar*, lequel provient de l'arabe *az-zahr*, "le dé"; la "loi du hasard", synonyme de "loi des probabilités". Le mot aléa, du latin, réfère également au jeu de dé.

Les temps changent, et le mot "bug" qui signifie "punaise" (l'insecte, la bestiole) en anglais désigne les erreurs de programmation. On a tenté de le traduire en français par "bogue", mot breton qui désigne "l'enveloppe piquante de la châtaigne"!

Le mot *"ordinateur*" est un néologisme, tandis que le mot "computation" est un vieux mot français, utilisé dès le quatorzième siècle, bien avant "la découverte de l'amérique".
On trouve également dans les dictionnaires "comput", "computiste", dérivés du latin "computare".
C'est la même raçine que "compter": *computeur* pour "ordinateur" eut été très correct.
On prend pour des américanismes des mots qui furent empruntés au français.
Voilà de l'acculturation (c'est un mot emprunté à l'anglais, tandis que le mot "culture" pris pour "civilisation" vient l'allemand, et s'appliquait initialement aux peuples germaniques).
Voci une autre néologisme français, informatique (en anglais, on dirait plutôt "computer science").

Pourquoi pas calculogie (jouer avec des cailloux), ou simulogie ?
Curieusement, ces deux néologismes qui se sont imposés au français, informatique et ordinateur, réfèrent à ces deux notions technocratiques que sont l'information et l'ordre.

Remarque 3:

L'enseignement élémentaire doit être conscient du fait que si nous écrivons habituellement de gauche à droite, nous avons cependant hérité de la numération dite arabe, ce qui fait que, par exemple, l'algorithme usuel de l'addition procède en inversant soudain le sens de l'écriture.

Toute personne enseignant dans une école maternelle sait que l'opération primitivement enseignée est la division: les d'objets d'une collection sont groupés par tas de b objets, le reste fournit enseignée est la division: les d'objets d'une collection sont groupés par tas de b objets, le reste fournit le chiffre des unités, on itére sur les tas de b objets, tel est le programme, et c'est pourquoi le chiffre des unités de cette conversion en numération base b est produit en premier lieu.

Si l'on écrivait les nombres dans l'autre sens, ce serait beaucoup plus commode de produire la sommme de deux nombres en tapant sur un clavier; on frapperait directement, par exemple, de gauche à droite 25964+3516=50135, la retenue étant produite en avançant.
Il nous arrivera souvent d'écrire les entiers en notant le caractère de plus faible poids à gauche, et cela a un autre avantage: plonger les mots finis se terminant par un caractère non nul dans les mots infinis, en prolongeant par une infinité de zéros.
\

Remarque 4:

Le nombre 0 doit être naturellement représenté par le mot vide. En pratique, bien sûr, c'est le caractère 0 qui sera utilisé au lieu et place du mot vide, car il faut bien utiliser quelque caractère pour représenter le vide, d'autant plus que cet opérateur de décalage a justement été inventé pour cela.
Ainsi, tout mot construit comme ci-dessus se termine par un caractère distinct de 0, à l'exception de l'entier zéro, lequel est représenté par le caractère 0: 0 est tout à la fois un nombre, une lettre de l'alphabet, et un mot réduit une seule lettre, substitué par nécessité au mot vide dans les systèmes de numération.\

Avertissement: Dans la suite de ce texte, en opposition donc avec l'usage, le premier caractère sera toujours le caractère de plus faible poids dès que l'on sortira de la numération base dix.\

La mécanique permettant de représenter ces mots, de passer de la représentation de l'entier n à celle de n+1, et même de calculer la somme de deux entiers, cette mécanique nous est familière: il s'agit des compteurs, constitués de roues dentées, comportant toutes un nombre égal de dents dans les systèmes avec base, et pourvus d' un système de report des retenues, grâce à des ergots entraînant la roue suivante dès qu'une roue a commis un tour. Un système baroque ferait de telle sorte que les roues ne comportent pas toutes le même nombre de dents.

De tels compteurs sont avantageusement utilisables dans les écoles, à des fins pédagogiques, ainsi que de petites mécaniques réalisant des additions, voire des multiplications [ou même des opérations logiques.
A ce propos, voir 1)la mécanique Pascalienne 2)les systèmes autrefois utilisés par les ethnologues et les archéologues pour extraire d'un ensemble de fiches celles répondant à quelques critères simples].

Le système de numération de base 2 est évidemment particulièrement simple: les entiers sont représentés par des mots terminés par le caractère 1 (excepté donc l'entier zéro). Enumérer les entiers revient à énumérer les mots sur un alphabet de deux lettres (le dernier caractère, 1, étant alors implicite). Autrement dit, il existe une **bijection** évidente des mots sur un alphabet de deux lettres **sur** les entiers naturels.
Noter que les mots de longueur k sur deux lettres représentent tout aussi bien les bipartitions (càd les partitions en deux parties) d'un ensemble ordonné de k éléments: les rangs des occurrences des lettres..

Le plus simple des algorithmes d'énumération alphabétique, c'est clairement celui des mots sur deux lettres:
si l'on désigne par m un mot sur l'alphabet (0,1), et si e est la notation du mot vide, la procédure s de passage d'un mot au mot suivant est définie par la récurrence: s(0m)=1m, s(1m)=0s(m), s(e)=0 [sous forme récursive]
ou encore $s(1^i0m)=0^i1m$, $s(1^i)=0^i1$, pour tout entier [sous forme non récursive] ;
on convient, bien sûr, de $1^0=0^0=e$.
Si l'on plonge les mots de la forme m1 dans les suites infinies, en complétant par une infinité d'occurrrences du caractère 0, l'énumération des entiers correspond à l'énumération des parties finies de l'ensemble **N** des entiers naturels.

Remarque 5:

Le lecteur remarquera que si l'on compare deux mots, lettre à lettre, à partir de la droite, et que la comparaison se fasse par la première lettre par laquelle ils diffèrent, soit m'0m<m"1m quels que soient les mots m,m',m",

la procédure s (ci-dessus) fournit, dans un ensemble de mots de longueur fixe, précisément le mot suivant - pour cet ordre induit par l'ordre (0<1) sur l'alphabet, c'est-à-dire pour l'ordre alphabétique.
On comparera donc l'ordre naturel... sur les entiers naturels et l'ordre induit par celui de l'alphabet... sur les mots sur un alphabet de deux lettres.\

Le nombre des mots de longueur n sur un alphabet de deux lettres est évidemment 2^n.

Pour tout mot m, le nombre d'occurrences du caractère 0 (resp.1) c'est le degré partiel par rapport à la lettre 0 (resp. en 1) du mot m (nous parlons indifféremment de longueur ou de degré).

Au lieu de définir le système de numération base 2 par le processus algorithmique permettant de construire le mot représentant un entier donné, nous pouvons (inversement) interpréter tout mot sur l'alphabet (0,1) comme la représentation d'un entier.

Cette interprétation est définie par l'application récurrente v associant à tout mot m sur l'alphabet (0,1) un nombre entier v(m) tel que: v(0m)=2*v(m), v(1m)=1+v(0m), v(e)=0

en notant * le produit des entiers, et en écrivant, comme convenu, les entiers base 2 dans le sens opposé au sens usuel.

Exercice 1:

a) Considérer les couples (i,j) d'entiers écrits en base 3. Ces couples d'entiers (non-négatifs) sont donc représentés par des couples de mots (m,m'), sur l'alphabet de trois lettres [0,1,2]. Tout mot sera au besoin considéré comme le début d'une suite infinie ne comportant qu'un nombre fini de caractères non nuls. Soit m(k) le k-ième caractère de m. On s'intéresse aux couples (m,m') tels que pour tout k, m(k)+m'(k) soit pair. Afficher les points d'un écran dont les coordonnées satisfont à cette condition.
b) Péano considérait le segment fermé [0,1] des nombres réels compris entre et 1, duquel il ôtait le segment ouvert]1/3,2/3[, tiers du milieu. Puis, les segments [0,1/3] et [2/3,1] étaient à leur tout amputés du tiers ouvert du milieu, et ainsi de suite...
Sur l'ensemble **N** des entiers naturels, considérer le langage des entiers qui se représentent en base 3 sans utiliser le caractère "1" de l'alphabet (0,1,2).
\
On rappelle que tout mot m engendré par un alphabet de deux lettres peut être interprété comme un cheminement sur le graphe des points à coordonnées entières du plan.

Tout point M=(i,j) admet pour points voisins les quatre points dont une des coordonnées diffère de celle de M d'une unité. Deux interprétations sont classiquement utilisées:
-dans l'une (qualifiée d'absolue), il s'agit d'interpréter le mot m comme le codage d'un chemin (partant de l'origine) sur le quart de plan des points à coordonnées positives, l'une des lettres codant l'incrémentation d'une unité d'une coordonnée (i:=i+1) ou de l'autre (j:=j+1).
-dans l'autre interprétation (que l'on qualifie de relative), les lettres codent un virage, à gauche ou à droite, par rapport au déplacement qui a précédé; (cela demande évidemment une initialisation).

Les mots dont les degrés en 0 et en 1 sont fixés sont comptés par les coefficients classiquement dits binômiaux, et les propriétés élémentaires de ces coefficients binômiaux s'établissent agréablement à l'aide de cette représentation linguistique: par exemple, si l'on note (i,j) le nombre de mots de degré i en 0 et j en 1,
-il est immédiat que (i,j)=(j,i) [échanger les deux lettres de l'alphabet],
-que (i+1,j+1)=(i+1,j)+(i,j+1) [considérer les mots de degré i+j+2, et supprimer la dernière lettre],
-et, évidemment, que la somme des entiers (i,j), à somme i+j=n constante, est 2^n.

Ces récurrences sont les conséquences immédiates de l'algorithme (trivial, mais fort peu performant) d'énumération des mots sur un alphabet de deux lettres: pour construire les mots de degré n+1, ajouter une lettre aux mots de degré n; pour s'en convaincre, il suffit de ranger les mots de degré (i en 0 et j en 1) dans une boîte [i,j].

Ces coefficients (i,j) se rangent naturellement dans un tableau carré à double entrée, plutôt que dans un triangle, fût-il "de Pascal". Evidemment (exercice) vous pouvez écrire le programme qui en calcule un... par une procédure récursive!!! (à faire une fois; dénombrer les appels récursifs).
La ligne de rang n de ce tableau est constituée des coefficents de la série s_n, $(e-x)s_n=s_{n-1}$, $s_0=x^*$, ce qui fait que ce tableau s'étend naturellement aux indices négatifs, $s_{-1}=e$, $s_{-n}=(e-x)^{n-1}$.

De manière générale, extraire (d'un ensemble structuré) un sous-ensemble de structure donnée, et compter le nombre de manière de le faire, cela définit des coefficients 'binômiaux', en un sens général. Ainsi en va-t-il de l'opération suivante: chercher un mot m comme sous-mot d'un mot m' donné.
Le coefficient binômial classique, que nous notons (i,j) ci-dessus, compte bien évidemment le nombre de manières d'extraire le mot x^i du mot x^{i+j} (lorsque l'alphabet est simplement réduit à une lettre, x).

<u>Exercice</u> 2:

Un autre modèle est donné par les mots sur l'alphabet des entiers positifs. Soit un tel mot m de degré k dont la somme des caractères est n; n est la norme de m. Soit f(n,k) le nombre de mots de degré k et norme n. On a f(n,k)=f(n-1,k-1)+f(n-1,k) (récurrence obtenue en diminuant d'une unité la dernière lettre de chaque mot), ce qui est la récurrence des coefficients binômiaux, sous l'initialisation par les mots de degré 1, f(n,1)=1 pour n≥0.
En particulier, le nombre de mots de norme n est 2^{n-1}. Si g(n) est le nombre de mots de norme n qui sont leur propre miroir, on vérifie aisément que g(n)=f([n/2]), où [n/2] note traditionellement la partie entière de n/2 (bien que, souvent, nous noterons [n] l'ensemble ordonné des entiers de 1 à n; le contexte précisera toujours l'interprétation).
Si l'on somme les degrés des mots de norme n+1, on trouve (n+2)*2^(n-1); cette suite, 1 3 8 20... est aussi la suite transformée de la suite des entiers naturels positifs, par la <u>transformation binômiale</u>:
1, 1*1+1*2, 1*1+2*2+1*3, 1*1+3*2+3*3+1*4, 1*1+4*2+6*3+4*4+1*5, 1*1+5*2+10*3+10*4....
ce qui signifie que la suite des entiers est la suite des coefficients de la série d'interpolation de newton de la fonction (n+2)*2^(n-1)
(il a été noté que la suite (n+2)*2^(n-1) était aussi la suite des déterminants des matrices M(n) dont tous les éléments sont 1, à l'exception des éléments diagonaux, lequels sont 3).
La suite des $n*2^{(n-1)}$, 0 1 4 12 32...qui est la sommation de la précédente, est aussi la transformée binômiale des entiers impairs; elle compte le nombre d'arêtes des hypercubes, mais aussi, curieusement, il a été signalé qu'elle compte <u>les permutations</u> des entiers de 1 à n+2 qui n'ont qu'un seul sous-mot de la forme ijk, i<j<k, et aucun de la forme ikj. C'est aussi, plus simplement, le nombre de factorisations en produit de deux facteurs de l'ensemble des mots de degré n-1, sur un alphabet de deux lettres; la fonction génératrice est donc $(1+2x)^{-2}$
(cela augure de quelques transformations bijectives).
Tableau de différences successives de $n.2^{n-1}$ (différence première sur la seconde ligne, etc..) :
1 3 8 20 48 112 256...
2 5 12 28 64 144... remarquer que le produit d'une ligne par 4 s'insère dans celle du dessus
3 7 16 36 80...
4 9 20 44...
5 11 24 ...
…
\

<u>Exercice</u> 3:

Etant donné un système de représentation des entiers naturels, peut-on en déduire un système de représentation des nombres réels? Dans le cas de la base 2, les entiers positifs sont représentés par les mots (sur un alphabet (0,1) de deux lettres) dont la dernière lettre est 1.

Un nombre réel r de [0,1[est représenté par le mot infini dont la k-ième lettre l_k est définie par $l_k=[r_k]$, où [.] note la partie entière, avec $r_{k+1}=2(r_k-l_k)$, sous l'initialisation $r_0=r$.
Une autre présentation est la suivante: f(r)=2r est une bijection de [0,1/2[sur [0,1[, tandis que g(r)=2r-1/2 est une bijection de [1/2,1[sur [0,1[. A tout nombre réel r correspond la suite $r_{i+1}=f(r_i)$ si $r_i<1/2$ et $g(r_i)$ sinon; ainsi, à tout réel r non-négatif et inférieur à 1 correspond (injectivement) un mot infini sur l'alphabet (f,g).
Peut-on remplacer f et g par deux fonctions continues strictement croissantes (resp. décroissantes) quelconques ?

\

Exercice 4 (numération base p, p premier):

On étudie le nombre f(n,p) de facteurs p (p premier) de la décomposition de la factorielle de n en facteurs premiers. Montrer que cette fonction ne dépend que de l'écriture de n en numération base p: si l'entier n s'écrit $n_1n_2\ldots n_k$ en numération base p (nous écrivons toujours les caractères de plus faible poids en tête du mot), on a $f(n,p)=n_k+n_{k-1}n_k\ldots+n_2\ldots n_{k-1}n_k$.

On se propose de construire une petite table à double entrée de cette fonction f(n,p); ça se fait lors de la conversion de n en base p, en sommant la suite des quotients; sommer également la suite des restes: soit $g(n,p)=n_1+n_2\ldots+n_k$ la somme des chiffres de l'écriture de n en base p.

On a n+f(n,p)=p.f(n,p)+g(n,p) [établi par Legendre, fin du 18^e siècle]; cette égalité résulte immédiatement de la sommation membre à membre des k+1 relations de conversion de n en numération base p, $q_i=p.q_{i+1}+n_{i+1}$, pour i de 0 à k-1, $q_0=n$, $q_k=0$.
\

Exercice 5:

A tout nombre réel $0<r_0<1$, on associe une suite non décroissante d'entiers positifs $s=(k^i)$ de la manière suivante: k_0= le plus grand entier k tel que $k*r_0<1$, $r_1=1-k_0*r_0$

k_i= le plus grand entier k tel que $k*r_i<1$, $r_{i+1}=1-k_i*r_i$.

Etablir que si r_0 est rationnel, la suite s est ultimement constante; écrire le programme, et observer l'effet rapide des erreurs.
\

Exercice 6:

Tracer le graphe de la fonction "nombre de 1 de la représentation base 2 de la suite des entiers", soit: 0 1 1 2 1 2 2 3 1 2 2 3 2 3 3 4 1 2 2 3 2 3 3 4 2 3 3 4 3 4 4 5.. \

Exercice 7 (facile):

La représentation base b d'un nombre rationnel r=p/q, 0<r<1, est une suite ultimement périodique, car l'automate de conversion est un automate d'états finis.

Le k-ième caractère k_i ($k_i<b$) de ce mot infini est défini à partir de l'état r_i par la récurrence de division euclidienne par q $(r_i*b)=k_i*q+r_{i+1}$ où $r_{i+1}<q$, sous l'état initial $r_0=p$.
(évidemment, il n'y a que b états possibles pour les restes r_i).
\

Exercice 8:

Soit p>q>1 deux entiers premiers entre eux, et r=p/q leur rapport rationnel supérieur à 1.

On établira que tout entier naturel n se décompose sur les puissances de r:
-en s'écrivant comme somme de nombres de la forme $c_i r^i$,
-où les coefficients c^i sont des entiers naturels inférieurs à p.

C'est dire l'existence d'un entier k(n) tel que l'on ait $nq^k=c_0q^k+c_1q^{k-1}p.... +c_iq^{k-i}p^i.... +c_kp^k$.
Pour chaque rationnel p/q supérieur à 1, on définit ainsi un langage sur un alphabet de p lettres:
à tout entier n>0 correspond la suite des coefficients c_i, soit un mot sur l'alphabet des entiers inférieurs à p (mot dont la dernière lettre est q dès que n excède p-1).

Par exemple, avec p=3 et q=2, la suite des entiers s'écrit
0 1 2 02 12 22 012 112 212 0012 1012 2012 0212 1212 2212 01012...
(on a trois mots de degré 2 ou 3, six mots de degré 4...)

La sommation des entiers écrits sous cette forme est gouvernée par la règle fondamentale de retenue suivante: pour c et d entiers inférieurs à p et de somme c+d=s, on a $cr^i+dr^i=sr^i$lorsque s<p, et jr^i+qr^{i+1}lorsque s=p+j.
\

Exercice 9 (programmer):

Pour quelques applications f des entiers naturels dans les entiers naturels, nous allons considérer la fonction associée suivante:
à tout entier n correspond le caractère c(n) de plus fort poids de l'écriture de f(n) en numération base b.

Par exemple, avec $f(n)=2^n$, en base b=10, nous obtenons pour c la suite
1 2 4 8 1 3 6 1 2 5 1 2 4 8 1 3 6 1 2 5 1 2 4 8 1...
Avec la suite des entiers de Fibonacci, on obtient
1 2 3 5 8 1 2 3 5 8 1 2 3 6 9 1 2 4 6 1 1 2 4 7 1 1 3 5 8 1...

S'intéresser à la fréquence d'apparition de chacune de ces b-1 caractères. En faire une statistique expérimentale. *On observe par exemple que la fréquence du caractère "1" est très supérieure à celle du caractère "9" (dans un rapport de six à un pour les puissances de 2, par exemple).*
Remarquer que l'on peut effectuer les calculs en flottants, jusqu'à un certain point.

Essayer avec les fonctions puissances (carrés, cubes...), les fonctions de type exponentiel (ou même logarithmique, en considérant le premier caractère significatif), les factorielles, (et, si possible, la suite des nombres premiers)... Expliquer le phénomène.

Etant donné un réel r>1, on lui associe la suite $f(int(r^n))$. La transformation est-elle injective ?
Puis, au lieu de considérer le caractère de plus fort poids, considérer le caractère qui suit.

Expérimenter avec la suite (itérer[x:=1/x; n:=int(x); x:=x-n;])
des valeurs obtenues pour l'entier n=partie entière de x,
x étant initialement un flottant quelconque entre 0 et 1.
Expérimenter avec les suites pseudo-aléatoires fournies par la procédure de votre machine.

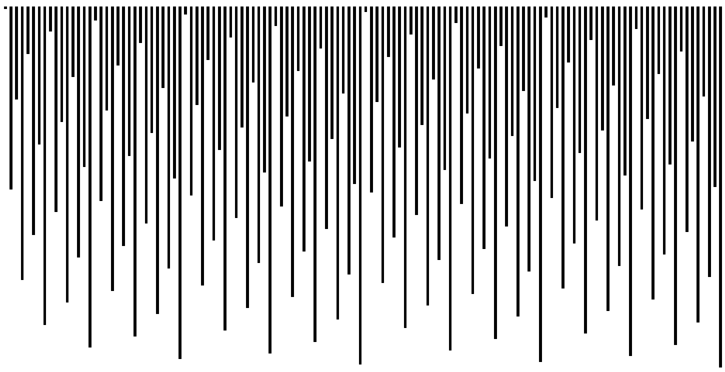
\

Exercice 10:

Dans le système électoral de répartition des sièges suivant "quotient et plus fort reste", on peut construire des exemples où, le nombre des sièges à répartir étant augmenté, une liste possédant une voix de plus voit le nombre de ses sièges paradoxalement diminuer.
\

Exercice 11:

Soit l'alphabet X=(0,1). Les mots de X^n sont interprétables comme la représentation des entiers de 0 à 2^n-1 en numération base 2.
Pour tout mot m de X^n, Mir(m) est le mot miroir du mot m.
Programmer, et afficher le graphe de la fonction numérique involutive qui envoie chaque mot sur son miroir, m —> Mir(m), où m et Mir(m) sont interprétés comme des entiers.
Ci dessous, le graphe obtenu pour n=7, que l'on a aéré pour le rendre plus lisible.



[Pour les premières valeurs de n, de 1 à 4, on obtient les permutations suivantes:
0 1,   0 2 1 3,   0 4 2 6 1 5 3 7,   0 8 4 12 2 10 6 14 1 9 5 13 3 11 7 15,
chacune se déduisant aisément de celle qui précède:
si s est une suite d'entiers, 2s la suite des entiers doubles, s+1 celle obtenue en ajoutant 1 à chaque entier, on a s_0=(0), s_{i+1}=(2s_i, 2s_i+1)]

Utiliser la transformation (m,m') —> (Mir(m),Mir(m')) pour brouiller une image, en opérant sur chacune des coordonnées.

On aura la curiosité de procéder de même manière avec une base autre que 2....

On rapprochera ce désordre de celui obtenu par la transformation dite "du boulanger", sur le développement binaire des couples de nombre réels pris dans [0,1] x [0,1], laquelle transformation consiste en ceci:

-étant donné une application f de Z dans (0,1),
càd un mot doublement infini sur l'alphabet (0,1), soit infini à gauche et à droite,
-on donne un entier k de Z, et
-on interprète le mot infini à droite constitué par la suite des valeurs f(i) pour i≥k comme le développement binaire d'un nombre réel x compris entre 0 et 1
- on interprète le mot infini à gauche constitué par la suite des valeurs f(i) pour i<k comme le développement binaire d'un nombre réel y compris entre 0 et 1
-ce qui donne un point (x,y) du carré réel [0,1] x [0,1]

La transformation "du boulanger", pseudo-chaos, transformation évidemment inversible, consiste en ce simple décalage qui substitue k+1 à k. La transformation est indéfiniment itérée, et l'on observe les trajectoires (ou orbites) obtenues.
Evidemment, la suite 10^∞ équivaut numériquement à 01^∞, tandis que l'interprétation dans la transformation géométrique donne des suites de points qui diffèrent radicalement.
La transformation, naturellement, s'étend à toute autre base.

Considérer également la transformation inversible f définie sur l'ensemble fini X^n x X^p par f(xm,m'y)=(my,xm'),
où x et y sont des lettres de X, m un mot de X^{n-1}, m' un mot de X^{p-1}.
Une orbite est définie par les mots conjugués du mot xmyMir(m').

Excellent avec les mots de De Bruijn, définis comme mots circulaires de degré 2^n dont les facteurs de degré n sont tous distincts.
L'utiliser, et l'itérer, pour brouiller une image rectangulaire constituée de np points.
Tout phénomène d'aspect chaotique peut servir à l'établissement de procédures de tirage pseudo-aléatoire ou de cryptage. Cela laisse le champ libre à bien des investigations.
\

<u>Exercice</u> 12:

Tout entier se décompose d'une unique manière sur les puissances de deux.
Ce qui signifie qu'il existe une partition de l'entier n en parts qui sont des puissances de deux. Autrement dit, en terme de série (le vérifier, formellement)

$x^*=(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)......=$produit des (1+x^(2^k)) pour k≥0 \

<u>Exercice</u> 13:

Sur l'ensemble **Z** des nombres rationnels, considérer l'application f telle que

$$f(x) = x-1 \ \text{ pour } x>0, \quad f(x) = -1/x \ \text{ pour } x<0 , \quad f(0) = 0.$$

Cette application structure les rationnels en une arborescence orientée vers 0, point fixe.
Cette représentation des rationnels a été utilisée par Conway pour coder des noeuds.

Dualement, partant de 0, le mot aaabaabaaab conduit à la suite de rationnels

1 2 3 -1/3 2/3 5/3 -3/5 2/5 7/5 12/5 -5/12,

où a opère en envoyant x sur x+1, et b en envoyant x sur -1/x.

On comparera au développement en fraction continue des nombres rationnels non-négatifs, lequel est défini par l'application g telle que

$$g(x) = x-1 \ \text{ pour } \ x\geq 1, \ \ g(x) = x^{-1} \ \text{ pour } \ 0<x<1, \ \ g(0)=0.$$

Cette application structure l'ensemble des nombres rationnels positifs en une arborescence orientée vers 0, unique point fixe de l'application.

Dualement, partant de 0, le mot aaabaabaaab conduit à la suite de rationnels positifs

1 2 3 1/3 4/3 7/3 3/7 10/7 17/7 24/7 7/24

où a opère en envoyant x sur x+1, et b en envoyant x sur 1/x.

Ainsi, tout rationnel est adressable par un certain mot de $(a,b)^*$ dans le système de représentation défini par f, et tout rationnel non-négatif l'est dans le système défini par g.

On remarqura cependant une très légère différence dans la structure de ces deux arborescences: celle de la totalité des rationnels possède un sommet de plus (-1, tel que f(-1)=1=f(2)), tandis qu'il n'existe pas de nombre x tel que f(x)=-1; pour celle des rationnels non-négatifs, le seul nombre x tel que g(x)=1, c'est 2.

Il en résulte une bijection baroque **h** des rationnels non négatifs <u>sur les rationnels privés de -1</u>. Tout entier naturel est invariant dans cette bijection: h(n)=n pour tout n dans **N**.

Pour $0<x<1$, on a $\mathbf{h}(x) = -1/\mathbf{h}(1/x)$. Pour $x\geq 1$, on a $\mathbf{h}(x) = 1+\mathbf{h}(x-1)$. Enfin, $\mathbf{h}(0) = 0$.
Inversement,
pour tout $x\neq -1$, si $x>0$, $\mathbf{h}^{-1}(x)=1+\mathbf{h}^{-1}(x-1)$, si $x<0$, $\mathbf{h}^{-1}(x)=1/\ \mathbf{h}^{-1}(-1/x)$, et $\mathbf{h}^{-1}(0)=0$.

La fonction récursive h définit une contrainte que l'on peut naturellement étendre aux nombres réels

La fonction récursive h définit une contrainte que l'on peut naturellement étendre aux nombres réels non négatifs (et même aux nombres complexes...), mais comment initialiser une récurrence qui renvoie à l'infini?
Elle dit seulement que si la fonction h est définie en x>0 , elle l'est aussi en 1/x et en x+1. \

Exercice 14:

Etant donné deux nombres rationnels, p/q et p'/q', avec p/q<p'/q', énumérer les nombres rationnels p"/q" tels que p/q<p"/q"<p'/q'.
\

Exercice 15 (**anneau de Nim**) (assez difficile)

(liens: les polynômes irréductibles à coefficients modulo 2, les mots de Lyndon sur 2 lettres):

Sur les entiers positifs écrits en numération base 2,
la somme de Nim modulo 2 consiste à opérer l'addition sans retenue.

Ainsi, par exemple (le caractère de plus faible poids est à gauche), 10111+101011=000101,
soit 29+53=40 pour cette somme de Nim. Tout entier est ici son propre opposé, n+n=0.

Si l'on opère de même pour le produit, sans retenue
(par exemple 111*111=111+0111+0111=10001, soit 7*7=17 pour ce produit de Nim)
les entiers sont alors munis d'une structure d'anneau, que nous qualifierons d'anneau de Nim.

Certains entiers sont primitifs pour ce produit, et tout entier se décompose sur les entiers primitifs.
(01 est le seul entier pair primitif).

Voici le tout début des entiers Nim-primitifs:

01, 11; 111; 1101, 1011; 11001, 10011, 11111; ...

soit, en base dix

2 3, 7, 11 13, 19 25 31, 37 41 47 55 59 61, 67 73 87 91 97 103,....

et, en insérant la factorisation des impairs, de 3 à 63,

3, 5=3*3, 7, 9=3*7, 11, 13, 15=3*3*3, 17=3*3*3*3, 19, 21=7*7, 23=3*13, 25, 27=3*3*7 ,

29=3*11, 31, 33=3*31, 35=7*13, 37, 39=3*3*11, 41, 43=3*25, 45=3*3**3*7, 47, 49=7*11,

3*3*3*3*3=51, 53=3*19, 55, 57=3*3*13, 59, 61, 63=3*7*7....

Le degré d'un entier, c'est le degré du mot 1m1 de sa représentation en numération base 2.
Le degré partiel en 1 (resp 0) compte le nombre d'occurrences de 1 resp 0).
[Note: un entier Nim-primitif écrit en base 2 (nous parlerons du "langage des entiers de Nim primitifs modulo 2", ou des entiers Nim2 primitifs) exprime la suite des coefficients d'un polynôme irréductible, en une variable, à coefficients modulo 2. Ces polynômes de degré n sont par ailleurs bijectivement associés aux mots primitifs standards de Lyndon dont le degré est n; il y a autant d'entiers primitifs de degré n+1 que de polynômes irréductibles de degré n]

Si le mot 1m1 appartient (resp. n'appartient pas) au langage des entiers de Nim primitifs,
il en va de même du mot miroir, Mir(1m1)=1Mir(m)1;
plus généralement, pour les entiers impairs, les seuls intéressants (et nous omettrons les entiers pairs)
1Mir(m)1*1Mir(m')1=Mir(1m1*1m'1).

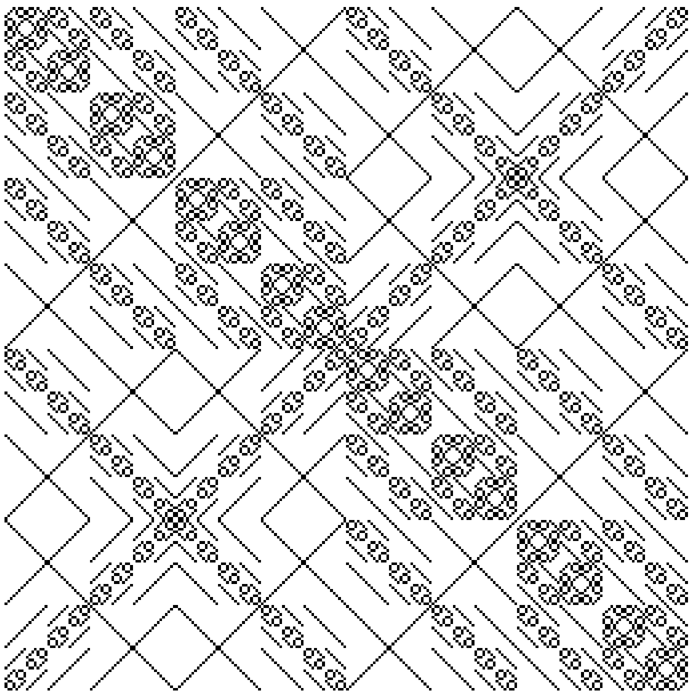
On peut opérer de manière comparable avec les entiers représentés en base k, qui se trouveront munis d'une structure d'anneau d'intégrité (deux entiers non nuls ont un produit non nul) de Nim modulo k lorsque k est premier, réalisée par l'addition et le produit sans retenue, caractère de même rang à

lorsque k est premier, réalisée par l'addition et le produit sans retenue, caractère de même rang à caractère de même rang.
Nous parlerons de l'anneau Nimk; nous considérons ici essentiellement l'anneau Nim2.

On représentera (sur écran) le graphe fractal suivant: l'état du point de coordonnées (i,j) est la parité du nombre de 1 dans l'écriture de i+j (somme de Nim modulo 2);
autrement dit, un bloc de côté 2^n est recopié trois fois, une fois en diagonale, et deux fois en négatif (vers la droite et vers le bas)...
soit encore le morphisme plan   f(0)= $\begin{matrix}01\\10\end{matrix}$,   f(1)= $\begin{matrix}10\\01\end{matrix}$;   ci-dessous, le début de l'image, 8x16:

```
0 1 1 0 1 0 0 1 1 0 0 1 0 1 1 0..
1 0 0 1 0 1 1 0 0 1 1 0 1 0 0 1..
1 0 0 1 0 1 1 0 0 1 1 0 1 0 0 1..
0 1 1 0 1 0 0 1 1 0 0 1 0 1 1 0..
1 0 0 1 0 1 1 0 0 1 1 0 1 0 0 1..
0 1 1 0 1 0 0 1 1 0 0 1 0 1 1 0..
0 1 1 0 1 0 0 1 1 0 0 1 0 1 1 0..
1 0 0 1 0 1 1 0 0 1 1 0 1 0 0 1..
          ………………
```

Cette image est exagérément pleine et régulière, mais voici l'image obtenue lorsque le nombre de 1 de la somme de Nim i+j est congru à k=2 modulo 5 (c'est un exemple) (faire varier k de 0 à 4):



L'image fractale connue sous le nom de Sierpinski (qui pourrait aussi bien porter le nom de Lucas, ou celui de Kummer), constituée des coefficients binômiaux pris modulo 2, exprime les couples d'entiers (i,j) dont la somme de Nim2 coïncide avec la somme usuelle; ils ne sont pas très rares (leur nombre est multiplié par 3 lorsque le nombre des couples (i,j) est multiplié par 4: leur fréquence, qui est $(3/4)^n$ dans un tableau de côté 2^n, tend cependant vers zéro, tandis que dans le tableau de parité des 1 dans la somme de Nim i+j , il y a autant de caractères "0" que de caractères "1").

Les couples d'entiers dont le produit de Nim coïncide avec le produit usuel sont plus rares...
(noter que les puissances de 2 coïncident dans l'anneau usuel et dans celui de Nim).

Le produit des entiers inférieurs à 2^i par ceux inférieurs à 2^j donne ceux inférieurs à 2^{i+j}.

Restons sur l'annneau de Nim modulo 2:

Pour éviter toute confusion,
nous noterons $(p*q)_{nat}$ le produit usuel de deux entiers p et q dans l'anneau des entiers naturels,
et $(p*q)_{nim2}$ le produit des entiers p et q dans l'anneau de Nim modulo 2.
Nous ferons de même pour la somme, et toute représentation.

Définissons la norme N(p) d'une entier p comme le nombre de 1 de sa représentation Nim2.

Vérifier que $N((p+q)_{nim2}) \leq (N(p)+N(q))_{nat}$ et $N((p*q)_{nim2}) \leq (N(p)*N(q))_{nat}$.
Vérifier que $(Mir(p)_{nim2}*Mir(q)_{nim2})_{nim2}=Mir(p*q)_{nim2}$.
Etablir que d(p,q)=N(p+q) est une distance (vérifier l'inégalité triangulaire).

Suites spéciales rapidement croissantes:

Pour tout entier p initial, observer la suite défine par la procédure [itérer $p:=(p*p)_{nim2}$], et N(p).
Essayer d'abord l'initialisation par les entiers primitifs impairs Nim2, 3, 7, 11 13, 19 25 31...
Par exemple, pour 3, $p_n=(3 \text{ puissance } 2^n)_{nim2}=(1+2 \text{ puissance } 2^n)_{nat}$, de norme $N(p_n)=2$.
Ensuite, $(7 \text{ puissance } 2^n)_{nim2}=(1+2 \text{ puissance } 2^n+4 \text{ puissance } 2^n)_{nat}$, de norme 3....
$(11 \text{ puissance } 2^n)_{nim2}=(1+2 \text{ puissance } 2^n+8 \text{ puissance } 2^n)_{nat}$, de norme 3...
(d'où le cas 13, dont l'écriture Nim2 est le miroir de celle de 11).
Examiner ensuite $(19)_{nat}=(11001)_{nim2}$.
23 (non primitif) donne (11101*11101)=101010001, de carré 10001000100000001 de norme 4...

Quel que soit l'entier p initial, la norme -et la forme- de la suite des itérés $p:=(p*p)_{nim2}$ se stabilisent;
serait-ce que $N(p*p)_{nim2}=N(p)$?

Comment déceler si un entier p est multiple de q pour le produit de Nim ?

examiner le cas le plus simple, celui des multiples de $(3)_{nat}=(11)_{nim2}$; 1abcd1 est-il multiple de 11 ?
On forme f(1abcd1)=a'b'c'd', de gauche à droite par a'=1+a,b'=a'+b, c'=b'+c, d'=c'+d,
et l'on a 1abcd1=11*1a'b'c'd' ssi d'=1, aisé à vérifier par programme.
Par exemple f(111)=0, distinct de 1: 7 n'est pas Nim2 multiple de 3; $(2+3*3)_{nim2}=7=(1+2*3)_{nim2}$.

L'entier 1011010111=1m1 est-il multiple de 11 ?
f(1011010111)=10110010, et 1m1 n'est pas multiple de 11, mais il suffit de modifier un seul caractère du mot m pour que l'on ait un multiple de 3: un entier impair sur deux est multiple de 3:
il faut et il suffit que 1m soit de degré impair en 1 pour que 1m1 soit multiple de 3:
les multiples de $(3)_{nat}=(11)_{nim2}$ sont de degré pair en 1, la condition est nécessaire, et suffit.

Il en résulte que pour les impairs primitifs 1m1, m non vide, m est de degré impair en 1;
aucun entier de la forme $(1+2^n)$ n'est primitif pour n>1.
On montre de même qu'un entier impair (de degré supérieur à trois) sur quatre est multiple de 7, et qu'un entier impair sur 2^n (de degré supérieur à n+1) est multiple d'un mot donné 1m1, où m est de degré n-1.

Nous sommes sur la voie de l'algorithme pour décider si p est multiple de q pour le produit de Nim.
Il s'agit en fait d'inverser une matrice infinie sous-diagonale, I+M=I-M particulière (I est l'identité) telle que si M(i,j)=1, alors M(i+1,j+1)=1: la matrice M est déterminée par sa première colonne, constituée d'un nombre fini d'occurences de 1, celles d'un mot 1m1 représentant l'entier q:

constituée d'un nombre fini d'occurences de 1, celles d'un mot 1m1 représentant l'entier q:
chaque élément M(i,0)=1 détermine une diagonale D_i de rang i constituée d'éléments non nuls;
l'inverse $(I-M)^{-1}$, c'est la somme des M^k pour k≥0, ce qui correspond au calcul de la parité du nombre des chemins d'un sommet vers l'autre dans la fermeture transitive du graphe représenté par le tableau M; on décompose M en somme de diagonales $M=(D_{i(1)}+D_{i(2)}+...)$, d'où M^2 par $D_iD_j=D_{i+j}$, et M^k, puis la somme des M^k pour k>0: <u>la matrice $(I-M)^{-1}$</u><u>est déterminée par sa première colonne</u>, laquelle possède un nombre infini d'occurrences de 1.
Si l'on représente la première colonne de M par un polynôme ∏, celle de (la somme des M^k) est représentée par la série (somme des puissances de ∏).

Ainsi, les multiples de 11 sont représentés par le polynôme x, et la transformation inverse ci-dessus évoquée par la série $(e-x)^{-1}=x^*$, les multiples de 111 par $x+x^2$, la transformation inverse par la série $(e-x-x^2)^{-1}$, les multiples de 101 par x^2, la transformation inverse par $(e-x^2)^{-1}$=somme des x^{2k}, etc...

Chaque mot fini 1m1 est canoniquement plongé dans le mot infini $1m10^\infty$, et l'on calcule son image par l'application inverse $(I-M)^{-1}1m10^\infty$, qui doit être un mot fini plongé dans un mot infini, $1m'10^\infty$.

Afin de calculer les entiers primitifs, nous avons éliminé les multiples de 2 et 3; il suffit de représenter tout primitif 1m1, impair distinct de 3, par le seul facteur central m, de degré impair en 1:

1 ; 10 , 01 ; 100 , 001 , 111 ; 0100 , 0010 , 1110 , 1101 , 1011 , 0111 ;...

Dans l'anneau Nim10 (qui n'est pas intègre), par exemple, pour i et j dans [0,9], i+j et i*j sont pris modulo 10 avec oubli de retenue: ainsi (avec le caractère de plus faible poids à gauche,
<u>ce qui permet de calculer (au clavier de la machine) en saisissant séquentiellement, de gauche à droite</u>),
172*254=245+0458+00408=28488
(soit, oralement, lisant le résultat de droite à gauche, quatrevingthuitmillequatrecentquatrevingtdeux).

\

<u>Exercice</u> 16 (retour sur la norme des entiers en numération base b):

A tout mot $m=m_1m_2...m_k$ sur l'alphabet N des entiers naturels correspond la somme des caractères du mot m que nous appellerons sa norme: norme(m)=$m_1+m_2....+m_k$.
Le nombre de caractères 1 nécessaires pour écrire l'entier n en base 2 est "la norme base 2 de n";
sur les entiers successifs , on obtient la suite des normes 0 1 1 2 1 2 2 3 1 2 2 3 2 3 3 4...., mot infini sur l'alphabet N, dont les facteurs successifs, de degrés 2^i, sont m(0)=0, $m(i+1)=m(i)f_1(m(i))$, où f_1 est le morphisme alphabétique $f_1(j)=j+1$.

Il en résulte que la somme s(i) des caractères de m(i) satisfait à la récurrence s(0)=1, $s(i+1)=2s(i)+2^i$.
En numération base 2, le nombre de caractères 1 nécessaires pour écrire les entiers de 1 à 2^n -1 est donc $\mathbf{n2^{n-1}}$, ce qui est aussi le nombre total de caractères (0 ou 1) nécessaires pour écrire les entiers de 2^{n-1} à 2^n-1; on en déduit le nombre de caractères (0) nécessaire.

La suite des normes des entiers naturels représentés en numération base b est:
m(0)=0, $m(i)=m(i).f_1(m(i)).f_2(m(i))....f_{b-1}(m(i))$, où f_k est le morphisme alphabétique $f_k(j)=j+k$.
(en base 3: 0 1 2 1 2 3 2 3 4 1 2 3 2 3 4 3 4 5 2 3 4 3 4 5 4 5 6...)
Quelle est la statistique du nombre de chacun des caractères typographiques (de 0 à b-1) nécessaires pour écrire les entiers de 1 à b^n-1 (en numération base b) ?

\

<u>Exercice</u> 17 (sur une lettre, les polynômes primitifs à coefficients dans la structure de Boole):

<u>Exercice</u> 17 (sur une lettre, les polynômes primitifs à coefficients dans la structure de Boole):

Sur les entiers représentés en base 2 par les mots sur (0,1) (<u>rappelons que nous faisons figurer les plus faibles poids à gauche</u>), la structure d'anneau de Nim consiste à ne pas faire opérer la retenue, tandis que Conway y a interprété (comme fonction de Gründy sur un graphe) la structure de corps fini sur $2^{2\wedge n}$ éléments, où la somme coïncide avec celle de Nim, mais pas le produit.
En calculant modulo 2, le produit conduit aux entiers qui sont premiers en ce sens, ou, si l'on préfère, aux polynômes irréductibles à coefficients dans le corps des entiers modulo 2.

Maintenant, calculons dans le demi-anneau des coefficients de Boole (1+1=1=0+1=1+0); soit donc l'algèbre des polynômes sur une lettre à coefficients de Boole, et cherchons les polynômes primitifs; par exemple, le polynôme $e+x^3+x^5$ sera représenté par le mot 100101; et si le produit de 1011 par 1101 donne 1111111 (qui n'est donc pas primitif) c'est que nous représentons chaque polynôme par ce mot sur l'alphabet (0,1) qui est la suite de ses coefficients (par commodité, ce mot est interprété ensuite comme entier en numération base deux, puis dix); suite des primitifs:

[note: 1, unique polynôme de degré 0, e, peut légitimement ne pas être considéré], puis
01 (2), 11 (3), 101 (5),1001 (9),1011 (13), 1101 (11),10001 (17),10011 (25), 10111 (29), 11001 (19), 11101 (23), 100001 (33), 100011 (49),100101 (41), 100111 (57), 101001 (37), 101011 (53), 110001 (35), 110101 (43),111001 (39)....
où l'on a entre parenthèses l'écriture base dix.

Ou, en réordonnant les entiers: 2 3 5 9 11 13 17 19 23 25 29 33 35 37 39 41 43 49 53 57.....
Le nombre de polynômes primitifs de cette structure, suivant leur degré: 2 1 3 5 9 18....
Si un polynôme est primitif, son réciproque, représenté par le mot miroir, l'est aussi.

Nous pouvons donner une autre présentation à ce calcul, en récurrant directement sur les entiers munis de ce que nous appellerons la somme de Boole (sum(p,q)) et le produit de Boole (prod(p,q)) de deux entiers, deux opérations commutatives qui munissent les entiers d'une structure de demi-anneau.
On a sum(0,0)=0, sum(2p+1,2q+1)=sum(2p+1,2q)=1+2sum(p,q), sum(2p,2q)=2sum(p,q),
prod(0,p)=0, prod(1,p)=p, prod(2p,q)=2prod(p,q), prod(2p+1,q)=sum(prod(2p,q),q).
Nous cherchons les entiers qui ne sont pas composés pour ce produit: nous les dirons primitifs.
Pour tout entier, calculer le nombre de ses factorisations distinctes en entiers primitifs (car la factorisation n'est pas unique).
\

<u>Exercice</u> 18:

Comme on s'amuse à tout et n'importe quoi, on a interprété les mots de parenthèses sur (0,1) en numération base 2, puis converti ces entiers en numération base 10, ce qui donne, dans un sens:

0 2 10 12 42 44 50 52 56 170 172 178 180 184 202 204 210 ...

Calculez l'interprétation dans l'autre sens, 1 3 5 7 11 13 19 21.... obtenue par complément à 2^n-1.
Pourquoi ne pas interpréter en numération factorielle, par exemple ?
\

<u>Exercice</u> 19:

Enumérer les entiers dont la représentation base 4 s'écrit en utilisant uniquement les caractères 0 et 1.
Cette suite, notons la db(n), db(0)=0, telle que si n y appartient, 4n et 4n+1 y appartiennent,

0 1 4 5 16 17 20 21 64 65 68 69 80 81 84 85 256 257 260 261 272 273 ...,

porte le nom de suite de Bruijn, possède quelques propriétés remarquées, et a été la source de divers bricolages baroques, notamment par mélange alterné et somme de suites.

Les entiers de cette suite s'écrivent en base 2 avec uniquement des zéros en position paire.
En procédant comme d'habitude avec les caractères de faible poids à gauche, ce qui permet de plonger

aisément les suites finies dont le dernier caractère est non nul dans les suites infinies en complétant par des zéros; par exemple, l'entier n=81 s'écrit 1000101... en base 2, 1011... en base 4, et 1000101... paraît comme le mélange alterné de 1011... et 0000... On écrira 1000101...=f(1011... ,0000...).

Ce procédé peut être itéré, et toute suite finie d'entiers écrits en base 2, $n_1 \ldots n_k \ldots$, plongée dans les suites infinies se code par

$$f(n_1 \ldots, n_k)=f(f((n_1 \ldots, n_{k-1}), n_k),$$

procédure qui fournit finalement un unique entier en base 2, plongé dans une suite infinie.

Tout entier s'écrit sous la forme f(a(n),2b(n)), où a(n) et b(n) sont des entiers de la suite de de Bruijn, écrits en base 2 et composés par f.
Quantité de décompositions distrayantes de ce style sont possibles par généralisation à d'autre systèmes de représentation des entiers.
Sont-elles extensibles aux nombres réels ?
On peut s'amuser à coder ainsi beaucoup de choses;
par exemple, il a été suggéré de représenter chaque entier par la suite des exposants de sa décomposition en facteurs premiers, et de coder cette suite d'exposants par la procédure f: cela fournit une permutation très baroque de la suite des entiers naturels.

Il y a cependant là des beautés cachées; par exemple, décomposons chaque entier n sous la forme n=f(db(a(n)),2db(b(n)), où db est la suite de de Bruijn, et affichons sur écran la suite des points du quart de plan NxN dont les coordonnées sont (a(n),b(n)), en liant chaque point au suivant.
Examinez la structure discontinue de l'objet; un fait est que ce cheminement ne se traverse pas.

01012323010123234545676745456...
00110011223322330011001122322....

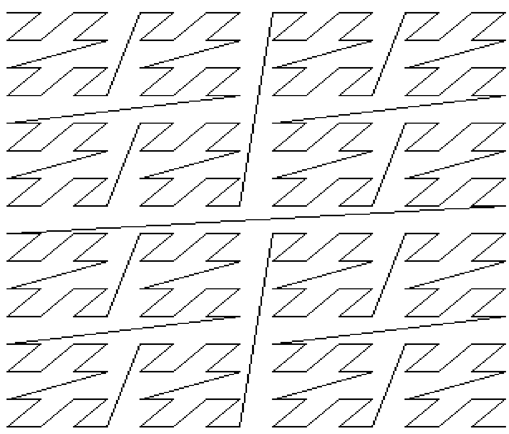
Les entiers qui s'écrivent sans 2 en numération base 3 (si i en fait partie, 3i et 3i+1 en font partie):

0 1 3 4 9 10 12 13 27 28 30 31 36 37 39 40 81 82 84 85 90 91 93 94...

caractérisent les coefficient binômiaux (i,i) et (i+1,i) non multiples de 3; les nombres de catalan (i,i)/(i+1) possèdent donc également cette propriété.

Tout entier n s'écrit de h(n) manières a+b avec 0≤b≤a, pour a et b entiers de cette suite.
De fait, h(n) est une puissance de deux, et les valeurs maximales atteintes pour la première fois sont 2^k, sur la suite des entiers obtenus par la récurrence n:=3n+1, à partir de l'initial n:=1, soit
1 4 13 40 121 364 1093 3280 9841.... , h(1)=1, h(4)=2, h(13)=2^2.... , h(9841)=2^8….
càd, évidemment, les entiers qui s'écrivent comme suite de k caractères 1 en base 3.

Enfin,



Comparez cette image (de l'énumération de NxN, bijection de N sur NxN par décomposition de tout entier sur la suite de de Bruijn) à la courbe de Hilbert. Ici, chaque carré est balayé en diagonale, toujours suivant la même diagonale orientée, mais les recollements ne lient pas des points voisins.

Vous pouvez produire ceci par procédure récursive. Nous voyons bien comment ce chemin fractal est construit: un carré initial est subdivisé en quatre carrés (A en nord-ouest, B en nord-est, C en sud-ouest, D en sud-est), chaque carré est décrit du nord-ouest vers le sud-est, et les quatre fragments sont recollés, dans l'ordre A,B,C,D. Le procédé est itéré sur chaque carré. Nous savons aisément calculer le rang d'un point (i,j), et inversement. Programmer, de manière récursive, sans passer de paramètres dans la procédure, cette "amplification du motif en Z".

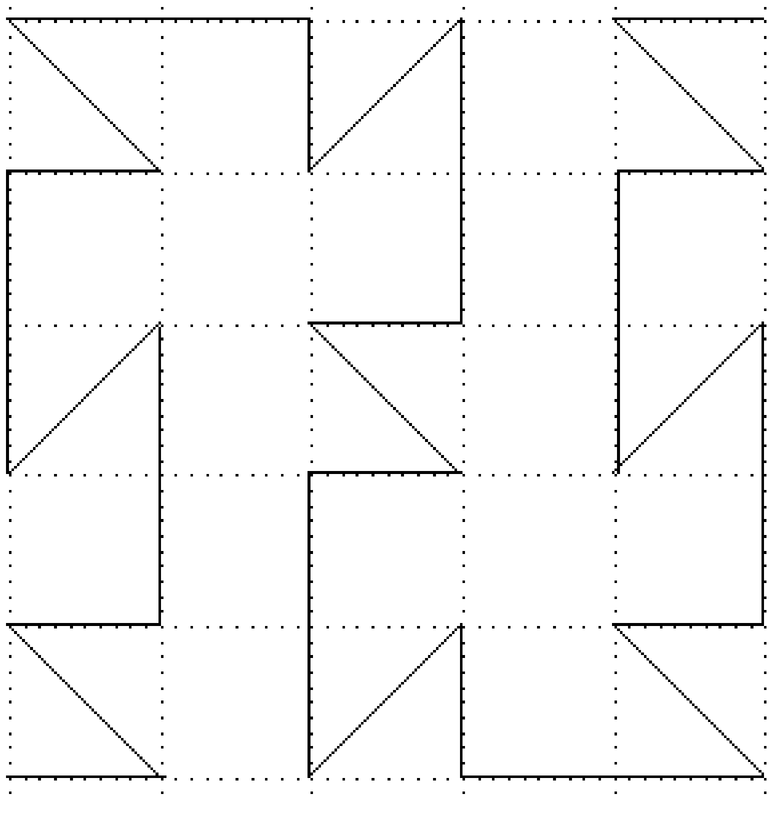
$$(0,0;2^{n+1}-1,2^{n+1}-1)=(0,0;2^n-1,2^n-1)\bullet(2^n,0;2^n-1,2^n-1)\bullet(0,2^n;2^n-1,2^n-1)\bullet(2^n,2^n;2^n-1,2^n-1)$$

(faire la même chose en numération base trois)\

Exercice 20:

Construire l'énumération des points du plan définie par le motif fractal suivant; constater que le carré est parcouru suivant une diagonale du coin bas à gauche vers le coin droit en haut.
Un point a six voisins (sauf au bord). Le balayage est continu.
Il est est fractionné en 3*3=9 carrés, bien recollés par points voisins,dans l'ordre spécifié ci dessous:

3	4	9
2	5	8
1	6	7



Construire

Construire

987
236
145

La courbe de Hilbert, c'était

23
14

\

<u>Exercice</u> 21:

Reprenons les entiers qui s'écrivent en numération base 3 sans utiliser le caractère 2
(si n en fait partie, 3n et 3n+1 en font partie):

S= 0 1 3 4 9 10 12 13 27 28 30 31 36 37 39 40 81 82 84 85 90 91 93 94...

Comparer cette suite S à ce que l'on obtient par l'ensemble L des rationnels triadiques cantoriens qui servent de borne. Un rationnel de l'intervalle [0,1]est un couple (p,q) d'entiers premiers entre eux avec p<q; p est le numérateur, q le dénominateur. L'ensemble considéré est obtenu en ôtant l'intervalle ouvert constitué du milieu de ce segment, et en itérant sur les intervalles fermés restant.

Le langage L des bornes rationnelles est engendré par la récurrence:
si (p,q) appartient à L, alors (p,3q) et (q-p,q) appartiennent à L
initialisée par
(1,3) appartient à L.

Calculer la suite des valeurs obtenues pour les numérateurs, définissant le langage L'

1 2 7 8 19 20 25 26 55 56 61 62 73 74 79 80 163 164 169 170 181 182...
(ou 1 7 19 25 55 61 73 79 163 169 181.. en prenant un sur deux pour économiser)

(afficher les couples (p,q) sur écran, et observer l'écriture base 3 de ces entiers:
le premier caractère est distinct de 0, les autres sont distincts de 1).

La récurrence générative est clairement celle-ci:
si l'entier p appartient à L', avec $3^{n-1}<p<3^{n}$, alors 3^{n+k} -p appartient à L' pour tout k>0;
ainsi, tout entier p est le point de départ d'une chaîne infinie:
avec sur la première ligne les puissances de 3,

1 3 9 27 81 243...
1 2 8 26 80 242...
2 7 25 79 241...
7 20 74 236...
8 19 73 235...
19 62 224...
20 61 223...
25 56 218...
26 55 217...
55 188...
....

On comparera la suite L' à la suite 1+6*S. \

Exercice 22 (Baroque! Et dans les autres bases ?):

En base b, à tout entier correspond a)la somme de ses chiffres b)sa décomposition en facteurs premiers c)la somme des chiffres des facteurs de sa décomposition en facteurs premiers.

La suite des entiers non premiers supérieurs à 1, écrits en numération base dix, tels que la somme de leurs chiffres soit identique à la somme des chiffres de leur décomposition en facteurs premiers:
4 22 27 58 85 94 121 166 202 265 274 319 346 355 378 382 391 438 454 483 517 526 576 588 627 634 636 645 648 654 663 666 690 706....
la somme de leurs chiffres: 4 4 9 13 13 13 4 13 4 13 13 13 13 13 18 13 13 15 13 15 13 13 18 21 15 13 15 15 18 15 15 18 15 13...
et en itérant, la somme des chiffres des entiers de cette dernière suite:
4 4 9 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 9 4 4 6 4 4 9 3 6 4 6 6 9 6 6 9 6 4...

(pour n écrit en base b, envoyer n sur la somme de ses chiffres, et itérer, donne l'entier n modulo b-1) \

Exercice 23 (il va falloir chercher, parce que là, je ne donne pas beaucoup d'indications):

A. Soit la récurrence g(i,j)=somme des g(a,b) précédents pour a≤i, b≤j, sous g(0,1)=1:

1	1	2	4	8	16	32...
1	3	8	20	48	64	160...
2	8	26	76	204...		
4	20	76	252...			
8	48	204...				
16…						

Nous avons tabulé là les coefficients de la série (1-x)(1-y)/(1-2x-2y+2xy), de terme général $g(i,j)x^iy^j$.

Les sommes en diagonale ((d(n)= somme sur i+j=n des d (i,j))=(1 2 7 24 82 280 956 3264 11144 ..), à partir de 24, satisfont à d(n+1)=4d(n)-2d(n-1).
Il paraît que cette suite des sommes diagonales dénombre des croisements de cordes joignant 2n points disposés sur un cercle. Elle est aussi, paraît-il, relative à un problème du jeu de poker.

La diagonale principale (1 3 26 252 2568 26928 287648 3112896....) compte paraît-il les traces de chemins sur le quart de plan NxN, entre (0,0) et (n,n), en demeurant toujours au plus près du segment rectiligne. La série génératrice est $(1+1/(1-12x+4x^2)^{1/2})/2$.

B. Soit la récurrence f(i,j)=somme des f(a,b) précédents pour a≤i, b≤j, sous f(0,j)=1:

1	1	1	1	1	1	1	1...
1	3	7	15	31	63	127	255...
2	8	24	64	160	384	896...	
4	20	72	224	640	1696 ...		
8	48	200	704	2240	6624...		
16	112	528	2064	7200	23168....		
32…							

Etablir que (s(n)= somme sur i+j=n des f (i,j)) satisfait à la récurrence

s(n+1)=4s(n)-2s(n-1) sous s(0)=1, s(1)=2, (s = 1 2 6 20 68 232 792 2704...)

(1 2 6=3*2 20=5*4 68=17*4 232=29*8 792=99*8 2704=169*16...)

Ecrire ces entiers en numération base 2.
Voir la diagonale: 1 3 $24=3*2^3$ $224=7*2^5$ $2240=5*7*2^6$ $23168=181*2^7$.....ensuite? \

Exercice 24 (nombres parfaits -égaux à 1+ la somme de leurs diviseurs propres-):

L'entier i>0 est diviseur propre de l'entier n>0 ssi n est multiple de i, avec i distinct de n et de 1.
Soit sur les entiers n>0 la fonction **s(n)=1+ (somme des diviseurs propres de n)**.
On convient de s(1)=0, et s(n)=1 caractérise les nombres premiers.
Une question ouverte est de savoir si la suite n:=s(n) est ultimement périodique, quelle que soit l'initialisation.

Les nombres n tels que n=s(n) sont dits parfaits (6 28 496 8128 33550336...)!!!
L'écriture en base 2 des parfaits pairs est liée aux nombres de Mersenne: $(2^p-1)*2^{p-1}$ avec p premier (dû à Euler), suite supposée infinie. Il est facile d'établir que tout nombre parfait de la forme $2^i p$ avec p premier est de ce style, un peu moins que tout nombre parfait l'est.
Aucun entier impair parfait ? On ne sait!

[Certains ont défini, étudié, exploré les nombres "k-hyperparfaits", définis par n=1+k*(somme des diviseurs propres de n). Il est remarquable que de tels nombres ont très peu de facteurs premiers.
Il semble qu'il n'y ait pas d'entier k-hyperparfait pour tout k]

Déclarés déficients sont les entiers n tels que s(n)<n, et abondants ceux tels que s(n)>n, amicaux les couples (i,j) tels que s(i)=j, s(j)=i (on conviendra de i<j: (220,284), (1184,1210),(2620,2924)...).

Le début de la suite des abondants: 12 18 20 24 30 36 40 42 48 54 56 60 66 70 72 78 80 84 88 90 96 100 102 104 108 112 114 120 126 132.....

Si un entier figure parmi les nombres abondants, il en va de même de ses multiples.

Si p premier ne divise pas n, s(np)=n+(1+p).s(n), et si p divise n, alors s(np)≥1+p.s(n),
p+1/s(n)≤s(np)/s(n)≤1+p+n/s(n), et p<s(np)/s(n)<p+2.

On considère particulièrement les entiers non déficients primitifs, incluant les entiers parfaits, entiers dont les multiples sont abondants: **6** 20 **28** 70 88 104 272 304 368 464 **496** 550 572 650 748....

Les produits de premiers successifs, 30 210 2310 30030 510510 9699690... sont très abondants.
Les puissances de 2 sont toujours déficientes, de manière très limite: $2^n-1=1+2....+2^{n-1}$.

On considère parfois le nombre des entiers i>0 tels que n soit multiple de i; pour n>0:
1 2 2 3 2 4 2 4 3 4 2 6 2 4 4 5 2 6 4 6 4 4 2 8 3 4 4 6 2 8 2 6 4 4 9 2 4 4 8 2 8 2 6 6 4 2 10...
et la somme de des entiers dont n est multiple
1 3 4 7 6 12 8 15 13 18 12 28 14 24 24 31 18 39 20 42 32 36.......
soit pour la somme des diviseurs propres de n>0
0 0 0 2 0 5 0 6 3 7 0 15 0 9 8 14 0 20 0 21 10 13 0....
et la suite des entiers qui battent des records pour cette dernière fonction:
1 4 6 8 10 12 18 20...
ces derniers battent également des records pour le produit de leurs diviseurs propres.

Remarque:
Les entiers constituant un monoïde multiplicatif commutatif engendré par les entiers premiers, les nombres premiers paraissent donc comme l'alphabet infini sur lequel s'écrivent des mots commutatifs finis exprimant les entiers; le neutre 1 est un élément à part, dont il faut se passer tant que possible;
il est donc naturel de considérer les diviseurs propres de n en excluant 1 et n, et le degré d'un entier comme le degré du mot qui le représente, càd le nombre de ses facteurs premiers en tenant compte des multiplicités. 1 est de degré 0, les premiers sont de degré 1.
Décomposer un entier sur la suite des entiers premiers peut présenter quelque avantage notationnel; ainsi, la suite des factorielles s'exprimera par la suite des degrés partiels en les premiers successifs:
e, 1, 11, 31, 311, 421, 4211, 7211, 7411, 8421, 84211, 10 5 2 1 1, 10 5 2 1 1 1, 11 5 2 2 1 1...
d'où le degré total des factorielles (nombre de facteurs premiers, en tenant compte des multiplicités):
0 1 2 4 5 7 8 11 13 15 16 19 20 22 24 28 29 32 33 36 38 40 41 45 ...
qui n'est que la sommation de la suite f(n) des degrés des entiers successifs
0 **1** 1 **2** 1 (2) 1 **3** 2 2 1 (3) 1 2 2 **4** 1 3 1 3 2 2 1 (4) 2 2 3 3 1 3 1 **5** 2 2 2 4 1 2 2 4 1 3 1 3 3 2 1 (5)...

(les entiers qui ont le plus de facteurs premiers sont les puissances de 2)

Le nombre des entiers premiers inférieurs à 2^n, et le début du calcul des différences successives:

1 2 4 6 11 18 31 54 97 172 309 564 1028 1900 3512 6542 12251 23000...
1 2 2 5 7 13 23 43 75 137 255 464 872 1612 3030 50709...
1 0 3 2 6 10 20 32 62 118...
-1 3 -1 4 4 10 12 30 56...
4 -4 5 0 6 2 18 26...
-8 9 -5 6 -4 16 8...
17 -14 9 -10 20 -8...
-31 23 -19 30 -28...
54 -42 49 -58...
-96 91 -107...
187 -198...
-385..;

dont on observera les coefficients d'interpolation de la première colonne.

Le tableau suivant note en ligne i le nombre d'entiers inférieurs à 2^n ayant n-i facteurs premiers:
1 1   1   1   1 1 1...
1 2   2   2   2 2...
1 4   6   7   7...   (entiers inférieurs à 2^n ayant n-2 facteurs premiers)... ensuite?
1 6 10 13...   (n-3 facteurs premiers)
1 11 22...
1 18…
1…

Si l'on note parf(n) le n-ième nombre parfait, parf(1)=6, parf(2)=28, parf(parf(2)), colossal, est le dernier connu de la forme parf(parf(n)).

\

<u>Exercice</u> 25 (à propos des "fractionnements égyptiens de l'unité"):

A.- Au sens strict et traditionnel, un fractionnement égyptien de l'unité est
une suite $(s_1,s_2,\ldots s_n)$ de n>1 entiers positifs distincts tels que la somme de leurs inverses soit 1,

$$1=1/s_1+1/s_2\ldots\ldots+1/s_n.$$

Il semble que le nombre des solutions ne soit pas connu au delà de n=7.
On s'intéressera à l'investigation programmée de solutions particulières.
Par exemple, y a-t-il des solutions telles que tout entier s_i soit premier ?

La plus petite décomposition, obtenue pour n=3, est (2 3 6): 1=1/2+1/3+1/6, soit 6=3+2+1:
1,2,3 sont des entiers distincts dont 6 est multiple, tel que 6 soit leur plus petit commun multiple.
Pour n=4, six solutions, (2 4 6 12), (2 3 10 15), (2 3 9 18), (2 4 5 20), (2 3 8 24), (2 3 7 42).
Il y a 72 solutions pour n=5. Avec (2 3 6), nous avons 6=2*3; et avec (2 3 7 42), 42=2*3*7...
On remarquera le cas (2 3 10 5), où ppcm(2 3 10 15)=30=2+3+10+15, 1=1/2+1/3+1/10+1/15.

B.- Soit la suite de Sylvester, 2 3 7 43 1087...., f(n+1)=f(n)(f(n)-1)+1, f(1)=2.
f(n)=1+produit des f(i) pour 0<i<n.
f(n+1) est le plus petit entier supérieur à f(n) tel que 1/2 +1/3.....+1/f(n+1) soit inférieur à 1,
et nous avons 1/f(1)+1/f(2)+...1/f(n-1) = (f(n)-2)/(f(n)-1).
Ce qui fournit une suite de fractionnements égyptiens de l'unité,

1/2 + 1/3 + 1/6, 1/2 + 1/3 + 1/7 + 1/42, 1/2 + 1/3 + 1/7 + 1/43 + 1/1806,.....

La somme infinie des inverses des entiers de Syvester, s=somme pour n>0 des 1/f(n), c'est 1.

C.- Le problème de Znam consiste à trouver une suite de n>1 entiers, k(1),k(2)....,k(n), de produit p,

C.- Le problème de Znam consiste à trouver une suite de n>1 entiers, k(1),k(2)....,k(n), de produit p, telle que, pour tout i de 1 à n, 1+p/k(i) soit multiple de k(i); il n'y a pas de solution pour 1<n<5.
La plus petite des deux solutions (au sens du produit p) obtenues pour n=5, c'est 2 3 11 23 31.
Toute solution fournit un fractionnement égyptien de l'unité.
Les solutions au problème de Znam ont quelque tendance à commencer comme la suite de Sylvester.

D.- On a calculé les tout premiers termes de la suite des nombres premiers, de croissance la plus lente possible, dont la somme des inverses est 1, (2 3 7 43 1811...).
Le dixième terme est colossal, le onzième hors de portée, le mot double de longueur.

Il a aussi été testé le développement de tout rationnel r, 0<r<1, comme somme d'inverses de nombres entiers impairs distincts, par l'algorithme de construction systématique d'une suite d'entiers impairs lexicographiquement minimale. La suite de Sylvester paraît au coeur du problème.
Le plus petit exemple est 2/3 = 1/3 + 1/5 + 1/9 + 1/45.

\

Exercice 25 (palindromes en base b):

Un mot m est un **palindrome** lorsqu'il est identique à son miroir Mir(m), càd qu'il est constitué de la même séquence de lettre, que l'on lise de gauche à droite ou de droite à gauche.
111111 a pour carré 12345654321 en base 10.
En base b, à tout mot m correspondent les palindromes m.Mir(m) et m.i.Mir(m) pour 0≤i<b.
Si le mot m est un palindrome en base b, en ajoutant 1 à chaque caractère, on obtient un palindrome en base b+1: si le mot m est un palindrome en base b, il l'est en base b+1.
Il faut préciser le statut du zéro (par exemple, 010 est son propre miroir). Acceptons zéro, sans restriction, et considérons les palindromes en base b qui comportent au moins une occurrence de zéro.
On doit donc considérer les palindromes minimaux; ils sont soit de la forme m.0.Mir(m) pour m non palindrome en base b, b-1 occurrant dans m, soit de la forme m.i.Mir(m), où 0<i<b, m non palindrome en base b, 0 et b-1 occurrant dans m.
Les représentations de n en base b>n-2 donnent des solutions palindromiques triviales.
On associe à tout entier le nombre de ses représentations palindromiques non triviales.
Cette suite n'est pas bornée.

\

Exercice 26:

On dira que l'application f est ultimement constante lorsque pour tout point x initial, la suite x:=f(x) est ultimement constante. Parmi les clowneries auxquelles on peut se livrer en numération base b considérer l'application ultimement constante f_b de N dans N ainsi définie :

pour chaque entier n, f_b(n)= produit des chiffres de l'écriture de n en base b.

Beaucoup de ces suites terminent rapidement sur zéro (particulièrement si b est petit... en base 2, ça ne va pas loin: f_b(n) est soit 0 soit 1).

Evidemment, on cherche particulièrement des entiers dont la chaîne serait particulièrement longue, dans quelque base. En base 10, il se dit que 277777788888899 réalise une performance. Je ne sais qui l'a signalé pour la première fois !

\

Exercice 27:

Résoudre en entiers l'équation $p^q=q^p$. Construire un tableau des p^q-q^p "voisins de zéro".

\

Exercice 28 (notations de Jon Awbrey; nous avons vu ça au rayon des arbres commutatifs)

Notations utilisées en absence de mode indice-exposant, et permettant, de toute manière, l'empilement.
Examiner le langage qui suit, où p_i note le i-ème nombre premier (2=p_1 s'abrège en p), et n^i = n^i:

Examiner le langage qui suit, où p_i note le i-ème nombre premier (2=p_1 s'abrège en p), et n^i = n^i:

Exemple de conversion (récurrente) de l'entier 1978 = 2^1 * 23^1 * 43^1 = p_1^1 * p_9^1 * p_14^1

= p_1^1 * p_(p_2^2)^1 * p_(p_1^1 * p_4^1)^1, où 4 = (p_1^2) et 2=(p_1^1)=p,
ce qui donne

p * p_(p_p^p) * p_(p * p_(p^p)),   mot sur les caractères alphabétiques p , * , (,) , _ , et ^.

Evidemment, p_p^p=le carré du nombre premier de rang 2, et p_(p^p)=le nombre premier de rang 4.

Soit f(n) la représentation de l'entier n>0, f(1)=f(^1)=e, mot vide;

f(n) est de la forme p_m(1)^f(n(1)*p_m(2)^f(n(2))....*p_m(k)^f(n(k), m(1),m(2)...,m(k) distincts, et ordonnés par quelque ordre lexicographique sur ces mots......rangés d'abord suivant le degré en p.

\

Exercice 29:

La célèbre fonction f, dite "de Collatz", est une application définie sur les entiers impairs,
-dont le seul point fixe est 1-, définie par

f(2n+1)= (3n+2) divisé par 2 tant que divisible par 2.

(ou, sur les entiers, g(n)=(f(2n+1)-1)/2)

(éventuellement, on définit f sur les entiers pairs par f(2n)=f(n)).

Si l'on note $f^*(k)$ la suite des $f^i(k)$, on a, par exemple $f^*(75)$=(75, 113, 85,1,1...) .

Une vieille conjecture est que la suite $f^*(k)$ est, quel que soit k, ultimement constante égale à 1.

La distance de l'entier k à 1 est définie comme le plus petit entier i tel que $f^i(k)=1$.
Ainsi, 5, 21, 85... sont à distance 1; 3,13,53... sont à distance 2; 17, 35, 69, 75... sont à distance 3; 11, 23, 45, 93... sont à distance 4; 7, 15, 29, 61... sont à distance 5; 9, 19, 37, 77... à distance 6.

Il a été établi (Jeffrey Shallit et David W. Wilson) que pour tout i, l'ensemble des entiers à distance i est un langage rationnel (càd reconnu par un automate fini)) lorsque l'on représente les entiers en numération base 2.

\

Exercice 30:

Si un entier s'écrit xm1 en numération base 2 (à l'exception de l'entier 1, qui s'écrit 1)
(x est ici le caractère de plus faible poids:
les entiers sont représentés par les mots sur (0,1) suivis d'une occurrence terminale du caractère 1),
considérer l'entier qui s'écrit rg(xm1)=m1x,
et aussi l'entier qui s'écrit rd(xm1)=1xm,
et les points fixes de rd et rg.

Comparer à la fonction "de Collatz", h(2n)=n, h(2n+1)=3n+2.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23...
rg	1	1	3	2	6	3	7	4	12	5	13	6	14	7	15	8	24	9	25	10	26	11	27...
rd	1	1	3	1	3	5	7	1	3	5	7	9	11	13	15	1	3	5	7	9	11	13	15...
h	2	1	5	2	8	3	11	4	14	5	17	6	20	7	23	8	26	9	29	10	32	11	35...

\

\

Exercice 31:

La décomposition des entiers sur la suite s des puissances de 2, s(1)=1, s(n)=2*s(n-1) est telle que tout entier positif se représente d'une unique manière par un mot sur l'alphabet (0,1) dont la dernière est une occurrence de 1.

Sur la suite t, t(1)=s(1)=1, t(n)=t(n-1)+s(n), t=1 3 7 15 31..., obtenue par sommation de s, chaque entier se représente par un mot sur l'alphabet (0,1,2) possédant au plus une unique occurrence de 2,
1 2 01 11 21 02 001 101 201 011 111 211 021 121 0001 1001 2001 0101 1101 2101 0201 1201...

Qu'en est-il de la sommation de t, 1 4 11 26 57..., conduisant au langage
1 2 3 01 11 21 31 02 12 22 001 101 201 301 011 111 211 311 021 121 221 002 102 202 302 0001..
en privilégiant les caractères de plus fort poids.

\

Exercice 32 (très facile):

Examiner la structure du mot infini 0121202011202010122010121 20... sur l'alphabet (0,1,2)
engendré en **a** par le programme parallèle synchrone (**a:=abc, b:=bca, c:=cab**)
sous l'initialisation (**a:=0, b:=1, c:=2**).
Déduire la k-ième lettre de l'écriture base 3 de l'entier k.

\

Exercice 33 (nombre de facteurs 2 dans les entiers, les factorielles, les binômiaux):

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11...	la suite a, des entiers
0 1 0 2 0 1 0 3 0 1 0 2 0 1 0 4...	la suite b, de hanoï, nombre de facteurs 2 pour chaque entier
0 1 1 3 3 4 4 7 7 8 8...	la suite c, sommation de la suite de hanoï, c'est le nombre de facteurs 2 dans n!
1 1 2 1 2 2 3 1 2 2 3...	a-c, nombre de facteurs 2 dans les binômiaux centraux (une fois de plus que pour les nombres de catalan)
1 2 6 20 70 252 924 3432 12870...	les binomiaux centraux f(n+1)=f(n)*2*(2n+1)/(n+1), f(0)=1
1 1 2 5 14 42 132 429 1430 4862...	nombres de catalan

la somme d=a+c satisfait à d(n)=d([n/2])+n.

Peut-on construire la table du nombre des facteurs 2 dans les coefficients binômiaux ?
Oui, et cette construction résulte de la suite fondamentale **a** ci-dessus de Hanoï qui dénombre les facteurs 2 des entiers, et de la suite **b** ci-dessus relative aux factorielles de l'entier n.

Notons f(i,j) le nombre de facteurs 2 du coefficient binômial en position (i,j) dans le tableau des coefficients binômiaux (càd le nombre de bipartitions parties de i et j éléments d'un ensemble de i+j éléments, soit le nombre de mots de degré i en x et j en y). On a f(0,j)=0, et
f(1,j)= le nombre de facteurs 2 de l'entier j≥0, suite de Hanoï=0 1 0 2 0 1 0 3 0 1 0 2 0 1 0 4...,
et

f(i,j)=(somme des (f(1,j+k) - f(1,k)) pour k de 0 à j-1.

comme il résulte de l'expression du coefficient binômial en ligne i et colonne j.

(image colorée ci-dessous)

Raffinement de la fractale de sierpinski:
le bloc central de côté 2^n est recopié en diagonale en ajoutant 1 à tout entier,
il est recopié en dessous et à droite en ajoutant 1 aux éléments sous diagonaux.

Autrement dit, on a f(i,j)=f(j,i), f(0,0)=0,

Autrement dit, on a $f(i,j)=f(j,i)$, $f(0,0)=0$,
$2^n \le i \le j \le 2^{(n+1)}-1$, $f(i,j)=1+f(i-2^n,j-2^n)$
$i<2^n \le j \le 2^{(n+1)}-1$, $i+j \ge 2^{(n+1)}$, $f(i,j)=1+f(i,j-2^n)$
$i<2^n \le j \le 2^{(n+1)}-1$, $i+j<2^{(n+1)}$, $f(i,j)=f(i,j-2^n)$

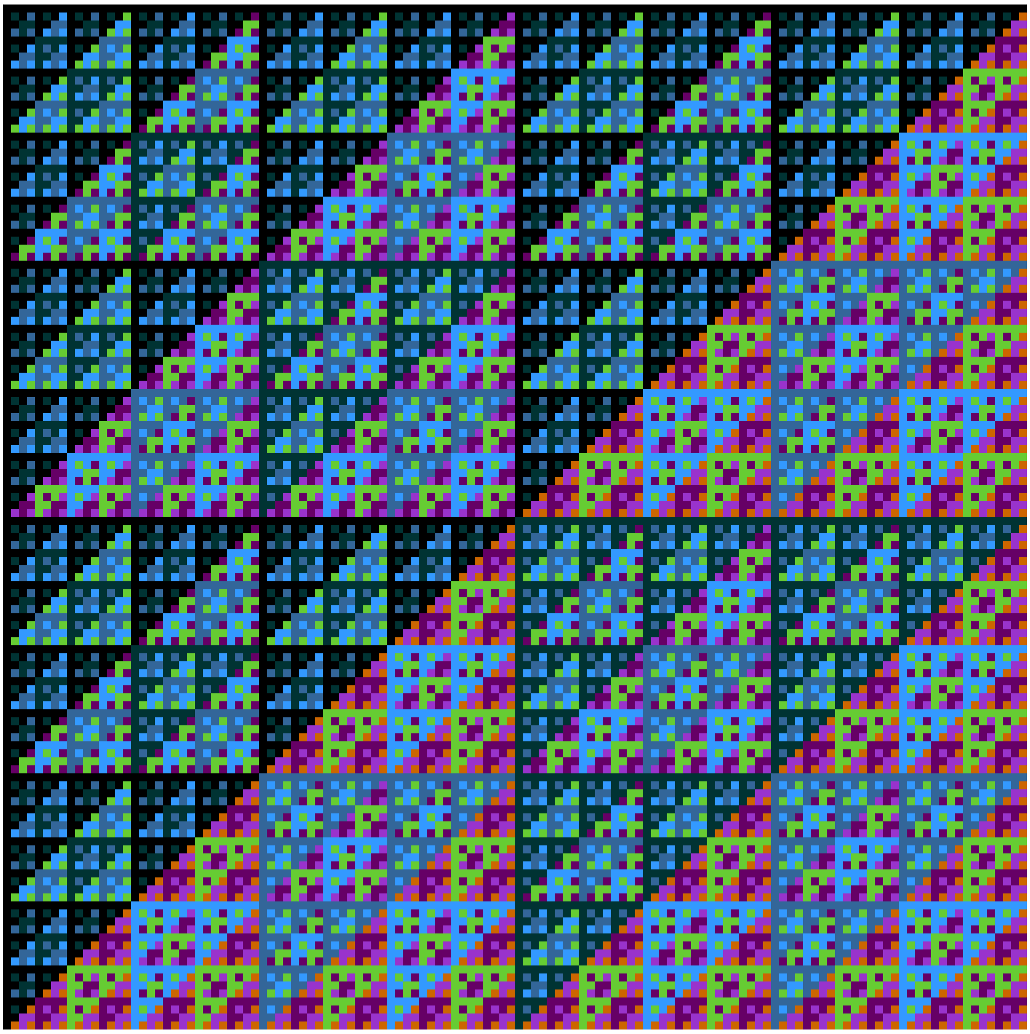
Sur la diagonale, $f(i,i)$=norme(i) en base 2=nombre de 1 dans l'écriture binaire de 2,
$f(2i,2i)=f(i,i)$, $f(2i+1,2i+1)=1+f(i,i)$.
De manière générale, $f(2i,2j)=f(i,j)=f(2i+1,j)=f(2i,2j+1)$.

Le nombre de 1 dans l'écriture des entiers en base 2, c'est l'exposant de la plus grande puissance de 2 qui divise les binômiaux centraux, et, à une unité près, c'est aussi l'exposant de la plus grande puissance de 2 qui divise les nombres de catalan.

Ce qui est différent des fonctions que l'on calculera et affichera
- "nombre de 1 communs -càd de même poids- dans l'écriture de i et j en numération base 2,
- "nombre de caractères communs, 0 ou 1, de même poids, dans l'écriture de i et j en base 2.

\

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0.....
0 1 0 2 0 1 0 3 0 1 0 2 0 1 0 4 0 1 0 2 0 1 0 3 0 1 0 2 0 1 0 5
0 0 1 1 0 0 2 2 0 0 1 1 0 0 3 3 0 0 1 1 0 0 2 2 0 0 1 1 0 0 4 4
0 2 1 2 0 3 2 3 0 2 1 2 0 4 3 4 0 2 1 2 0 3 2 3 0 2 1 2 0 5 4 5
0 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0 2 2 2 2 0 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0 3 3 3 3
0 1 0 3 1 2 1 3 0 1 0 4 2 3 2 4 0 1 0 3 1 2 1 3 0 1 0 5 3 4 3 5
0 0 2 2 1 1 2 2 0 0 3 3 2 2 3 3 0 0 2 2 1 1 2 2 0 0 4 4 3 3 4 4
0 3 2 3 1 3 2 3 0 4 3 4 2 4 3 4 0 3 2 3 1 3 2 3 0 5 4 5 3 5 4 5
0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 2 2 2 2 2 2 2 2
0 1 0 2 0 1 0 4 1 2 1 3 1 2 1 4 0 1 0 2 0 1 0 5 2 3 2 4 2 3 2 5
0 0 1 1 0 0 3 3 1 1 2 2 1 1 3 3 0 0 1 1 0 0 4 4 2 2 3 3 2 2 4 4
0 2 1 2 0 4 3 4 1 3 2 3 1 4 3 4 0 2 1 2 0 5 4 5 2 4 3 4 2 5 4 5
0 0 0 0 2 2 2 2 1 1 1 1 2 2 2 2 0 0 0 0 3 3 3 3 2 2 2 2 3 3 3 3
0 1 0 4 2 3 2 4 1 2 1 4 2 3 2 4 0 1 0 5 3 4 3 5 2 3 2 5 3 4 3 5
0 0 3 3 2 2 3 3 1 1 3 3 2 2 3 3 0 0 4 4 3 3 4 4 2 2 4 4 3 3 4 4
0 4 3 4 2 4 3 4 1 4 3 4 2 4 3 4 0 5 4 5 3 5 4 5 2 5 4 5 3 5 4 5
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
0 1 0 2 0 1 0 3 0 1 0 2 0 1 0 5 1 2 1 3 1 2 1 4 1 2 1 3 1 2 1 5
0 0 1 1 0 0 2 2 0 0 1 1 0 0 4 4 1 1 2 2 1 1 3 3 1 1 2 2 1 1 4 4
0 2 1 2 0 3 2 3 0 2 1 2 0 5 4 5 1 3 2 3 1 4 3 4 1 3 2 3 1 5 4 5
0 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0 3 3 3 3 1 1 1 1 2 2 2 2 1 1 1 1 3 3 3 3
0 1 0 3 1 2 1 3 0 1 0 5 3 4 3 5 1 2 1 4 2 3 2 4 1 2 1 5 3 4 3 5
0 0 2 2 1 1 2 2 0 0 4 4 3 3 4 4 1 1 3 3 2 2 3 3 1 1 4 4 3 3 4 4
0 3 2 3 1 3 2 3 0 5 4 5 3 5 4 5 1 4 3 4 2 4 3 4 1 5 4 5 3 5 4 5
0 0 0 0 0 0 0 0 2 2 2 2 2 2 2 2 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 2 2 2 2 2
0 1 0 2 0 1 0 5 2 3 2 4 2 3 2 5 1 2 1 3 1 2 1 5 2 3 2 4 2 3 2 5
0 0 1 1 0 0 4 4 2 2 3 3 2 2 4 4 1 1 2 2 1 1 4 4 2 2 3 3 2 2 4 4
0 2 1 2 0 5 4 5 2 4 3 4 2 5 4 5 1 3 2 3 1 5 4 5 2 4 3 4 2 5 4 5
0 0 0 0 3 3 3 3 2 2 2 2 3 3 3 3 1 1 1 1 3 3 3 3 2 2 2 2 3 3 3 3
0 1 0 5 3 4 3 5 2 3 2 5 3 4 3 5 1 2 1 5 3 4 3 5 2 3 2 5 3 4 3 5
0 0 4 4 3 3 4 4 2 2 4 4 3 3 4 4 1 1 4 4 3 3 4 4 2 2 4 4 3 3 4 4
0 5 4 5 3 5 4 5 2 5 4 5 3 5 4 5 1 5 4 5 3 5 4 5 2 5 4 5 3 5 4 5
.....



Exercice 34 (variations sur une certaine bijection des entiers sur les rationnels):

Nous avons construit une bijection des rationnels sur les mots de $(g,d)^*$ par f(1/1)=e, mot vide, et sinon, f(p,q)=g.f(p,q-p) si p<q, f(p,q)=d.f(p-q,q) si q<p.
Enumérer (ordonner) les mots de $(g,d)^*$ suivant l'ordre usuel, d'abord à degré donné, et ensuite, à degré constant, suivant l'ordre alphabétique gauche induit par g<d (soit e,g,d,gg,gd,dg,dd...) et substituer à chaque mot le rationnel qu'il représente dans la bijection f:

1/1 1/2 2/1 1/3 3/2 2/3 3/1 1/4 4/3 3/5 5/2 2/5 5/3 3/4 4/1.....

La suite s des numérateurs, partant du terme initial s(0)=1,

s = 1 1 2 1 3 2 3 1 4 3 5 2 5 3 4 1....

suffit à engendrer la suite s(i)/s(i+1) de ces rationnels.

On établira que s(2k+1)=s(k) et s(2k)=s(k)+s(k-1).
La suite s possède sans doute de belles et intéressantes propriétés; s(k), fonction particulière sur les mots de $(g,d)^*$, est notamment le nombre de manières de décomposer l'entier k sur les puissances de 2, en autorisant chaque puissance 2^i à intervenir dans la décomposition avec le coefficient 2 au plus.
Ainsi, par exemple, 6=1+1+2+2=1+1+4=2+4; soit, donc, s(6)=3, et 4=4=2+2=2+1+1: s(4)=3.
Autrement dit, les mots sur l'alphabet (0,1,2) sont munis d'une équivalence: le mot m01m' équivaut au mot m20m', et le mot m02m' équivaut au mot m21m'. On compte le nombre de mots de chaque classe d'équivalence, étant donné que chaque classe possède un unique mot sur (0,1), interprétable comme l'écriture d'un entier en numération base 2.

Cette suite s se construit aussi bien en partant de (0,1) et en insérant, entre deux entiers, leur somme:

0 1, 0 1 1, 0 1 1 2 1, 0 1 1 2 1 3 2 3 1, 0 1 1 2 1 3 2 3 1 4 3 5 2 5 3 4 1,....

ce qui n'est que la somme p+q lors de la génèse des rationnels comme couples d'entiers premiers entre eux (p,q) en partant des couples (0,1) et (1,0) et en insérant (p+p', q+q') entre les couples (p,q) et (p',q'):   (0,1) (1,0); (0,1) (1,1) (1,0); (0,1) (1,2) (1,1) (2,1) (1,0); (0,1) (1,3) (1,2) (2,3) (1,1).....
ce qui est une bijection légèrement différente (à comparer!) des entiers sur les rationnels.

En fait, on peut faire mieux: partant des générateurs x et y, (ou x et x, si l'on préfère, engendrer le langage d'arbres binaires par composition au contact: x (x,y) y;   x (x,(x,y)) (x,y) ((x,y),y) y;
puis   x (x,(x,(x,y))) (x,(x,y)) ((x,(x,y)),(x,y)) (x,y) ((x,y),((x,y),y)) ((x,y),y) (((x,y),y),y) y;.....
le rationnel (p,q) attaché à chaque arbre étant assimilé au couple constitué des degrés en x et y (ou des sommets terminaux gauches et droits). Nous dirons que c'est l'injection canonique des nombres rationnels dans les arbres binaires. La suite engendrée ci-dessus n'est que la suite des degrés en y.
\

Exercice 35:   Le Yi King, une très vieille systématique utilisée par les devins chinois.
(pas bien compliqué à automatiser!)

Tirage aléatoire initial d'un mot de degré 6 sur l'alphabet de quatre lettres, (0,1,0',1') .
Le tirage n'est pas équiprobable (0 et 1 ont le poids 3, 0' et 1' ont le poids 1).
Le tirage se fait en lançant six fois un ensemble de trois pièces, face vaut 0, pile vaut 1,
les trois valeurs sont sommées à chaque lancement,
la somme 0 produit 0', la somme 1 produit 1, la somme 2 produit 0, la somme 3 produit 1'.
Chaque occurrence de chacune des six lettres a la probabilité 1/4 d'apparaître sous la forme 0' ou 1'.

Dans un premier temps, les lettres 0 et 1 sont substituées aux lettres 0' et 1',
ce qui donne un mot m initial de $(0,1)^6$, appelé hexagramme.
Ce mot, $m=m_h m_b$, est factorisé en deux mots de degré 3, m_h et m_b, de $(0,1)^3$.
m_h est la partie haute, m_b la partie basse, m_h et m_b sont les deux trigrammes de l'hexagramme m.

Il y a donc 8 mots de degré 3, ou trigrammes, groupés par couples d'éléments duaux, symboliquement interprétés:

000, la terre, et 111, le ciel
001, le tonnerre, et 110, le vent
011, le lac, et 100, la montagne
101, le feu, et 010, l'eau

Les lettres 0' et 1' introduisent une autre dualité, par substitution de 1 à 0', de 0 à 1':
ainsi, après tirage aléatoire initial, la substitution de 0 et 1 à 0' et 1' fournit un premier hexagramme, composé d'un trigramme haut et d'un trigramme bas, tandis que la substitution de 1 et 0 à 0' et 1' fournit un second hexagramme, également composé de deux trigrammes.

Les commentaires d'interprétation sont fonction des trigrammes haut et bas, d'abord ceux du premier hexagramme, puis, ensuite, ceux du second hexagramme.

On a donc 64 premiers hexagrammes donnant lieu à 64 premiers commentaires,
puis, ensuite, 64 seconds hexagrammes possibles, donnant lieu à 64 commentaires seconds,
mais surtout, il y a 64*64=4096 transitions possibles commentées, d'un hexagramme à l'autre.

Tout ceci est facile à programmer; reste à enregistrer les commentaires ad hoc.

\

<u>Exercice</u> 36 (par exemple; y-a-t-il une puissance de 3 entre deux puissances de 2):

Petit sujet d'intérêt: le mot infini, sur l'alphabet (0,1), défini par:

pour n>0, f(n)=1 ssi entre 2^n et 2^{n+1} il existe une puissance de 3, $2^n < 3^k < 2^{n+1}$, et f(n)=0 sinon.-

1 0 1 1 0 1 1 0 1 0 1 1 0 1 1 0 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 0 1 1 0 1 1 0 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1...

Curieusement, pour chaque entier p tel que $2^n < p < 3^k < 2^{n+1}$, le nombre de catalan c(p-1) qui compte les arbres binaires (les expressions du magma binaire) de degré p-1 est multiple de p, mais ce n'est le cas ni pour $p=2^n$, ni pour $p=3^k$.
On a tabulé $3^k - 2^n$.

\

<u>Exercice</u> 37 (astucieux):

Jack Wert isole une pièce fausse, dont le poids est inexact,
(pièce supposée unique, mais l'on ne sait si elle est plus légère ou plus lourde),
d'un ensemble de n=1092 pièces, par seulement f(1092)=7 pesées,
à l'aide d'une simple balance, munie de deux plateaux.
Pour cela, constituer trois parts de 364 pièces,
et diviser chaque part en six sous-parts de respectivement 1,3,9,27,81,243 pièces.

S'inspirer du cas de référence d'un ensemble de <u>douze</u> pièces
divisées en trois parts de quatre pièces avec des sous-parts de 1 et 3 pièces:
-d'abord en sachant que la pièce inexacte est plus légère,
-puis sans savoir si elle est plus lourde ou plus légère.
Dans les deux cas, distinguer le nombre moyen du nombre maximum de pesées nécessaires.) Ne sachant pas si la pièce est légère ou lourde, comparer deux parts, puis recommencer après permutation circulaire des sous-parts de 3, ce qui fournit assez de renseignements pour finalement identifier l'objet en <u>trois</u> pesées, f(12)=3.

Quel peut bien être le nombre minimal f(n) de pesées pour être certain de pouvoir isoler l'unique pièce fautive d'une collection de n pièces, étant entendu que l'on ne dispose pas de plus de pièces que ces n pièces là ?

Pour $n=4^k$, soit la division en quatre parts égales, n/4 pièces dans chaque part, soit les parts A,B,C,D, et comparer (A à B), puis (B à C). Itérant sur la part fautive, c'est terminé en 2k coups. Noter que seul le nombre moyen de pesées est diminué, et pas le nombre maximum, même lorsque l'on sait que la pièce cherchée est plus légère (ou plus lourde), la stratégie des quatre parts est préférable à une simple recherche dichotomique, mais les solutions exemplaires ci-dessus pour 12 ou 1092 sont spectaculairement plus efficaces.

On montrera facilement que, lorsque l'on sait que la pièce à identifier est (par exemple) plus lègère, il suffit de n pesées pour 3^n pièces; si l'on ignore si la pièce est plus légère ou plus lourde, il faut n pesées pour $(3^n-3)/2$ pièces, et la méthode consiste, par la technique des rotations, dans un premier temps à identifier un sous-part contenant la pièce fausse, et à déterminer dans cette première phase si elle est plus légère ou plus lourde.

Voir la "Théorie générale des questionnaires" (Claude Picard, vers 1970) et ce qu'il en est advenu.

\

Exercice 38:

Dans les entiers, les sous-groupes additifs coïncident avec les idéaux.
Dans les entiers positifs, on considère classiquement le monoïde additif engendré par une partie.
Voici une construction un peu plus compliquée:

Soit L(k) le langage, partie de N engendrée par l'entier k, définie par

-l'initialisation: k appartient à L(k)
-la récurrence: si i appartient à L(k), alors pour tout j≤i, le produit i*j appartient à L(k).

Le cas k=2 est connu sous le nom de "nullwertzahlen".

\

Exercice 39:

Qu'en est-il de la fonction g(n)=f(n+1)-2f(n), où f(n)=ent(rac($2^{(2n+1)}$) ?
1 0 1 1 0 1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 1 1 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1......
C'est le développement base 2 de la racine de 2.

Qu'en est-il de la raçine de k en base k ?

\

Exercice 40:

A. Il a été établi que tout mot (qui ne commence pas par 0) sur l'alphabet de la base dix peut être le début de l'écriture base dix d'une puissance de 2. Ainsi, on a cherché la plus petite puissance de 2 dont l'écriture base dix commence comme l'écriture de l'entier n:

exposant 0 1 5 2 9 6 46 3 53 10 50 7 17 47 77 4 34 54 84......
(serait-ce une permutation des entiers ?)
(pour 1 2 32 4 512 64 70368744177664 8 9007199254740992 1024.....)

(A. M. Yaglom and I. M. Yaglom: Challenging Mathematical Problems with Elementary Solutions. Holden-Day, Inc, 1964, San Francisco.)

Lister les puissances qui commencent par 1 (resp. 2,3....etc).

Le dernier caractère est 1, puis de période quatre: 2 4 8 6.

Les deux derniers caractères sont 1 2, puis de période 20:
4 8 16 32 64 28 56 12 24 48 96 92 84 68 36 72 44 88 76 52.
Les trois derniers caractères sont 1 2 4, puis de période 100.....
20=5*4, 100=5*20, la période suivante est 500, après 1 2 4 8...

Qu'en est-il pour d'autres bases de numération (et d'autres puissances) ?

B. L'écriture d'une puissance de 2 en base dix est-il un mot dont l'un des caractères au moins appartient à l'ensemble (1,2,4,8) ? Voici une exception: $65536=2^{15}$. Y en a-t-il d'autres ?
Des conjectures circulent à ce propos. La conjecture principale (qui porte le nom de Shallit) est que tout mot représentant une puissance de 2 écrite en numération base 10 comporte l'un des mots de l'ensemble (1,2,4,8,65536) comme sous-mot.
Il est connu que pour tout langage L sur un alphabet fini X, il existe un sous-ensemble fini F(L) de L tel que tout mot de L comporte au moins un mot de F(L) comme sous-mot. On supposera l'ensemble F minimal. Le problème de la détermination de F se posera en particulier pour toute partie de l'ensemble **N** des entiers naturels et tout système de numération.
\

Exercice 41 (à popos de la série rationnelle $(x^a)^*(x^b)^*$, pour a et b sans diviseur commun):

Pour a et b entiers positifs premiers entre eux, et n entier non-négatif, soit

f(n)=le nombre de solutions de n=a*i+b*j, pour i et j entiers non-négatifs.

C'est le nombre de manières de produire n francs avec des pièces de a et b francs respectivement.
On a f(n+ab)=f(n)+1.

[Par exemple, pour (a,b)=(2,3), comparer la fonction f et la différence des parties entières [n/2]-[n/3].
Ce sont les coefficients de la série rationnelle $(x^2)^*(x^3)^*$, (série inverse de $(e-x^2)(e-x^3)$),

1 0 1 1 1 1 2 1 2 2 2 2 3 2 3 3 3 3 4 3 4 4 4 4 5 4 5 5 5 5 6 5 6 6 6 6 7 6 7 7 7 7 8......,

ils satisfont évidemment à la récurrence

f(n+6) = f(n)+1 = f(n+4)+f(n+3)-f(n+1) sous f(0)=1=f(2)=f(3)=f(4), f(1)=0.]

Pour a et b premiers entre eux, soit g(a,b)= (le plus grand entier qui ne puisse s'écrire i*a+j*b) = (le plus grand entier inférieur à ab qui ne soit multiple ni de a, ni de b).
Par exemple, g(10,21)=179, g(6,35)=169, g(22,35)=713. Etablir que g(a,b)=ab-a-b.

La suite des valeurs de f(n) pour 0<n<ab,
mot primitif m(a,b) sur (0,1), est la pseudo-période de f:

m(2,3) = 0 1 1 1 1
m(2,5) = 0 1 0 1 1 1 1 1 1
m(2,7) = 0 1 0 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1
m(2,11 = 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
m(3,5) = 0 0 1 0 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1
m(3,7) = 0 0 1 0 0 1 1 0 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1
m(3,11)= 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
m(5,7) = 0 0 0 0 1 0 1 0 0 1 0 1 0 1 1 0 1 0 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

Le nombre de zéros est (a-1)*(b-1)/2. C'est dire qu'entre 0 et ab, si l'on excepte les multiples a*i et b*j de a et de b, il existe autant d'entiers n qui s'écrivent a*i+b*j avec i>0, j>0, que d'entiers qui ne peuvent s'écrire sous cette forme.

Sans doute est-il intéressant d'écrire les entiers selon la technique des restes chinois:
tout entier n compris entre 0 et ab-1 se représente par ses restes modulo a et b
(nous étudions par ailleurs cette bijection de [0,a-1]x[0,b-1] sur [0,ab-1]).

Considérer les valeurs numériques prises et non prises par la fonction
a*i+b*j , pour i=n modulo b, et j=n modulo a, n variant de 0 à pq-1:
les valeurs non prises entre 1 et ab-1 correspondent aux zéros de m(a,b).

Que devient la fonction $h_k(n)$=le nombre de solutions de n=a*i+b*j, si l'on veut produire n francs avec des pièces de p et q francs sans utiliser plus de k pièces de chaque sorte, $i \leq k$, $j \leq k$?
(considérer les polynômes $p_k(a,b)$=somme des $h_k(n)x^n$).

Ensuite, considérer le nombre de décompositions de n=a*i+b*j+c*k pour (a,b,c) premiers entre eux, et (i,j,k) entiers non-négatifs.
Par exemple, pour (a,b,c)=(2,3,5):
1 0 1 1 1 2 2 2 3 3 4 4 5 5 6 7 7 8 9 9 11 11 12 13 14 15 16 17 18 19 21 21 23 24...,
suite croissante.

Que devient cette fonction si l'on veut produire n francs avec des pièces de (a,b,c) francs sans utiliser plus de k pièces de chaque sorte ? Avec (a,b,c)=(2,3,5), et k=4, le mot miroir :
1 0 1 1 1 2 2 2 3 3 3 4 4 4 5 4 5 5 5 5 5 5 5 5 5 4 5 4 4 4 3 3 3 2 2 2 1 1 1 0 1.

\

Exercice 42:

La suite s=11010011001011...donnant la parité du nombre de 1 de l'écriture base 2 des entiers positifs est classiquement appelée suite de Thue-Morse.
Cette fonction est telle que
f(2n)=f(n), f(1)=1, f(2n+1)=i(f(2n)), si i est l'involution qui échange 0 et 1.
L'involution i s'étend en un morphisme opérant sur les mots sur $(0,1)^*$.
La suite s s'obtient par l'itération m:=m1i(m), sous l'initialisation m:=1.
Si l'on considère plutôt la suite 0s,
elle est obtenue à partir de 0 en itérant le morphisme g(0)=01, g(1)=10.
La suite s possède-t-elle des facteurs carrés, en dehors de 00 et 11 ?

Construire la suite qui donne la parité du nombre de zéros de l'écriture base 2 des entiers positifs.

\

Exercice 43:

Soit la fonction $f(i,j)=2^i.3^j$ pour $i \geq 0$, $j \geq 0$, et g(n)=somme des f(i,j) pour i+j=n, $n \geq 0$.
g(n) compte les mots m de degré (n+1)>0 sur l'alphabet (a,b,c) qui comportent au moins une occurrence de la lettre c, un tel mot m de $(a,b,c)^*$ s'écrit m'cm'', m' dans $(a,b)^*$, m'' dans $(a,b,c)^*$.

Etablir $g(n-1)=3^n -2^n$. Etablir $2^n+3g(n)=g(n+1)$.
Enfin, ce qui est moins évident, établir 5g(n)=g(n+1)+6g(n-1), pour n>1, g(0)=1, g(1)=5.

Nous avons, par définition, pour la série génératrice, g=somme de $g(i).x^i = (2x)^*.(3x)^*$.
La série xg est la transformée binômiale de $(2x)^*-x^*$, soit, $((2x)^*-x^*)$ uu x^* = xg, où uu est le produit de mélange des séries formelles (calculé ici suivant le tableau newtonien d'interpolation):

0 1 5 19 65 211... Immédiat formellement, car $(e-x)^{-1}$ uu $(e-x)^{-1}$ est de terme général 2^n,
1 4 14 46 146... et $(e-2x)^{-1}$ uu $(e-x)^{-1}$ est de terme général 3^n.
3 10 32 100... Le produit de mélange uu des séries formelles est bilinéaire.
7 22 68... Le produit de mélange par $x^*=(e-x)^{-1}$ est appelé "transformation binômiale
15 46... (la transformation inverse correspond à l'interpolation newtonienne).
31... Nous avons bien $((2x)^*-x^*)$ uu x^* = xg = $(3x)^*-(2x)^*$, puisque $(kx)^*$ uu $x^* = ((k+1)x)^*$
…

…
La démonstration bijective, en termes de mots sur (a,b,c), est aussi immédiate.

Evidemment, le produit de mélange est naturellement défini en multi-variables non commutatives:
par exemple $(e-x)^{-1}$ uu $(e-y)^{-1} = (e-(x+y))^{-1}$, soit x^* uu $y^* = (x+y)^*$,
et, pour X et Y alphabets disjoints, X^* uu $Y^* =(X+Y)^*$.

Pour tout k, généralisation à
(somme des $(k+1)^i k^j$ pour i+j=n), $(k+1)^n - k^n$, $((kx)^* - ((k-1)x)^*)$ uu x^*.
En ligne n, la suite des $(k+1)^n - k^n$, soumis à la récurrence f(n+1) = (2k+1)f(n) - k(k+1)f(n-1).

0	1	1	1	1	1	1	1...
0	1	3	7	15	31	63	127...
0	1	5	19	65	211	665	2059...
0	1	7	37	175	781	3367	14197...
0	1	9	61	369	2101	11529	61741...
0	1	11	91	671	4651	31031	201811...

……..
Les sommes diagonales (somme de $(k+1)^n - k^n$ à k+n constant) ont des interprétations combinatoires.

(note: la diagonale 1 3 19 175 2101 31031..., $n^n-(n-1)^n$, compte évidemment les applications de [n] dans [n] sans point fixe)

Plus généralement, S=i+j, P=ij, D=i-j, f(0)=0, f(1)=D, f(n+1)=Sf(n)-Pf(n-1), $f(n)=i^n-j^n$ …
(pour i>j, i^n-j^n compte les mots de degré n sur un alphabet de i lettres qui possèdent au moins une occurrence d'un sous ensemble donné de i-j lettres de l'alphabet).

\

Exercice 44 (à contempler):

On s'est particulièrement, et expérimentalement, intéressé au nombre f(n) des nombres premiers compris entre n et 2n, fonction qui semble quasi-croissante, en ce sens que les décroissances semblent très limitées (existerait-t-il un entier k tel que f(n+i)≥f(n)-k pour tout i>0 ?).

Si f(n) est le nombre de premiers entre n et 2n, n>1, Chebychev (1821-1894) a établi que f(n)>0.
C'était le postulat de Bertrand (1822-1900) (pas vraiment étonnant, mais nécessitant cependant une démonstration) qui l'avait vérifié jusqu'à de grandes valeurs de n.
Mais encore ? Nous sommes à la recherche d'une démonstration la plus simple possible.

Pour n>0, soit g(n) le nombre des nombres premiers p compris entre 2^n et 2^{n+1},
g=1 2 2 2 5 7 13....., fonction d'un intérêt certain.

On peut varier les plaisirs: existe-t-il un nombre premier p satisfaisant à F(n)<p<F(n+1) où F est la suite de Fibonacci, et pour tout réel r>1, à partir d'un certain rang, entre r^n et r^{n+1} ?
Alors, que dire de la fonction h(n)=p(n+1)-p(n), où p(n) est le n-ième entier premier, et de la suite des valeurs n des records tels que h(n)>h(i) pour tout i<n ?

\

Exercice 45:

n entier, peut-on avoir n^(n^n)=(n^n)^n ?
n entier, peut-on avoir ((n^n)^n)^n=n^(n^(n^n)) ?
(on rappelle que a^b est un raccourci pour a^b)
\

Exercice 46:

A-.

Norme binaire, norme paire et norme impaire d'un entier.

La norme binaire d'un entier, ici notée nor, c'est le nombre des occurrences de 1 dans sa représentation en numération base 2:

nor(2n)=nor(n), nor(2n+1)=1+nor(n).

La suite des normes binaires des entiers, s'obient par la récurrence

m:=m.f(m) sous l'initialisation m:=0,

où m est le morphisme f(i)=i+1, soit

0.1.12.1223.12232334.1223233423343445......

Si l'on distingue la norme paire (norp) et la norme impaire (nori) comme respectivement le nombre des occurrences de 1 en position paire et impaire, nous avons nor=norp+nori, norp(2n)=nori(n), nori(2n)=norp(n), les suites des valeurs des ces deux fonctions, norp et nori, s'obtiennent respectivement par les itérations

m:=m.m.f(m).f(m) sous l'initialisation m:=0

et

m:=f(m).f(m).m.m sous l'initialisation m:=0,

soit

0.0.11.0011.11221122....

et

0.1.01.1212.01011212...

La parité de la norme binaire des entiers est connue sous le nom de fonction de Thue-Morse, et satisfait donc à la récurrence m:=m.m', sous l'initialisation m:=0, où m' est l'opération involutive qui échange les occurences de 0 et 1 dans le mot m. La parité de la norme paire s'approche par m:=m.m.m'.m', sous l'initialisation m:=0, celle de la norme impaire par m:=m'.m'.m.m, sous l'initialisation m:=0.

La norme binaire de n est aussi l'exposant de 2 dans la décomposition en facteurs premiers du coefficient binômial central (n,n)=(2n)!/(n!)^2, qui compte les mots du mélange x^n uu y^n.
A rapprocher de la suite qui compte l'exposant de 2 dans la décomposition en facteurs premiers des nombres de Catalan (n,n)/(n+1).
Voici le début de ces trois suites,
a) norme binaire, b) puissance de 2 divisant n, c) puissance de 2 divisant les nombres de catalan:
a) 0 1 1 2 1 2 2 3 1 2 2 3 2 3 3 4 1 2 2 3 2 3 3 4 2 3 3 4 3 4 4 5....
b) 0 1 0 2 0 1 0 3 0 1 0 2 0 1 0 4 0 1 0 2 0 1 0 3 0 1 0 2 0 1 0 5.....
c) 0 0 1 0 1 1 2 0 1 1 2 1 2 2 3 0 1 1 2 1 2 2 3 1 2 2 3 2 3 3 4 0.....

B-.

Considérons maintenant la fonction g définie sur les entiers positifs telle que

div(1)=0, puis, pour tout n>1, div(2n)=1+div(n).

Cette fonction compte pour tout entier n positif le nombre de fois qu'il est divisible par 2, ou, si l'on préfère, le plus grand entier k tel que n soit multiple de 2^k.

La fonction div s'approche par la récurrence m:=m.s(m), sous l'initialisation m:=0, où l'opérateur s augmente d'une unité le dernier caractère de m, soit, en partant de div(1) (et de nor(0))

div: 010201030102010401020103010201050102010301020104010201030102010 6.....
nor: 0112122312232334122323342334344 5......

Evidemment, g(n)≤nor(n-1), et g(n)=nor(n-1) ssi n=2^k.

En outre, **g(n) et (nor(n)+nor(n-1)) sont de parité opposée,** ce qui résulte de proche en proche de l'examen du passage de la représentation de n à celle de n+1 en numération base2, (avec les plus faibles poids à gauche, le passage du mot 1^i0m au mot 0^i1m se fait par transformation en suite de caractères 0 de la suite continue d'occurrences de 1 à gauche, et passage à 1 de la première occurrence de 0 rencontrée).

Les suites nor(n) et div(n) sont invariantes par des transformations simples,
témoignant d'une certaine auto-similarité:
nor(n) est invariante par ablation d'un terme sur deux.
div(n) est invariante par ablation d'un terme sur deux, et diminution d'une unité de chaque terme.

C.- Sur un alphabet de deux lettre, tout mot se décompose d'unique manière en une suite de facteurs n'utilisant qu'une seule lettre, de manière alternée. Par exemple, 00111010111 se factorise ainsi:

00.111.0.1.0.111.

C'est ce que l'on appelle couramment <u>la factorisation en blocs</u>.

La fonction bloc(n) qui compte de nombre de blocs de l'écriture binaire des entiers,

0 1 2 1 2 3 2 1 2 3 4 3 2 3 2 1.....

s'obtient par la récurrence m:=mf(Mir(m)), où m est le morphisme f(i)=i+1, et Mir l'opération miroir, à partir de l'initialisation m:=0.

Cette suite est liée de manière évidente
-au chemin hamiltonien standard sur l'hypercube
(aussi appelé code de gray, nous avons ici les normes des mots successifs énumérés sur (0,1)),
-et tout aussi naturellement, à la direction de l'automate mobile qui décrit la courbe standard dite du dragon,
deux problèmes dont la résolution récurrente fait appel à la même opération miroir sur les mots.
La fonction bloc(n) sur la suite des entiers correspond à la fonction nor(gray(n)) sur le n-ième mot du circuit hamiltonien:

code de gray	0	1	11	01	011	111	101	001	...
entiers	0	1	01	11	001	101	011	111	...
bloc(n)	0	1	2	1	2	3	2	1	....

La fonction de distribution statistique du nombre des blocs constituant les mots de degré n qui se terminent par 1, sur l'alphabet de deux lettres (0,1), satisfait évidemment à la loi binômiale: par exemple, pour les mots de degré 3, nous avons la distribution (1,3,3,1):

1111, 0111 0011 0001, 1101 1011 1001, 0101.

Il en va de même pour la statistique des occurrences des caractères de base,
dans les mots m tels que 0 1 2 1 2 3 2 1 2 3 4 3 2 3 2 1, qui comptent les blocs dans l'écriture binaire des entiers, de 0 à 2^n-1.

C.-

De 2^n à 2^{n+1}-1, pour tout n>0, on vérifie
qu'il y a <u>autant d'entiers de norme binaire paire que de norme binaire impaire</u>.
Pour tout n>1, de 2^n à 2^{n+1}-1, il est moins évident et plus surprenant que
la somme des entiers de norme paire est égale à celle des entiers de norme impaire.

Il y a plus:
pour tout k, k<n, de 2^n à 2^{n+1}-1, la somme des puissances k des entiers de norme paire est égale à celle des entiers de norme impaire. Par exemple,

$$9^2+10^2+12^2+15^2=8^2+11^2+13^2+14^2=550$$

(Prouhet 1851; voir Allouche et Shallit 1999)

mais pour les cubes, à ce stade,

729+1000+1728+3375=6832, 512+1331+2197+2744=6784, 6832-6784=48.

\

Exercice 46 (trois suites simples et cependant riches):

(rappelons que les entiers en base 2 seront écrits avec le caractère de plus faible poids à gauche)

A.- La suite 1 3 8 20 48...., $(n+1).2^{n-2}$, compte le nombre de 1 nécessaires
pour écrire les entiers de 2^{n-1} à 2^n-1 en numération base 2, de fonction génératrice $(1-x).(1-2x)^{-2}$.

C'est la somme des (i+1).(i,j) pour i+j≥0,
où (i,j) est le coefficients binômial dénombrant les mots de degré i en x et j en y.

B.- La suite 1 4 12 32 80 192...., $n.2^{n-1}$, compte le nombre de 1 nécessaires
pour écrire les entiers de 0 à 2^n-1 en numération base 2, de fonction génératrice $(1-2x)^{-2}$.
Elle compte aussi le degré de la concaténation des mots codant les entiers de 2^n à $2^{n+1}-1$.
C'est aussi le nombre des arêtes de l'hypercube.

C.- D'où le degré des mots concaténés codant les entiers de 1 à $2^{n+1}-1$:

1 5 17 49 129 321...$(1+(n-1)2^n)$, de fonction génératrice $x^*.(1-2x)^{-2}$.

Exemple, les 49 caractères, concaténation de 1 à 2^4-1, en numération base 2:

1 0 1 1 1 0 0 1 1 0 1 0 1 1 1 1 1 0 0 0 1 1 0 0 1 0 1 0 1 1 1 0 1 0 0 1 1 1 0 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1
Avec les mots du code de gray (: d'un mot au suivant en ne modifiant qu'une lettre), en y incluant 0,
0 1 1 1 0 1 0 1 1 1 1 1 1 0 1 0 0 1 0 0 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 0 1 0 1 1 1 0 1 1 0 0 1 0 0 0 1

(curieusement, examiner ceci: la suite 1 5 7 49 129 321... donne le genre de l'hypercube!)

Remarquer que la différence première de $n.2^{n+i}$ est $(n+1).2^{n+i-1}$.

\

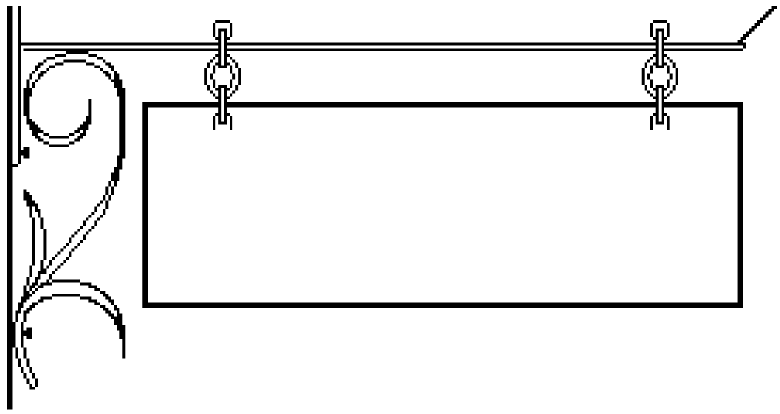
Exercice 47:

Il est remarquable que tant de suites (la suite de catalan tient la vedette) soient capables
d'interprétations combinatoires si diverses, ouvrant la porte à tant de transformations bijectives.

Par exemple, voir les interprétations de la simple suite des sommes de puissances impaires de 2,
le double de la somme des puissances paires, 2(2(2n+2) - 1)/3, de récurrence f(n)=4f(n-1)+2,
de fonction génératrice 2x/((1-x)(1-4x)), de fonction génératrice exponentielle (2/3)(exp(4x)-exp(x)),

2 10 42 170 682 2730 10922 43690 174762 699050 2796202..., sommation de 2 8 32 128... .

\



II. Système dit de Fibonacci, et quelques autres récurrences linéaires.-

Léonardo Fibonacci, dit Léonard de Pise, né en 1175 à Bougie (Algérie), exposa les connaissances mathématiques des arabes, favorisa l'introduction des chiffres dits "arabes", étudia les fractions continues.

"Mon ouvrage est la glorification de cette trinité, Fibonacci, Fermat, Pascal; ils avaient la vue longue; on l'a si courte, aujourd'hui"
Edouard Lucas (1842-1891), lettre à Ernesto Césàro (4 octobre 1890)

Si s est la série de fibonacci (s=somme des **F**(n)x^n, n≥0), on a s=e+x(e+x)s.

Cette récurrence est liée à la plus ancienne tentative d'approximation rationelle d'un nombre algébrique, le nombre d'or, qui satisfait à la plus simple des équations de degré 2, t^{-1}=t-1.

Tout entier peut se décomposer sur les entiers de la suite **F**
(que l'on appelle classiquement suite fondamentale des entiers de Fibonacci, ou plus simplement suite de Fibonacci), définie par la récurrence

(1) **F(n+1) = F(n) + F(n-1),** sous l'initialisation **(2)** **F(1) = 1, F(2) = 2**.

dont les premiers éléments sont 1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,.. (en base 10). F(0)=1.

Note 1: La récurrence (1) représente les degrés des mots de la suite $m_{i+1}=m_i m_{i-1}$, sous m_0=x, m_1=y [ou des arbres $a_{i+1}=(a_i,a_{i-1})$ sous $a_0=a_1$=x]. Elle s'étend aux entiers négatifs.

De manière générale, on sera tenté de qualifier de suite de fibonacci toute suite où un objet est le composé binaire des deux objets qui précèdent. Ainsi, 1,2,2,4,16,256.. est la suite de fibonacci multiplicative des entiers: les exposants sont la suite de fibonacci additive fondamentale, initialisée par (1,1), ou (1,2). Tout couple d'entiers (i,j) pris dans Z détermine dans Z une suite de fibonacci additive: d'où une équivalence sur les couples d'entiers rationnels./

Une décomposition d'une entier positif en somme d'éléments distincts de la suite **F** sera qualifiée de **normalisée** si elle n'utilise pas deux entiers consécutifs de la suite F définie par (1) et (2).
C'est précisément ce que permet cette récurrence. Ainsi, par exemple, 28=21+5+2.

Tout entier n peut alors être représenté par un mot sur un alphabet de deux lettres [on prendra tout naturellement l'alphabet (0,1)]. La k-ième lettre du mot est 0 ou 1, caractérisant le fait que le k-ième élément de la suite (1) intervienne ou non dans la décomposition de l'entier n.

Ainsi, en notant m(n) le mot représentant l'entier n, on a par exemple m(28)=0101001.
Le caractère de plus faible poids est ici à gauche, et le mot 0101001 est caractéristique de la décomposition normalisée de l'entier 28.

Il nous arrivera couramment de confondre abusivement l'entier n et sa représentation par le mot m(n).

(C) Ces mots **normalisés** ne comportent pas deux caractères 1 consécutifs, et leur dernier caractère est une occurrence de 1 (à l'exception de la représentation de l'entier zéro par 0).
Cette représentation résulte de l'équivalence sur les mots induite par 110=001.

On peut qualifier l'ensemble de ces mots normalisés de "langage de Fibonacci": c'est un langage rationnel, dont (si l'on exclut la représentation de zéro), la série caractéristique L est composante de la solution du système d'équations rationnelles

$$L=L_0+L_1, \text{ avec } L_0=0L_0+0L_1=0L,\ L_1=1L_0+1$$

où L_0 (resp L_1) est clairement le sous-langage des mots dont le premier caractère est 0 (resp 1).
Les mots de L sont ainsi naturellement les sommets d'une arborescence: tout mot 0m de L_0 admet deux sucesseurs, 00m et 10m; tout mot 1m de L_1 admet un unique successeur, 01m.
L'équation de L se lit comme l'équation de cette arborescence infinie.
Notons **r** l'opérateur d'ablation du premier caractère, r(0m)=r(1m)=m, en convenant de r(1)=0=r(0), d'où $r(L)=r(L_0+L_1)=r(L_0)+r(L_1)=r(0L_0+0L_1)+r(1L_0+1)=2L_0+L_1+0$.
Cet opérateur consiste à inverser le sens des arcs de l'arboresccence.

Les rangs des entiers de la récurrence **(1)** utilisés dans la décomposition normalisée d'un entier n représenté par le mot m, sont <u>le support</u> de m. Ainsi, support(0101001)=(2,4,7).

Il peut être utile de considérer que tout mot est le début d'une suite infinie dont tous les caractères sont 0 -sauf un nombre fini dont les positions constituent le support du mot.
On parle alors de <u>plongement canonique</u> dans les suites infinies.

<u>Remarque</u> 1:

On pourrait tout aussi bien normaliser la représentation des entiers par la condition duale: pas de caractères 0 consécutifs. Auquel cas on aurait eu m(29)=010111.
De manière générale, les mots m110m' et m001m' sont alors considérés comme équivalents. L'équivalence induite par 001=110 pour tout facteur équivaut à la donnée de la récurrence (1) sur les entiers. Sur les facteurs de tout mot, l'application d'une suite de transformations élémentaires de ce genre conduit à des mots équivalents, représentant le même entier. La normalisation (resp la normalisation duale) consiste à choisir le minimum (resp maximum) lexicographique./

<u>Avancer rapidement dans la suite (1).</u>

L'écriture de F(n) est particulièrement aisée dans le système fibonaccien, puisqu' il s'agit d'un mot de degré n constitué de n-1 zéros, suivis d'une unique occurrence de 1.

Soit donc **d** le décalage défini par **d(F(n))=F(n+1)**, fournissant l'élément successeur de tout élément de la suite fondamentale F. Cette opération de décalage s'étend naturellement aux entiers, via leur représentation en numération fibonacci, par **m(d(n))=0m(n)**.
Il nous arrivera d'écrire, abusivement, **d(m)=0m**, en confondant l'entier et sa représentation.

L'opération de décalage ainsi généralisée satisfait à $d^2(n)=d(d(n))=d(n)+I(n)=(d+I)(n)$,
en convenant de la notation de l'application identité, I(n)=n.
Nous résumons ceci par le fait que le décalage d satisfait à une équation de degré 2:

$$\textbf{(3)}\quad \mathbf{d^2=d+I, \text{ avec } I=d^0}$$

Il en résulte que $F(n+1)=d^n(f(1))$, et, sutrout, que toute puissance de d s'exprime par un polynôme de degré 1 en d, $d^n=a_n+b_nd$. On peut de cette façon calculer rapidement l'expression - par exemple dans le système de numération usuel, de base 10 - de la suite $f(2^k)$, extraite de (1).
Il suffit pour cela de calculer la suite des polynômes de degré 1 en t, et à coefficients entiers:

Il suffit pour cela de calculer la suite des polynômes de degré 1 en t, et à coefficients entiers:

$$\textbf{(4)}\quad \mathbf{p_k=(p_{k-1})^2\ ,\ p_1=d}$$

tels que $F(2^k)=p_k.F(1)$, ou $F(2^k-1)=p_k.F(0)$.

Remarquer, de manière générale, que

$$\textbf{(5)}\quad \mathbf{(aI+bd)(a'I+b'd)=(aa'+bb')I+(ab'+a'b+bb')d,}$$

ce qui est une algèbre sur les polynômes de degré 1 à coefficients entiers, ou, si l'on préfère, un produit sur les couples d'entiers:

$$\textbf{6)}\quad \mathbf{(a,b)(a',b')=(aa'+bb',ab'+a'b+bb')}.$$

On peut ainsi noter $(a,b)^k$ la puissance k-ième du couple (a,b), pour ce produit.
Par exemple, $(a,b)^2=(a^2+b^2,2ab+b^2)$. Le lecteur pourra vérifier que $p_{k+1}=F(2^k-2)+F(2^k-1)d$.
En pratique, on peut omettre de noter I, si le contexte permet d'éviter toute confusion.
Ainsi, $d^2F(1)=(1+d)F(1)=F(1)+F(2)=F(3)=3$.

Ces règles de calcul sur les polynômes de degré 1 à une variable et à coefficients entiers sont équivalentes à la donnée de la récurrence **(1)**.

Enfin, si l'on considère la **série** formelle s telle que le coefficient de x^n soit $F(n+1)$, cette série est solution de l'équation $\mathbf{s=e+x+xs+x^2s}$. On peut le voir de plusieurs manières, et notamment à partir de la grammaire génératrice du langage L, par le morphisme substituant x à 0 et à 1, et s à L+e.
On en tire la fonction rationnelle génératrice

$$\mathbf{s=(e+x)/(e-x(e+x))}$$

du nombre de mots du langage de fibonacci, dénombrés suivant leurs degrés, suite qui coïncide précisément avec la suite fondamentale de fibonacci..
Lorsque la récurrence F est étendue à **Z**, l'opération de décalage est alors inversible, et, de $d^2=d+I$, résulte alors $d^{-1}=I-(d^{-1})^2$ [ou plutôt $(d^{-1})^2=I-d^{-1}$…].

<u>Exercice</u> 1 (suite de fibonacci dans le monoïde -et le magma):

Que dire du mot infini approché par le processus génératif récurrent $m_{n+1}=m_nm_{n-1}$ sous l'initialisation $m_0=y$, $m_1=x$? (Puis sous les initialisations (x,yy), (xx,yyy), (xxx,yyyy)...?)
[Considérer également les arbres $a_{n+1}=(a_n,a_{n-1})$ sous $a_1=g$, $a_2=(g,d)$]
Les mots m_n ainsi définis sont primitifs (càd non puissance d'un mot plus court).

Construire celui des conjugués m'm'' d'un tel mot m_n=m=m''m' qui est minimum pour l'ordre alphabétique usuel. On note Mir(m) le miroir du mot m.
Construire celui des conjugués qui s'écrit soit m'xMir(m'), soit m'yMir(m'), soit m'yxMir(m').
Construire celui des conjugués qui s'écrit xmy où m=Mir(m).

On comparera le k-ième caractère du mot m au caractère de plus faible poids de l'entier k écrit en numération Fibonacci. Quelle est la probabilité pour que le mot qui représente un entier (très grand) écrit dans le système de Fibonacci ait un 1 en position k ?\

Sujet de réflexion:
Peut-on représenter (et cela a-t-il un intérêt) les nombres réels entre 0 et 1 par les suites infinies sur l'alphabet (0,1), soumises à la condition fibonaccienne: exclure deux occurrences consécutives du caractère 1 ?

On vérifie que le nombre de mots du langage $L_{n+1}=xL_n+yL_{n-1}$, sous $L_1=x$, $L_2=xx+y$ est un entier de la suite fondamentale de fibonacci, lequel s'exprime donc comme somme de coefficients binômiaux.

\

Exercice 2: (sur les suites de Fibonacci et l'équation diophantienne associée)

On part d'un couple initial (x_0,x_1), que l'on supposera être des entiers non-négatifs,
et l'on se propose d'étudier les couples consécutifs de la suite de fibonacci $x_{i+1}=x_i+x_{i-1}$.
[si x_0 et x_1 sont rationnels (ou réels, ou complexes), ils déterminent aussi une suite de fibonacci;
la suite s'étend également, naturellement, aux valeurs négatives des indices]

1)observer ce que l'on obtient en écrivant les entiers positifs, en système de numération fibonacci. Montrer que la valeur absolue de $g=x_{i+1}^2-x_{i+1}x_i-x_i^2$ est constante. Elle vaut 1 sur la suite fondamentale issue de (1,1) [noter qu'il existe bien d'autres suites d'entiers sur lesquelles g vaut 1 ou -1, qui ont leur importance comme approximation de nombres réels particuliers, par exemple
3 10 33 109 360 1189 3927 12970 42837 141481 467280 1543321 5097243 16835050.....]
Comme la valeur de g est alternativement positive et négative, considérer l'application qui envoie (x_i,x_{i+1}) sur (x_{i+2},x_{i+3}): g est constante sur ces couples, et (interprétation géométrique) ces points s'approchent d'une droite de pente nombre d'or lorsque i croît. C'est pourquoi, si l'on note d l'opération de décalage $d(x_i)=x_{i+1}$, c'est d'abord l'application $d^2=d+I$ qu'il convient d'étudier.
Il en sera de même, aux degrés supérieurs (d^{n+1} exprimé linéairement en fonction de $I,d,d^2\ldots,d^n$).
On a ainsi une équivalence sur les couples de nombres réels: les couples sur lesquels la forme quadratique g est constante.

2)en calculant dans les entiers modulo n. Que devient g ? Programmer, et afficher les couples (x_i,x_{i+1}) sur écran. Partir de divers couples initiaux. Montrer que l'on obtient une permutation p des couples d'entiers modulo n. L'entier n étant fixé, calculer (expérimentalement, par programme) le plus petit entier m tel p^m=identité.

\

Exercice 3: (suites dites "de Pell")

Considérer le système de numération suivant: on énumère les mots sur l'alphabet (0,1,2), soumis à l'équivalence:

pour tout couple de mots (m,m'), le mot m120m' équivaut à m001m'.

Les caractères "0" situés à droite ne sont pas significatifs (on peut alors toujours plonger les mots dans les mots infinis, en complétant indéfiniment par le caractère "0").

Quels est le poids du caractère de rang i ?
Etant donné deux entiers initiaux, n_0 et n_1, étudier la suite des entiers n_i tels que $n_{i+1}=2n_i+n_{i-1}$.

Peut-on traiter de la même manière la récurrence f(n+1)=f(n)+2f(n-1)?

Le tableau suivant (des nombres de Delannoy) satisfait à la récurrence t(i,j)=t(i-1,j)+t(i,j-1)+t(i-1,j-1),
(étudier particulièrement la suite des coefficients diagonaux)
1 1 1 1 1 1... dénombre les chemins dont les pas élémentaires sont soit parallèles aux axes
1 3 5 7 9 11... soit diagonaux
1 5 13 25 41 61... le nombre des chemins constitués de n pas
1 7 25 63 129 231... satisfait à la récurrence de Pell, f(n)=2f(n-1)+f(n-2).
1 9 41 129 321 681... Ce tableau est extensible vers le haut, en effet, nous avons la partie n>0
.... du tableau des coefficients des séries s_n, $(e-x)s_{n+1}=(e+x)s_n$, $s_0=x^*$.

/

Exercice 4:

Chercher une fonction f à valeurs entières, définie sur les entiers,
et telle que $f(i+j+1)=f(i)f(j)+f(i+1)f(j+1)$ pour tout couple (i,j) d'entiers.
\

Exercice 5:

Montrer que le n-ème nombre de Fibonacci, $f(n)$, est somme des coefficients binômiaux $(n-2k,k)$. Pour cela, interpréter les coefficients binômiaux comme dénombrant des mots sur un alphabet de deux lettres.
\

Exercice 6:

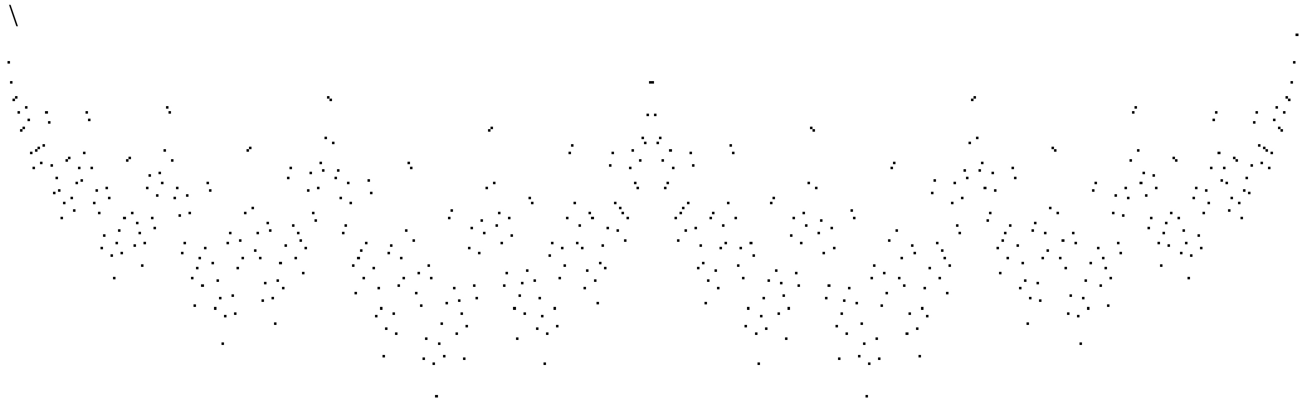
Soit la fonction f à valeurs entières telle que
$f(m0)=f(m)$, $f(m1)=f(m)+g(m)=g(m0)$, $g(m1)=g(m)$, $f(e)=g(e)=1$, les mots sur (0,1) étant interprétés comme représentation des entiers en base 2, les caractères de plus faible poids à gauche.

Vérifier que la valeur maximale de f sur les entiers de 0 à 2^n est le n-ième nombre de Fibonacci. Ci-dessous, le graphe de cette fonction, de 2^9 à 2^{10}. \

Exercice 7:

Certains entiers ont une représentation particulière dans le système normalisé de Fibonacci. Il en va ainsi de F_n-1 ou F_n+1, où F_n est le n-ième nombre de la suite fondamentale. Ensuite?

\



Exercice 8 (difficile):

Soit l'alphabet X de deux lettres X=(x,y), et X^* l'ensemble des mots sur X.
Considérer les deux langages

a) L_1: constitué des mots sans deux occurrences consécutives de la lettre x

b) L_2: image de X^* par le morphisme f tel que $f(x)=x$, $f(y)=yy$.

Construire une bijection naturelle de L_1 sur L_2.

Le langage L_2 est naturellement lié aux fractions continues:

- soit l'alphabet A, infini et naturellement ordonné
  A=(suite infinie des a_i, pour i dans les entiers naturels),
- $A^*{}_c$ les mots croissants de A (codant des parties finies de A),
- à tout mot m de $(x,y)^*$, dont les occurrences (x ou y) sont repérées par leur rang, en commençant par le rang 0 pour la première lettre, correspond naturellement un mot croissant de $A^*{}_c$: faire correspondre à toute occurrence de x de rang i la lettre a_i,
- soit alors L le langage, partie de $A^*{}_c$, correspondant au langage L^2 sur (x,y) ci-dessus, et p_n le

- soit alors L le langage, partie de A^*_c, correspondant au langage L^2 sur (x,y) ci-dessus, et p_n le polynôme des mots de degré n de L;
on a p_0=e, $p_1=a_0$, $p_2=a_0a_1$+e, $p_3=a_0a_1a_2+a_2+a_0$.. , $p_{n+1}=p_n.a_n+p_{n-1}$;
si l'on écrit $p_{n+1}(a_0\ldots,a_n)$ comme fonction de n+1 lettres,
alors les fonctions numériques (à valeurs rationnelles)

$p_{n+1}(a_0\ldots,a_n)/p_n(a_1\ldots,a_n)$

ont pour valeurs l'ensemble des nombres rationnels,
lorsque l'on substitue aux lettres de A *des entiers positifs*;
<u>tout nombre rationnel positif est obtenu de cette manière une fois et une seule</u>.
\

<u>Exercice</u> 9: (récurrence comparable... mais avec retard)

On s'intéressera à la récurrence produisant sur l'alphabet de trois lettres (a,b,c) les mots

m_0=a, m_1=b, m_2=c, $m_{n+1}=m_{n-1}m_{n-2}$.

(commencer par programmer, mais aussi, établir que les rapports des degrés de deux mots consécutifs tend vers une limite qui est l'unique racine réelle d'une équation de degré 3)
\

<u>Note</u>: Le rapport de deux entiers consécutifs de la suite fondamentale de Fibonacci est une approximation du nombre d'or, lequel est la plus grande racine de x^{-1}=x-1.
Le passage du couple (a,b) au couple (b,a+b), soit (a,b):=(b,a+b) est une transformation linéaire dont les valeurs propres sont précisément le nombre d'or et son inverse.
(on peut appeler "nombre d'or", indifféremment, x ou x^{-1}).
Le nombre d'or est, en certain sens, le plus simple des *irrationnels.*
Est-ce pour cette raison qu'il a fasciné ?

Ce nombre, et plus généralement ses approximations, ont probablement été considérés depuis plusieurs milliers d'années. C'est le rapport obtenu en divisant l'unité en x et 1-x, telle que la plus grande part, x, ait un rapport à la plus petite 1-x, égale au rapport du tout à la part x, soit x/(1-x)=1/x.

Comme bien d'autres nombres et figures géométriques, les nombres afférents au nombre d'or ont fait l'objet de toute sorte de divagations, délires philosophiques, métaphysiques, occultes, magiques, secrètes, mystiques, esthétiques, architecturales, naturalistes, sacrées, symboliques...

Les nombres entiers de la suite fondamentale de Fibonacci se rencontrent-ils "dans la nature" ? Sans doute, certaines plantes engendrent-elles, par quelque processus mal élucidé, les premiers entiers de la suite de Fibonacci; pourquoi faut-il que l'on puisse les observer en comptant attentivement les feuilles des ananas ou les graines des tournesols (voir Coxeter) ?
Cela ne suffit pas à expliquer la fascination dont cette suite a été l'objet des siècles durant.
L'un des auteurs ayant systématisé la chose dans un célèbre et obscur traité d'architecture est Vitruve (ingénieur et architecte sous Julius Caesar). Avant comme après lui, et jusque dans l'époque actuelle, de nombreux architectes et artistes se sont échinés, sans véritable justification, sinon l'utilisation de procédés de construction géométrique, à user de proportions faisant référence au nombre d'or.

On remarquera qu'une approximation du rapport ad hoc est simplement (*etinvolontairement*) obtenue par la technique qu'emploie depuis plusieurs millénaires tout maçon afin de réaliser un angle droit à l'aide de cordeaux: un triangle dont les côtés valent respectivement 3,4,5 est rectangle ($3^2+4^2=5^2$).
En accolant deux tels triangles par les côtés de valeur 3, on dresse un triangle isocèle de base 8, dont les deux côtés égaux valent 5, et la hauteur 3.

On produit ainsi innocemment dans cette figure les entiers 3,5,8, entiers successifs de la suite fondamentale de Fibonacci, les rapports 3/5 et 5/8 encadrant le nombre d'or [5^2-3*8=1].

Le miracle obtenu grâce au triangle (3,4,5) -la production d'un angle droit- lui a valu d'être élevé au rang de triangle sacré par les bâtisseurs de l'histoire. Le triangle de côtés (4,5,6) est, lui aussi, assez particulier. (un de ses angles est le double d'un autre angle).

Depuis quelques années, une revue mathématique est intégralement consacrée à la suite de Fibonacci.
On note parfois le nombre d'or par la lettre grecque Phi, en l'honneur, dit-on, du sculpteur Phidias (5^{e} siècle avant JC).
\

Exercice 10:

Etudier les fonctions
-"nombre de 1 de la représentation de la suite des entiers dans le système de numération fibonacci normalisé": 0 1 1 1 2 1 2 2 1 2 2 2 3 1 2 2 2 3 2 3 3 **1 2 2 2 3 2 3 3 2 3 3 3 4** ....
-et "nombre de décompositions d'un entier en entiers de fibonacci distincts".
\

Exercice 11:
(l'ablation du premier caractère en numération fibonacci,
ou la quasi-inversion de l'opération de décalage, par défaut)

Soit **d** le décalage fondamental de fibonacci envoyant le n-ième entier de fibonacci F(n) sur le suivant F(n+1), soit **d**(F(n))=F(n+1) pour n>0, où F(1)=1, F(2)=2, F(n+2)=F(n+1)+F(n).
Ce décalage s'étend naturellement à l'ensemble des entiers naturels.

En effet, lorsque le mot **m** est l'écriture d'un entier dans le système de numération normalisé de fibonacci, on pose **d(m)=0m**, et **d** apparaît ainsi comme une opération de décalage opérant sur la représentation de tout entier.

Evidemment, on identifie abusivement le mot m à l'entier qu'il représente dans ce système de numération, et l'on convient que l'entier 0 est représenté par le mot vide (lequel est d'ailleurs généralement représenté à son tour par le mot réduit à la lettre 0).

On a $\mathbf{m+d(m)=d^{2}(m)}$ pour entier s'écrivant m,
ce qui n'est que la récurrence de fibonacci même.

L'application d, définie sur l'ensemble des entiers naturels, n'est pas inversible,
et satisfait à la relation, de degré 2, $\mathbf{d^{2}=d+I}$, où I est l'application identité.

Si d était inversible (ce qui serait le cas si l'on définissait F sur les entiers rationnels -ou sur les réels) on aurait $\mathbf{d^{-1}=I-d^{-2}}$. Nous allons définir deux applications quasi-inverses de d, l'une par défaut, dans cet exercice, l'autre par excès, dans l'exercice qui suit.

Soit **r** la fonction d'excision du premier caractère de ces mots, celui de plus faible poids, **r(0m)=r(1m)=m**, avec pour le mot vide r(e)=e (ou plutôt, numériquement, **r(0)=0**).

Soit p la fonction sélectionnant ce premier caractère, **p(0m)=0, p(1m)=1**, avec **p(0)=0**.

La fonction r est donc l'inverse de d, si l'on restreint d aux entiers de la forme 0m: d(r0(m))=m, tandis que d(r(1m))=0m=1m-1, et, évidemment, r(d(m))=m.

1) On cherche à établir ceci:

-si m est la représentation de l'entier k, **p(m)** est le k-ième caractère de la suite infinie obtenue comme limite des puissances du morphisme **b**(0)=010, **b**(1)=01, appliquées au mot 0, soit la suite infinie dont les trois premiers facteurs gauches calculés de la forme $b^{n}(0)$ sont

b(0)=010, $\mathbf{b^{2}}$(0)=01001010, $\mathbf{b^{3}}$(0)=0100101001001010010 10.....

Les degrés partiels en 0 et 1 de $b^{n}(0)$ sont évidemment deux entiers consécutifs de la suite fondamentale de Fibonacci, et les chemins obtenus en interprétant 0 comme un déplacement horizontal élémentaire, 1 comme un déplacement vertical élémentaire sur les points à coordonnées entières, sont des approximations oscillant autour d'une droite dont la pente est le nombre d'or.

2) Il est commode de s'appuyer sur le fait qu'il y a un peu plus que cela.
Soit pour alphabet la suite des entiers en numération fibonacci normalisée,
et le morphisme **b'** ainsi défini:

-0 engendre 0,1,01, et plus généralement l'entier 0m engendre les entiers 000m, 100m, 010m,
-l'entier 1m engendre les entiers 001m,101m.

D'où l'énumération de la suite croissante des entiers en numération fibonacci:

b'(0)=0,1,01; $\mathbf{b'^2}$(0)=0,1,01,001,101,0001,1001,0101;
$\mathbf{b'^3}$(0)=0,1,01,**001**,101,0001,1001,0101,**00001,10001,01001**,00101,10101,.....

d'où résulte le morphisme **b**, restriction du morphisme énumératif **b'** au premier caractère **p(m)** de tout mot m.

On observera la racine carrée de ce morphisme **b'**, laquelle suffit à engendre les entiers en numération de fibonacci, mais c'est de ce morphisme **b'** dont nous aurons besoin par la suite, parce que d satisfait à une équation de degré 2; c'est pourquoi c'est ce morphisme qui est naturellement associé au développement en fraction continue du nombre d'or,
et c'est lui qui stabilise la forme quadratique $x_{i+1}^2-x_{i+1}x_i-x_i^2$ sur les couples d'éléments consécutifs d'une suite de fibonacci.

3) On peut établir que $\mathbf{r(m+1)+r^2(m)=m}$

(où "+" est la somme sur les entiers, représentés dans ce système), équation satisfaite par l'opérateur d'ablation du caractère de plus faible poids en numération fibonacci,
au besoin par une méthode exhaustive élémentaire inspirée de la fin de l'exercice qui suit.
r est le quasi-inverse par excès de l'application de décalage de fibonacci **d**, sur les entiers.

On pourra considérer le graphe arborescent dont les sommets sont les mots m du langage de fibonacci, et les arcs les couples de mots du langage (m,0m) et (0m,10m).
Le graphe d'application de **r** s'en déduit de manière évidente.

Lorsque l'on écrit que si 0m appartient à L, alors 00m et 10m appartiennent à L, et que, si 1m appartient à L, alors 01m appartient à L, ce qui est proprement la grammaire générative rationnelle du langage L, on considère le morphisme énumératif b, qui peut s'exprimer dans la structure de magma:

b[0m]=(00m,10m), b[1m]=(01m), de manière à archiver l'histoire de la génèse des objets considérés, soit par exemple b[1]=(01), b^2[1]=((001,101)), b^3[1]= ((b[001],b[101]))=(((0001,1001),(0101)))...

ou, en ne retenant que le premier caractère,
b'[1]=(0), b'^2[1]=((0,1)), b'^3[1]= ((b'[0],b'[1]))=(((0,1),(0)))...
on obtient ainsi une suite d'arbres qui tend vers un arbre infini dont on écrira l'équation...
\

Exercice 12 (suite...la quasi-inversion de l'opération de décalage **d**, par excès):

Considérer la fonction h définie sur les entiers, telle que $\mathbf{h(n)=n-h^2(n-1)}$, **sous h(0)=0**.
Si l'on tabule cette fonction, on s'aperçoit qu'elle envoie un entier F(n+1) de la suite fondamentale de fibonacci sur l'entier F(n) qui précède: c'est donc l'ablation r du premier caractère de l'entier qui s'écrit 0^i1 en numération fibonacci.

On s'apercoit ensuite que c'est encore vrai pour les entiers dont l'écriture dans ce système de numération commence par le caractère 0, càd les mots du sous-langage 0L, soit h(0m)=m, h(0)=0, h(0L)=L, et que ce n'est plus l'ablation du premier caractère lorsque celui-ci est 1, mais.....

Soit **g** la fonction définie sur les entiers écrits en numération fibonacci normalisée, par

g(0m)=m et **g(1m)=g(1+1m)=1+m**, g(e)=e (ou **g(0)=0**).

On a donc **g(om)=r(om)** et **g(1m)=r(1m)+1=r(1+1m)**, où r est l'opérateur d'excision défini dans l'exercice ci-dessus. On a g(f(m))=m, f(g(0m))=m, et f(g(1m))=f(1+m)=1+1m.

1) Soit v la fonction écart (ou différence) de g,

v(m)=g(m+1)-g(m). On a **v(0m)=1=p(1m)**, **v(1m)=0=p(0m)**,

évidemment liée à l'énumération ci-dessus des entiers en numération fibonacci par le morphisme b', ou plutôt au morphisme b énumérateur du caractère de plus faible poids.

2) Enfin, pour établir que **$g(m+1)+g^2(m)=m+1$**,

on peut, de manière élémentaire, examiner trois cas,
suivant que m=00m', m=01m', ou m=10m',
ce dernier cas se subdivisant lui-même en deux cas, 0m'+1=1m' et 0m'+1=0(m'+1),
suivant que le passage de 0m' à 0m'+1 entraîne une retenue ou non dans ce système de numération.

[attention: dans l'écriture 0m'+1=0(m'+1), la somme est celle sur la représentation des entiers, tandis que le produit est le produit de concaténation des mots].
Tous ces cas se ramènent pratiquement à constater que $d(m')+m'=d^2(m')$.
g est le quasi-inverse par défaut de l'application de décalage de fibonacci **d**, sur les entiers.
Les fonctions **g** et **h** coïncident.

Récapitulons: r(d(m)=m=g(d(m), d(r(0m))=d(r(1m))=0m=d(g(0m)) tandis que d(g(1m))=1+1m.

On tabulera donc la fonction h définie sur les entiers par $h(n)=n-h^2(n-1)$, sous h(0)=0.

Remarquer que n/h(n)=8/5 pour n multiple de 8 jusqu'à n=11*8. Pour n multiple de 13, ce rapport est 13/8 jusqu'à n=11*13. Le rapport 21/13 tient jusqu'à n=29*21, et 34/21 jusqu'à n=29*34, 55/34 jusqu'à 76*55; 5/3 tenait jusqu'à n=4*5, 3/2 jusqu'à n=4*3. Les entiers 1,4,11,29,76... appartiennent à la suite de fibonacci 1 3 4 7 11 18 29... initialisée par (1,3), dite suite de Lucas.

On comparera le graphe de l'application g à celui de l'application r...!
\

Exercice 11 (suite de l'...):

A tout entier k correspond le plus petit des entiers, que nous noterons n_k, satisfaisant à $n_k-g(n_k)=k$.

Etablir que tout entier n>0 est soit de la forme n_k, soit de la forme $g(n_k)$.
Quelle est la fonction caractéristique des entiers de la forme n_k ?
(construire le mot infini sur (0,1) dont le q-ième caractère est 1 si q est de la forme n_k, et 0 sinon).
Etablir que les entiers n_k sont caractérisés par $g(n_k)=g(n_k-1)$.
Par commodité d'écriture, nous confondons les entiers k et n_k avec les mots qui les représentent en numération fibonacci. A-t-on toujours $00n_k-g(00n_k)=00k$?

Voir l'importance particulière des entiers k tels que $p(g(n_k))=1$ (on a toujours $p(n_k)=0$).
Le k-ième couple $(g(n_k),n_k)$ se construit de la manière suivante: $g(n_k)$ est le plus petit entier qui ne figure pas dans les couples de rang inférieur, soit la suite

(0,0),(1,2),(3,5),(4,7),(6,10),(8,13),(9,15),(11,18),(12,20),(14,23),(16,26),(17,28)......

Observer que $x^2-y^2-xy<y$ sur les couples $(x,y)=(n_k,g(n_k))$, et que cela les caractérise (excepté l'égalité pour (0,0), et (2,1)). Voir le lien (Livre II, chapitre IV) avec le noyau du jeu de Whytoff, et (Livre III, chapitre VI) avec la construction des mots rasants.
\

Exercice 13 (suite: tribonaccis...):

Soit les mots sur (0,1) terminés par une occurrence de 1, et ne présentant pas de facteur 1^3 (càd sans trois occurrences de 1 consécutives). On peut aussi considérer que les occurrences de 0 à droite ne sont pas significatives, soit m0=m. On se propose d'étudier ce système de numération, càd la décomposition des entiers sur les entiers de la suite $1,2,4,7=2^3-1,13,24,44,81,149,274,504,927$.....

Commencer par engendrer ce langage par les règles de production de type morphisme
b(110m)=000110m,100110m,010110m,110110m,
ce que l'on résumera par (000+100+010+110).110m, où "+" note la somme formelle distribuant sur le produit de concaténation ".";

b(10m)=(000+100+010+110+001+101).10m, b(00m)=(000+100+010+110+001+101+011).00m
b(01m)=(000+100+010+110+001+101+011).01m; donc, b(0)=0+1+01+11+001+101+011,
et
b^2(0)=0+1+01+11+001+101+011+(000+100+010+110+001+101).1+(000+100+010+110+001+101+011).01+(000+100+010+110).11+(000+100+010+110+001+101+011).001+(000+100+010+110+001+101).101+(000+100+010+110+001+101+011).011

Considérer la suite obtenue (sur un alphabet de quatre lettres, que l'on identifiera à (0,1,2,3)) par la restriction de ces mots à leurs deux premiers caractères: 012301201230101230120123012301 2...

\

Exercice 14 (long):

(suite du sujet:...
récurrence linéaire à coefficients entiers non-négatifs, et système de numération associé,
polynôme caractéristique de l'opération de décalage,
grammaire rationnelle du langage, et morphisme génératif du langage,
ablation du caractère de faible poids et quasi-inversion récursive de l'opération de décalage)

Soit par exemple le système de numération induit par l'équivalence **111=0001** sur les facteurs des mots de $(0,1)^*$; ce système est associé à la récurrence des poids

$$f(n+3)=f(n+2)+f(n+1)+f(n), \text{ sous } f(1)=1,\ f(2)=2,\ f(3)=4,$$

(soit les poids 1 2 4 7 13 24 44.....)

Le morphisme énumératif des entiers dans ce système de numération a été construit à l'exercice précédent.
L'opération de décalage **d(m)=0m** dans ce système de numération satisfait à $d^3=d^2+d+I$.
Conjecture: l'application
$h(n)=n-h^2(n-1)-h^3(n-2)$, **sous** $h(i)=0$ **pour** $i<0$ satisfait à $h(f(n+1))=f(n)$.

Avec la récurrence de Pell, telle que $f(n+2)=2f(n+1)+f(n)$, (soit le décalage d: $d^2=2d+I$), on énumère des mots normalisés par l'équivalence fondamentale **120=001** sur l'alphabet (0,1,2), d'où le langage rationnel de la suite des entiers normalisés dans ce système de numération:
0, 1, 2, 01, 11, 21, 02, 001..., avec la suite fondamentale des poids **1,3,7,17,41,99**…

Conjecture: l'application $h(n)=\text{partieentière}[(n-h^2(n-1))/2]$ sous h(0)=0

Conjecture: l'application **$h(n)$=partieentière$[(n-h^2(n-1))/2]$** sous h(0)=0
satisfait à **$h(f(n+1))=f(n)$**, et même à h(0m)=r(0m).

Si **$f(n+2)=kf(n+1)+f(n)$**, k entier positif, et **h(n)=**partieentière**$[(n-h^2(n-1))/k]$**, sous h(n)=0, conjecture: **$h(f(n+1))=f(n)$**, et même h(0m)=r(0m).

Si **$f(n+3)=3f(n+2)+2f(n+1)+f(n)$**, soit 1230=0001, poids 1,4,16,57,207,751...
h(n)= partieentière**$[((n-2h^2(n-1)-h^3(n-2))/3]$**, conjecture: **$h(f(n+1))=f(n)$**.

Avec **220=001**, **$f(n+1)=2f(n)+2f(n-1)$**, les poids sont 1 3 8 22 60 164...
Conjecture: avec **h(n)=**partieentière**$[(n-2h^2(n-1))/2]$** sous h(0)=0, on a encore **$h(f(n+1))=f(n)$**, mais r(om)=m ne coïncide pas toujours avec h(om), et la suite h(n) n'est pas croissante.

Le cas général: Soit
-la suite des poids déterminés par la récurrence $f(n+j+1)=a_jf(n+j)+a_{j-1}f(n+j-1).....+a_0f(n)$,
-le système de numération associé, sur l'alphabet comportant les chiffres 0 à $q=\max(a_j,a_{j-1}\ldots,a_0)$,
-les coefficients a_0 à a_j entiers non négatifs, a_0 et a_j non nuls,
-la suite correctement initialisée par $f(i)=q^{i-1}$ pour i de 1 à j+1,
(l'initialisation de f correspond à l'écriture des entiers inférieurs à m dans le système de numération base q; càd que les premiers poids, de f(1) à f(j+1), ce sont les premières puissances de q, de q^0 à q^j)
-le décalage d contraint par $d^{j+1}=a_jd^j+a_{j-1}d^{j-1}.....+a_0I$,
-l'équivalence sur les mots (sur l'alphabet de ces q chiffres) $mk=a_ja_{j-1}\ldots a_0k=0^{j+1}(k+1)$ pour k<q,
-la quasi-inversion $h(n)=[(n-a_{j-1}h^2(n-1)-a_{j-2}h^3(n-2)\ldots-a_0h^{j+1}(n-j))/a_j]$,
(où [ ] désigne la partie entière), correctement iniitalisée par h(i)=0 pour i<0.

Peut-on avoir h(f(n+1))=f(n) ?

Cette relation n'est généralement satisfaite que de manière approchée.
(comme on le vérifiera avec les équivalences 1010=0001, ou 11110=00001, ou encore 320=001)

Comme pour la Transformée de Fourier Généralisée (Livre III, chapitre V), on calcule formellement sur des polynômes de degré n, avec une règle de simplification du produit, soit $x^{n+1}=p_n(x)$, où p_n est un polynôme de degré n.

Relier aux équations diophantiennes: de même que la récurrence de fibonacci, de décalage $d^2=I+d$, est liée à la résolution **approchée** de $z^2=xz+x^2$ en entiers..., il convient d'étudier la résolution approchée de $z^{n+1}=x^{n+1}p_n(z/x)$ en entiers...., où p_n est le polynôme caractéristique de la récurrence considérée, à l'aide du système de représentation des entiers associés.

C'est ici le moment (ou le lieu) d'**une remarque très importante**, quasi-évidente, mais qui n'est généralement pas explicitement formulée: la complexité d'un calcul dépend fondamentalement, entre autres, d'un <u>système de représentation</u> des objets que l'on calcule.

Soit par exemple la récurrence linéaire évoquée ci-dessus:
$f(n+j+1)=a_jf(n+j)+a_{j-1}f(n+j-1).....+a_0f(n)$;
il lui est attaché un langage, celui de la représentation des entiers dans le système de numération induit par cette récurrence, initialisée comme nous l'avons spécifié. Il est connu que le rapport f(n+1)/f(n) tend vers la plus grande racine réelle du polynôme caractéristique associé, $x^{j+1}-(a_jx^j+\ldots+a_0)$.

Il existe, et l'on enseigne, des méthodes de calcul pour approcher cette racine, généralement exprimée par un développement décimal ou binaire. Mais si l'on numère dans le système associé à cette récurrence, il n'y a par définition strictement rien à faire, puisque les entiers de la suite fondamentale s'écrive sous la forme d'une suite de zéros terminée par une occurrence de un.

La suite fondamentale de ce système de numération, $d^{n+1}(1)/d^{n}(1)=0^{n+1}1/0^{n}1$, répond trivialement à la question.

\

Exercice 15 (Gödel-Escher-Bach, livre de D.Hofstadter, 1985, p.154):

1) Soit la récurrence croisée **h(n)=n-g(h(n-1)), g(n)=n-h(g(n-1))**, sous h(0)=1, g(0)=0.

Considérer w(n)=h(n) -g(n)...et les valeurs de n où w(n) vaut 1
(...les entiers (-1) de la suite fondamentale de fibonacci...).

2) Soit la récurrence **h(n)=h(n-h(n-1))+h(n-h(n-2))**,

sous l'initialisation h(1)=h(2)=1, ou h(1)=1, h(2)=2, ou h(1)=0, h(2)=1.

On peut exprimer bien des **conjectures**, par exemple:

il existe une infinité de valeurs de i telles f(i)=f(i+1), tandis que |f(i+1)-f(i)| n'est pas borné;
il existe une infinité de valeurs de i telles que h(2i)=i, et même, pour tout entier k, une infinité de valeurs telles que h(2i)=i+k.

\

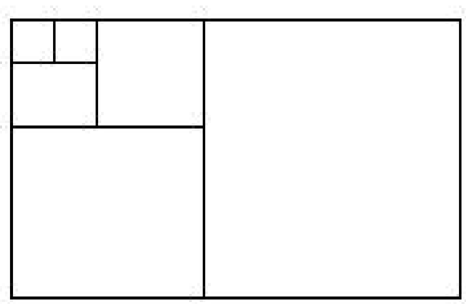
Exercice 16:

Calculer f sous f(i,0)=f(0,j)=0, g(i,j)=h(i,j)-f(i,f(i,j-1))-f(f(i-1,j),j), h(i,j)=max(i,j)
a) avec f(i,j)=g(i,j): problème en f(3,4)   **b**) avec f(i,j)=max(0, g(i,j))   **c**) avec f(i,j)=abs(g(i,j)).
Essayer h(i,j)=i+j, et h(i,j)=i*j; convenir de f(i,j)=0 dès que i<0 ou j<0.

\

Exercice 17:

? De quand date cette
'démonstration géométrique' du style 'on-voit-bien-que'
du fait que la somme des carrés des n premiers nombres de la suite fondamentale de Fibonacci (démarrée à 1 1 2 3...) est égale au produit de deux nombres consécutifs de cette suite:



[si F(0)=1, F(1)=1, F(2)=2... ,F(j+1)=F(j)+F(j-1),... on a:
somme des $F(i)^2$ pour i variant de 0 à n = F(n)*F(n+1)]

résulte en fait de ce que (par exemple) pour toute suite $s_1, s_2, \dots, s_i, \dots$
on a $s_1s_2+s_2s_3+(s_1+s_3)s_4+(s_2+s_4)s_5+(s_1+s_3+s_5)s_6=(s_1+s_3+s_5)(s_2+s_4+s_6)\dots\dots$
ce qui fait apparaître d'autre manière cette propriété de la suite des F(n), en séparant les termes de rang pair des termes de rang impair.

\

Exercice 17 bis (la norme fibonaccienne des entiers):

Exercice 17 bis (la norme fibonaccienne des entiers):

Combien de caractères 1 l'écriture standard de chaque entier en numération fibonacci requiert-elle ? Ce que l'on pourra appeler la norme des entiers en numération fibonacci (nf(46=1+3+8+34)=4); norme des entiers de 0 à 89-1, décomposés sans utiliser deux nombres de fibonacci consécutifs:

0 1 1 1 2 1 2 2 1 2 2 2 3 1 2 2 2 3 2 3 3 1 2 2 2 3 2 3 3 2 3 3 3 4 1 2 2 2 3 2 3 3 2 3 3 3 4 2 3 3 3 4 3 4 4 1 2 2 2 3 2 3 3 2 3 3 3 4 2 3 3 3 4 3 4 4 2 3 3 3 4 3 4 4 3 4 4 4 5 1 2 2 2 3 2 3 3 2 3 3 3 4 2 3 3 3 4 3 4 4 2 3 3 3 4 3 4 4 3 4 4 4 5 2 3 3 3 4 3 4 4 3 4 4 4 5 3 4 4 4 5 4 5 5..suite dont les facteurs successifs sont m(0)=0, m(1)=m(0).1, m(i+1)=m(i).f_1(m(i-1)), f_1 morphisme alphabétique f_1(j)=j+1.

La somme totale des caractères "1" utilisés, de 0 au n-ième entier, F(n), de la suite fondamentale de fibonacci, est 1 2 5 10 20 38 71 130 235 420 744 1308 2285 3970.... suite dont la fonction génératrice est $(1-x-x^2)^{-2}$. Cette suite s'obtient par convolution de la suite de fibonacci:
si F est la série de fibonacci $F=1+x+2x^2+3x^3+5x^4+8x^5+13x^6+21x^7+34x^8$.....=somme des F(i)$x^i$,
la suite des coefficients de F est de fonction génératrice $(1-x-x^2)^{-1}=(x+x^2)^*$, condition qui équivaut à la récurrence définissant les entiers de fibonacci.

C'est dire que l'on obtient un langage de fibonacci sur (x,y) par
$(x,y^2)^*=e+x+(x^2+y^2)+(x^3+xy^2+y^2x)+\ldots$,
l'image de $(x,y)^*$ par le morphisme qui envoie y sur y^2, sans modifier x, langage des mots sur (x,y) dont les facteurs "blocs de y" sont de degré pair (c'est la grande famille des images de X^* par morphisme "lettre sur mot"). Evidemment en bijection avec langage de $(a,b)^*$ constitué des mots ne comportant pas deux b consécutifs et se terminant par b: b+ab+(aab+bab)+(aaab+baab+abab)+..., qui n'est que l'écriture des entiers en numération fibonacci.

Le carré, $F^2=1+2x+5x^2+10x^3+20x^3+38x^4+71x^5+130x^6+235x^7\ldots\ldots$,
est une série dont la suite des coefficients est de fonction génératrice $((x+x^2)^*)^2$,
et satisfait à la récurrence c(n)=2*c(n-1)+c(n-2)-2*c(n-3)-c(n-4) pour n>3.

Par exemple, l'écriture fibonaccienne des entiers de f(1) à (f(6)=13)-1,
1, 01, 001, 101, 0001, 1001, 0101, 00001, 10001, 01001, 00101,10101,
comporte 20=5*1+3*1+2*2+1*3+1*5 occurrences du caractère 1
(5 fois de poids 1, 3 fois de poids 2, 2*2=4 fois de poids 3, 3 fois de poids 5, 5 fois de poids 8)

Dans l'écriture des entiers de 1 à f(n)-1, les caractères de poids f(i) et f(n-i) interviennent autant de fois les uns que les autres, et ce nombre d'occurrences est f(i-1)*(n-i-1). A prouver.

\
Exercice 17 ter:

Etudier les polynômes S(n) (et la somme de leurs coefficients), définis par
$T(n+1)=z^{n+1}S(n-1)$, S(n)=somme des T(i) pour i de 0 à n, sous l'initialisation T(0)=e, T(1)=z.
$S(0)=e$, $S(1)=e+z$, $T(2)=z^2S(0)=z^2$, $S(2)=e+z+z^2$, $T(3)=z^3S(1)=z^3+z^4$, $S(3)=e+z+z^2+z^3+z^4$,
$T(4)=z^4S(2)=z^4+z^5+z^6$, $S(4)=e+z+z^2+z^3+2z^4+z^5+z^6$, $T(5)=z^5S(3)=z^5+z^6+z^7+z^8+z^9$,
$S(5)=e+z+z^2+z^3+2z^4+2z^5+2z^6+z^7+z^8+z^9$, $T(6)=z^6S(4)=z^6+z^7+z^8+z^9+2z^{10}+z^{11}+z^{12}$,
$S(6)=e+z+z^2+z^3+2z^4+2z^5+3z^6+2z^7+2z^8+2z^9+2z^{10}+z^{11}+z^{12}\ldots\ldots$
(noter la suite des degrés de S(n), 0 1 2 4 6 9 12 16 20 25 30 36 42 49 56 64 72 81 90 100...,
mélange alterné de k^2 et k(k+1), suite dont la suite des différences est 1 1 2 2 3 3 4 4 5 5...)

Les polynômes S(n) tendent vers une série dont voici le début des coefficients (le polynôme S(n) de degré k(k+1) fournit 2k coefficients stabilisés):

1 1 1 1 2 2 3 3 4 5 6 7 9 10 12 14 17 19 23 26 31 35 41 46 54 61 70 79 91 102 117 131 149 167 189 211 239 266 299 333 374 415 465 515 575 637 709 783 871 961 1065 1174 1299 1429 1579 1735..

Ces coefficients comptent les partitions des entiers, en parts 5i+1 et 5i-1 (1 4 6 9 11 14...): 1; 1^2; 1^3; 1^4, 4; 1^5, 1 4; 1^6, 1^2 4, 6; 1^7, 1^3 4, 1 6; 1^8, 1^4 4, 4 4, 1 1 6; 1^9, 1^5 4, 1 4 4, 1 1 1 6, 9;.....
Pourquoi?

\

Exercice 18:

Décomposer les entiers sur la suite de catalan, 1 2 5 14 42 132...

1, 2, 3=1+2, 4=5-1, 5, 6=5+1, 7=5+2, 8=5+3, 9=5+4, 10=14-4, 11=14-3, 12=14-2, 13=14-1, 14, 15=14+1, 16=14+2, 17=14+3, 18=14+4, 19=14+5, 20=14+6, 21=14+5, 22=14+8, 23=42-19, 24=42-18, 25=42-17, 26=42-16, 27=42-15, 28=42-14, 29=42-13, 30=42-12, 31=42-11, 32=42-10, 33=42-9, 34=42-8, 35=42-7, 36=42-6, 37=42-5, 38=42-4, 39=42-3,40=42-2, 41=42-1, 42....

De combien de manières chaque entier est-il représentable en utilisant chaque entier inférieur ou supérieur de la suite catalane une seule fois, avec le coefficient 1, 0, ou -1 ?
soit, formellement,

(0+1-1)+(0+2-2)+(0+5-5)+(0+14-14)+(0+42-42)+(0+132-132)+.....,

interprétant le développement par choix dans chaque (0+k-k) de l'un des entiers 0,k,-k,
ou, si l'on préfère, la série de Laurent

$(e+x+x^{-1})(e+x^2+x^{-2})(e+x^5+x^{-5})(e+x^{14}+x^{-14})(e+x^{42}+x^{-42})(e+x^{132}+x^{-132})$………

Y-a-t-il à dire des série qui suivent, relatives aux partitions d'entiers en parties de catalan:
[produit des $(e+x^{c(n)})$, produit des $(e-x^{c(n)})$, produit des $(e+x^{c(n)})^{-1}$, produit des $(e-x^{c(n)})^{-1}$]
pour c(n) dans la suite 1 2 5 14 42 132... Petit programme pour calculer ces coefficients.
\

Exercice 19:

A.- Les mots binaires successifs interprétés avec les poids de la suite de fibonacci fondamentale:

1 2 3 3 4 5 6 5 6 7 8 8 9 10 11 8 9 10 11 11 12 13 14 13 14 15 16 16 17 18 19 13 14 15 16 16 17 18 19 18 19 20 21 21 22 23 24 21 22 23 24 24 25 26 27 26 27 28 29 29 30 31 32 21 22 23 24 24 25 26 27 26 27 28 29 29 30 31 32 29 30 31 32 32 33 34 35 34 35 36 37 37 38 39 40 34 35 36 37 37 38 39 ………
et le nombre de décompositions de chaque entier, de cette manière, jusqu'à l'entier 89:

1 (1) (2 1) (2 2 1) (3 2 2 3 1) (3 3 2 4 2 3 3 1) (4 3 3 5 2 4 4 2 5 3 3 4 1) (4 4 3 6 3 5 5 2 6 4 4 6 2 5 5 3 6 3 4 4 1) (5 4 4 7 3 6 6 3 8 5 5 7 2 6 6 4 8 4 6 6 2 7 5 5 8 3 6 6 3 7 4 4 5 1) (5....

Soit f(i) les nombres de fibonacci; les nombres f(i)-1 sont les seuls à avoir une représentation unique (par alternance de 0 et 1, bien sûr).

B.- L'application bf (...on tabulera les puissances de bf):
Interpréter en base 2 les entiers exprimés en numération fibonacci, représentés par les mots binaires sans deux occurrences de 1 consécutives, suite bf(n) pour n≥0:

0 1 2 4 5 8 9 10 16 17 18 20 21 32 33 34 36 37 40 41 42 64 65 66 68 69 72 73 74 ...

Il est bien clair que si l'entier 2n figure, alors 4n et 4n+1 figurent; si 2n+1 figure, 4n+2 figure.
Il en résulte que la suite des parités de ces entiers est engendrée par le morphisme (itéré indéfiniment, en partant de 0) qui envoie 0 sur 01 et 1 sur 0, soit donc la parité de bf(n):

(0)100101001001010010100....,

limite de la récurrence m(n+1)=m(n)m(n-1), sous l'initialisation m(0)=0, m(2)=01.

C.- L'autre normalisation de la décomposition des entiers sur les entiers de la suite fondamentale de fibonacci consiste à ne pas avoir deux 1 consécutifs; interprétés en numération base 2, en voici le début:

0 1 2 3 5 6 7 10 11 13 14 15...

Si 2n appartient au langage, 4n+1 y appartient; si 2n+1 appartient au langage, 4n+2 et 4n+3 y appartiennent; la suite des parités (de gauche à droite, 0 engendre 1, et 1 engendre 01):

0 1 0 1 1 0 1 0 1 1 0 1 1 0 1 0 1...

D.- L'intersection des suites définies en B.- et C.- est la représentation des fib(n)-1 (les entiers de la suite fondamentale de fibonacci, moins 1), mots interprétables en numération base 2, soit

1 2 5 10 21 42 85 170 341...

où 2n engendre à sa suite de 4n+1, et 2n+1 engendre 4n+2, entiers alternativement pairs et impairs.
Si l'on préfère, pour cette suite, nous avons f(n+1)= f(n) + 2*f(n-1) + 1 sous f(1)=1, f(2)=2.
Cette suite est quand même susceptible de quelques interprétations de dénombrement.
Ainsi, l'on passe de 0000 à 1111, mots extrèmes de degré 4, en dix pas, dits "pas de gray":

0000 0001 0011 0010 0110 0111 0101 0100 1100 1101 1111.

\

Exercice 20:

La suite de Pell: 1 3 7 17 41 99 239 577 1393 3363 8119.... (f(n+1)=2f(n)+f(n-1)) sous f(1), f(2)=3 donne un système de numération dans lequel les entiers de la suite

s = 1 3 4 7 8 10 11 17 18 20 21 24 25 27 28 41 42 44 45 48 49 51 52 58 59.....

s'écrivent uniquement avec les caractères 0 ou 1.

Décomposer tout entier comme somme de deux entiers de la suite s,

2=1+1, 5=4+1, 6=3+3, 9=8+1, 12=11+1, 13=10+3, 14=11+3, 15=8+7, 16= 8+8.....

et calculer, pour chaque entier, le nombre de ses représentations comme somme de deux entiers de la suite s.

\

Exercice 21:

Calculer les entiers qui ne peuvent se représenter comme un ou somme de deux entiers de la suite fondamentale de fibonacci, f(n+1)=f(n)+f(n-1), f(1)=1, f(2)=2:

12 17 19 20 25 27 28 30 31 32 33 38 40 41 43 44 45 46 48 49 50 51 52 53 54 59 61...

Il existe parmi ceux-ci des entiers qui ne peuvent s'écrire comme somme de trois entiers de fibonacci:

33 46 51 53 54 67 72...

ou même comme quatre (88...), etc...; les premiers entiers qui ne peuvent s'écrire comme somme de 1,2,3,4 entiers de fibonacci sont 4, 12, 33, 88; le suivant, le premier entier qui ne puisse s'écrire comme somme de 5 entiers de fibonacci, serait-ce 233, et finalement, f(2n+2)-1 serait le premier entier ne pouvant s'écrire comme somme de n entiers de fibonacci. Mais oui, bien sûr!

Les entiers de la suite fondamentale de tribonacci

1 2 4 7 13 24 44 81 149 274 504 927 1705 3136 5768 10609 19513 35890....

sont définis par la récurrence f(n+3)=f(n+2)+f(n+1)+f(n), sous l'iniitalisation f(1)=1, f(2)=2, f(3)=4.

Calculer les entiers qui ne peuvent se représenter comme un ou somme de deux ou trois entiers de la suite de tribonacci :

23 34 36 40 42 43 54 56 60 62 63 65 66 67 71 73 74 76 77 78 79 80 91.....

et comme somme de quatre (67 78 80....)

comme non somme de 1,2,3,4... le premier est 3,10=3+7,23=10+13,67=23+44...

Quel est le plus petit entier qui ne puisse s'écrire comme somme de cinq entiers de la suite fondamentale de la récurrence des entiers de tribonacci ? Serait-ce 67+81=148 ?
Ensuite ? 148+274 ? Vrai ou faux ?

\

Exercice 22:

Lorsque nous avons étudié le noyau du jeu de Whythoff, nous avons partitionné les entiers suivant les suites de fibonacci, une fonction du second degré, $|y^2-x^2-xy|$, demeurant constante sur chaque suite, et nous avons caractérisé le noyau par une inéquation diophantienne de de degré 2.

Soit f une fonction sur les entiers positifs, croissante, telle que f(1)>1, et telle qu'il existe une infinité d'entiers hors de l'image de f. Supposons donc que l'on ait f(i+1)<f(i)+1.

On considère la suite des $f^i(1)$ pour i>0. ($f^0(1)$ peut être assimilé à 1), et cette suite est dite orbite de 1.

Soit i_1 le plus petit entier hors orbite de i_0=1, et l'orbite de i_1, puis i_2 le plus petit entier hors des orbites de i_0 et i_1, d'où l'orbite de i_2, i_3 le plus petit entier hors des orbites de i_0, i_1, i_2, etc...

Si f est la suite fondamentale de fibonacci (1 2 3 5...), on engendre les suites de fibonacci qui recouvrent hyperboliquement le quart de plan.

¿ Que donne ceci avec d'autres suites f ? Ici , issu de f(i)=i+2, le plus petit cas où f(i+1)>f(i)+1:

1 3 7 15 31 63 127 255 511 1023 2047
2 5 11 23 47 95 191 383 767 1535 3071
4 9 19 39 79 159 319 639 1279 2559 5119
6 13 27 55 111 223 447 895 1791 3583 7167
8 17 35 71 143 287 575 1151 2303 4607 9215
10 21 43 87 175 351 703 1407 2815 5631 11263
12 25 51 103 207 415 831 1663 3327 6655 13311 ...

et sa diagonale

1 5 19 55 143 351 831 1919 4351 9727 21503 47103 102399...

\

Exercice 23 (équations et inéquations diophantiennes):

La récurrence de Fibonacci, f(n+1)=f(n)+f(n-1) est une équivalence sur les point du plan ZxZ:
si (i,j) est un couple d'entiers de ZxZ, (j,i+j) et (j-i,i) sont dans la même classe que (i,j).
Seul point isolé: (0,0).
Les classes sont identifiées aux points (i,j) de NxN tels que i<j et j-i>i. Quels sont-ils ?

La fonction $v(i,j)=j^2-i^2-ij$ est constante le long d'une classe: chaque classe approche une trajectoire hyperbolique. En fait, dans le quadrant NxN, le noyau du jeu de Wythoff satisfaisait à v(i,j)<j.
Les classes premières sont telles que v(i,j) soit premier. Quelles sont ces valeurs premières obtenues ?
Comment les classes se factorisent-elles sur les classes premières?

\

Exercice 24:

Exercice 24:

La construction d'un système de numération dont les poids seraient engendrés par la récurrence
$3f(n-1)+5f(n)=f(n+1)$
implique l'initialisation $f(1)=1$, $f(2)=6$, et donc $f(3)==33$, $f(4)=183$....
Calculer les polynômes en i et j des poids successifs pour la récurrence $i.f(n-1)+j.f(n)=f(n+1)$, $i<j$.

\

Exercice 25:

S'il vous prend l'envie baroque de modifier ainsi le système de numération de fibonacci:

0, 1, 01, 11, 001, 101, 011, 0001, 1001, 0101, 1101, 0011, 00001.....
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12.....

en ne provoquant la retenue qu'après la formation de deux caractères consécutifs égaux à 1,
(les mots du langages sont autorisés à posséder au plus deux caractères consécutifs égaux à 1)

les poids $a(n)$ satisfont à $a(1)=1$, $a(2)=2$, $a(3)=4$, $a(n+2)=a(n+1)+a(n)+1$ pour $n>2$;
ce sont 1 2 4 7 12 20 33 54 88..... nombres de fibonacci moins 1,
suite dont la différence première est la suite de fibonacci.

\

Exercices de Programmation: contruire des partitions d'entier, notamment en parts distinctes.

Les décompositions des entiers sur les entiers d'une suite particulière comme nous le faisons dans les systèmes de numération sont des partitions d'entier particulières.

Calculer et tabuler la fonction f(k,n) = le nombre de partitions de l'entier n en k parts distinctes,
càd les suites strictement monotones croissantes de k entiers positifs, de somme n.
Evidemment, f(1,n)=1 pour n>0, et f(n,n(n+1)/2)=1.

Par exemple,

f(4,16) = 9 = Card(1 2 3 10, 1 2 4 9, 1 2 5 8, 1 2 6 7, 1 3 4 8, 1 3 5 7, 1 4 5 6, 2 3 4 7, 2 3 5 6),
f(3,15) = 11 = Card(de 1 2 12 à 1 6 8, de 2 3 10 à 2 6 9, de 3 4 8 à 3 5 7).

Le tout début du tableau:

```
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1  1   1    1   1  1   1   1...
0 0 1 1 2 2 3 3 4 4 5 5 6 6  6   7    7   8  8   9   9...
0 0 0 0 0 1 1 2 3 4 5 7 8 10 12 14 16 19 21 24...
0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 2 3  5   6    9 11 15 18 23...
                                                          .........
```
maximum à n fixé: 1 1 1 1 2 2 3 3 4 4 5 7 8 10 12 14 16 19 21 24 27 34 39 47 54 64 72 84..

Considérer attentivement la procédure récursive f qui suit, sans passage de paramètre, laquelle énumère les partitions de l'entier n en k parts distinctes, dont la plus petite part est au moins v.
D'une partition à la suivante, seules les parts modifiées (les plus grandes) sont imprimées.

```
k:=?:n:=?:v:=?:f:end:
sub f:
if n>=k*v+k*(k-1)/2 then if k=1 and v<=n then print n:else
print v;:n:=n-v:k:=k-1:v:=v+1:f:v:=v-1:k:=k+1:n:=n+v:v:=v+1:f:v:=v-1:endif:endif:
return:
```

ou, un peu plus rapide, en gérant les variations de k*v+k*(k-1)/2,

```
k:=,: n:=?: v=?: r=k*v+k*(k-1)/2: f : end:
sub f:
if n>=r then if k=1 and v<=n then print n: else
print v;:r:=r-v:n:=n-v:k:=k-1:v:=v+1: f :r:=r+v+k:k:=k+1:n:=n+v-1: f :v:=v-1:r:=r-k:endif:endif:
return:
```

Dans v, les parts successives (l'impression "print v;:" ne provoque pas de retour à la ligne).
Ce programme construit explicitement, une à une, dans l'ordre alphabétique, les partitions de l'entier en parts distinctes. Ce programme peut, par petites modifications, donner bien d'autres choses, par exemple, les partitions d'entier en parts distinctes et impaires, ou en parts paires.

Le produit des parts est une fonction croissante de l'ordre alphabétique.
Vous pouvez modifier judicieusement le programme pour calculer les partitions en parts distinctes constituées (par exemple) d'entiers premiers:

1 0 1 1 0 2 0 2 1 1 2 1 2 2 2 2 3 2 4 3 4 4 4 5 5 5 6 5 6 7 6 9 7 9 9 9 11 11 11 13 12 14 15...

et même engendrer les partitions d'entiers en parts distinctes prises dans une suite s(j).

En abandonnant le paramètre en k, on s'affranchit de toute condition sur le nombre de parts, par exemple pour calculer le nombre de partitions d'entier en parts contituées d'entiers premiers, distincts ou non.
Pour chaque entier, on calculera au passage la fonction "nombre de décompositions comme somme

d'entiers distincts", que l'on vérifiera par la série génératrice
"produit des $(1+x^{p(i)})$, pour p(i)=i-ème entier premier, i>0, p(1)=2", et dont voici le début:

1 0 1 1 0 2 0 2 1 1 2 1 2 2 2 2 3 2 4 3 4 4 4 5 5 5 6 5 6 7 6 9 7 9 9 9 11 11 11 13 12 14 15 15 17 16

Voici le tableau t(k*(k+1)/2+j,k)=f(n,k,1), en ligne k (k de 1 à 12) et colonne j (j de 0 à 20):

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 2 2 3 3 4 4 5 5 6 6 7 7 8 8 9 9 10 10 11
1 1 2 3 4 5 7 8 10 12 14 16 19 21 24 27 30 33 37 40 44
1 1 2 3 5 6 9 11 15 18 23 27 34 39 47 54 64 72 84 94 108
1 1 2 3 5 7 10 13 18 23 30 37 47 57 70 84 101 119 141 164 192
1 1 2 3 5 7 11 14 20 26 35 44 58 71 90 110 136 163 199 235 282
1 1 2 3 5 7 11 15 21 28 38 49 65 82 105 131 164 201 248 300 364
1 1 2 3 5 7 11 15 22 29 40 52 70 89 116 146 186 230 288 352 434
1 1 2 3 5 7 11 15 22 30 41 54 73 94 123 157 201 252 318 393 488
1 1 2 3 5 7 11 15 22 30 42 55 75 97 128 164 212 267 340 423 530
1 1 2 3 5 7 11 15 22 30 42 56 76 99 131 169 219 278 355 445 560
1 1 2 3 5 7 11 15 22 30 42 56 77 100 133 172 224 285 366 460 582

La suite vers laquelle l'on converge lorsque k augmente (la k-ième ligne en donne k termes):

1 2 3 5 7 11 15 22 30 42 56 77 101 135 176 231...
(de différence première 1 1 2 2 4 4 7 8 12 14 21 24 34 41 55...)

ce qui n'est que le nombre de partitions de l'entier en parts quelconques,
fonction dont la série génératrice est le produit des $(x^n)^*$, pour n>0. Nous avons ci-dessus une suite d'approximations rationelles de la série non rationnelle $(\prod (e-x^j)^{-1}$, pour j>0) par les séries rationnelles $s_k = (\prod (e-x^j)^{-1}$, pour $0<j\leq k$).
La même suite limite non rationnelle est également obtenue, bien sûr, en sommant les éléments de ce tableau suivant les diagonales: (somme des t(i,j), à i+j constant).

Il est immédiat que le nombre de partitions de n+k(k+1)/2 en parts distinctes est égal au nombre de partitions de n en k parts au plus.

Enfin, signalons que les partitions d'entier en parts distinctes impaires sont en même nombre que les partitions d'entier qui sont leur propre duale:

1 1 0 1 1 1 1 1 2 2 2 2 3 3 3 4 5 5 5 6 7 8 8 9 11 12 12 14 16 17 18 20 23 25 26 29 33 35...

coefficient de la série génératrice "produit des $(1+x^{2n+1})$ pour $n\geq 0$".
Par exemple, alors qu'il y a 169 partitions de l'entier 34 en 4 parts distinctes, il y a 18 partitions de l'entier 34 en 4 parts impaires distinctes:

25 5 3 1 ; 23 7 3 1 ; 21 9 3 1 ; 19 11 3 1 ; 17 13 3 1 ; 21 7 5 1 ; 19 9 5 1 ; 17 11 5 1 ; 15 13 5 1 ;
17 9 7 1 ; 15 11 7 1 ; 13 11 9 1 ; 19 7 5 3 ; 17 9 5 3 ; 15 11 5 3 ; 15 9 7 3 ; 13 11 7 3 ; 13 9 7 5 ;

et il y en a 11 en parts distinctes paires:

22 6 4 2 ; 20 8 4 2 ; 18 10 4 2 ; 16 12 4 2 ; 18 8 6 2 ; 16 10 6 2 ; 14 12 6 2 ; 14 10 8 2 ; 16 8 6 4 ;
14 10 6 4 ; 12 10 8 4 ;

toutes partitions aisément et rapidement calculables par le programme récursif ci-dessus, modifié en conséquence.

\

Exercice 26 (problèmes de partage, programmation):

Construire et compter les partitions de l'ensemble [n] en k parties lexicographiquement ordonnées telles que la somme des éléments de chaque partie soit la même (partage équitable); n(n+1)/2 doit donc être multiple de k. Par exemple, pour n=5 et k=3, (1 4, 2 3, 5) est une solution.
Quelques situations sont simples: [6] ne peut se diviser qu'en (1 6, 2 5, 3 4).
On calculera le tableau f(n,k) du nombre de partages équitables de [n] en k parties (ordonnées).

Plus généralement, écrire un programme énumérant les solutions du problème suivant:
étant donné une suite non décroissante d'entiers, i(1)≤ i(2)....≤i(j), de somme s=i(1)+i(2)...+i(j) nécessairement multiple de k, il s'agit de répartir ces entiers insécables en k parties telles que la somme soit constante sur chaque partie, s/k. \

Exercice 27 (tout petit programme):

Construire la fonction: nombre f(n) de partitions de l'entier n≥0 comme somme d'entiers de la suite fondamentale de fibonacci (1 2 3 5 8...):

1 1 2 3 4 6 8 10 14 17 22 27 33 41 49 59 71 83 99 115 134 157 180 208 239 272 312 353 400...

f(0)=1=f(1); f(2)=1; f(3)=2; f(4)=1, à savoir 1+1+1+1, 2+2, 2+1+1, 3+1; ....

Cela se fera par les deux boucles imbriquées que voici,

Pour i de 1 à n: v:=f(i): Pour j de 0 à m-v: w:=j+v: t(w):=t(w)+t(j): Finpour: Finpour:,

où f est la suite de fibonacci, et t(j), pour j de 0 à m, est initialisé par 0, excepté t(0):=1.
Vous trouverez que le quinzième entier de fibonacci, 987, peut se décomposer de 902438020514 manières comme somme d'entiers de fibonacci.

Avec la suite de Pell, f(1)=1, f(2)=3, f(i)=2*f(i-1)+f(i-2), le nombre de partitions d'entier en entiers de Pell est 1 1 1 2 2 2 3 4 4 5 6 6 7 8 9 10 11 13 14 15 17 19 20 22 25 26 28 31 33 35 38 41...

Evidemment, avec f(i)=i, on obtient la totalité des partitions d'entier:
1 1 2 3 5 7 11 15 22 30 42 56 77 101 135 176 231 297 385 490 627 792 1002 1255 1575 1958...

Et les partitions d'entiers comme somme d'entiers premiers (2,3,5,7,11....):
1 0 1 1 1 2 2 3 3 4 5 6 7 9 10 12 14 17 19 23 26 30 35 40 46 52 60 67 77 87...

Les partitions d'entier en parts de tribonacci f(i)=f(i-1)+f(i-2)+f(i-3) sous f(1)=1, f(2)=2, f(3)=4:
1 1 2 2 4 4 6 7 10 11 14 16 20 23 28 32 38 43 50 56 65 73 83 92 105 116 131 144 163 178 199...

Les partitions d'entier en parts de catalan, f(1)=1, f(2)=2, f(3)=5... 1 1 2 2 3 4 5 6 7 8 10 11 13 14 17 19 22 24 27 30 34 37 41 44 49 53 58 62 68 73 80 85 92 98 106 113 121 128....

Les partitions d'entier en parts de quadribonacci (1 2 4 8 15 29....)
1 1 2 2 4 4 6 6 10 10 14 14 20 20 26 27 36 37 46 48 60 62 74 78 94 98 114 120 140...

Les partitions d'entier en parts $f(i)=2^i$:
1 1 2 2 4 4 6 6 10 10 14 14 20 20 26 26 36 36 46 46 60 60 74 74 94 94 114 114 140 140...
en parts $f(i)=3^i$:
1 1 1 2 2 2 3 3 3 5 5 5 7 7 7 9 9 9 12 12 12 15 15 15 18 18 18 23 23 23 28 28 28 33 33 33 40...

Puis, compter le nombre de partitions de l'entier n comme somme d'entiers distincts de ces suites.

Remarquer, même si la méthode n'est pas très efficace, qu'il suffit d'inverser le sens de parcours de la seconde boucle du programme:

Pour i de 1 à n: v:=f(i): Pour j de m-v à 0: w:=j+v: t(w):=t(w)+t(j): Finpour: Finpour:,

pour obtenir le début de ces suites de décompositions en éléments distincts:

1 1 1 2 1 2 2 1 3 2 2 3 1 3 3 2 4 2 3 3 1 4 3 3 5 2 4 4 2 5 3 3 4 1 4 (récurrence de fibonacci)
1 1 1 2 2 3 4 5 6 8 10 12 15 18 22 27 32 38 46 54 64 76 89 104 122 (somme d'entiers distincts)
1 1 0 1 1 0 0 1 1 0 1 1 0 0 0 0 0 1 1 0 1 1 0 0 1 1 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 01 (récurrence de pell)
(serait-ce qu'il n'y a pas d'entier admettant deux décompositions en entiers de pell distincts ?)

1 0 1 1 0 2 0 2 1 1 2 1 2 2 2 2 3 2 4 3 4 4 4 5 5 5 6 5 6 7 6 9 7 9 9 9 11 11 (somme d'entiers premiers)
1111011110000011110111100000000000000000000111101111000001111011110000000 (catalan)

et pour la récurrence de tribonacci, initialisée comme ci-dessus (correspondant à la bonne initialisation pour en faire les poids d'un système de numération):
111111121111122111112111222211121111122111113222222311111221111121112222111......
le plus petit entier admettant k partitions distinctes en poids de tribonacci distincts:
0 7 44 88 281 511 1015 1749 3180 3224 5856 6279 10890 11624 19794 20024 36401 36438 ......
le plus petit entier admettant k partitions en poids de quadribonacci distincts (1 2 4 8 15 29...)
0 15 208 416 2887 5551 11087 20985 76632 76840 147728 152863...
le plus petit entier admettant k partitions distinctes en poids de fibonacci distincts:
0 3 8 16 24 37 58 63 97 105 152 160 168 249 257 270 401 414 435 440 545 647 673...
suite de différence première
3 5 8 8 13 21 5 34 8 47 8 8 81 8 13 131 13 21 5 105 102 26 8 34 63 272 8 34 8 47 8 272 275 8 47...
\

<u>Exercice</u> 28: A propos de **systèmes de poids.-**

Un système de poids est une partition P de l'entier n telle que tout entier de 1 à n puisse être représenté comme somme de parts distinctes de cette partition P: la partition 1+2+3 de 6 est un système de poids.

Avec la suite des poids $f(i)=2^i$, chaque entier admet une unique représentation comme partition d'entiers distincts. Remarquer que le vocabulaire lui-même, qui nomme "poids" la position d'un caractère dans l'écriture d'un entier dans un système de numération, trahit bien la source du problème: il s'agissait bien, initialement, de construire des systèmes de poids, afin de peser des objets.

Un ensemble de k entiers (k poids) tels que les entiers de 1 à n puissent s'écrire comme somme de certains de ces k entiers, un tel système permet de peser de 1 à n. On voit comme la suite des puisssances de 2 convient bien, avec une solution unique, outre le fait que ce système est techniquement assez aisé à réaliser, à l'aide d'une balance équilibrable, afin de couper une masse initiale en deux parts égales, et d'itérer sur l'une des parts, procédé minimisant les erreurs.
On remarquera que la suite de fibonacci (1 2 3 5 8...) fournit un système de poids très acceptable, dans lequel les entiers de fibonacci moins 1 ont une représentation unique.

En fait, pour pouvoir peser avec une balance équilibrée munie de deux plateaux, il n'est pas nécessaire que tout entier soit somme d'entiers de la suite fondamentale, il suffit qu'il soit représentable comme différence de deux entiers représentables dont les supports sont disjoints; en effet, certains poids peuvent être placés sur un plateau de la balance, comme nous nous souvenons d'ailleurs de l'avoir vu faire, et d'autres poids sur l'autre plateau; cela complique un peu, et d'une manière qui n'est pas dénuée d'intérêt, l'algorithme de pesage.

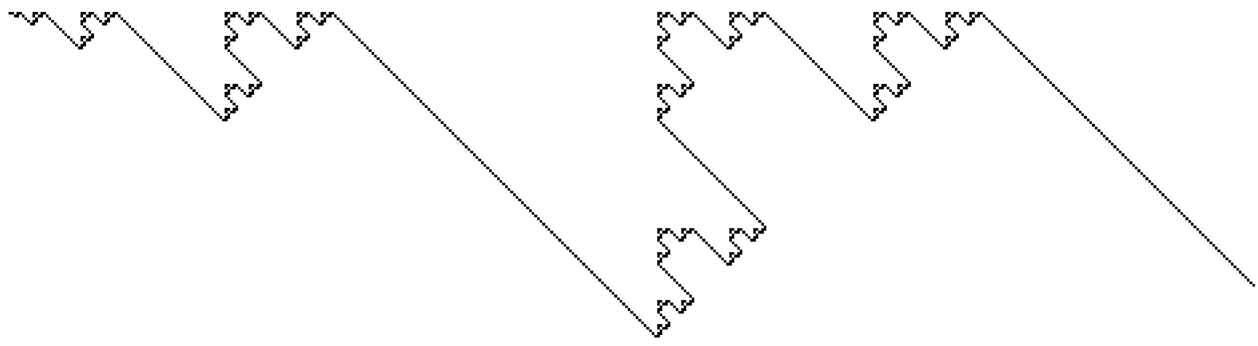
Ainsi, <u>la suite des puissances de 3</u>: 1 3 9 27 ... permet de construire un système de pesage pour lequel <u>chaque entier admet une représentation unique</u>:

1, 3-1, 3, 3+1, 9-3-1, 9-3, 9-3+1, 9-1, 9, 9+1, 9+3-1...

soit, en notant le plus faible poids à gauche, la représentation par des mots sur l'alphabet (0,1-1):

1,-11,01,11,-1-11,0-11,1-11,-101,001,101,-111,011,111,-1-1-11,0-1-11,1-1-11,-10-11...

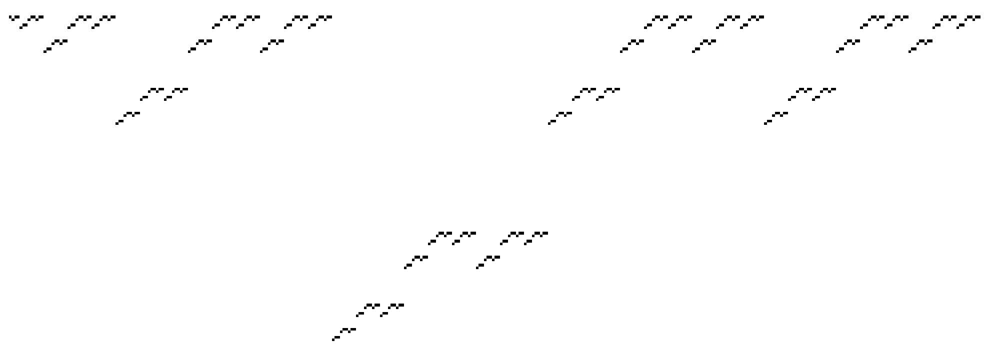
Le caractère de plus faible poids de l'entier n est r= 0,1 ou -1, suivant n modulo 3; alors n=3k+r, et l'on itère sur k. Si n s'écrit 1^j-1m (resp.1^j0m), l'entier suivant n+1 s'écrit $(-1)^j$0m (resp.$(-1)^j$1m).



Avec n+1 poids, 1,3,9...3^n, on peut donc peser de 1 à $(3^{n+1}-1)/2$.
C'est ainsi que l'on s'intéresse aux entiers qui s'écrivent sans le caractère 2 en base 3:
0 1 3 4 9 10 12 13 27 28 30 31 36 37 39 40 81 82 84 85 90 91 93 94 108 109 111 112 117 118...

puisque tout entier n s'écrit d'unique manière comme différence de deux entiers (p,q) de cette suite
(c'est la suite des entiers qui s'écrivent comme partitions en parts -distinctes- de la forme 3^i).
On a donc n=p(n)-q(n). Ci-dessus, la trajectoire des points successifs n —> (p(n),q(n)).

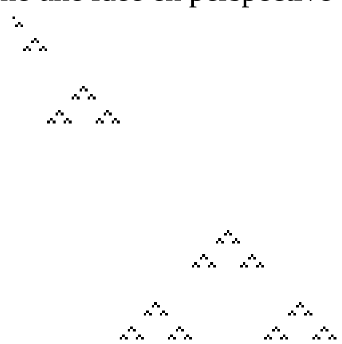
Et le graphe fractal de la fonction q(n), constructible par copie et translations:



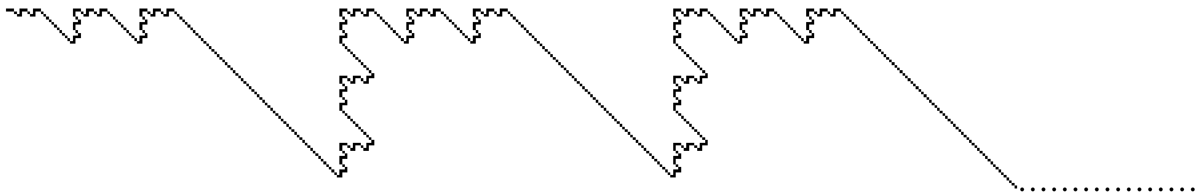
(à la limite, évocation par transformations affines)
Comparer les graphes de p(n) et q(n).

Les entiers positifs sont bijectivement représentés par les mots de $(0,1,-1)^*1$. Les entiers négatifs sont obtenus en changeant le signe de chaque caractère. Comment programmer les opérations élémentaires dans ce système de numération (en commençant par la somme) ?

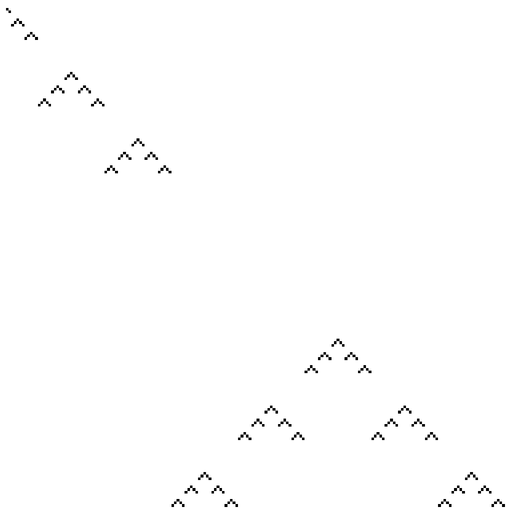
Pour chaque entier n, la part positive, p(n), de sa décomposition:
0 1 3 3 4 9 9 10 9 9 10 12 12 13 27 27 28 27 27 28 30 30 31 27 27 28 27 27 28 30 30 31 36 36...
et la part négative, q(n):
0 0 1 0 0 4 3 3 1 0 0 1 0 0 13 12 12 10 9 9 10 9 9 4 3 3 1 0 0 1 0 0 4 3 3 1 0 0 1 0 0 40 39...
p(n)+q(n) s'écrit également en base 3 sans caractère 2:
0 1 4 3 4 13 12 13 10 9 10 13 12 13 40 39 40 37 36 37 40 39 40 31 30 31 28 27 28 31 30 31 40 39...
Le début du graphe de p(n)+q(n) donne une idée en perspective des problèmes de résolution:



En numération base 5,
construction équivalente par énumération des mots sur (-1,-2,0,1,2), et décomposition n= a(n)-b(n) de tout entier sur les entiers qui s'écrivent sans 3 ni 4 en numération base 5; trajectoire de (a(n),b(n)):



et le graphe de (n,a(n)+b(n)):



\

Exercice 29 (à propos de la conjecture de Goldbach):

Calculer quelques coefficients de la série s= produit des $(1-t^{p(i)})$, où p(i) est le p-ième entier premier:
1 0 -1 -1 0 0 0 0 1 1 0 -1 0 0 0 0 1 0 0 -1 0 0 0 -1 1 1 0 -1 0 -1 0 -1 1 1 1 -1 1 -1 -1 -1 2 0 1 -1 1 0 0...

Cette série s a pour inverse s^{-1}=produit des $(t^{p(i)})^*$, série s^{-1} dont les coefficients comptent les partitions d'entier en entiers premiers. La série s est la différence de deux séries: celles qui comptent les partitions d'entier en un nombre pair (resp. impair) d'entiers premiers distincts.

Calculer le nombre minimum de parts premières en lesquelles tout entier n>1 se peut décomposer:

11212122212122212122212223212122232122212122212223212223212122232122212122232 1..
(27 est le plus petit entier qui nécessite trois premiers, ensuite viennent 35 51 57 65 77 87...)

La conjecture de Goldbach est que tout entier pair (excepté 2) serait somme de deux premiers (deux premiers impairs, sauf le cas de 4).

Soit f(n) le nombre de décompositions de 2n comme somme de deux entiers premiers; peu est connu de cette fonction; la conjecture de Goldbach (dans une lettre de Goldbach à Euler, milieu du 18e siècle) spécifie que cette fonction est strictement positive pour n>1. Le début de cette suite:
1 2 2 2 2 2 3 2 3 3 3 4 3 2 4 3 4 4 3 3 5 4 4 6 4 3 6 3 4 7 4 5 6 3 5 7 6 5 7 5 5 9 5 4 10 4 5 7 4 6 9 6..\

Exercice 30 (une permutation de **N**):

Soit la suite a(1)=1, a(2)=2, a(n+1)=le plus petit entier positif inférieur à a(n) qui ne figure pas dans la suite a(1)....a(n), s'il existe, ou, s'il n'existe pas, a(n)+a(n-1): 1 2 3 5 4 9 7 8 15 11 12 13 14 27...
Maintenant, construire la suite telle que f(n+1) ne soit pas somme de deux entiers distincts (resp. deux entiers consécutifs) qui précèdent.
\

Exercice 31 (quelques cribles):

Les entiers positifs impairs peuvent se définir par le crible suivant: partir de 1 et éliminer tout entier qui est somme de deux entiers (distincts ou identiques) qui précèdent.
En partant de 1,3, construction d'une suite croissante, lorsque l'on élimine les entiers qui sont exprimable comme somme de deux entiers inférieurs distincts, restent les impairs.

Si l'on n'élimine que les entiers qui sont somme de deux entiers distincts qui précèdent,
partant de 1, 2, on obtient la suite 1 2 4 7 10 13 16 19 22 25..... constituée d'entiers qui ne sont pas somme de deux entiers inférieurs distincts de cette liste: à part 2, ces nombres sont congrus à 1 modulo 3.

Elimination des sommes.

En partant de f(1)=a et f(2)=b, entiers quelconques tels que 0<a<b,
établir que la suite strictement croissante
f(n)=le plus petit entier supérieur à f(n-1) qui ne soit pas de la forme f(i)+f(j) avec 0<i<j<n
est de différence première f(n+1)-f(n) ultimement périodique, signe de rationnalité.
Par exemple, a=5, b=10, conduit à la suite des différences premières

5 1 1 1 1 6 8 1 6 1 1 7 8 1 6 1 1 7 8 1 6 1 1 7.........

et pour a=2, b=12,

10 1 3 1 3 1 3 3 4 4 7 4 3 1 3 4 3 4 4 7 4 3 1 3 4 3 4 4 7 4 3...

(il ne s'agit pas du développement en fraction continue de a/b).

En partant de 2,3, on obtient 2 3 4 8 9 14 15 20 21 26 27 32 33 38 39 44 45 50 51 56 57 62 63...
de différences 1 1 4 1 5 1 5 1 5 1 5 1 5 1 ....càd les entiers ultimement congrus à 2 ou 3 modulo 6,
et, en éliminant également les carrés (pour produire f(n), on élimine aussi $f(i)^2$ pour 0<i<n)
2 3 7 8 12 13 17 18 22 23 27 28 32 33 37 38 42 43 47 48 52...
de différences 1 4 1 4 1 4 1 4 1 4 1 4 1 4 1 4 1 4 1....càd les entiers congrus à 2 ou 3 modulo 5.

Elimination des produits.

Maintenant, partant de 2,3,
éliminons de la suite les entiers qui sont le produit de deux entiers distincts qui précèdent:

2 3 4 5 7 9 11 13 16 17 19 23 24 25 29 30 31 37 40 41 42 43 47 49 53 54 56 59 61 66 67 70...

suite dans laquelle figurent nécessairement les nombres premiers,
et la suite des différence premières ne présente pas de période:

1 1 1 2 2 2 2 3 1 2 4 1 1 4 1 1 6 3 1 1 1 4 2 4 1 2 3 2 5 1 3 1 2 5 1 2 2 5 1 8.....

En éliminant également les carrés des éléments qui précèdent, on obtient la suite,

2 3 5 7 8 11 12 13 17 18 19 20 23 27 28 29 30 31 32 37 41 42 43 44 45 47 48 50.....,

de différences premières

1 2 2 1 3 1 1 4 1 1 1 3 4 1 1 1 1 1 5 4 1 1 1 1 2 1 2 2 1 6 2 2 3 1 1 2 1 1 1 2....;

cette suite énumère les entiers dont le nombre de diviseurs premiers (en comptant les multiplicités) est impair.

Il semble curieusement demeurer plus d'éléments dans le cas où l'on élimine aussi les carrés (parmi les entiers inférieurs à 1000, 2000, 4000, on trouve dans un cas 506, 1008, 2024 éléments, ce qui est de l'ordre de la moitié des éléments, et dans l'autre cas, sans éliminer les carrés, 393, 777, 1561).
On peut trouver dans cette suite 9 entiers consécutifs (de 428 à 436).

Problème: dans l'un et l'autre cas, que l'on élimine les carrés ou non, la suite des différences premières est-elle ou non bornée ? En n'éliminant pas les carrés, il y a 3858 entiers inférieurs à 10000, et l'écart maximum entre deux entiers consécutifs est 17. Les records d'écarts, a(n+1)-a(n), sont 1 3 4 6 8 10 12 13 15 17 ... , et sont atteints en n=2 13 19 31 89 139 199 1933 4465 7393...
En éliminant les carrés, on trouvera 5046 éléments inférieurs à 10000, et un écart maximum de 13.

En partant de 2,4, sans éliminer les carrés, on obtient:
2 4 5 6 7 9 11 13 15 16 17 19 21 23 25 27 29 31 33 37 39 40 41 43 47....
et les différences 2 1 1 1 2 2 2 2 1 1 2 2 2 2 2 2 2 2 4 2 1 1 2 4 1 1 2 2 3 1 2 2 6 2 1 1 1 1 6 2....
En partant de 3,5, vous engendrerez 4078 entiers inférieurs à 10000, avec un écart maximum de 16.

Ensuite,
éliminer tout entier produit d'entiers -en nombre quelconque mais distincts- de rangs inférieurs.
Partant de 2,3, on obtient
2 3 4 5 7 9 11 13 16 17 19 23 25 29 31 37 41 43 47 49 53 59 61 67 71 73 79 81 83 89 97 101 103...
et les différences
1 1 1 2 2 2 2 3 1 2 4 2 4 2 6 4 2 4 2 4 6 2 6 4 2 6 2 2 6 8 4 2 4 2 4 8 6 4 6 2 10 2 6 6 4 2...

Il y a alors 1259 entiers inférieurs à 10000, pour un écart maximum de 36 entre deux consécutifs.
Tout entier admet une factorisation unique en entiers distincts de la suite considérée.
On établit aisément que ces nombres sont de la forme $p^{(2\wedge k)}$, où p est premier et k≥0.
Ils diffèrent, au début, peu (seulement en 64) de la suite
2 3 4 5 7 9 11 13 16 17 19 23 25 29 31 37 41 43 47 49 53 59 61 64 67 71 73 79 81 83 89 97 101 103 107 109 113 121 127 131 137 139 149 151 157 163 167 169 173 179 181 191 193 197 199 211...
des entiers $p^{(q-1)}$ où p et q sont premiers, entiers dont le nombre des diviseurs est premier, comportant comme sous-suite celle des entiers dont la somme des diviseurs est premier,
2 4 9 16 25 64 289 729 1681 2401 3481 4096 5041 7921 10201 15625 17161 27889 28561.....

\

Exercice 32 (étude expérimentale d'une suite spéciale; programmer):

Construire la suite définie par la fonction f(0)=1, f(n)=n+max(1, min {i, f(i)=n}) sur les entiers positifs, avec f(n)>n, à l'exception de f(1)=1, dont voici le début:

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 ...
1 1 3 5 5 8 7 13 13 10 19 12 23 20 15 29 17 33 19 29 33 22 43 35 25 49 27 53 29 44 31 61 33 50 ...

où la valeur de f au point n est donc
f(n)=n + le plus petit rang d'une éventuelle occurrence de n dans la suite f, si cette occurrence existe, et f(n)=n+1 si cette occurrence n'existe pas: ainsi, si n n'appartient pas à Im(f), n+1 y appartient.

En tabulant f(n)-n,
1 0 1 2 1 3 1 6 5 1 9 1 11 7 1 14 1 16 1 10 13 1 21 12 1 24 1 26 1 15 1 30 1 17 1 23 1 36 1 38 1...

Contruire la fonction g, "rang de la première apparition de n dans f":
g(n)=min {i, f(i)=n} lorsque n figure dans la suite f, g(n)=0 sinon.
Et la fonction h(n) donnant le nombre d'occurrences de l'entier n:
0 2 0 1 0 2 0 1 1 0 1 0 1 2 0 1 0 1 0 2 1 0 1 1 0 1 0 1 0 3 0 1 0 3 0 2 0 1 0 1 0 1 0 2 1 0 1 0 1 1 1 0...

Les entiers ne figurant dans pas dans l'image de f, 0 2 4 6 9 11 14 16 18 21 24 26 28 30 32 34 36 38 40 42 45 47 51 54 56 59 62 64 66 68 70 72 75 78 82 84 86 88 90 94 96 98 100...
sont de l'ordre de 42,5 pour cent (de même pour ceux qui ne figurent qu'une fois...);

les pairs qui figurent dans l'image de f: 8 10 12 20 22 44 50...leur fréquence est également très stable (de l'ordre de 21,6 pour cent).

Partant de 2, par i:=f(i), on obtient la suite extraite 2 3 5 8 13 20. 33 50. 83 133 200. 333 533 853. 1280. 2133 3413 5120. 8533 12800. 21333 34133 55466 89599 145065 ......
partant de 9: 9 10 19 29 44 73 110 183 293 440 733 1173 1906 3079 4619 7698 12317 18476 30793 46190 76983
partant de 11: 11 12 23 35 58 93 151 227 378 605 983 1475 2213 3320 5533 8300 13833 22133 33200 55333 88533

Quelle est la fréquence des apparitions multiples dans l'image de f; de n=0 à n=100000, le nombre d'entiers qui figurent 0,1,2,3,4,5,6 fois dans cette suite est 42526, 42591, 12400, 2181, 293, 10, 0. Auncun entier n'a figuré 6 fois. Les entiers 9053 9173 11693 17093 19973 22133 39773 71453 73973 87293 figurent 5 fois. Le nombre de fois qu'un entier peut figurer est-il borné ? Qui le sait ?

\

Exercice 32 (proposé par David W Wilson: $1+k+k^2...+k^{f(n)}$ où f(n) nième entier de fibonacci):

Soit, pour k entier positif, la récurrence g(n+1)=s(n)+k*p(n), s(n)=g(n)+g(n-1), p(n)=g(n).g(n-1), sous l'initialisation g(0)=0, g(1)=1. Par exemple, pour k=1, on obtient

0 1 1 3 7 31 255 8191 2097151 17179869183 ....

Ecrire les entiers en numération base k+1. On montrera que la représentation de l'entier g(n) en numération de base k+1 est constituée d'un nombre de 1 qui est f(n), le n-ième entier de la suite f de fibonacci, f(0)=0, f(1)=1, f(n+1)=f(n)+f(n-1), soit l'écriture des entiers de la suite g, en base k+1 :

0 1 1 11 111 11111 11111111 1111111111111......

Qu'en est-il si k n'est pas entier, mais un nombre réel, positif ou non ? Montrer que cela tient encore: en fait, quel que soit k≠0, g(n)=somme des $(k+1)^{i-1}$ pour i de 1 à f(n), soit $g(n) = ((k+1)^{f(n)}-1) / k$.

Par exemple, pour k=-3, g=(0 1 1 -1 3 11 -85 2731 699051 -5726623061....).
Programmer; convergence pour -2<k<0; essayer k=-0.9 .
Pour k>-2, la suite est positive, pour k<-2, un terme sur trois est négatif.

Pour vérifier que $g(n) = ((k+1)^{f(n)}-1) / k$ satisfait bien à la récurrence, on vérifie que

$$k.g(n+1)=k.g(n)+k.g(n-1)+k^2.g(n).g(n-1),$$

car l'on a bien, identiquement,

$$((k+1)^{f(n+1)}-1) = ((k+1)^{f(n)}-1) + ((k+1)^{f(n-1)}-1) + ((k+1)^{f(n)}-1) . ((k+1)^{f(n-1)}-1).$$

Cela tient encore pour k et g(n) pris dans d'autres structures.
Par exemple, que dire de la suite des polynômes $p_0=0$, $p_1=x$, $p_{n+1}=p_{n-1}+p_n+p_{n-1}*p_n$?
\

Exercice 33 (trois récurrences de la forme (p, q):=(i.p+j.q+c, p.q)):

Sous l'initialisation (p,q):=(a,b),
on engendre une suite de polynômes dont les degrés en a et b sont des entiers de la suite de fibonacci.

A.-

Soit le programme itératif:

[récurrence (p,q):=(p+q,pq) sous l'initialisation (p,q):=(1,1)],

calculant en (p,q) la suite des couples d'entiers

(p(n+1), q(n+1))=(p(n)+q(n), p(n).q(n)), sous (p(1),q(1))=(1,1).

Suite des premières valeurs tenues en p:
1 2 3 5 11 41 371 13901 5033531 69782910161...
tandis que la suite tenue en q est la factorielle de la suite tenue en p: 1*2*3*5*11*41*371...

A chaque temps n, les diviseurs de p ou q divisent ensuite pq, mais pas p+q:
p et q demeurent sans diviseur commun, et l'on on a p(n+1)=p(n)+fac(p,n-1),
où fac est le produit factoriel: fac(p,n)=p(n).fac(p,n-1) sous fac(p,0)=1.
Remarquer que la récurrence peut s'écrire p(n+1)-p(n)=p(n-1).(p(n)-p(n-1)).

En calculant modulo k premier, jusqu'à mp nul
[(mp,mq):=((mp+mq) mod k,mp.mq mod k) sous l'initialisation (mp,mq):=(1,1)],

voici l'obtention de quelques entiers premiers qui divisent p(n) (et donc ensuite q(i) pour i>n),
et l'itération (n) à laquelle ils apparaissent:
2 (2), 3 (3), 5 (4), 7 (7), 11 (5), 29 (13), 37 (12), 41 (6), 43 (12), 53 (7), 67 (54), 71 (19), 73 (14), 89 (34), 97 (26), 101 (58), 107 (56), 139 (11), 173 (17), 179 (71), 181 (59), 191 (55), 199 (24), 229 (229), 241 (208), 257 (85), 267 (34), 269 (31), 271 (165), 281 (23)...

Si un entier de la suite q est divisible par p(n), les suivants le sont ensuite, et ceux de la suite p ont toujours le même résidu modulo p(n): par exemple, p(6)=11, et pour n>6, p(n)=8 modulo 11.
Remarquer que 229 apparaît à l'itération 229. Les nombres p(n) sont-ils sans diviseur carré ?

Une interprétation en terme de magma binaire: si p et q sont des ensembles d'arbres binaires,
on engendre les polynômes p(n) et q(n) d'arbres binaires par
[p(n+1);q(n+1)]=[p(n)+q(n);(p(n),q(n))] en partant de l'initialisation [p(1);q(1)]=[x;(x,x)],
soit [p(2);q(2)]=[x+(x,x);(x,(x,x)], [p(3);q(3)]=[x+(x,x)+(x,(x,x);(x,(x,(x,x))+((x,x),(x,(x,x))]...
la suite d'entiers calculée ci-dessus étant le nombre d'arbres engendrés, la suite de fibonacci les degrés des polynômes en x. Ou $[P_{i+1}, Q_{i+1}]=[x+Q_i, (P_i,Q_i)]$ sous $P_0=x$, $Q_0=(x,x)$.

B.-

Soit le programme itératif:

[récurrence (p,q):=(p-q,p.q) sous l'initialisation (p,q):=(-1,2)].
calculant en (p,q) la suite des couples d'entiers
(p(n+1), q(n+1))=(p(n)-q(n), p(n).q(n)), sous (p(0),q(0))=(-1,2).
Suite des premières valeurs positives q(2n) tenues en q, aux temps pairs:
2 6 42 1806 3263442...

A chaque temps n, les diviseurs de p ou q divisent ensuite p.q, mais pas p-q:
p et q demeurent sans diviseur commun, et l'on on a
p(2n)=-1, p(2n+1)=-(1+q(2n)), q(2n+1)=-q(2n), q(2n+2)=q(2n).(q(2n)+1).

La suite s:

La suite s(n+2)=q(2n)+1 sous l'initialisation s(1)=2 porte le nom de Sylvester
2 3 7 43 1807 3263443....
s(1)=2, s(n+1)=1+produit des s(i) pour i de 1 à n,

soit la suite s exprimée en fonction de 2, 1, de la somme et du produit
2, (2+1), (2*(2+1)+1), (2*(2+1)*(2*(2+1)+1)+1),
(2*(2+1)*(2*(2+1)+1)*(2*(2+1)*(2*(2+1)+1)+1)+1)....
ou, en notations polonaises,
2, 21+, 221+*1+, 221+221+*1+**1+, 221+221+*1+221+221+*1+**1+***1+...,
opérant le produit de ceux qui précèdent, suivi de l'addition de 1.

La suite s est parfois qualifiée "d'euclidienne". Ces entiers sont deux à deux sans diviseur commun.
Les diviseurs des entiers de la suite s sont les mêmes que ceux de la suite q.

La somme des inverses:

On vérifie que l'on a 1/s(1)+1/s(2)...+1/s(n-1)=1-1/(s(n)-1),
et cela équivaut à la récurrence qui caractérise la suite s, sous l'initialisation s(1)=2.
La somme des inverses de la suite s converge rapidement vers 1:
1/2+1/(2+1)+1/(2*3+1)+1/(2*3*7+1)+1/(2*3*7*43+1) diffère peu de 1: [de 1/(2*3*7*43*807-1)]
(ce qui appelle une interprétation en termes de probabilités).

En notant S(n)=(somme des x(i)=1/s(i) pour i de 1 à n), P(n)=(produit des x(i)=1/s(i) pour i de 1 à n),
on a, pour tout n>0, S(n)+P(n)=1, soit x(n+1)=(1-S(n))/(1+P(n)), sous l'initialisation x(1).

Les diviseurs premiers:

On cherche les diviseurs premiers k de la suite q, en exploitant le programme itératif
[récurrence (p,q):=(p-q,pq mod k) sous l'initialisation (p,q):=(-1,2)]
tant que q est non nul.
Voici les premières valeurs des nombres premiers k qui divisent un entier de la suite q, et le rang de l'itération (nécessairement pair pour le programme considéré) à laquelle ils apparaissent:
2 (0) 3 (2) 7 (4) 13 (8) 43 (6) 73 (22) 139 (8) 181 (18)...,
laissant augurer que les entiers de la suite q ont des facteurs premiers assez élevés
(on a pire avec l'itération n:=1+n*n sous l'initialisation n:=1).
Les entiers de la suite q seraient-ils sans facteur carré ?

C.

La suite produite par le programme itératif

[récurrence (a,b):=(b+1,a.b) sous l'initalisation (a,b):=(1,1)],
1*2*2*3*5*13*61*(781=11*71)...., b(n+1)=b(n).(b(n-1)+1))

à la recherche des facteurs premiers et de leur rang d'apparition comme facteur de b(n):
2 (2) 3 (4) 5 (5) 7 (20) 11 (8) 13 (6) 17 (31) 19 (12) 23 (13) 29 (44) 31 (96) 37 (32) 41 (10) 43 (16) 47 (144) 53 (75) 59 (138) 61 (7) 67 (43) 71 (8) 73 (61) 79 (37) 83 (284) 89 (74) 97 (252) 101 (48) 103 (120) 107 (296) 109 (102) 113 (274) 127 (91) 131 (84) 137 (144) 139 (191) 149 (267) 151 (167) 157 (134) 163 (183) 167 (37) 173 (126) 179 (324) 181 (240) 191 (408) ...
laisse conjecturer que tout premier finit par diviser les éléments de la suite b.
La série de terme général 1/b(n) converge...

D.

La suite des nombres premiers qui divisent un entier de la suite
$n:=1+n^j$ sous l'initalisation n:=1.
Par exemple, pour j=4, on trouve les premières valeurs, rares, 2 (1) 17 (2) 73 (4)...
tandis que, pour j=5, 2(1)3(2)5(4)7(6)11(2)13(4)17(3)19(13)23(19)29(25)...,
31 est le plus petit nombre premier qui ne divise aucun entier de cette suite.

Par contre n:=1+n+n*n sous n:=1 donne 1 3 13 183 33673 1133904603...
et les diviseurs 3(1) 13(2) 61(3)...
\

<u>Exercice</u> 34 (difficile):

(à propos des nombres réels dont les puissances convergent vers les entiers)

A. (les puissances du nombre d'or; la suite de Lucas)

Le nombre d'or positif x tel que x^2=1+x=f(0)+f(1).x admet pour puissances
x^n=f(n-2)+f(n-1).x,
où la suite f(i) est la suite fondamentale de fibonacci, f(0)=f(1)=1, f(n+1)=f(n-1)+f(n).

Comme le nombre d'or $x=1+1/x$ est très bien approché par $f(n)/f(n-1)$, alternativement par excès et par défaut (et l'on sait de quelle manière: $f(n+1).f(n-1)-f(n)^2$ vaut alternativement 1 et -1),
x^n est très bien approché par l'entier $f(n-2)+f(n)$, alternativement par excès et par défaut.
La suite de Lucas $l(n)=f(n+1)+f(n-1)$ satisfait à la même récurrence que la suite f fondamentale de fibonacci, $l(n+1)=l(n)+l(n-1)$, sous l'initialisation $l(1)=1$, $l(2)=3$, soit 1 3 4 7 11 18 29...

Expérimentalement, en machine, les calculs étant menés en flottant, x initialisé par $(1+5^{1/2})/2$, à partir de quel rang la suite des parties entières $\mathrm{Int}(x^n+0.5)$ diffère-t-elle de la suite de Lucas, du fait des erreurs d'approximation initiale, troncatures, arrondis ?

De même, avec la récurrence de Pell, $f(n-1)+2f(n)=f(n+1)$, $f(0)=1$, $f(1)=2$, $x^2=1+2x$, $x=1+2^{1/2}$, on obtient $f(n+1)+f(n-1)$ pour les parties entières $\mathrm{Int}(x^n+0.5)$:

(6 14 34 82 198 478 1154 2786 6726 16238 39202 94642 228486 551614 1331714....)

On examinera le cas trivial $x^2=2+x$.
(les récurrences linéaires sur les entiers sont définies par un polynôme, caractéristique d'une application linéaire qui se comporte comme sa plus grande valeur propre).

La question générale est celle de l'étude et de la caractérisation des nombres réels positifs x tels que la suite des puissances successives de x tende vers des entiers (càd que la suite d'entiers $g_x(n)$=entier le plus voisin de x^n, est telle que $g_x(n)-x^n$ tende vers 0; la suite $g_x(n)$ porte le nom de "suite de Pisot");
nous dirons que x^n tend vers **N**
(il a été établi que x est alors l'unique raçine de module supérieur à 1 d'un polynôme).

Soit L le langage des nombres réels positifs dont les puissances tendent vers N. Si x appartient à L, les puissances de x appartiennent à L, mais pas nécessairement $x^{1/2}$: on vérifiera que la racine du nombre d'or n'appartient pas à L: en ce sens, il existe donc des éléments minimaux, x dans L, non puissance d'un élément de L.
Qu'en est-il dans le plan complexe ?

B.

On cherche à approcher les puissances d'un nombre réel de deux manières:

a) par une récurrence linéaire: ainsi, $f(n+1)=f(n)+f(n-1)$ sous $f(o)=1$, $f(1)=1$ donne des entiers dont le rapport approche x: $(x^2=1+x)$.

b) par des calculs en entiers et parties entières: ainsi, le programme symptomatique

(initialisation a:=3: b:=5:, itération c:=int(0.5+b*b/a): a:=b: b:=c:)

donne également la suite de fibonacci.
(en fait, voir ce que donne ce programme, dans telle ou telle machine, avec diverses initialisations: sur certaines, il y a convergence vers le point fixe 2^31 -1);
Quelle que soit la suite $f(n+1)=f(n)+f(n-1)$ initialisée par $0<f(0)<f(1)$, il existe un entier k à partir duquel cette suite ne diffère pas de celle obtenue par l'itération (c:=int(0.5+b*b/a): a:=b: b:=c:).
Bien que ces suites d'arrondis diffèrent peu de récurrences linéaires,
il est connu que (voir l'encyclopédie des suites d'entiers)
-la suite $f(n)=22.f(n-1)-3.f(n-2)+18.f(n-3)-11.f(n-4)$, sous l'initialisation 10, 219, 4796, 105030
-et la suite "g(n+1)=partie entière de $0.5+ g(n)^2/g(n-1)$, sous l'initialisation 10, 219",
ne diffèrent qu'au terme de rang 1403 (!!!).

Les suites d'entiers telles que $g(n+1)$ soit voisin de $g(n)^2/g(n-1)$ par arrondi, soit à l'entier le plus voisin, soit à l'entier inférieur ou supérieur, sont appelées "suites de Pisot".
Nous sommes à la recherche des points de départ minimaux, couples d'entiers, dont il peut y avoir intérêt à produire un certain catalogue. Là, il y a du boulot!
Nous aurons une préférence pour l'arrondi à l'entier le plus voisin,
ou encore: g(n+1) choisi tel que $|h(n)=g(n)^2-g(n+1)g(n-1)|$ soit minimal.

Cette forme quadratique est de valeur absolue constante sur les suites de fibonacci, définies par la récurrence linéaire quadratique g(n+1)=g(n)+g(n-1), mais pas seulement, loin de là:
par exemple, partir de (3,10), le caractère suivant 33, 10*10-3*33=1,... on obtient la suite
3 10 33 109 360 1189 3927 12970 42837 141481 467280 1543321 5097243 16835050....
et h(n)= +1, -1, alternativement.

On s'intéressera aux suites telles que **|h(n)|** soit constant, et spécialement au cas **|h(n)|=1.**
On trouvera environ 4000 point de départs (a,b), 1<a<b<400 de suites telles que |h(n)|=1.

Avec g(n+1)=partie entière de 0.5+ $g(n)^2/g(n-1)$, sous l'initialisation (3, 7), on obtient
3 7 16 37 86 200 465 1081 2513 5842 13581 31572 73396 170625 396655 922111...
avec, pour $h(n)=g(n+1)g(n-1)-g(n)^2$,
-1 3 7 4 -10 -25 -16 33 89 63 -108 -316 -245 350 1119 943 -1121 -3952 -3598...
et à partir de (4,7), 4 7 12 21 37 65 114 200 351 616..., h(n)=-1 3 3 -4 -7 4 14 -1 -25 -9 40 33 -56..;
on ne tombe dans la suite de Lucas qu'à partir de (11,18), où h(n) vaut alternativement +5 et -5.

Il y a quelque intérêt à tabuler les valeurs de h(n), initialisation (a,b).
Par exemple, la suite initialisée par (a,a+k), pour $a>2*k^2$, donne $h(n)=g(n)^2-g(n-1)*g(n+1)=k^2$, et dans ce cas, le rapport g(n+1)/g(n) tend vers 1.

On ne s'intéressera aux initialisations basses:
(g(1)=a, g(2)=a+k) pour $a\leq 2*k^2$, et à la limite l(g) des rapports g(n+1)/g(n).

Ainsi, (g(1),g(2))=(5,12), $h(n)=(-1)^n$, $l(g)=1+2^{1/2}$; (g(1),g(2))=(7,17), $h(n)=(-2)^n$, $l(g)=1+2^{1/2}$.

Il n'est pas nécessaire que h(n) soit borné pour que la limite l(g) soit finie:
voir, par exemple, (g(1),g(2))=(2,15), $h(n)=(-1)^n.4^n$.

Il est connu que les suites de Pisot initialisées par (2,a) ou (3,a) satisfont à des récurrences linéaires.
\

Exercice 35 (à propos de celui qui précède, exemples de suites g; petite transformation hk...):
A.-
L'initialisation (2,7) pour le calcul de g conduit à la suite
2 7 25 89 317 1129 4021 14321 51005 181657.....
où **a(n) = 3a(n-1) + 2a(n-2)**, a(0)=2, a(1)=7 ;
et h=1 -2 4 -8 16 -32 64 -128 256 -512 1024...

Cette suite compte les parties de [2n+1] (représentées par des mots croissants) telles que si l'entier pair 2k figure, des impairs voisins 2k-1 et 2k+1, l'un au moins figure.
[1]:e,1 [3]: seule la partie réduite à 2 ne satisfait pas à la contrainte
[5]: parmi les 32 parties, 7 exclues: 2, 4, 24, 124, 245, 14, 25...
ensuite, 39 parties sont exclues: 2^(2n+1)-a(n):
0 1 7 39 195 919 4171 18447 80067 342631 1450171 6084351 25347699...
Démonstration:
-les mots qui ne comportent ni 2n+1 ni 2n, ou seulement 2n+1, ou 2n et 2n+1 ne posent pas de problème: il sont comptées par 3a(n-1)
-les mots qui comportent 2n sans 2n+1 sont comptés par 2a(n-2): en effet, cela impose 2n-1 devant 2n, et deux cas se présentent: on trouve ou non 2n-2 devant 2n-1, mais peu importe, il y a devant un des a(n-2) mots.

La récurrence est identique (a(n) = 3a(n-1) + 2a(n-2)) pour les parties de [2n], et elle est encore la même pour les parties de [2n+1] telles que si 2k+1 figure, de 2k et 2k+2, un au moins figure;
les deux cas sur [2n] sont naturellement en bijection, et l'on a trois initialisations, (1,3), (1,5), (2,7) pour la même récurrence. On approche ainsi la plus grande raçine de r^2=3r+2.
Les trois suites (pour les quelles h prend des valeurs puissances de 2 alternées)
1 3 11 **39 139...,** 1 5 17 61 217 **773 2753...** , **2 7** 25 89....,
coïncident avec les suites arrondis de l'exercice qui précède en partant de
(2,7), (39,139), et (773,2753).

B.-
Initialiser la suite g par (f(n),f(n+1)+-1), où f est la suite fondamentale de fibonacci.

21 35 58=35+21+2=g(2)+g(1)+f(2) 96=58+35+3 159=96+58+5 263=159+96+8
435=263+159+13 719=435+263+21 1188=719+435+34 1963 3244 5361 8860 14643...

21 33   52=33+21-2 82=52+33-3 129=82+52-5 203=129+82-8 319=203+129-13 501 787...

34 56 92=90+2 151=90+56+3 248=151+92+5 407 668 1096 1798 2950...

34 54 86=54+34-2 137=86+56-3 218=137+86-5 347 552 878 1397...

C.-
Quelques exemples de suites de Pisot satisfaisant à des récurences probablement valables.
En tête le couple de départ, suivi des coefficients de la récurrence.
Ainsi, 3 16: 5 2 -2 +2; signifie que la suite de Pisot d'origine (3,16) est supposée satisfaire à la récurrence   f(n)=5f(n-1)+2f(n-2)-2f(n-3)+2f(n-4):
3 5: 1 1; 3 7: 3 -2 1;   3 8: 3 -1; 3 10: 3 1;   3 11: 3 2 1; 3 13: 5 -3
3 14: 4 3;   3 16: 5 2 -2 +2; 3 17: 6 -2;   3 19: 6 3; 3 20: 6 4 2
2 9: 5 -2; 2 7: 3 2; 2 5: 3 -1;.......

Exemples de points de départ (a,b), hors cas triviaux et suite de fibonacci
(toute suite de fibonacci, comme toute suite d'entiers positifs de récurrence linéaire, quel que soit son point de départ finit par une suite de Pisot, mais pas probablement pas inversement),
conduisant à une forme
|h|=1:   (3,10) et f(n+1)=3f(n)+f(n-1), (5,12) et f(n+1)=2f(n)+f(n-1), (4,17) et f(n+1)=4f(n)+f(n-1), (4,15) et f(n+1)=4f(n)-f(n-1)...
|h|=2: (7,17) et f(n+1)=2f(n)+f(n-1), (11,41) et f(n+1)=4f(n)-f(n-1),
|h|=3: (7,23) et f(n+1)=3f(n)+f(n-1), (7,26) et f(n+1)=4f(n)-f(n-1), (13,43) et f(n+1)=3f(n)+f(n-1), (19,91) et f(n+1)=5f(n)-f(n-1)...

Certaines de ces suites s'écrivent simplement dans des systèmes de numération associés. Par exemple, la suite de Pisot issue de (5,12) satisfait à la récurrence f(n+1)=2f(n)+f(n-1) (le rapport de deux entiers successifs tend donc vers $1+2^{1/2}$), les entiers 5 et 12 s'écrivent respectivement 21 et 211 dans le système de numération associé (faibles poids à gauche), et les entiers successifs de la suite de Pisot s'écrivent 2111, 21111...etc...
Pour (41,99), c'est encore plus sympathique, puisque 41 s'écrit 00001, 99 s'écrit 000001, et les entiers suivants 0000001, 00000001.......

A propos des suites de fibonacci. En partant d'un couple quelconque (a,b) et en suivant la suite de fibonacci (a,b):=(b,a+b) issue de cette initialisation, en écrivant les entiers en numération fibonacci, à partir d'un certain rang caractérisé par |b*b-a*(a+b)|<b, le passage des entiers aux suivants se fait par simple décalage de la décomposition sur les entiers de la suite fondamentale de fibonacci.
<u>Est-ce à ce rang que la suite devient une suite de Pisot</u> ?

Par exemple, partant de (9,19), la suite de fibonacci est 9 19 28 47 75 122.... entiers que l'on écrira en numération fibonacci, tandis que la suite de Pisot issue de (75,122) coïncide avec cette suite de fibonacci, et 122*122-75*(75+122)=109<122 (on tombe alors dans le noyau d'un jeu de Nim bien connu). L'entier 122+75=197 s'écrit 10010101001 en numération fibonacci, et les entiers suivants de cette suite de fibonacci s'obtiennent par décalage: le suivant, 319=122+197, s'écrit 010010101001, puis 0010010101001...etc...

Qu'en est-il pour d'autres récurrences ? En va-t-il de même avec la récurrence f(n+1)=2f(n)+f(n-1) ?
Par exemple, vérifier que la suite de Pell 6 7 20 47 114 275 664 devient suite de Pisot à partir de (275,664), avec h=+-71. Et que la suite fondamentale de Pell, 1 3 7 17 41 99 239 577... est de Pisot à partir de (7,17). On écrira les entiers dans le système de numération correspondant.

Il est remarquable que nombre de suites de Pisot soient telles que |h|=constante, souvent alterné,
et nombre d'autres de la forme $|h(n)|=k^n$.

Question ouverte: existe-t-il pour chaque entier k une suite de Pisot avec |h|=k ?

La suite de Pisot issue de (8,10) satisfait à une récurrence linéaire, a(n) = a(n-1) + a(n-6), jusqu'au terme de rang 38, où l'on a, soudain, a(38)=110155 = 85711 + 24445 - 1 = a(37) + a(32) - 1, et la question est ouverte de savoir si cette suite satisfait ultérieurement à quelque récurrence linéaire. Cet échappement est expliqué par l'examen des raçines de l'équation caractéristique $x^6=x^5+1$.

Toute suite croissante d'entiers satisfaisant à une récurrence linéaire (et y en a-t-il d'autres, non linéaires qui recouvrent raisonnablement les suites de Pisot) se termine-t-elle en suite de Pisot, ou celà dépend-t-il des raçines du polynôme caractéristique de la récurrence linéaire ?
Qu'en est-il des suites de Pisot qui ne satisfont à aucune récurrence linéaire ? Il a été établi que ces suites, dont le rapport de deux entiers consécutifs tend quand même nécessairement ver une limite r, donnent un ensemble de limites denses dans l'ensemble des réels supérieurs au nombre d'or. Ce qui ne signifie pas qu'il n'y a rien à dire de ces récurrences.

La suite de Pisot issue de (3,10) semble satisfaire à

$$f(n+1)=3f(n)+f(n-1), \text{ avec } h(n)=(-1)^n,$$

tandis que celle issue de (7,24) semble bien satisfaire à

$$f(n+1)=4f(n)-2f(n-1)=3f(n)+f(n-1).....+f(0), \text{ avec } h(n)=2^n,$$

[partant de (7,23), on a f(n+1)=3f(n)+f(n-2), |h|=3, et de (7,25), f(n+1)=3f(n)+2f(n-2), $h(n)=(-2)^n$].
f(n+1)=3f(n)-f(n-1) conduit également à des suites de Pisot,
par exemple 0 1 4 11 29 76 199 521 1364 3571 9349... à partir de (4,11), avec h=5.
et (4,6) conduit à f(n+1)=f(n)+f(n-1)-1.
Etudier donc les suites telles que f(n+1)=f(n)+f(n-1)+1 (ou -1);
Ainsi, 0 1 2 4 7 12 20 33 54 88 143 232 376 609.... de Pisot à partir de (12,20),
et 1 1 3 5 9 15 25 41 67 109 177 287 465 753 1219.... à partir de (25,41).

La transformation hk qui envoie la série s=somme des $s(n).x^n$ pour n≥0, sur la série

$$t=\text{somme des } t(n-1).x^{n-1} \text{ pour } n>0, \text{ où } t(n-1)=s(n-1).s(n+1)-s(n)^2$$

est appelée "petite transformation de Hankel", hk(s)=t.
Par exemple, la série de catalan $c=e+x.c^2$ a pour transformée la série de terme général

$$t(n-1) = 6\ (2n)!\ (2n-2)!\ /\ (\ (n-1)!\ n!\ (n+1)!\ (n+2)!\ ).$$

La série (somme des j^n) a pour transformée 0, quel que soit j.
On s'intéresse spécialement aux séries s telles $hk(s)=x^*$, et, plus généralement, $hk(s)=(jx)^*$, dont il semble bien que nous ayons quelques exemples ci-dessus.

Pour dire "important", "conséquent" a été détourné; ça ne suffisait pas, voici "exponentiel".
Plus le peuple va à l'école, moins il est instruit; comme les pédagogues en ont trouvé la raison (c'est qu'il s'y emmerde, le peuple), nous allons transformer les écoles publiques en CDJ (clubs de distractions et de jeux).
Comment savoir si une suite s(n), n≥0, est de type exponentiel ?
Convenons qu'elle l'est, strictement, si $s(n-1).s(n+1)=s(n)^2$ pour tout n>0.
Ceci, d'ailleurs, entraîne $s(n-i).s(n+i)=s(n)^2$ pour tout i>0, n>i-1.
Les suites f_i: $f_i(n)=s(n)^2-s(n-i).s(n+i)$, sont-elles indicatrices de la mesure dans laquelle s est relativement exponentielle ?
La plus simple des suites d'entiers oscillant autour d'une exponentielle, la suite de fibonacci:

1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89... suite s, ici suite de fibonacci fondamentale
1 1 4 9 25 64 169 441 1156 3025 7921... suit des carrés carrés
2 3 10 24 65 168 442 1155 3026... produits à distance 2: $|f_1|$ vaut 1
5 8 26 63 170 440 1157.... produits à distance 4: $|f_1|$ vaut 1
13 21 68 165 445... produits à distance 6: $|f_1|$ vaut 4, carré de 2
34 55 178....produits à distance 8: $|f_1|$ vaut 9, carré de 3
89...produits à distance 10: $|f_1|$ vaut 25, carré de 5....

Maintenant les produits de deux éléments à distance impaire
1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89...
1 2 6 15 40 104 273 714 1870 4895... distance 1: somme des premiers carrés de la suite s
3 5 16 39 105 272 715 1869....distance 3: diffère de +-1 de la somme des carrés
8 13 42 102 275 712... distance 5: diffère de +-2 de la somme des carrés
21 34 110 267... distance 7: diffère de +-6=2*3
55 89...distance 9: diffère de +-15=3*5...

\

Exercice 36:

Extraction de k-uplets d'éléments consécutifs,
de l'ensemble des entiers modulo n (assimilé aux entiers de 0 à n-1).

Pour k=2, on trouve les nombres de Lucas; par exemple, pour n=4 et k=2, on a les 7 configurations
(vide), (01), (12), (23), (30), (01,23), (12,30).

Le cas général conduit à la récurrence:
$f_k(n) = f_k(n-1) + f_k(n-k)$, sous l'initialisation $f_k(n) = 1$ pour n de 1 à k-1, et $f_k(k) = k+1$.
La fonction génératrice de la suite f_k est $(x+k*x^k)/(1-x-x^k)$=somme formelle sur n des $f_k(n)x^n$.
\

Exercice 37:

Diverses conjectures circulent à propos de la suite
1 2 3 4 5 6 8 9 10 12 13 15 16 18 20 21 24 25 26 27 30 32...
des entiers qui sont produits d'entiers de la suite de fibonacci fondamentale,
de suite complémentaire
7 11 14 17 19 22 23 28 29 31 33 35 37 38 41 43 44 46 47 49....

\

Exercice 38:

(les suites d'entiers a(n), 0≤a(n)≤n, n>0, et le développement factoriel des réels de [0,1])

Nous anticipons ici sur l'exposé du système de numération factoriel pour la représentation des nombres entiers. Nous l'avions déjà utilisé à propos des algorithmes de génèse de permutations (bijection des permutations sur les mots sous-diagonaux). Nous nous intéressons à l'extension naturelle de ce système de numération à la représentation des nombres réels de l'intervalle [0,1].

Rappelons que les mots infinis (a(n)), 0≤a(n)≤n, n>0, sur l'alphabet des entiers naturels sont appelés "suites sous-diagonales", tandis que ceux à support fini (ceux dont seulement un nombre fini de caractères est non nul) sont la représentation des entiers dans le système de numération factorielle (voir le chapitre suivant).

Benoît Cloître a calculé le début du développement du nombre d'or, $x=(1+5^{1/2})/2-1$,
sous la forme s= somme numérique pour n>1 des f(n)/n!:

f = (1 0 2 4 0 6 7 1 1 8 1 6 0 11 0 10 5 6 9 15 20 10 15 1 18...)

où le n-ième coefficient, f(n), satisfait à 0≤f(n)<n. De bonnes approximations pratiques de $(1+5^{1/2})/2-1$ sont obtenues en tronquant la suite des coefficients.

Par programme brutal,
valable tant que l'irrationnel $x=(1+5^{1/2})/2-1$ est donné avec suffisamment de précision:

<u>initialisation</u>: a:=0; v:=x:
<u>itération</u>: pour n>1, v:=n*(v-a); a:=partie entière de v; imprimer a.

De manière générale, chaque nombre réel compris entre 0 et 1, $0 \leq r \leq 1$,
admet un unique développement représentatif dans ce système (de manière lexicographiquement croissante lorsque r croît), par un mot sous-diagonal infini. Soit

s(r)=somme numérique des $a_r(n)/(n+1)!$ pour $n>0$,
avec $a_r(n)$ entier compris entre 0 et n, $0 \leq a_r(n) \leq n$.

On obtiendra le développement factoriel (fini) de tout rationnel positif p/q, 0<p<q,
par <u>le micro programme</u> suivant, que l'on peut écrire de manière à ne manipuler que des entiers:

<u>initialisation</u>: lire les valeurs initiales de p et q; a:=0: n:=1:
<u>itération</u>: tant que p est positif: n:=n+1: p:=n*(p-a*q): imprimer la partie entière de p/q.

petit programme qui fonctionne pour toute valeur de [0,1[, mais pas pour 1.

Ce petit programme, d'une extrême fiabilité, permet de calculer les développements de p/q pour de très grandes valeurs de q avec de très faibles moyens (on peut toujours contrôler la limite de précision de la machine que l'on a à disposition en vérifiant la représentation de 1/n!).

Nous avons là <u>une intéressante bijection énumérative des entiers sur les rationnels r, $0 \leq r<1$</u>:

0 1/2 1/6 2/3 1/3 5/6 1/24 1/8 5/24 7/24 3/8 7/8....

Ainsi, par exemple, au rationnel

55/72 = (1 1 2 4 4) = 1/2!+1/3!+2/4!+4/5!+4/6!

correspond l'entier

1*1!+1*2!+2*3!+4*4!+4*5! =1+2+12+96+480=591:

le rationnel 55/72 est le 591-ième de la liste ci-dessus.

Les rapports de certains nombres consécutifs de la suite de fibonacci s'expriment par des développements courts: (2/3 = (1 1), 5/8 = (1 0 3), 89/144 = (1 0 2 4 1)).

Il faut toujours faire très attention aux petits effets des troncatures et arrondis:
Par exemple, pour certaines valeurs approchées initiales données à x, à une certaine unité de rang i-1, qui devrait être suivie d'une infinité de 0 peut se substituer la suite infinie saturée équivalente (i+1)(i+2)(i+3)..., à partir du rang i. Ainsi, 1/2 s'écrira 100000..., de préférence à 0234567...

Nous exprimons ainsi tout réel (resp rationnel) de [0,1] comme somme (resp somme finie) d'inverses d'entiers:

$(1+5^{1/2})/2-1$= 1/2+ 1/12+ 1/30+ 1/840+ 1/5760+ 1/362880+ 1/3628800+ 1/6652800...

Le cas limite (important) c'est le développement factoriel de 1, $a_1(n)=n$ pour tout $n>0$, soit

1 = somme numérique des n/(n+1)! pour n>0
=
1/2+1/3+1/8+1/30+1/144+1/840+1/5760+1/45360+1/403200+1/3991680+1/43545600.....

Si l'on tronque la représentation de 1 aux n-1 premiers termes,
le reste est somme des (k-1)/k! pour k>n, soit simplement 1/n!:
il en résulte que la somme des n-1 premiers termes, de 1/2! à (n-1)/n!, est 1-1/n!=(n!-1)/n!

Soit $a_r(n)$ (resp $a_{r'}(n)$) la suite des coefficients de la représentation de r (resp r'), $0 \leq r$ et $r' < 1$.
La représentation $a_{r+r'}(n)$ de (r+r') modulo 1 s'obtient par $a_{r+r'}(n)= a_r(n)+a_{r'}(n)$ modulo n+1, avec production d'une retenue vers $a_{r+r'}(n-1)$ lorsque $a_r(n)+a_{r'}(n)>n$.

Du fait de la retenue, nous obtenons pour la représentation de 1, comme attendu, 1+1=1.
Et lorsque x>0 tend vers 0, x>0, 1+x tend vers 0: 1 est équivalent à 0, le calcul de fait modulo 1.

Par exemple, la somme (7/8+8/9) modulo 1, (7/8 = (1 2 1 1 4), 8/9 = (1 2 1 3)) se calcule ainsi:
(1 2 1 1 4) + (1 2 1 3)= (2 4 2 4 4) = (0 4 2 4 4) = (1 1 2 4 4),
représentation de $55/72=5*11/(2^3.3^2)$, alors que 1/72 s'écrit (0 0 0 1 4).

Le passage de p/q rationnel, p<q, à son complément (q-p)/q se fait aisément par complémentation:
par exemple, si p/q = (0 1 1 0 2), nous aurons (q-p)/q = (1 1 2 4 4).

Soit $a_r(n)$ la suite des coefficient de la représentation de r, 0≤r<1; par complément, $a_{r'}(n)=n-a_r(n)$,
nous obtenons le développement de r'=1-r. Par exemple, avec le petit nombre d'or, $r=(1+5^{1/2})/2-1$,
nous obtenons par complémentation le développement de son carré,
$r'=1-r=r^2$, (0 2 1 0 5 0 0 7 8 2 10 6 13...);
un pas de plus nous amène à $r^3=2r-1$:
2*(1 0 2 4 0 6 7 1 1 8 1 6 0 11...)
=(2 0 4 8 0 12 14 2 2 16 2 12 0 22...)
=(0 1 1 3 1 6 6 2 3 5 2 12 1 7....).

Pour r=exp(1) modulo 1, $a_r(n)=1$ pour tout n>0.
En tronquant, on obtient les rationnels 1/2!, 4/3!, 17/4!, 86/5!.... dont les dénominateurs satisfont à d(n)=n.d(n-1) sous d(2)=2, et les numérateurs à f(n)=n.f(n-1)+1 sous f(2)=1), nombres interprétables en termes de permutations.

On montre facilement que (3-exp(1))=-exp(1) modulo 1=somme des (n-2)/n! pour n>2.
Et 1/(exp(1))=somme des 2n/(2n+1)! pour n>0 = 2/3!+4/5!+6/7!+8/9! = 1/3+1/30+1/840....
Si l'on pose b= somme des 1/(2n+1)! pour n>0 = 1/3!+1/5!+1/7!+/9!.....,
nous avons b+1/exp(1) = somme des (2n-1)/(2n)! pour n>0 = 1-1/exp(1).

La <u>division par 2</u> se fait de la gauche vers la droite, avec un phénomène de retenue suivant parité:
ainsi, par exemple, diviser (1 1 1 1) par 2 conduit à la séquence d'opérations t:
t(1 1 1 1) = 0 t(1+3 1 1) = 0 2 t(1 1) = 0 2 t(0 1+5) = (0 2 0 3);
Cet exemple montre au passage que
exp(1)/2 (modulo 1)=somme des (n+1)/(2n+1)! pour n>0
=1/3+1/40+1/1260+1/72576+1/6652800...

Il est possible d'interpréter la suite des coefficients $a_r(n)$ comme codant une suite de permutations de [0,n]=(0,1,2...,n), les coefficients étant (par exemple) réalisés comme nombres d'inversions, chaque nouvelle lettre venant s'insérer à sa place.
Par exemple, pour $r=(1+5^{1/2})/2-1$, la suite 1 0 2 4 0 6 7 1... conduit à la suite des permutations
10, 102, 1302, 41302, 413025, 6413025, 76413025, 764130285...
Les permutations de N correspondent à des nombres réels particulier.
Une attention particulière est accordée aux développements $a_r(n)$ <u>bornés</u> par un entier k.
(la somme de deux développements bornés par k et k' l'est par k+k', et les suites bornées (càd telles que max(a(n)) soit fini) contiennent les développements des rationnels)
Pour qu'un développement borné soit la représentation d'une permutation de N, il faut et suffit que pour tout entier i occurant une infinité de fois dans le développement, il existe une infinité d'occurrrences d'entiers j inférieurs à i.
De manière générale, que la suite $a_r(n)$ soit bornée ou non, elle représente une permutation de N ssi pour tout entier i, il existe un entier j(i) tel que pour tout n>j(i) on ait $i+a_r(n) < n$.

Soit deux nombres réels, r et r', compris entre 0 et 1, de représentations $a_r(n)$ et $a_{r'}(n)$,
Exemple de la représentation de leur somme (modulo 1):

$r=(1+5^{1/2})/2 -1$ =0.618034... s'écrit	1 0 2 4 0 6 7 1 1 8 1 6 0 11 0 10...
$r'=2^{1/2} -1$ =0.414214... s'écrit	0 2 1 4 4 1 5 0 8 1 11 1 7 8 4 4...

$r+r'=(1+5^{1/2})/2 + 2^{1/2}$, $r+r'-[r+r']=0.032248$ s'écrit   0 0 0 3 5 1 4 1 9 10 0 7 8 4 4 14...
et $2(r+r')$ s'écrit   0 0 1 2 4 3 0 3 9 9 1 2 2 8 9 12...

$a_r(n)+a_{r'}(n)$ provoque la retenue d'une unité vers $a_{r+r'}(n-1)$ dès que leur somme excède n.

Expérimentation avec les multiples de r=exp(1), kr-[kr],
dont le développement est ultimement constant, k:

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1...
0 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2...
0 0 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3...
1 2 0 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4...
1 0 2 0 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5...
0 1 3 2 0 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6...
0 0 0 3 2 0 7 7 7 7 7 7 7 7 7...
1 1 1 4 3 2 0 8 8 8 8 8 8 8 8...
0 2 3 0 4 3 2 0 9 9 9 9 9 9 9...
0 1 0 1 5 4 3 2 0 10 10 10 10 10 10...
1 2 1 3 0 5 4 3 2 0 11 11 11 11 11...
1 0 2 4 1 6 5 4 3 2 0 12 12 12 12...
0 2 0 0 3 0 6 5 4 3 2 0 13 13 13...
0 0 1 1 4 1 7 6 5 4 3 2 0 14 14...
1 1 2 2 5 3 0 7 6 5 4 3 2 0 15...

La connaissance du développement de Pi - [Pi] permet d'en obtenir rapidement une bonne approximation:

0 0 0 3 1 5 6 5 0 1 4 7 8 0 6 7 10 7 10 4 10 6 16 1 11...

1/100 a pour développement factoriel 0 0 0 1 1 1 3 1 8,
tandis que 1/101 s'écrit
0 0 0 1 1 0 7 1 8 7 10 1 4 0 4 12 14 4 17 17 5 15 6 4 11 22 20 6 26 22 22 26 26 32 20 24 34 23 37 25 24 5 4 35 29 28 18 26 9 45 49 22 30 26 7 43 26 24 32 4 51 35 35 31 35 19 16 10 65 10 39 15 13 14 8 21 27 2 27 58 44 54 19 81 54 43 6 8 73 6 28 22 9 29 15 20 16 49 0 100
(101 est premier, noter sa longueur, et son développement, qui se termine par 0 100)

Le **degré factoriel d'un rationnel** r, c'est le plus grand i tel que le coefficient de 1/i! soit non nul.
Degré de 1/n pour n de 2 à 31: 2 3 4 5 3 7 4 6 5 11 4 13 7 5 6 17 6 19 5 7 11 23 4 10 13 9 7 29 5 31.
Pour les entiers n de 2 à 101, liste des inverses 1/n dont le degré factoriel est précisément n:
2 3 4 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 61 67 71 73 79 83 89 97 101
cette liste comporte 4 et les entiers premiers. Le développement factoriel 1/p pour les entiers premiers présente des particularités (pour p=2n+1 premier, par exemple, il se termine par n-1 0 2n).
Il est clair que le degré de p/q n'excède pas celui de 1/q.

Les développements de j/(j+1) pour j de 1 à 10:
1 , 1 1 , 1 1 2, 1 1 3 1, 1 2, 1 2 0 2 5 1 , 1 2 1, 1 2 1 1 4 , 1 2 1 3, 1 2 1 4 0 3 6 4 9 1.

Les développements de 1/j pour j de 2 à 11:
1 , 0 2 , 0 1 2, 0 1 0 4 , 0 1, 0 0 3 2 0 6 , 0 0 3, 0 0 2 3 2 , 0 0 2 2, 0 0 2 0 5 3 1 4 0 10.
(observez les développements particuliers pour p premier)

Les développements de $1/2^j$, pour j de 1 à 16:
1, 0 1 2, 0 0 3, 0 0 1 2 3 , 0 0 0 3 4 3 4 , 0 0 0 1 5 1 6 , 0 0 0 0 5 4 3 , 0 0 0 0 2 5 5 4 5 ,
0 0 0 0 1 2 6 6 7 5 6, 0 0 0 0 0 4 7 3 3 8 3, 0 0 0 0 0 2 3 6 1 9 7 6 7,
0 0 0 0 0 1 1 7 5 10 3 9 10 7 8, 0 0 0 0 0 0 4 8 2 10 7 11 5 3 12,
0 0 0 0 0 0 2 4 1 5 3 12 2 9 6, 0 0 0 0 0 0 1 2 0 8 1 12 8 4 11,
0 0 0 0 0 0 0 5 5 4 0 12 11 2 5 8 9.

(les multiples de 1/p pour p premier) les développements de 1/7 à 6/7:

0 0 3 2 0 6
0 1 2 4 1 5
0 2 2 1 2 4
1 0 1 3 3 3
1 1 1 0 4 2
1 2 0 2 5 1

Le degré factoriel de $1/2^j$ pour j de 1 à 20: 2 4 4 6 8 8 8 10 12 12 14 16 16 16 16 18 20 20 22 24.

La norme factorielle d'un nombre rationel r, 0≤r<1, c'est la somme des coefficients de sa représentation factorielle. Ainsi, la norme factorielle de 55/72 est 1+1+2+4+4=12.
La norme factorielle de (r+r') modulo 1 n'excède pas la somme des normes de r et r'.

La norme de $1/2^j$ pour j de 1 à 20: 1 3 3 6 14 13 12 21 33 28 41 61 62 44 47 61 95 76 98 109.

Les normes des inverses (1/n) des entiers, de n=2 à n=101:
1 2 3 5 1 11 3 7 4 25 2 42 10 4 6 65 6 94 2 7 24 125 1 26 46 18 10 182 4 265 14 33 65 9 5 394 84 33 3 449 8 471 25 6 121 570 5 48 21 62 40 619 13 18 8 85 150 847 2 1020 263 9 13 38 31 1064 60 126 7 1262 5 1212 345 18 75 24 32 1791 4 17 443 1650 7 59 460 190 17 1882 3 39 119 242 533 81 9 2038 40 22 15 2207.

Curiosité: $(1/6!)^2$ = $(0\ 0\ 0\ 0\ 1)^2$ = 7/10! = 0 0 0 0 0 0 0 0 7,
(ou 6!*7!=9!, 00001*000001=00000001).

La norme factorielle du rapport de deux entiers consécutifs de la suite fondamentale de fibonacci:
1 2 5 4 43 13 76 23 1872 8 14117 228 995 508 642175 79 3554 377 42500 9917...

et le degré de leur représentation factorielle:
2 3 5 4 13 7 17 11 89 6 233 29 61 47 1597 19 113 41 421 199...

De même que la sommation de Nim sur les entiers (représentés en base 2) est la somme modulo 2 les caractères de même poids, nous serons naturellement amenés à introduire diverses compositions sur les réels modulo 1, en composant les éléments de même rang dans leur représentation factorielle.

Pour deux nombres réels, r et r', compris entre 0 et 1, de représentation $a_r(n)$ et $a_{r'}(n)$, leur somme particulière, que l'on notera snim(r,r'), sera définie par $(a_r(n)+a_{r'}(n))$ modulo n+1,
Ainsi, snim(1,1) = somme des (n-1)/(n+1)! pour n>1, ce qui est (3-exp(1)) modulo 1,
tandis que (1/2-exp(2)) modulo 1 = somme des (n-3)/n! pour n>3,
et (1/6-exp(3)) modulo 1 = somme des (n-4)/n! pour n>4.....

Les premiers coefficients des multiples de Nim de 1:

1 2 3 4 5 6 7 8 9....
0 1 2 3 4 5 6 7 8....
1 0 1 2 3 4 5 6 7....
0 2 0 1 2 3 4 5 6....
1 1 3 0 1 2 3 4 5....
……………………

Le sup particulier, sup(r,r'), sera défini par par $\max(a_r(n),a_{r'}(n))$, et inf(r,r') par $\min(a_r(n),a_{r'}(n))$.
Les théorèmes attendent.

\

Exercice 39:

A.- Etudier la suite qui donne le rang du premier caractère non nul dans l'écriture des entiers en numération fibonacci,

k_{fibo}=1 2 3 1 4 1 2 5 1 2 3 1 6 1 2 3 1 4 1 2 7...

mot infini concaténation des mots m(n).n, avec m(1)=e=m(2)=m(3), et pour n>3, m(n) facteur gauche de m de degré f(n-2)-1, f(n) nombre de fibonacci, f(1)=1, f(2)=2, f(n+1)=f(n)+f(n-1).
Fonction utile au calcul du noyau dans le jeu de Wythoff.

B.- En numération base 2, nous avions pour le rang du premier caractère non nul,

k_{base2}=1213121412131215121312141213121...,

fonction fondamentale pour quelques problèmes classiques (entre autres, la tour de hanoï, le chemin hamiltonien sur l'hypercube, le code de gray, les courbes dites du dragon...tous problèmes récursifs de degré 2).

C.- En numération factorielle, nous aurons

k_{fact}=121213121213121213121214121213121213121213121214...,

fonction occurant notamment lors de l'énumération des permutations par utilisation des involutions que sont les miroirs opérant sur les facteurs gauches.
Nous avons là la plus grande factorielle, k(n)!, dont n est multiple.

Etre multiple de k! implique d'être multiple des entiers de 1 à k.En quoi cela diffère-t-il ?
Comparer k_{fact}(n) à la fonction

g(n)=le plus grand entier tel que les entiers de 1 à g(n) divisent n, g(n)≥k_{fact}(n).

Observer la suite des valeurs de n où k_{fact} et g diffèrent, multiples de 12 par 1 3 5 7 9 10 11 13 15 17 19 20 21 23 25 27 29 30 31 33 35 37 39 40 41 43 45 47 49 50 51 53 55 57 59 61 63...
Calculer g(n)-k_{fact}(n) en ces points (ainsi, 60 est multiple de 6, et de 3!).

Le produit des premiers: 1 2 6 30 210 2310... le ppcm des entiers de 1 à n: 1 2 6 12 60 60 420...
Ces deux suites sont incluses dans la suite de Landau: 1 2 3 4 6 6 12 15 20 30 30 60 60 84 105 140 210 210 420 420 420 420 840 840 1260 1260 1540 2310 2520... qui vaut sur l'entier n le maximum du produit des n_i lorsque n est la somme des n_i.
La somme des premiers: 2 5 10 17 28 41...

On notera ppcm(1,n) ou ppcm[n] le plus petit multiple commun aux entiers de 1 à n.
Le rapport n!/ppcm(1,n): 1 1 1 2 2 12 12 48 144...

\

Exercice 40:

Soit la suite de fibonacci f(n)=f(n-1)+f(n-2) sous f(0)=f(1)=1, série f=e+xf+x^2f=somme des f(n)x^n.

1 1 2 3 8 13 21 34 55...

Et g(n)=g(n-1)+g(n-2)+1 sous g(0)=g(1)=1, degrés des mots m(n)=m(n-1)zm(n-2), m(0)=x=m(1),

1 1 3 5 9 15 25 41 67 109...

mots de projections d'arbres binaire où x est opérateur zéro-aire et z binaire
(soit en notations polonaises m'(n)=m'(n-1)m'(n-2)z), série g+x=xg+x^2g+x^*=somme des g(n)x^n.

Soit h(n)=g(n)-f(n), et la série h=g-f; h=0 0 1 2 4 7 12 20 33 54...
Etablir que f(n+1)=h(n+1)-h(n) pour n>0; (xf=somme des f(n+1)x^n).

\

Exercice 41:

La suite de Fibonacci F(n) est initialisée par (0,1), celle de Lucas L(n) par (1,3), la récurrence est identique, chaque terme est somme des deux termes qui précèdent.

Examiner la suite imbriquée définie par la récurrence g(n+2)=3g(n)-g(n-2),
sous l'initialisation (0, 1, 1, 4).

Etablir que $g(n)=F(n+1)+(-1)^{(n+1)}F(n-1)$, de fonction génératrice $g=(x+x^2+x^3)/(1-3x^2+x^4)$.

\

Exercice 42:

Si l'on construit le tableau des coefficients du binôme sur le huitième de plan par
f(0,0)=1, f(i,j)=f(i-1,j-1)+f(i-1,j),
la suite g(n)=somme des f(i,j) pour i+j=n est la suite fondamentale de fibonacci.

\

Exercice 43:

S'intéresser aux fonctions f à valeurs entières telles que f(n+m) soit multiple de f(n).f(m).

C'est le cas de la suite k^n puissances de k, où le rapport h(n,m)=f(n+m) / f(n).f(m)
est constant, égal à 1, caractéristique de fonction exponentielle.

Pour f(n)=n!, la table des h(n,m), c'est celle des coefficients binômiaux.
Un autre cas intéressant, c'est celui de la fonction f(n)=produit des i! pour i de 0 à n-1, car le rapport (nm)! / h(n,m) compte les tableaux de Schensted rectangulaires nxm.
\

Exercice 44:

Suites extraites de la suite fondamentale de fibonacci
0 1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144... f (n+1)=f(n)+f(n-1), f(n)^2-f(n-1)f(n+1)=+-1,

a) 0 1 3 8 21 55 144... et 1 2 5 13 34 89... f(n+1)=3f(n)-f(n-1) f(n)^2-f(n-1)f(n+1)=1 ou -1,
b) 0 2 8 34 144... et 1 3 13 55... et 1 5 21 89... f(n+1)=4f(n)+f(n-1)... ,
c) 0 3 21 144... et 1 5 34... et 1 8 55 et 2 13 89... f(n+1)=7f(n)-f(n-1)... ,
……

Tout résulte de x^2=x+1, valable sur toutes les suites de fibonacci, quelle que soit l'initialisation (on fera le rapprochement avec les transformations de fourier).
Il en résulte x^4=3x^2-1, x^6=4x^3+x, x^8=7x^4-1, etc...
Il peut être raisonnalble de définir la suite de fibonacci par s(0)=0, s(1)=1, s(n+1)=s(n)+s(n-1), que n soit positif ou négatif: alors s(-n)=s(n) pour n impair, et s(-n)=-s(n) pour n pair.
x est l'opérateur de décalage, xf(n)=f(n+1), et x^{-1} existe.

Sur ces suites, pour tout 0<i<j,
les fonctions
s(n+i)*s(n-i)-s(n+j)*s(n-j) et s(n+i+1)*s(n-i)-s(n+j+1)*s(n-j)
sont constantes en valeur absolue, alternées de signe.
La constante dépend du couple (i,j), et de l'initialisation de s, (s(0),s(1)).
Sur la suite fondamentale, les valeurs prises sont le produit de deux nombres de fibonacci distincts:
1 2 3 5 6 8 10 13 15 16 21 24 26 34 39 40 42 55 63 65 68 89 102 104 105 110......

Le cas minimal est pour i=0, j=1, $s(n+1)*s(n-1)-s(n)^2$ constant.

Problème général: caractériser les suites d'entiers s telles que s(n+i)*s(n-i)-s(n+j)*s(n-j), ou s(n+i+1)*s(n-i)-s(n+j+1)*s(n-j), soit constant (du moins en valeur absolue), suites d'entiers dont la croissance est, en ce sens, voisine d'une croissance exponentielle.

Inversement, voir par exemple que si f(n+1)=3f(n)-2f(n-1), sous f(0)=0, f(1)=1,
f(n+1)*f(n-1)-f(n)^2 est la suite des puissances de 2.
Comme les deux racines de x^2-3x+2 sont 2 et 1, f(n+1)/f(n) tend vers 2, à l'exception du cas de la solution instable, f=constante.

La croissance de la suite de fibonacci f(n+1)=f(n)+f(n-1) est symptomatiquement exponentielle:

si f(0)=1 et f(1)=2, f((n).f(n+1) est compris entre f(2n+1) et f(2n+2); plus précisément,
f((n).f(n+1)=f(2n+1)+f(n-2)f(n-1) et f((n).f(n+1)=f(2n+2)-f(n-1)f(n)
De même, f(n)f(n+2)=f(2n+2)+f(n-2)f(n)=f(n+3)-f(n-1)f(n+1),
et f(n)f(n+i)=f(2n+i)+f(n-2)f(n-2+i)=f(2n+i+1)-f(n-1)f(n+i-1).

Evidemment, l'étude des suite de fibonacci correspond à celles des polynômes de degré 1 a+bx dont les produits sont soumis à la règle de simplification x^2=1+x;
a-bx^{-1} est conjugué de a+bx, de manière telle que
norme de (a+bx) = norme de a-bx^{-1} = (a+bx)(a-bx^{-1}) = a^2-b^2+ab, puisque x-x^{-1}=1.
Norme de (a+bx)(c+dx)= produit des normes de (a+bx) et (c+dx).
Une suite de fibonacci est une classe d'équivalence
(a+bx)R(c+dx) ssi il existe un entier i de Z avec (a+bx)=x^i(c+dx).
Les valeurs primitives de a^2-b^2+ab sont 1, 5, et les premiers congrus à +-1 modulo 5.

\

<u>Exercice</u> 45 (une transformation sur la suite des entiers):

Selon **un gabarit**, trouer la suite des entiers, et itérer sur le reste.

a) Exemple 1, **un gabarit** périodique:

De la suite des entiers positifs,
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29...
si l'on ôte un entier sur trois, s(0)= 1 4 7 10 13 16 19 22 25 28..., il reste
2 3 5 6 8 9 11 12 14 15 17 18 20 21 23 24 26 27 29...
et si l'on itère, ôtons s(1)=2 6 11 15 20 24 29..., il reste
3 5 8 9 12 14 17 18 21 23 26 27...
itérons, ôtons s(2)= 3 9 17 23..., il reste
5 8 12 14 18 21 26 27...
....
Le premier entier ôté à chaque itération donne la suite transformée:
1 2 3 5 8 12 18 27 41 62 93...

b) Exemple 2, **le gabarit** fibonaccien:

Soit (par exemple) la suite de fibonacci, s(0)= 1 2 3 5 8 13 21 34...
De la suite des entiers,
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29...
ôtons les entiers de rang s(0)= 1 2 3 5 8 13 21 34..., il reste
4 6 7 9 10 11 12 14 15 16 17 18 19 20 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33...

d'où l'on ôte à nouveau les entiers de rang 1 2 3 5 8..., soit s(1)= 4 6 7 10 14 19 28..., il reste
9 11 12 15 16 17 18 20 22 23 24 25 26 27 29 30 31 32 33...
itérons, l'on ôte donc s(2)= 9 11 12 16 20 26..., et il reste
15 17 18 22 23 24 25 27 29 30 31 32 33...
dont nous ôtons s(3)= 15 17 18 23 27 33..., il reste
22 24 25 29 30 31 32...
….
Le premier entier ôté à chaque étape fournit **la suite transformée**, t(s(0))= 1 4 9 15 22 29...

c) Même le cas simple, s(0)= suite des entiers impairs= 1 3 5 7... est susceptible d'étude,

-la suite transformée est celle des puissances de 2,
-la diagonale du tableau t(j,i) dont s(i) est la ième colonne
est constituée des entiers de la forme $(2n+1).2^{n}$, de récurrence f(n+1)=4(f(n)-f(n-1))
-la somme des t(i,j) à i+j constant (1 5 15 37 83...) est elle-même digne d'intérêt.

d) Le théorème de Beatty spécifie que pour tout réel irrationnel r>0,

les parties entières des multiples de 1+r, [n(1+r)] pour n>0 entier, et celles de $[n(1+r^{-1})]$,
définissent une bipartition des entiers positifs.
(Noter que le couple $(x=1+r,\ y=1+r^{-1})$ satisfait à $x.y=x+y=2+r+r^{-1}$)

Ce n'est pas le cas pour r rationnel (voir r=1, et r=3/2).

Pour tout r>0, la suite des s(0)=[n(1+r)] définit un gabarit; s(1) s'obtient en multipliant s(o) par r^{-1},
s(2) en multipliant s(1) par r^{-1}, etc...s(i+1) par $s(i).r^{-1}$.

\

Exercice 46:

A propos de systèmes de poids. Programmer.-
Etant donné une suite de n entiers, k(1), k(2)..., k(n), faire la statistique S(k,n) des 2^{n} valeurs

A.- obtenues par les sommes e(1)k(1)+ e(2)k(2).....+ e(n)k(n) pour tout e(i) pris dans {0,+1}.
Soit donc les coefficients des polynômes $p(n)=p(n-1).(e+x^{k(n)})$, $p(1)=(e+x^{k(1)})$.

Si tout entier figure un nombre fini de fois dans la suite k,
la suite des polynômes p(n) admet pour limite la série s(k)=produit des $(e+x^{k(i)})$,
dont les coefficients comptent les partitions d'entiers en parties k(i), chaque k(i) pris une fois au plus.

En particulier, "les partitions de n en parts distinctes":
1 1 1 2 2 3 4 5 6 8 10 12 15 18 22 27 32 38 46 54 64 76 89 104 122...
"les partitions de n en parts distinctes d'entiers de la suite fondamentale de fibonacci":
1 1 1 2 1 2 2 1 3 2 2 3 1 3 3 2 4 2 3 3 1 4 3 3 5 2 4 4....
………

B.- obtenues par les sommes e(1)k(1)+ e(2)k(2).....+ e(n)k(n) pour tout e(i) pris dans {-1,+1}.
Soit donc les coefficients des polynômes $p(n)=p(n-1).(x^{k(n)}+x^{-k(n)})$, $p(1)=(x^{k(n)}+x^{-k(n)})$.

L'investigation expérimentale a été faite pour de nombreuses suites
(par exemple
a) k(i)=1 pour tout i, b) k(i)=i, c) k(i)= 2^(i-1), d) k suite de fibonacci, e) k suite de Beatty....)
et a donné des résultats surprenants.

On s'est spécialement intéressé aux solutions de e(1)*1+ e(2)*2.....+ e(n)*n=0, e(i) dans {-1,+1};

On s'est spécialement intéressé aux solutions de e(1)*1+ e(2)*2.....+ e(n)*n=0, e(i) dans {-1,+1};
(leur nombre est nul pour n congru à 1 ou 2 modulo 4:

1 0 0 2 2 0 0 8 14 0 0 70 124 0 0 722 1314 ...).

Pour en restreindre le nombre,
on a dénombré celles où les sommes partielles e(1)*1+ e(2)*2.....+ e(i)*i, i de 1 à n, sont distinctes,

1 0 0 2 2 0 0 2 2 0 0 10 14 0 0 36 40.....

C. Enfin, dernier cas, $p(n)=p(n-1).(e+x^{k(n)}+x^{-k(n)})$, $p(1)=(e+x^{k(n)}+x^{-k(n)})$.

\

<u>Exercice</u> 47:

La fonction f défine par **f(n)=n-f(f(n-1)), sous f(0)=0** porte le nom de Hofstadter

(0 1 1 2 3 3 4 4 5 6 6 7 8 8 9 9 10 11 11 12 12 13 14 14....)

Elle est interprétable par l'écriture des entiers en numération fibonacci:
comparer l'écriture de n et f(n) en numération fibonacci.

f est non décroissante. Tout entier figure une ou deux fois dans l'image de f.
(avec la récurrence g(n)=n-g(n-1) sous g(0)=0, tout entier positif figure deux fois)
f(n) s'exprime de diverses manières par des formules closes utilisant le nombre d'or et la fonction partie entière; ainsi, f est approché par [n.F(i)/F(i+1)], où F(i) est le i-ième entier de la suite fondamentale de fibonacci.

Pour tout k, nous sommes incités à étudier $f(n)=n-f^{k}(n-1)$, sous f(0)=0; (f(n)=n-1 pour n de 2 à k+1), chaque entier figure également une ou deux fois......
On observera, au delà de f(k+1), la rapide stabilisation et la régularité de la suite f(n+1)-f(n), lorsque l'on fait croître k:

(0 1 0 1 1 0 1 1 1 0 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 0....)

Remarquablement,
de même que f(n)=n-f(f(n-1)) sous f(0)=0 est lié à la récurrence de fibonacci F(i+1)=F(i)+F(i-1),
$f(n)=n-f^{k+1}(n-1)$ sous f(0)=0 est lié, de manière comparable, à la récurrence F(i+1)=F(i)+F(i-k),
(et donc à l'équation caractéristique $x^{k+1}-x^{k}-1=0$ de degré k+1 de cette récurrence linéaire).

La suite F(i+1)=F(i)+F(i-k) est conventionnellement initialisée par une collection de 1, de F(0) à F(k).
La décomposition standard d'un entier i sur une telle suite est obtenue en ôtant de i le plus grand entier de la suite F possible, et en itérant sur le reste, comme l'on fait usuellement pour la décomposition des entiers sur la suite de fibonacci. Cette représentation (que l'on pourrait qualifier de "gloutone") porte le nom de Zeckendorf. L'entier n étant ainsi décomposé, l'entier f(n) s'obtient en remplacant chaque entier de la décomposition de n par celui qui précède dans la suite F, opération de décalage.

Les entiers des suites F sont susceptibles de représentations combinatoires diverses.
Par exemple, dans le cas k=2, F(i+1)=F(i)+F(i-2) sous F(0)=1=F(1)=F(2), les entiers de cette suite,

1 1 1 2 3 4 6 9 13 19 28 41......

(de fonction génératrice $(1-x-x^{3})^{-1}$)

comptent les mots sur l'alphabet (1,2) dont la somme i des lettres est fixée (nous dirons "les mots de norme i"), et dans lesquels ne figurent pas deux occurrences consécutives de la lettre 2, autrement dit, deux occurrrences de 2 doivent être à des positions distantes d'au moins 2

e, 1, 11 2, 111 12 21, 1111 112 121 211, 11111 1112 1121 1211 2111 212,.....

Le cas général (k quelconque) exige une distance d'au moins k entre deux occurrences du caractère 2.
L'interprétation comme pavage d'un rectangle de côtés (k+1) sur n, par des barrettes rectilignes de (k+1) cases est également immédiate.

Les entiers de la suite F sont les degrés des arbres binaires magmatiques

Les entiers de la suite F sont les degrés des arbres binaires magmatiques
A(i)=x pour i de 0 à k, A(i+1)=(A(i),A(i-k)) pour i≥k.
En termes de mots de parenthèses ces arbres s'écrivent
m(i)=e pour i de 0 à k, m(i+1)=am(i)bm(i-k) pour i≥k.
Et en termes de codage polonais,
p(i)=x pour i de 0 à k, p(i+1)=p(i)p(i-k)y pour i≥k.

\

Exercice 48 (les récurrences fibonacciennes croisées):

A. Initialement, f(0)=g(1)=0, g(0)=f(1)=1;
Puis f(n+1)=g(n)+g(n-1), g(n+1)=f(n)+f(n-1), pour n>0.

f=0 1 1 1 3 4 6 11 17 27 45 72 116 189 305 493 799 1292 2090 3383 5473 8855 14329....
g=1 0 1 2 2 4 7 10 17 28 44 72 117 188 305 494 798 1292 2091 3382 5473 8856 14328....
f(n)+g(n)=n-ième nombre de fibonacci, nous écrirons f+g=F.

Nous avons f(2+3k)=g(2+3k)= somme des entiers de la suite de fibonacci pris de 3 en 3,
(1292=987+305 305-233=72 72-55=17 17-13=4 4-3=1),
ce qui paraît en écrivant les entiers en numération fibonaccienne.
De même pour f(3k+1)=g(3k+1)+1, (799=610+189, 189=144+45, 45=34+11, 11=8+3),
et f(3k)=g(3k)-1, (493=377+116 116=89+27 27=21+6 6=5+1).

f et g réalisent par excès ou défaut la division par 2 des entiers de la suite fondamentale de fibonacci.
f(2+3k)=f(3k)+f(3k+1), f(3k)=f(3k-1)+f(3k-2)-1, f(3k+1)=f(3k)+f(3k-1)+1.
Nous avons **f(n+3)=f(n-1)+2f(n)+f(n+1)** sous l'initialisation f(0)=0, f(1)=f(2)=1,
et de même, g(n+3)=g(n-1)+2g(n)+g(n+1) sous g(0)=1=g(2), g(1)=0, **ou** g(-2)=g(-1)=0, g(0)=1.
Noter que F(n+3)=F(n-1)+2F(n)+F(n+1) sous F(0)=0, F(1)=1=F(2), F(2)=2, F suite de fibonacci.

v(n)=f(n+1).f(n-1)-f(n)^2:
-1 0 2 -5 2 8 -19 8 36 -81 36 152 -341 152 646 -1445 646 2736 -6119 2736...
w(n)=g(n+1).g(n-1)-g(n)^2:
1 -1 -2 4 -2 -9 19 -9 -36 80 -36 -153 341 -153 -646 1444 -646 -2737 6119 -2737.....
mais v(n)+w(n):
0 -1 0 -1 0 -1 0 -1 0 -1 0 -1 0 -1 0 -1 0 -1 0 -1.....

B. Différences premières de f et g, Δf et Δg, dont la somme Δf+Δg aussi donne F, décalé.

Δf= 1 0 0 2 1 2 5 6 10 18 27 44 73 116 188 306 493 798 1293 2090 3382....
Δg= -1 1 1 0 2 3 3 7 11 16 28 45 71 117 189 304 494 799 1291 2091 3383....

Qu'en est-il des différences successives?
(Δ^2f=0 2 -1 1 3 1 4 8 9 17 29......, Δ^2g=0 -1 2 1 0 4 4 5 12 17 26....., Δ^2f+Δ^2g donne F, décalé)

C. Au lieu de manipuler f et g, calculer sur des quadruplets (a,b,c,d) d'entiers munis de la somme
(a,b,c,d)+(a',b',c',d')=(c+c',d+d',a+a',b+b'),
avec, par exemple, l'initialisation q(0)=(1,0,0,0), q(1)=(0,1,0,0), et q(n+1)=q(n)+q(n-1),
(...ainsi, q(8)=(6,10,7,11), 6+10+7+11=34, q(9)=(11,17,10,17), 11+17+10+17=55,...),

considérer les suites des valeurs prises par a,b,c,d dans les quadruplets successifs,
a=1 0 0 1 1 1 3 4 6 11 17..., b=0 1 0 1 2 2 4 7 10 17...,
c=0 0 1 0 1 2 2 4 7 10 17..., d=0 0 1 1 1 3 4 6 11 17....

D. Avec trois fonctions, f,g,h, au lieu de deux, f+g+h=F:

0 1 0 1 2 3 4 6 12 20 29 45 78 131 204 320 529 876 1403 2232 3627....
1 0 1 1 1 3 5 7 10 18 32 49 74 123 209 335 524 849 1405 2279 3635....
0 0 1 1 2 2 4 8 12 17 28 50 81 123 197 332 544 859 1373 2254 3684....

f(n+3)=f(n)+3f(n-1)+3f(n-2)+f(n-3) sous f(0)=f(2)=0,f(1)=f(3)=1.
((1,3,3,1) sont les coefficients binômiaux)

La "bonne" initialisation de cette récurrence serait-elle 0,0,0,1,0,0, ?,
donnant 0 0 0 1 0 0 1 3 3 2 6 15 21 24 42....

Avec quatre fonctions circulairement disposées, f_0 à f_3, la valeur de l'une au temps n+1 étant la somme des valeurs de celle qui précède (modulo 4) aux temps n et n-1,
f(n+4)=f(n)+4f(n-1)+6f(n-2)+4f(n-3)+f(n-4) sous f(0)=f(1)=0=f(2)=f(3), f(4)=1.....
0 0 0 0 1 0 0 0 1 4 6 4 2 8 28.....

Avec cinq, f(n+5)=f(n)+5f(n-1)+10f(n-2)+10f(n-3)+5f(n-4)+f(n-5),.....
toutes récurrences satisfaites par la suite de fibonacci.

E. En fait, pour énumérer les récurrences linéaires de degré supérieur capables d'engendrer la suite de fibonacci, conséquences de celle de base, ils suffit d'énumérer systématiquement les mots induits par l'équivalence 100=011, itérativement interprétée de la manière suivante:

1=100=011=0021=01011=00121=002011=010021=0101011=00032=000231=000142=000053.....

(Par exemple, 1=000053 correspond à f(n+4)=5f(n)+3f(n-1).)

En déduire pour les entiers de fibonacci F(n).F(m)+F(n+1)F(m+1)=F(n+m+2),
notamment $F(n)^2+F(n+1)^2=F(2n+2)$, ainsi $3^2+ 5^2=34$.
Comparer aux suites obtenues par l'itération $a+bx:=(a+bx)^2$, avec $x^2=1+x$.

Avec la récurrence de Pell, f(n+1)=2f(n)+f(n-1), engendrant la suite 1 2 5 12 29 70 169 408 985...,

nous aurions 1 0 0 = 0 2 1 = 0 0 5 2 = 0 0 0 12 5 = 0 0 0 0 29 12...

entraînant, par exemple, f(n+4)=29f(n)+12f(n-1), et ici encore, nous avons
$0^2+1^2=1$, $1^2+2^2=5$, $2^2+5^2=29$, $5^2+12^2=169$, $12^2+29^2=985$...

Plus généralement pour tout a, soit les récurrences de la forme

p(n+1)=p(n)+p(n-1), p(0)=1, p(1)=a, p(n) polynôme de degré n en a,

0, 1, a, a^2+1, a^3+2a, $a^4+3a^2 +1$, a^5+4a^3+3a, $a^6+5a^4+6a^2+1$,... **et** $p(n-1)^2+p(n)^2=p(2n)$;
noter que p(n) peut se prolonger vers les valeurs négatives de n.

Mais avec les tribonaccis, f(n+1)=f(n)+f(n-1)+f(n-2), engendrant 1 1 2 4 7 13 24 44...,
nous aurions

1 0 0 0 = 0 1 1 1 = 0 0 2 2 1 = 0 0 0 4 3 2 = 0 0 0 0 7 6 4 = 0 0 0 0 0 13 11 7= 0 0 0 0 0 0 24 20 13...

où s'insère 1 2 3 6 11 20..., satisfaisant à la même récurrence (initialisée par 0 1 2 au lieu de 0 0 1).

La récurrrence f(n+1)=f(n-1)+f(n-2)
(la suite de Padovan: 0 0 1 0 1 1 1 2 2 3 4 5 7 9 12 16 21 28 37 49 65 86 114 151 200 ...)
a donné naissance à de multiples phénomènes intéressants,
1=0011=000111=0000121=00000221=000001221=0000000232=000000001331=000000000342
=0000000000453 =00000000000574=000000000000795...^

Peut-être serez vous fasciné par la suite de Perrin (1899), f(n+1)=f(n-1)+f(n-2) sous f(0)=3, f(1)=0, f(2)=2,

3 0 2 3 2 5 5 7 10 12 17 22=11*2 29 39=13*3 51 68 90 119=17*7 158 209=19*11...

qui possède la propriété suivante: pour p premier, f(p) est multiple de p; (il paraît que f(521^2) est aussi multiple de 521^2) Suite des rapports f(p)/p pour p<100: 1 1 1 1 2 3 7 11 28 120 197 892 2479 4148 11687 56010 271913 461529 2270882 6599404 11263855 56250108 164879269 830987861.
Qu'en est-il pour la suite fondamentale de fibonacci? en 2 3 7 13 17 23 37 43 47 53... les rapports: 1 1 3 29 152 2016 1056437 16311831 102287808 1627690024...

\

Exercice 49:

Soit r un nombre réel positif et irrationnel.
A tout couple d'entiers positifs (u,v) correspond f(u,v)=u+vr.
Ordonner les f(u,v) dans l'ordre croissant, et projeter les deux suites, u et v.
La suite des valeurs de u ainsi projetées est parfois appelée "signature de r", soit s(r).

Etablir que la suite des valeurs projetées de v est la signature de 1/r.
Ensuite, établir que
-les rangs des premières occurrences des entiers dans s(r)
-sont les rangs des occurrences de 1 dans s(1/r)...

Exemple: début de la signature de $2^{1/2}$: 1 2 1 3 2 1 4 3 2 5 1 4 3 6 2 5 1 4 7 3 6 2 5 8 1....., fractal: l'ablation de la première occurrence de chaque entier laisse la suite invariante (C. Kimberling).

\

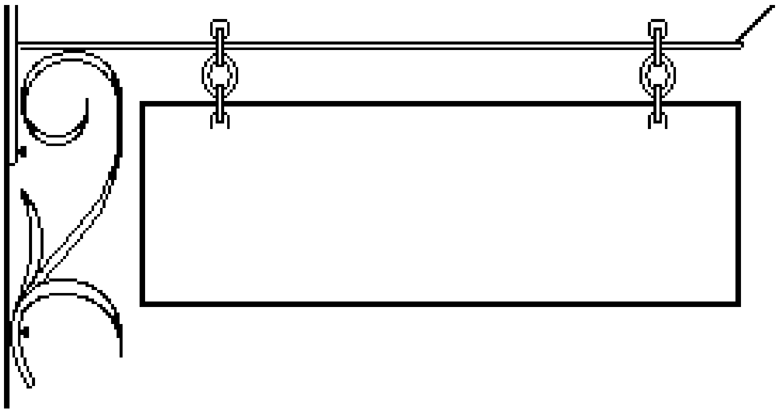
Exercice 50:

Ecrire un programme pour calculer le plus petit entier n(k) qui peut s'écrire exactement de k manières comme somme d'entiers de la suite fondamentale de fibonacci (1 2 3 5 ....) distincts.

(1 3 8 16 24 37.....)

Noter que la suite n'est pas nécessairement croissante. D'ailleurs, elle ne l'est pas.
A chaque entier n correspond le nombre f(n) de manières de l'écrire comme somme d'entiers distincts de la suite de fibonacci.

\



III.Le système dit "factoriel".-

Conformément à la définition admise dans l'introduction de ce chapitre, un système de numération c'est la donnée d'un langage, et l'interprétation des mots de ce langage en terme d'entiers positifs.
Le langage des *mots sous-diagonaux* est défini par la donnée

a) d'un alphabet infini X , qui pourrait être l'ensemble (ordonné) des entiers naturels. On préfèrera parfois lui substituer les lettres indicées x_i
(pour tout entier i, positif ou nul ; cet alphabet est ordonné par l'ordre naturel sur les indices).
b) et d'une condition combinatoire définissant les mots du langage.

Préalablement, définissons un ordre (partiel) sur les mots de degré n engendrés par l'alphabet X:
soient $m=y_0y_1\ldots y_{n-1}$ et $m'=z_0z_1\ldots z_{n-1}$ deux mots de degré n sur X;
on écrira $m<m'$ si pour tout indice i (de 0 à n-1) on a $y_i<z_i$; autrement dit, toute lettre de m est inférieure à la lettre de m' de même rang; le mot m est dit inférieur au mot m'

Si le mot $x_0x_1x_2\ldots x_{n-1}$ est dit diagonal (cela veut dire que la lettre de rang i est précisément x_i, la première lettre étant de rang 0), les mots du langage sont ceux qui sont inférieurs (au sens large) aux mots diagonaux (qui font donc partie du langage). Cela impose que la première lettre de tout mot du langage soit x_0. La seconde lettre est x_0 ou x_1…etc…
Un mot diagonal est supérieur (ou égal) à tout mot de même degré de ce langage. Et l'ensemble des mots de degré n est représenté par le polynôme $x_0(x_0+x_1)\ldots.(x_0+x_1+\ldots.x_{n-1})$

Leur nombre est évidemment le produit 1*2....*n des n premiers entiers, c'est-à-dire la factorielle de n, notée n!
On se contente souvent d'écrire la suite des indices: ainsi, la suite s=01102 est la suite des indices d'un mot sous-diagonal.

Le système de numération associé interprète tout mot $y_0y_1\ldots y_{n-1}$ du langage comme la représentation d'un entier positif (ou nul):

$$1!*y_1+2!*y_2\ldots.+(n-1)!*y_{n-1} = y_1+2*(y_2+3(y_3\ldots.+(n-1)*y_{n-1})\ldots)$$

$$= (\ldots(y_{n-1}*(n-1) + y^{n-2})*(n-2)+y^{n-3})*(n-3)\ldots.)$$

Comme pour les systèmes avec base, tout caractère 0 (ou plutôt x_0) situé à droite n'est pas significatif. Autrement dit, on peut soit définir le langage comme constitué des mots sous-diagonaux dont la dernière lettre est non nulle, soit plonger le langage dans les suites infinies de support fini.

Exercice 1:

Les mots polonais (voir le livre I sur les arbres et les permutations) *sont* des mots sous-diagonaux; ils peuvent donc être interprétés comme des entiers écrits en numération factorielle, et le langage des expressions polonaises détermine ainsi une partie de l'ensemble des entiers. Ecrire un programme qui calcule ces entiers, ou un programme capable de dire si un entier donné est de cette forme.

Quelle est la probabilité pour qu'un entier (inférieur à n!) soit de cette forme?\

Exercice 2:

Il existe une injection naturelle des mots de parenthèses dans les mots sous-diagonaux. Soit un mot de parenthèses de degré 2n sur l'alphabet (a,b), a<b. Par exemple, en lisant le mot m de droite à gauche, noter pour chacune des n occurrences de b le nombre d'occurences de a qui figurent à sa droite. On obtient ainsi un mot factoriel *non-décroissant*, ce qui définit une injection des mots de parenthèses de degré 2n dans les permutations sur n lettres. Ce mot factoriel non-décroissant, interprété comme *profil* (voir les tableaux de schensted) est un profil (ou escalier) sous-diagonal.\

Exercice 3:

Comment définir une procédure (pseudo) aléatoire permettant de construire un entier factoriel entre 0 et n!-1, càd une permutation?\

Exercice 4:

En numération base b, soit la fonction f qui fait correspondre à tout entier la somme de ses chiffres, soit f(n*b+k)=f(n)+k pour tout entier n et tout k entre 0 et b-1.
Ecrire le programme qui calcule pour un entier n la suite des $n^i=f^i(n)=f(n^{i-1})$, sous $n^0=n$. Utiliser diverses valeurs de b.
De même en numération Fibonacci, puis en numération factorielle.\

Exercice 5:

En numération factorielle, programmer la somme des entiers. Construire une table des produits i!j!, exprimés dans ce système..
\

Ce système de numération s'étend naturellement à la représentation d'un nombre réel r situé entre 0 et 1 par une suite infinie d'entiers (a_i, pour i>0; a_i compris entre 0 et i): r=somme des $a_i/(i+1)!$
(ces suites (a_i) sont des suites strictement sous-diagonales)
En particulier, noter que le nombre réel e-2, où e est la base exponentielle est représenté par la suite (a_i=1 pour tout i), tandis que l'entier 1 correspond à (a_i=i pour tout i).
Pour tout entier j>1, la suite (a_i) représentant le nombre r satisfait à

f(j,r)=[(j+1)!*r]=somme des a_i, pour i inférieur ou égal à j

où [.] désigne la partie entière. Et donc, a_i=f(i,f)-f(i-1,r) pour i>1, sous a_1=f(1,r).

Ainsi, tout nombre réel est représenté par un couple de suites sous-diagonales, l'une finie représentant la partie entière, l'autre infinie pour représenter la partie réelle.

Exercice 6:

1)Sur les développements factoriels (de nombres réels entre 0 et 1) dont le support est fini (càd que les coefficients a_i sont nuls, à l'exception d'un nombre fini), programmer la somme.

2)Calculer (par programme) les premiers termes du développement factoriel de quelques nombres réels (par exemple, $2^{1/2}$, $(5^{1/2}-1)/2$....).\

Exercice 7:

Ecrire un programme pour représenter tout nombre rationnel (ou réel?) x_1, compris entre 0 et 1, comme somme d'inverses d'entiers, soit le calcul de la suite -sur l'alphabet de deux lettres (0,1)- définie pour k>1 par

l_k = 1 si x_{k-1} est supérieur ou égal à 1/k, et 0 sinon;

et $x_k = x_{k-1} - l_k/k$.

[on a donc x = somme des l_k/k, pour k>1] \

Exercice 8:

La représentation d'un nombre présente ou non des régularités suivant l'algorithme de représentation.

On considèrera avec intérêt le fait qu'en base b nous représentons tout réel r compris entre 0 et 1 par une suite infinie (r_i) d'entiers tels que

$r=b^{-1}(r_1+b^{-1}(r_2+b^{-1}(r_3+b^{-1}(r_4+b^{-1}(\ldots$

Autrement dit, on décompose r sur les inverses des puissances de l'entier b, et les coefficients de la décomposition, qui sont des entiers compris entre 0 et b-1, s'obtiennent en itérant la transformation "produit par b, soustraction de la partie entière". Mais

-le nombre exp(1)-2, qui s'écrit

$2^{-1}(1+3^{-1}(1+4^{-1}(1+5^{-1}(1+6^{-1}(\ldots$

se décompose agréablement sur les inverses des factorielles,

-tandis que le nombre Pi/2-1, qui s'écrit

(1/3)(1+(2/5)(1+(3/7)(1+(4/9)(1+(5/11)(1+(6/13)(...

se décompose, avec des coefficients factoriels, sur les inverses des factorielles d'impairs.

[voir la revue "Pour la science" n°215, nov 95, et quelques algorithmes de conversion]\

Exercice 9:

Afficher le graphe de la fonction "somme des chiffres de l'écriture des entiers en numération factorielle".\

Exercice 10:

A tout entier non nul, écrit $c_0c_1\ldots c_n$ en numération factorielle, correspondent , par décalage, les entiers $0c_0c_1\ldots c_n$ et $1c_0c_1\ldots c_n$.

On plaque ainsi sur les entiers naturels positifs une structure de forêt binaire.

Mais on a tout d'abord une extension du décalage f(n!)=(n+1)! à l'ensemble **N** des entiers naturles, par la représentation factorielle $f(c_0c_1\ldots c_n)=0c_0c_1\ldots c_n$.

Le début de cette suite est 0 2 6 8 12 14 24 26 30 32..., de différences premières 2 2 2 4 2 10 2 4 2 … \

Exercice 11 (la norme factorielle des entiers):

Nous appellerons norme de n, en numération factorielle, la somme des chiffres de l'écriture de n en représentation factorielle; sur la suite des entiers naturels, on obtient la fonction

0 1 1 2 2 3 1 2 2 3 3 4 2 3 3 4 4 5 3 4 4 5 5 6 1 2 2 3 3 4 2 3 3 4 4 5 3 4 4 5 5 6 4 5 5 6 6 7 .....

Ces entiers représentent les nombres d'inversion des permutations, énumérées selon l'ordre de l'alphabet. Nous calculons les facteurs successifs de cette suite infinie de la manière suivante:

$m(0)=0$, $m(1)=m(0).f_1(m(0))$, $m(2)=m(1).f_1(m(1)).f_2(m(1))$,...

$m(i+1)=m(i).f_1(m(i)).f_2(m(i))\ldots f_i(m(i)).f_{i+1}(m(i))$,.......

où f_i est le morphisme alphabétique $f_i(j)=j+1$.

Reste à faire la statistique de la fréquence de chaque caractère dans l'écriture factorielle des entiers.

La sommation sur les n! premiers termes donne la suite:
1 9 72 600 5400 52920 564480 6531840 81648000 1097712000...
qui satisfait donc à la récurrence f(n)=nf(n-1)+(n-1)!n(n-1)/2, sous f(1)=0, f(2)=1,
mais aussi à $f(n)=f(n-1)*n^2/(n-2)$, n>2, et finalement f(n)=n!*n*(n-1)/4,
Quelle peut bien être la fonction génératrice ?

Comparer les trois récurrences de la suite des normes des entiers dans ces trois systèmes:
1) $m(0)=0$, $m(i)=m(i).f_1(m(i)).f_2(m(i))....f_{b-1}(m(i))$. (en numération base b)
2) $m(0)=0$, $m(1)=m(0).1$, $m(i+1)=m(i).f_1(m(i-1))$. (en numération fibonacci)
3) $m(0)=0$, $m(i+1)=m(i).f_1(m(i)).f_2(m(i))....f_i(m(i)).f_{i+1}(m(i))$. (en numération factorielle)
\

Exercice 12:

Interprétation des mots sur (0,1) comme entiers en numération factorielle:

1 2 3 6 7 8 9 24 25 26 27 30 31 32 33 120.....
\

Exercice 13:

Les mots du langage polonais de Lucaciewicz

0 01 011 002 0111 0021 0102 0012 0003 01111 00211 01021 00121 00031 01102 00202 01012 00112 00022 01003 00103 00013   00004.....

interprétés comme entiers en numération factorielle:

0 1 3 4 9 10 13 14 18 33   34 37 38 42 51 52 55 56 60 73 74 78 96

Il y a c(1)+c(2)....+c(n)=s(n) mots polonais de degré n au plus, où c(i) est le nombre de catalan, (c(1)=c(2)=1),

s = sommatiion de (1 1 2 5 14 42 132 429.....) = (1 2 4 9 23 65 197...)

La concaténation des mots polonais:

0010110020111002101020012000301111002110102100121000310110200202010120011200022
01003001030001300004...

conduit à une suite où la première apparition de n est en rang
t(n)=somme des i.c(i) pour i de 1 à n,
et cette suite t(n) est identique à la suite
t(n)=somme des (i,i) pour i de 0 à n, (i,i) coefficient binômial central $(2i)!/(i)^2$,

1 3 9 29 99 351 1275 40707....
\

Exercice 14:

On a décomposé les entiers sur la suite
1 2 6 30 210 2310 30030 510510 9699690 223092870.....
des produits des premiers successifs.
C'est loin d'avoir l'intérêt de la numération factorielle.

Certains se sont aussi intéressés à construire la table des premières valeurs de p premier tel que p+2 soit également premier (ces couples de premiers sont dits jumeaux):

3 5 11 17 29 41 59 71 101 107 137 149 179 191 197 227 239 269 281 311 347 419

3 5 11 17 29 41 59 71 101 107 137 149 179 191 197 227 239 269 281 311 347 419
431 461 521 569 599 617 641 659 809 821 827 857 881 1019 1031 1049 1061 1091....
et celle des écarts, ou "différences premières" de cette suite:
2 6 6 12 12 18 12 30 6 30 12 30 12 6 30 12 30 12 30 36 72 12 30 60 48 18 24 118....
Existe-t-il des triplés (tel 3 5 7) ?
Peut-on extraire de la suite des entiiers premiers de longues sous-suites en progression arithmétique (5 17 29 41 est de longueur 4, raison 12) ? Y aurait-il "des régularités inévitables" ?
\

<u>Exercice</u> 15 (à propos de la représentation binaire alternée, une bijection de $(0,1)^*$ sur **Z**):

A.- Décomposer les entiers positifs sur les $(-2)^k$, $k \geq 0$,   1 -2 4 -8 16.....
en utilisant au plus une fois chaque puissance de 2 (<u>représentation binaire alternée</u>).
Chaque entier est alors représenté par un mot sur l'alphabet (0,1), suivi par une occurrence de 1 si l'on convient que les plus faibles poids sont à gauche (cette dernière occurrrence de 1 peut comme d'habitude être suivie d'occurrences de 0 non significatives).
Représentation des entiers de 1 à 16:

1 011 111 001 101 01011 11011 00011 10011 01111 11111 00111 10111 01001 11001 00001...

Tout mot de la forme m1, où m est de degré pair, figure.

On établira

-les règles de l'addition dans ce système de numération:
1+1 donne 011 pour les caractères de rang k pair: <u>la retenue porte sur les deux caractères qui suivent</u>,
pour les rangs k impair, 1+1 provoque la suppression d'une occurrence de 1 au rang suivant.

-les règles de la conversion f de la représentation binaire classique (avec le caractère de plus fort poids à droite) vers la représentation binaire alternée: f(1)=1 et f(01)=011 résument tout (suivant la parité des occurences des caractères 1 en binaire classique) suivi des règles de l'addition en binaire alterné;
par exemple, f(111)=f(1)+f(01)+f(01)=101+f(01)=101+011=11011.

Ce système de représentation trouve une application dans le problème de la tour de Hanoï.
Par exemple, le nombre des mouvements dextrogyres est 1 5 21 85...(ici représentés par 1 101 10101 1010101...) pour le déplacement dextrogyre d'une pile de n disques, tandis que le nombre des mouvements lévogyres est 0 2 2 10 10 42 42 162 162... (011 01111 0111111...).

B.- De même sur les $-(-2)^k$, $k \geq 0$,   -1 2 -4 8 -6.....   La représentation des entiers de 1 à 16:

11 01 1011 0011 1111 0111 1001 0001 1101 0101 101011 001011 111011 011011 100011 000011

Tout mot de la forme m1, où m est de degré impair, figure. Considérer qu'il s'agit de la représentation des entiers négatifs dans la représentation binaire alternée. Alors, le mot vide représente l'entier 0, aussi assimilable aux mots de 0^*; les mots de $(0,1)^*1$ représentent les entiers, positifs et négatifs, les mots de degré impair les entiers positifs, les mots de degré pair les entiers négatifs.
Les règles de l'addition établies pour les entiers positifs valent encore.
Le passage de m à 0m (resp. 1m) représente le passage de l'entier n à -2n (resp. 1-2n).
Le passage de l'entier n à son opposé -n est résumé par 10+11=00 pour tout rang.

La sommation tronquée, limitée aux mots de degré n correspond à celle des entiers modulo 2^n:
Pour n=1, 1+1=0.
Pour n=2, 10+10=01, 01+10=11, 11+10=00.
Pour n=3, les multiples de 100: 100, 011, 111, 001, 101, 010, 110, 000
(soit la représentation des entiers 1 2 3 4 5 -2 -1 0).

C.- Décomposer sur les $(-3)^k$, représentation par des mots sur l'alphabet (0,1,2),......etc...

D.- Décomposition sur la suite alternée de fibonacci, 1 -2 3 -5 8 -13 21..... Début, de 1 à 13:

1 111 001 101 11111 01001 11001 00001 11001 11101 00101 10101 1111111...

et sur la suite alternée, -1 2 -3 5 -8 13 -21....
11 01 1111 0111 0001...

E.- Avec les entiers factoriels 1 -2 6 -24 120... le i-ème caractère c_i étant compris entre 0 et i, comme en numération factorielle. On obtient pour les entiers de 1 à 20:

1 021 121 011 111 001 101 122 122 012 112 002 102 023 123 013 113 003 103 01011...
Tout mot factoriel de degré impair figure.

F.- Avec la suite alternée des entiers factoriels -1 2 -6 24 -120..., les entiers de 1 à 19:

11 01 12 02 1031 0031 1131 0131 1231 0231 1021 0021 1121 0121 1221 0221 1011 0011 1111...
Tout mot factoriel de degré pair figure.

\

Exercice 16 (**quelques normes sur les entiers, dans diverses représentations**):

La **norme d'un mot**, sur l'alphabet N des entiers naturels, c'est par définition la somme numériques de ses occurrences. Aux entiers représentés en numération base 2, 3, b, en numération fibonaccienne standard, en numération factorielle, en numération de Pell, correspondent autant de normes.

La numération de base 2.

La suite des entiers est engendrée, partant de 0, par le morphisme itéré substituant 2i.(2i+1) à i:

0, 0 1, 0 1 2 3, 0 1. 2 3. 4 5. 6 7, 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15, ...

tandis que le morphisme substituant 01 à 0 et 10 à 1 engendre la suite des normes base 2, prise modulo 2, désormais connue sous le nom de suite de Thue-Morse et Prouhet,

0, 01, 0110, 01101001, 0110100110010110, ... mots qui sont leur propre miroir,

et la norme elle-même de la représentation base 2 des entiers s'obtient en itérant le morphisme qui envoie i sur i.(i+1),
0, 01, 0112, 01121223, 0112122312232334,.....

soit encore, si f est le morphisme envoyant i sur i+1, la suite

m(0)=0, m(n+1)=m(n)f(m(n)).

Le calcul de la suite des normes est très accéléré par l'itération m:=h_m(m), où h_m est le morphisme qui envoie tout entier i sur f^i(m), à partir de l'initialisation m:=01, modulo 2:

01, 0110, 0110100110010110,...

passant à chaque itération d'un mot de degré k à un mot de degré k^2, soit des mots de degré 2^(2^n).

Il en va de même pour la suite des parités de Thue-Morse et Prouhet, en substituant le mot m à toute occurrence de 0, et le mot déduit de m par changement de 0 en 1 et 1 en 0 à toute occurrence de 1:

01

0110

0110100110010110

01101001100101101001011001101001100101100110100101101001100101101001011001101001
01101001100101100110100110010110100101100110100110010110011010010110100110010110
01101001100101101001011001101001011010011001011010010110011010011001011001101001
0110100110010110.

Cette suite, exprimée sur l'alphabet (1,-1), au lieu de (0,1), admet pour fonction génératrice le produit infini des (e-x^(2î)) pour i≥0,

$$(e-x)(e-x^2)(e-x^4)(e-x^{16})(e-x^{256})\ldots..$$

La somme g(n) des normes des entiers de 0 à 2^n-1, écrits en base 2, satisfait à

$$g(0)=0,\ g(n+1)=2g(n)+2^n, \quad 0\ 1\ 4\ 12\ 32\ 80\ldots.,\ \ n*2^{(n-1)}.$$

suite spécialement intéressante, ainsi que sa différence première 1 3 8 20..., et sa sommation 1 5 17...

La numération de base 3.

La suite des entiers est engendrée, partant de 0, par le morphisme itéré substituant 3i.(3i+1).(3i+2) à i:

0, 0 1 2, 0 1 2. 3 4 5. 6 7 8 , ...

tandis que le morphisme substituant 012 à 0, 120 à 1, 201 à 2, donne

0, 012, 012120201, 012120201.120201012.201012120,.....

càd les normes des entiers en numération base 3, prises modulo 3;

le morphisme envoyant i sur i.(i+1).(i+2) donne la suite de ces normes,

0, 012, 012123234, 012123234123234345234345456, ...

soit, si f est le morphisme envoyant i sur i+1, la suite

m(0)=0, m(n+1)=m(n)f(m(n))f(f(m(n)))

ou encore, par l'itération m:=h_m(m), où h_m est le morphisme qui envoie tout entier i sur f^i(m), à partir de l'initialisation m:=012: 012, 012.123.234, soit 012120201, modulo 3.

Evidemment, le mot 012120201 est de degré partiel égal en 0,1,2, mais encore, en sommant les rangs des occurrences de 0, 1, 2, obtient-on les sommes égales 0+5+7=1+3+8=2+4+6=12, ...

La somme g(n) des normes des entiers de 0 à 3^n-1, écrits en base 3, satisfait à

$$g(0)=0,\ g(1)=3,\ g(n+1)=3g(n)+g(1)*3^n, \quad 0\ 3\ 18\ 81\ldots..$$

En numération de **base b**, de l'initialisation m:=012...(b-1), en itérant m:=h_m(m), où h_m est le morphisme qui envoie l'entier i sur le mot f^i(m), nous engendrons la suite des normes des entiers en numération de base b (et de même, la suite des normes prises modulo b).
Ainsi passe-t-on à chaque itération d'un mot de degré k à un mot de degré k^b.

La somme g(n) des normes des entiers écrits en base b, de 0 à b^n-1 satisfait à

$$g(0)=0,\ g(1)=1+2...+(b-1)=b*(b-1)/2, \quad g(n+1)=b.g(n)+b^n*b*(b-1)/2, \ \text{soit}\ \ 2*g(n)=n*(b-1)*b^n.$$

Tableau de la somme g(n) des normes des entiers de 0 à b^n-1 pour n de 1 à 11, pour b de 2 à 10,

$$2*g(n)=n*(b-1)*b^n$$

0 1 4 12 32 80 192 448 1024 2304 5120
0 3 18 81 324 1215 4374 15309 52488 177147 590490
0 6 48 288 1536 7680 36864 172032 786432 3538944 15728640
0 10 100 750 5000 31250 187500 1093750 6250000 35156250 195312500
0 15 180 1620 12960 97200 699840 4898880 33592320 226748160 1511654400
0 21 294 3087 28812 252105 2117682 17294403 138355224 1089547389 8474257470
0 28 448 5376 57344 573440 5505024 51380224 469762048 4227858432 37580963840
0 36 648 8748 104976 1180980 12754584 133923132 1377495072 13947137604 139471376040
0 45 900 13500 180000 2250000 27000000 315000000 3600000000 40500000000 450000000000,

Naturellement, ces sommes s'expriment plus simplement en base b.

La numération factorielle.

La suite des normes des entiers en numération factorielle est engendrée par

m(0)=0, m(1)=m(0).f(m(0))=01, m(2)=m(1).f(m(1)).f(f(m(1)))=011223,
et finalement
m(n)=produit ordonné des f^i(m(n-1)), pour i de 0 à n.

0, 0.1, 01.12.23, 011223.122334.233445.344556,....

(La norme des entiers en numération factorielle peut s'interpréter, naturellement, comme le nombre des inversions de la permutation canoniquement associée, comme nous l'avons vu au Livre I, chapitre4).

Si g(n) est la somme des normes factorielles des entiers, de 0 à n!-1, nous avons :

g(1)=0, g(2)=1, g(3)=9=3*1+2(1+2), g(4)=4*9+6*(1+2+3),
g(n+1)=(n+1)g(n)+n!*n*(n+1)/2,   0 1 9 72 600...

La numération de Fibonacci.

La suite des normes des entiers en numération de Fibonacci est engendrée par la récurrence défine par

m(0)=0, m(1)=1, puis m(n+1)=m(n).f(m(n-1)) pour n>0,

soit
0, 0.1, 0.1.1, 0.1.1.12, 0.1.1.12.122, 0.1.1.12.122.12223, 0.1.1.12.122.12223.12223233,...

Si F(n) est le n-ième entier de la suite fondamentale de fibonacci, F(0)=1, F(1)=1,
la somme g(n) des normes des entiers de 0 à F(n)-1 en numération de Fibonacci satisfait à
g(n)=g(n-1)+g(n-2)+F(n-1), g(0)=0, g(1)=1,   0 1 2 5 10 20 38 71.....

La différence première, 0 1 1 3 5 10 18 33... compte la somme des normes de F(n) à F(n+1)-1.

g satisfait à la récurrence g(n)=2*g(n-1)+g(n-2)-2*g(n-3)-g(n-4),
et la fonction génératrice est $(1-x-x^2)^{-2}$, à comparer à la fonction génératrice de la suite de Fibonacci.

La numération de Pell.

Les entiers se décomposent sur la suite de Pell, P(n+1)=2.P(n)+P(n-1), 1 3 7 17 41...

les entiers	0 1 2 01 11 21 02 001 101 201 011 111 211 021 002 102 202 0001...,
sont de norme	0 1 2 1 2 3 2 1 2 3 2 3 4 3 2 3 4 1... ,

Nous avons la récurrence m(0)=0, m(1)=012, puis m(n+1)=m(n)f(m(n))f(f(m(n-1))),
donnant la suite des normes de Pell des entiers, de 0 à P(n)-1,

0, 0 1 2, 0 1 2. 1 2 3. 2, 0 1 2 1 2 3 2. 1 2 3 2 3 4 3. 2 3 4,
0 1 2 1 2 3 2 1 2 3 2 3 4 3 2 3 4. 1 2 3 2 3 4 3 2 3 4 3 4 5 4 3 4 5. 2 3 4 3 4 5 4, ...

La somme g(n) des normes de Pell des entiers de 0 à P(n)-1 satisfait à
g(0)=0, g(1)=3, g(n+1)=2g(n)+P(n)+g(n-1)+2*P(n-1), 0 3 11 38...

La numération tribonacci.

La suite de tribonacci, de récurrence t(n+1)=t(n)+t(n-1)+t(n-2), est engendrée par 1:
(0 0 1) 1 2 4 7 13 24 44 81 149...

Les entiers sont représentés par des mots sur l'alphabet (0,1) soumis à la normalisation 1110=0001.

La suite des normes des entiers: 0.1.12.122.122323.1223232334.12232323343423343 44.1...
Si l'on a énuméré les normes des entiers de 0 à t(n)-1,
prendre le facteur gauche de degré t(n-2)+t(n-1), ajouter 1 à chaque caractère, et concaténer, ce qui donne le mot énumérant les normes des entiers de 0 à t(n+1)-1, ce qui est fait ici jusqu'à 44.
t(n-2)+t(n-1): 1 2 3 6 11 20 37 68 125...

La suite, sommée, des normes des entiers, de 0 à t(n)-1: 0 1 4 9 22 50....

Ces diverses suites sont riches en propriétés, pas toutes très explorées.

\

Exercice 15:

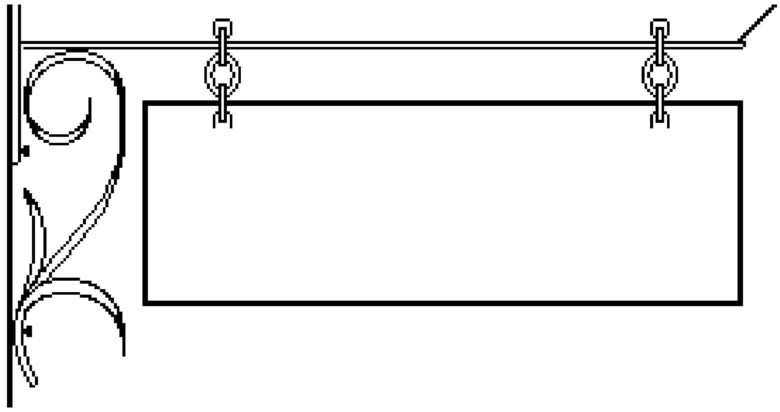
Les suites sous-diagonales (si l'on préfère, les entiers en numération factorielle) telles que les caractères soient non nuls, chaque caractère excèdant au plus d'une unité celui qui précède sont une manière de coder les mots de parenthèses (1, 11 12, 111 121 112 123,....).

\

Exercice 16:

La suite 1 2 6 48 720 23040 1451520 185794560 47377612800.....
donne l'ordre du groupe des matrices orthogonales (dont le produit par leur transposée est l'identité) à coefficients dans le corps des entiers modulo 2.
Ce sont les facteurs gauches du produit 2*3*8*15*32*63*128*255....
(alternativement, produit par $2^{(2n-1)}$ et $2^{(2n)}-1$)
Bizarrement, 6=3!, 720=6!,   1451520=4.9!.
Si vous avez des moyens de calcul,
allez voir ce qu'il en est ensuite de la représentation factorielle de ces entiers.

\



IV. Systèmes de résidus

Soit un entier p positif.
Pour tout entier k, on appelle résidu de k modulo p le reste j de la division de k par p; on notera Rés$_p$(k) ce résidu.
On écrit aussi (k modulo p = j) ou encore (k=j modulo p),
ou (k=j (mod p)), ou même (k=j(p)) lorsqu'aucune ambigüité n'est possible. Cela signifie dans tous les cas que k et j diffèrent d'un multiple de p, càd que k-j est multiple de p; on dit aussi que k-j est divisible par p.

Pour tout couple (k,k') d'entiers, on a Rés$_p$(k+k')=Rés(Rés$_p$(k)+Res$_p$(k')),
et Rés$_p$(kk')=Rés(Rés$_p$(k)Rés$_p$(k')).

Noter que le quotient et le reste de la division par p peuvent être définis de manière à ce que ces relations demeurent valables si k ou k' sont négatifs (ce n'est, hélas, pas toujours le cas de la fonction MODULO des langages de programmation!): le reste de la division de k par p est alors un entier positif compris entre 0 et p-1, même lorsque k est négatif.
Autrement dit, Rés$_p$ est un homomorphisme d'anneau. On parlera de l'anneau des entiers modulo p [cet anneau est d'ailleurs un corps lorsque p est premier].

Soit P la fonction telle que P(n) soit le n-ième entier premier [P(1)=2, P(2)=3, P(3)=5, P(4)=7, P(5)=11..], et F la fonction factorielle de P, telle que F(n) soit le produit des valeurs de P, de P(1) à P(n); [on dira que F est la factorielle de P : F(1)=2, F(2)=6, F(3)=30, F(4)=210, F(5)=2310..].
Nous allons nous intéresser à ce fait que les entiers modulo F(n) sont identifiés par le n-uplet des résidus modulo P(1), P(2),... P(n), et que l'on peut calculer sur ces restes.
En d'autres termes, l'anneau A(n) des entiers modulo F(n) est isomorphe au composé direct des corps C(1), C(2),... C(n) des entiers modulo P(1), P(2),... P(n). Soit f cet isomorphisme de A(n) sur C(1)xC(2)x... C(n).
L'application f est linéaire, lorsque l'on calcule modulo F(n) dans l'espace de départ, et modulo P(i) sur la i-ème coordonnée de l'espace d'arrivée.
[on peut d'ailleurs effectuer une construction comparable avec toute collection P(i) d'entiers premiers deux à deux, au lieu de la suite des nombres premiers]

Ce fait est connu sous le nom de "théorème des restes chinois"; sa démonstration formelle n'est pas compliquée, mais nous n'allons pas la produire, car nous avons ici un autre but, pratique: l'inversion de f: f^{-1} se calcule comme une forme linéaire. Par commodité de langage, la bijection f et son inverse seront qualifiées de bijections chinoises.

Exemple:

Soit n=2, les nombres premiers P(1)=2, P(2)=3, et F(2)=6.
Considérons Rés$_p$ comme une procédure programmée.

Les entiers modulo 6 (représentés par les entiers de 0 à 5) s'écrivent alors comme couples de résidus modulo 2 et 3: $Rés_6(k)=(Rés_2(k),Rés_3(k))$,
soit, de manière raccourcie 0=(0,0), 1=(1,1), 2=(0,2), 3=(1,0), 4=(0,1), 5=(1,2).

On a pour la somme $Rés_6(i+j)=Rés_6(Rés_6(i)+Rés_6(j))=(Rés_2(i+j),Rés_3(i+j))=$
$(Rés_2(i),Rés_3(i))+(Rés_2(j)+Rés_3(j))= (Rés_2(i)+Rés_2(j),Rés_3(i)+Rés_3(j))$,
et de même pour le produit
$Rés_6(i*j)=Rés_6(Rés_6(i)*Rés_6(j))=(Rés_2(i*j),Rés_3(i*j))=$
$(Rés_2(i),Rés_3(i))*(Rés_2(j)*Rés_3(j))=(Rés_2(i)*Rés_2(j),Rés_3(i)*Rés_3(j))$,
soit, par exemple, en calculant modulo 6 sur les singletons, modulo 2 sur le premier élément d'un couple, et modulo 3 sur le second élément,
2=5+3=(1,2)+(1,0)=(1+1,2+0)=(0,2)=2, et 3=5*3=(1,2)*(1,0)=(1*1,2*0)=(1,0)=3.

Si l'isomorphisme f envoyant $Rés_6(k)$ sur $(Rés_2(k),Rés_3(k))$ est facile à calculer, *qu'en est-il de la bijection inverse* ?
Nous nous intéressons donc à
-l'inversion de la bijection f
-qui envoie tout entier k compris entre 0 et F(n)-1
-sur le n-uplet des résidus $Rés_p(k)$, pour p de P(1) à P(n).

Pour chaque mot $m=r_1r_2…r_n$, où r_i est un entier modulo P(i), on cherche quel est l'entier k modulo F(n) tel que m=f(k).
Du fait de la multilinéarité de f^{-1}, il suffit de calculer f^{-1} sur les n mots mots dont les lettres sont nulles, à l'exception de l'une d'elles, égale à 1.
Soit alors m_i le mot dont la lettre r_i vaut 1, les autres étant nulles, et soit k_i l'entier tel que $f(k_i)=m_i$.
L'entier k_i doit être multiple de P(j) pour tout j distinct de i, et congru à 1 modulo P(i): on prend donc pour k_i le plus petit entier multiple de F(n)/P(i) qui soit congru à 1 modulo P(i).
Cet entier existe, car le résidu de F(n)/P(i) modulo P(i), non nul, engendre un sous-groupe du groupe multiplicatif modulo P(i).
On a alors $k=k_1r_1+k_2r_2… +k_nr_n$, modulo F(n).
Table des premières valeurs de $(k_1,k_2.. k_n)$:

n	r^1	r^2	r^3	r^4	
2	3	4			de somme 7=1 modulo 6
3	15	10	6		de somme 31=1 modulo 30
4	105	70	126	120	de somme 421=1 modulo 210

Ecrire un programme qui calcule $(k_1,k_2.. k_n)$ pour toute suite P(i) d'entiers deux à deux premiers entre eux.
\
<u>Exercice</u> 1:

Enumérer les mots $m=r_1r_2.. r_n$ selon l'ordre alphabétique, et calculer les permutations des entiers de [0,F(n)-1] que l'on obtient par la suite $f^{-1}(m)$
\
<u>Exercice</u> 2:

Etant donné deux entiers p et q premiers entre eux,
et la bijection f de [0,pq-1] sur [0,p-1]x[0,q-1]
définie par $f(i)=(Rés_p(i),Rés_q(i))=(j,k)$,
il existe deux entiers r_p et r_q tels que $i=jr_p+kr_q$ modulo pq,
avec r_p multiple de q et congru à 1 modulo p (resp. r_q multiple de q et congru à 1 modulo q) et en outre r_p+r_q congru à 1 modulo pq.
Il est clair que r_p et r_q sont premiers entre eux.
On pourra noter (j,k)=i mod (p,q) le couple de résidus de i modulo p et q.

Par exemple, pour p=5 et q=7, on a r_p=21, r_q=15, r_p+r_q=pq+1=1(mod pq), et f^{-1} est représentable par le tableau suivant à 5 lignes et 7 colonnes, *que l'on imaginera implanté sur un tore*:

00	15	30	10	25	05	20
21	01	16	31	11	26	06
07	22	02	17	32	12	27
28	08	23	03	18	33	13
14	29	09	24	04	19	34

Construire, par exemple, le tableau de f^{-1} pour p=35, q=6.
Construire une petite table de la fonction r(p,q)=(r_p,r_q).\

<u>Exercice</u> 3 (difficile):

Soit un couple (p,q) d'entiers positifs premiers entre eux, P leur produit, et S leur somme. On se propose d'étudier le langage L(p,q) des entiers n de la forme n(i,j)=ip+jq, pour i et j entiers non-négatifs, lequel langage est engendré par la récurrence suivante: 0 appartient à L(p,q), et si k appartient à L(p,q), alors k+p et k+q appartiennent à L(p,q).

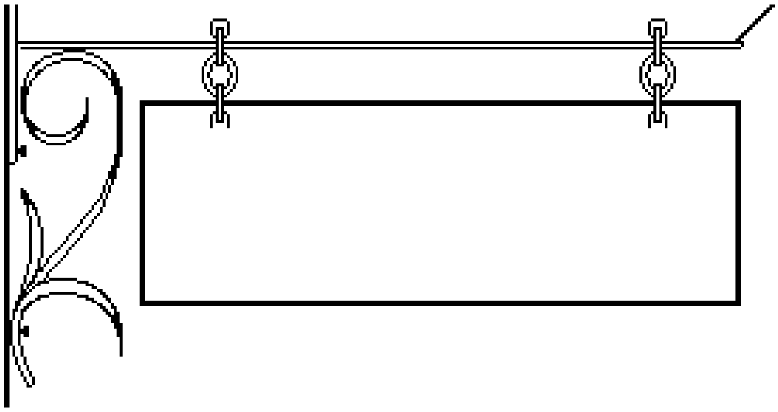
Supposons que i=$Rés_q$(n), j=$Rés_p$(n).
Etablir que tout résidu modulo pq s'écrit n(i,j) modulo P.
Alors, pour i variant de 0 à q-1, j de 0 à p-1,
l'entier n(i,j), fonction du couple (i,j),
définit une injection I de [0,p-1]x[0,q-1]
(ou [0,pq-1], grâce à la bijection chinoise)
dans l'intervalle E=[0,2pq-p-q].

Etablir que si l'entier k de l'intervalle [0,P-1] n'est pas dans l'image Im(I) de l'injection I, alors P+k et P-S-k sont dans Im(I).
Ecrire un programme qui calcule, à partir du couple (p,q), les entiers de l'intervalle [0,pq-1] n'appartenant pas à l'image de l'injection I.
Voici le tableau de la fonction n(i,j) pour (p,q)=(5,7):

00	05	10	15	20	25	30
07	12	17	22	27	32	02
14	19	24	29	34	04	09
21	26	31	01	06	11	16
28	33	03	08	13	18	23

Note: Ces phénomènes peuvent éventuellement s'étudier en utilisant le théorème fondamental sur la structure des idéaux de l'anneau **Z** des entiers rationnels, à savoir que tout idéal est un sous-groupe additif, et que les sous-groupes additifs de **Z** sont monogènes, d'où résulte la relation de Bezout: pour tout couple (p,q) d'entiers premiers entre eux, il existe un couple d'entiers (i,j) tels que ip+jq=1 (et d'ailleurs un second couple (i',j') tel que i'p+j'q=-1).

Les coefficients (i,j) et (i',j') s'obtiennent par le développement en fraction continue de p/q.
Cependant, on peut s'efforcer de ne considérer que l'ensemble des entiers non-négatifs, càd. la structure de demi-anneau de **N**, et c'est ce que nous avons fait.
Dans un autre langage, il s'agit d'étudier les solutions (x,y) de l'équation diophantienne (càd. "en entiers") xp+yq=n lorsque p,q,n sont donnés.\



V.Suites très croissantes.

Pour des entiers très grands (que cela signifie-t-il ?), les systèmes ci-dessus risquent de devenir peu praticables, bien que le système factoriel puisse être itéré, càd que les chiffres factoriels peuvent, à leur tour, être représentés en numération factorielle. D'où un système de notation arborescente: dès qu'en coefficient est jugé trop grand, il est remplaçé par sa représentation factorielle; ce système, itéré jusqu'à son terme, conduirait à écrire les entiers sous forme de codage magmatique d'arbre, avec deux lettres atomiques génératrices, 0 et 1.
Par exemple (500 base dix) s'écrirait

(0,1,3,0,4)=(01(11)0(0(01)))

(ou, en notation polonaise, $0111x_20001x_2x_2x_5$, mais ne serait-ce pas paradoxal de l'introduire ici, puisque tout a été fait pour réduire l'alphabet?).

<u>Exercice</u> 1:

Programmer la conversion, dans cette représentation factorielle itérée, des entiers initialement représentés dans un système avec base; et inversement.\

Il s'agit d'essayer de préciser ce que l'on peut entendre par "entiers très grands". Le plus grand des nombres premiers connu -mais ceci a changé à l'heure qu'il est- pouvant s'écrire avec environ 100.000 chiffres en base 10, ça ne dépasse pas les possibilités de représentation des ordinateurs. Chacun connaît des suites d'entiers dont la croissance est considérée comme rapide, par exemple la suite exponentielle des puissances $k_n=k^n$ d'un entier k>1 (utilisée dans le système de numération de base k), ou la suite des factorielles des entiers, $f_n=nf^{n-1}$, initialisée par $f_1=1$, et utilisée pour la numération factorielle.

Comment définir des suites dont la croissance serait plus rapide? Evidemment, en itérant les procédés ci-dessus. Par exemple, on peut, pour toute suite $s=(s_i,i>0)$ définir la suite factorielle de s, f(s), par $f(s)_1=s_1$, et $f(s)_n=s_nf(s)_{n-1}$, et ensuite $f_2(s)=f(f(s))$, etc......
(et alors $g(s)_i=f_i(s)_i$, mais n'anticipons pas).

Ou encore, définir une composition u..t des suites u et t, telle que $(u..t)_n$ s'obtienne en élevant u_n à la puissance t_n.

Ainsi, substituer u..u à u est déjà un procédé intéressant.

Constater la commodité de l'écriture programmative
(ainsi: itérer n:=n*n sous l'initialisation n:=2):
sur le magma binaire, considérer le morphisme qui envoie tout arbre sur sa propre image par le morphisme qu'il définit lui-même; ainsi, partant de (x,x),
(x,x)   ((x,x),(x,x))   ((((x,x),(x,x)),((x,x),(x,x))),(((x,x),(x,x)),((x,x),(x,x))))   ...

Considérer ceci: (itérer $n:=n^n$ sous l'initialisation n:=2);
<u>Remarque</u> 0 (hors sujet):

10! est le produit de 6! par 7!; il semble que ce soit la seule factorielle produit de deux factorielles que l'on connaisse, excepté celles de la forme n!!, qui sont le produit de (n!-1)! par n!
[n!!, ce n'est que le nombre d'ordres totaux possibles, sur les permutations d'un ensemble à n éléments (!!!)]./

Les méthodes ci-dessus suggérées ont un léger parfum d'excès: elles font appel à des fonctions numériques standard (ne serait-ce que le produit des entiers), alors qu'il y a nécessairement plus élégant, plus dépouillé...
Le but de ce chapitre est multiple:
- en utilisant des notations normalisées, familières aux praticiens du calcul automatique, montrer que l'on peut construire des suites "très croissantes" avec des moyens "très frustes" qui -en termes informatiques- n'utilisent que des techniques d'adressage (ou indirections).
Il s'agit en fait d'indicer une suite d'entiers, et d'avancer de plus en plus vite dans cette suite, ou, plus précisément, d'en extraire une sous-suite de plus en plus rare. Ensuite, il sera possible d'itérer (indéfiniment) le procédé... ..et la question se posera d'aller au-delà.
- ensuite, rendre perceptible le fait qu'il n'est pas possible de construire une échelle normalisée de la notion de croissance, à l'intérieur de laquelle toute suite croissante trouverait sa place.
- enfin, insister sur l'importance du choix d'un bon système notationnel, notamment en ce qui concerne l'exploitation des récurrences, ce qui n'est pas si évident.

En ce qui concerne les notations:
I) évacuer les notations indicées et les exposants: ainsi, par exemple, s_i^j devra être noté s(i,j), procédure fonctionnelle s d'arguments i et i.
II) pour toute fonction g, la puissance k-ième g^k (au sens de la composition des fonctions) au point * se notera avantageusement comme une fonction de deux variables, g(*,k), soumise - du fait de l'associativité de la composition des applications - à la récurrence suivante: pour k=i+j

(1) g(*,k) = g(*,i+j) = g(g(*,i),j) = g(g(*,j),i), sous g(*,0)=g(*),

ce qui, en particulier, donne g(*,1+j) = g(g(*,1),j) = g(g(*,j),1),
soit, en utilisant des notations de type polonais
*.i.j.+.g = *.i.g.j.g , *.0.g = * et, donc *.i.1.+.g = *.i.g.1.g
ou *.i.g = * si i=0, et sinon *.1.g.i.1.-.g

III) plus généralement, pour toute suite de suites, on notera aussi s(i,j) le i-ème élément de la j-ème suite.
Dualement, s(i,j) s'interprète comme le j-ème élément de la i-ème suite...c'est pourquoi la j-ième suite sera notée s(*,j), ou s(.,j), tandis que la suite duale de rang i se noterait s(i,*), ou s(i,.).

Remarque 1:

Du fait des effrayants problèmes de capacité, le programmeur ne déclarera évidemment pas un objet s de type 'tableau', s(.,.), mais traite s comme une procédure (généralement récursive, définie par récurrence et initialisation). Ces programmes ne seront pas écrits pour être exécutés: ils seront inexécutables.\

La méthode Cantor-Ackerman.

Prendre les entiers non-négatifs pour alphabet.
Supposons que f soit une fonction strictement croissante (f(i+1)>f(i)), avec f(0)>0, définie sur les mots d'une lettre, c'est-à-dire sur les entiers (par exemple, $f(i)=2^i$, ou f(i)=factorielle(i+1)).
Sur deux lettres, c'est-à-dire sur les couples d'entiers, on peut initialiser f par f(i,0)=f(i), puis, (procédé qui porte le nom d'Ackerman) f est définie par la récurrence suivante, expression d'une indirection simple
(2) f(i+1,j+1) = f(f(i,j+1),j), sous f(0,j+1)=f(j,j) (par exemple).

Soit, en notations polonaises, **(3) i+1.j+1.f=i.j+1.f.j.f, sous 0.(j+1).f=j.j.f**
Si la fonction f(*,j) de * est très croissante, la fonction f(*,j+1) est nettement plus croissante - en un sens que nous nous garderons de préciser, car nous n'avons aucun critère de classification.

Nous nous contenterons, pour la comparaison de deux fonctions h et g définies sur les entiers, de l'ordre partiel banal induit par l'existence d'un rang k à partir duquel les valeurs de g surpassent celles de h, c'est-à-dire que:
h<g équivaut à: il existe un entier k tel que h(i)<g(i) dès que i>k .

En ce sens, nous pouvons écrire f(.,j)<f(.,j+1), en désignant par f(.,j) la fonction qui à tout i associe f(i,j).

Un procédé, utilisé par Cantor dans une situation qui n'est pas sans rappeler celle-ci (la non-dénombrabilité de l'ensemble des nombres réels), consiste à définir la diagonale de f comme la suite des f(i,i).
Cette fonction diagonale est supérieure à toute j-ième fonction f(*,j), à condition que le phénomène soit amorcé par un choix d'initialisation correct. Prenons les entiers pour alphabet; la fonction f a été définie sur les mots de longueur 2, et initialisée sur f(i,0)=f(i); en convenant encore de f(i,j,0)=f(i,j), soit i.j.0.f=i.j.f, on définit, par exemple, f sur les mots de longueur 3 par

(4) f(i+1,j+1,k)=f(f(i,j+1,k),j,k)
sous f(0,j+1,k)=f(j,j,k) et f(i,0,k+1)=f(i,i,k).

Soit encore, en notation de type polonais, (i+1) (j+1) k f = i (j+1) k f j k f
sous 0 (j+1) k f= j j k f, et i 0 (k+1) f = i i k f.

Le lecteur constatera que la gestion de ces procédures récursives se ramène à des règles de réécriture de mots sur un alphabet composé des entiers et de signes opératoires. Le calcul porte sur les adresses, et non sur les valeurs: il ne s'agit que d'indirections.

__ Exercice 1:

I) Etendre la définition de f aux mots sur l'alphabet des entiers, quelle que soit leur longueur.
Par exemple, l'alphabet étant celui des entiers, m un mot et i,j des entiers, soit f défini sur tout mot (i+1)(j+1)m par la récurrence

f((i+1)(j+1)m)= f(i(j+1))jm,

initialisée par la donnée de f sur les mots de degré 1, et par l'ablation de toute occurrence de 0.
On peut alors définir la fonction supra-diagonale f' par **(5) f'(i) = f($i^{"i"}$)**
où $i^{"i"}$ désigne le mot de longueur i dont toutes les lettres sont l'entier i.
On a ainsi construit une transformation vertigineuse qui à toute fonction f(.) associe la fonction f'(.).
Nous voici en situation de substituer f'(.) à f(.), et, évidemment, d'itérer la construction...
II) Ecrire le programme calculant f'.\

Exercice 2 (de l'utilité d'un bon système de notations):

On peut *omettre* les signes opératoires, puisque la seule opération fonctionnelle, de type binaire, consiste à saisir un objet dont on donne les coordonnées.
Reprenons les notations et conventions.
Soit *l'alphabet des entiers*, et les mots sur cet alphabet, lus de la gauche vers la droite, interprétés comme l'indication d'un *calcul* de type *polonais*. Le mot ij, de degré 2, où i et j sont deux entiers, s'interprète comme l'objet en position j sur la ligne i. Le mot ijk, où k est également un entier, désigne l'objet de la ligne k dont le rang est donnée par l'objet en position i sur la ligne j, etc...
Comme d'habitude, i^k note *le mot* dont les k lettres sont toutes des occurrences de i. Notons i_1 l'entier (i-1),.. et i_j l'entier (i-j): alors, la récurrence fondamentale s'écrit ji=j_1ii_1, pour i et j supérieurs à 0; cette récurrence est initialisée pour i=0 (par exemple, pour fixer les idées, par l'entier 'factorielle de j+1', sur le mot j0), et fait l'objet d'une définition particulière pour j=0 (par exemple, 0i=i_1i_1 pour i>0, pour fixer les idées). Le calcul est mené en appliquant itérativement ces transformations aux deux premières lettres du mot.
Finalement, on a ji=0i$i_1{}^j$=$i_1{}^{j+2}$, et notamment ii=i^2=$i_1{}^{i+2}$.

Exploiter ainsi cette récurrence revient simplement à gérer la récursivité, comme il convient, à l'aide d'une pile.

[les notations du langage Forth, tombé en désuétude, qui manipulaient directement des objets empilés, étaient adaptées à ce genre de calcul]
En s'intéressant spécialement à i^2, on obtient i^2 comme produit de gauche à droite des facteurs $i_k{}^{i+3-k}$, pour k variant de i à 1.
C'est évidemment un mot de degré 3+4+...+(i+2)=(i+2)(i+3)/2 -3. Par exemple, 3^2=000111122222 (avec l'initialisation choisie ci-dessus, on a 0^3=2).

On ne peut dire que l'on a ôté la récursivité; nous l'avons simplement exploitée; nous avons seulement déroulé la récurrence, en énumérant les états successifs de la pile; un calcul récursif est toujours de la forme: modifier, selon les règles, le dessus de pile, tant que la pile n'est pas vide.
On pourra écrire une version de croissance moindre, initialisée par i0=0i=i+1 sur le bord du tableau, soit, avec les notations convenues

$$ji=0ii_1{}^{j}=(i+1)(i-1)i_1{}^{j-1}=i(i-1)(i-2)i_1{}^{j-1}..$$

Bon, restons-en là.\

Indirections itérées.

Les procédés ci-dessus sont essentiellement fondés sur l'indirection décrite en (2). On aggrave la situation en opérant, non pas une indirection, mais f(i,j+1) indirections.

Pour cela, il suffit de rapprocher (1) et (2), de poser f(*,j) = g(*,1),
de calculer g(*,f(i,j+1)), avec, par exemple, * = f(i,j+1)
et finalement f(i+1,j+1) par **(6) f(i+1,j+1) = f(g(f(i,j+1),f(i,j+1)),j)**
en lieu et place de (2).

Note: un procédé un peu moins grave, mais plus simple à concevoir, substitue à toute application f (des entiers non-négatifs dans les entiers non négatifs) la fonction F telle que $F(i)=f^{f(i)}(i)$, que l'on pourrait noter f^f. La puissance est évidemment prise au sens de la composition des applications [s'il s'agissait de la puissance numérique, nous écririons $(f(i))^{f(i)}$].

Exercice 3: Reprendre quelque exercice, en remplaçant (2) par (6) .
\
Remarque 2:

Il n'est évidemmment pas question de provoquer l'appel de telles procédures, sous forme récursive. Il est donc impossible d'essayer de se convaincre de la correction de tels programmes en les faisant tourner.

Les nombres ainsi théoriquement engendrés sont sans rapport avec ceux que peuvent utiliser les physiciens. Par exemple, le rapport entre les plus petites et les plus grandes distances considérées en physique s'exprime par une puissance de dix dont l'exposant, en base dix, ne comporte que deux chiffres.
\
Remarque 3:

Supposons, pour fixer les idées, que f(i)=factorielle(i+1).

Alors, la fonction f, quelle que soit la variante choisie parmi celles qui sont suggérée, et quels que soient ses arguments (une suite d'entiers, de toutes les façons), ne fournit que des factorielles.
Si l'on désire évoquer l'ordre de grandeur d'un entier, il est préférable de dire qu'il est de l'ordre du troisième de la seconde ligne, plutôt que du cent millième de la première ligne (du tableau f).
Les mots sur les entiers doivent donc être comparés par un ordre qui reste à définir, mais tenant compte de la 'quantité d'information' (concept flou, sans autre précision) nécessaire leur représentation.
Aussi malaisé à manipuler qu'il soit, nous avons l'embryon d'un système de représentation de l'ordre de grandeur de tout entier n 'très grand'.
\
Exercice 4:

Initialiser la fonction profondeur par Prof.x=0. Il est clair que si f(n) est le nombre d'arbres binaires de profondeur inférieure ou égale à n, on a $f(n+1)=f(n)^2+1$, sous l'initialisation f(0)=1.
Si h(n) est le nombre d'arbres de hauteur n, la fonction h est la différence de f, soit h(n)=f(n)-f(n-1).
Vérifier que la fonction h satisfait à la récurrence suivante: h(n+1)= h(n) (h(n) + 2f(n-1)), sous h(1)=h(0)=1.

Calculer les premières valeurs des fonctions h et f, et comparer au produit 1*3*7*31*(19*37)*459007.
Etablir que l'on a h(n+2)=h(n+1)*(f(n)*(f(n)+1)).
Vérifier que 43 divise h(7), et que 157 divise h(8).
Pour k entier quelconque, calculer les fonctions f et h modulo k. Si l'entier k premier divise h(n), c'est que l'application $n:=1+n^2$ (modulo k) admet un point fixe, mais cette condition n'est pas suffisante.
\

<u>Remarque</u>:

On rapprochera les constructions qui précèdent,
-visant à exhiber des fonctions "très croissantes",
-de celles de Cantor, dans la seconde moitié du 19e siècle,
-visant à construire indéfiniment des ensembles infinis.
Ainsi, le procédé diagonal a été utilisé pour la première fois afin d'établir qu'il n'existe pas de bijection f
-des entiers naturels
-sur les mots infinis sur un alphabet (0,1) de deux lettres
(càd sur les parties de l'ensemble des entiers naturels).
En effet, si une telle bijection f existait, la partie P
-contenant les entiers i satisfaisant à "i n'appartient pas à f(i)"
-ne pourrait être l'image d'aucun entier j,
-car différant précisément de la partie f(j) au point j.

La démonstration du théorème fondamental "il n'existe pas de bijection d'un ensemble sur l'ensemble de ses parties" ne diffère pas essentiellement de la démonstration qui précède, relative aux mots infinis sur un alphabet de deux lettres.

Petit jeu infini:

Le passage d'un ensemble à ses parties est le procédé de base pour envoyer une ensemble sur un ensemble plus puissant; considérer la fonction F définie par
F(0,0)=ensemble des entiers naturels
F(i,j+1)=ensemble des parties de F(i,j)
F(i+1,0)=union des F(i,j) pour tout j,
[ou, si l'on préfère, des f(k,j) pour k<i+1 et j quelconque]
puis F(0,0,0)=union des F(i,i)
[ou, si l'on préfère, des F(i,j) pour tout (i,j)].

Imaginer une définition de F(m) pour m mot sur l'alphabet des entiers [on met un ordre sur les mots, de telle manière que si le mot m admet un antécédent a(m), alors F(m)=parties de F(a(m)), et sinon, F(m)= union des F(m') pour m'<m].

On ne définit ainsi qu'un ensemble dénombrable d'infinis (dont les éléments sont informatiquement représentables), puisque les mots de degré fini sur un alphabet dénombrable demeurent dénombrables. Peut-on définir raisonnablement F(m) lorsque m est un mot infini sur l'alphabet des entiers...? "Raisonnablement" signifie ceci: on a un ordre sur les suites infinies, et F est croissante pour cette ordre, càd que si m<m', il existe une bijection de F(m) sur une partie de F(m'), mais aucune bijection de F(m') sur une partie de F(m).

<u>Exercice</u> 5:

Un problème difficile.

Soit E(n) l'ensemble des parties P de [n]=(1,2..,n) contraintes par la condition qui suit:
(C) si i et j sont dans P, avec i<j, alors j-i n'est pas dans P.
Engendrer E(n) par programme. On s'intéresse aux parties qui contiennent n, -puisque E(n-1) est inclus dans E(n)- et plus encore aux parties maximales (celles auxquelles on ne peut rien ajouter).
Par exemple, pour n=7, les parties maximales sont
7654, 762, 7531, 741, 732, 652, 641, 543.
La condition (C) définit naturellement un code préfixe infini sur l'alphabet infini des entiers naturels, **N**: on coupe dès que la différence entre deux lettres occurant dans le mot est une lettre qui figure dans le mot.
\

Note: pour comparer la croissance de deux suites croissantes, f et g, et décréter que "f croît plus vite que g", il ne suffit évidemment pas de constater que f(n)>g(n) à partir d'un rang k;
par exemple, la suite f(n)=nf(n-1) à partir de f(1)=1 donne 1 2 6 24... tandis que g(n)=ng(n-1)+$(-1)^n$ à partir de g(2)=1 donne 1 2 9 44...; on a g(n+1)>f(n) pour n>2, mais g(n)<f(n) pour n>3.
Il faut au moins établir que, quel que soit le décalage initial, l'une l'emporte sur l'autre.

Un exemple de croissance rapide: les cadences

Une conjecture, connue sous le nom de 'conjecture de Baudet' stipulait ceci:

on peut extraire de tout mot suffisamment long (sur un alphabet fini) une suite d'occurrences (de longueur arbitraire) d'une même lettre, à des positions régulièrement espacées.
[noter qu'il en résulte une propriété des suites infinies]

C'est ce que l'on appelle une cadence. Ainsi, tout mot de degré n+1 sur n lettres possède une cadence d'ordre 2 (principe des tiroirs: on ne peut ranger n+1 objets dans n tiroirs sans qu'il y ait au moins deux objets dans l'un des tiroirs). Tout mot de degré 9 sur deux lettres possède une cadence d'ordre 3 (le vérifier par programme, ou plutôt, construire le dictionnaire des mots qui ne peuvent être prolongés sans faire apparaître une cadence d'ordre 3):
ainsi, le mot abbaabbba possède la lettre a en position 1,5, et 9.

Cette conjecture a été transformée en théorème par Van der Waerden en 1928.
Soit l'alphabet X(p) constitué des entiers de 0 à p-1 (ou de lettres indicées par ces entiers).
Il est facile de prouver que si tout mot suffisamment long (soit par exemple de degré f(p,k))sur p lettres) possède une cadence d'ordre arbitraire k, il en va de même de tout mot suffisamment long sur p+1 lettres. En effet, il suffit d'identifier un instant les lettres p et p+1 pour être assuré de l'existence d'une cadence d' ordre arbitraire j, que nous allons supposer constituée des deux lettres p et p+1: en supposant j=f(2,k), on en extrait une cadence sur l'une des lettres p et p+1.

On peut ainsi prendre f(p+1,k)=f(p,f(2,k)), ce qui nous ramène, de proche en proche, au cas d'un alphabet de deux lettres.

Inversement, si la propriété est vraie pour un alphabet de k lettres, elle est à fortiori vraie pour un alphabet de deux lettres: il suffit de se donner un morphisme alphabétique envoyant une partie des k lettres sur 0, les autres sur 1: toute cadence est conservée par un tel morphisme.
On peut même dire plus: supposons la propriété vraie pour un alphabet X(2^i) de 2^i lettres; les mots de degré j2^i sur l'alphabet X(2) se factorisent naturellement en j facteurs de degré 2^i: pour j>f(2^i,k), nous sommes assurés de trouver une cadence d'ordre k en facteurs de degré 2^i, càd une cadence dont les objets sont des mots.

Il faut alors se préoccuper de trouver une fonction telle que f, assurant l'existence d'une borne, aussi énorme soit-elle, à partir de laquelle on sera assuré de la véracité de la propriété.

Tout le problème consisterait à prouver l'existence des cadences sur un alphabet de deux lettres.
Cependant, les constructions récurrentes utilisées supposent l'existence de cadences d'ordre n (quel

que soit l'alphabet) et en déduisent l'existence de cadences d'ordre n+1 (quel que soit l'alphabet), en passant par une présentation géométrique hypecubique. Nous n'allons pas donner cette démonstration dans sa totalité, mais seulement donner une idée de la taille des suites qu'il est nécessaire de construire.

Si tout mot m_1 de degré f(p(1),n) est assuré d'une cadence d'ordre n sur un alphabet X_1 de p(1) lettres, on considère les mots de degré g(p(1),n)>f(p(1),n) [par exemple g(p,n)=2f(p,n)], de manière à être assuré que toute cadence puisse être prolongée par une lettre x(1) (...appartenant à X_1, cette lettre prolonge ou non la cadence de degré n en une cadence de degré n+1).

Ces mots de degré g(p(1),n) sont alors pris pour alphabet X_2; cet alphabet X_2 compte donc $p(2)=p(1)^{g(p(1),n)}$ lettres (autant de lettres dans X_2 que de mots de degré g(p(1),n) sur X_1), et tout mot m_2 de degré g(p(2),n) en X_2 (et donc de degré g(p(2),n)g(p(1),n) en X_1) est assuré d'une cadence d'ordre n sur l'alphabet X_2, cadence prolongée par une lettre x(2) de X_2.

Le procédé est itéré: l'alphabet X_{i+1} est constitué des mots de degré g(p(i),n) en X_i, mots en nombre $p(i+1)=p(i)^{g(p(i),n)}$, assurés d'une cadence d'ordre n sur X_i prolongée par une lettre x(i) de X_i. On prend ainsi pour lettres des mots suffisamment longs sur l'alphabet précédent, d'où la cardinalité de l'alphabet précédent, élevée à la puissance "longueur nécessaire pour faire apparaître une cadence d'ordre n prolongée par une lettre x(i) de X_i". Les lettres de X_{i+1} sont donc des mots de degré d(i,n)=g(p(i),n)g(p(i-1),n)...g(p(1),n) en X_1.
La construction est poursuivie jusqu'à X_n, alphabet de p(n) lettres.

Il s'agit d'établir (ce que nous ne faisons pas ici) que tout mot de degré g(p(n),n) sur X_n, et donc de degré d(n,n)) sur X_1 possède une cadence d'ordre n+1 en X_1, ce qui permettrait de poser f(p(1),n+1)=d(n,n)).
Soit en regroupant le tout $p(i+1)=p(i)^{g(p(i),n)}$,
g(p,n)=2f(p,n)], f(p(1),n+1)=d(n,n)), d(i+1,n)=g(p(i+1),n)d(i,n),
sous l'initialisation f(i,2)=i+1. Tenter le calcul de f(2,3), f(3,3)...

Fin du chapitre sur les représentations d'entiers.

Une extension exemplaire: la représentation des réels en numération base k. Le cas 1<k<2.

1. Généralités.-

Dans tout ce texte, k est un nombre réel compris entre 1 et 2, bornes exclues.
Comme d'habitude, [0,1] est l'ensemble des nombres réels compris entre 0 et 1, intervalle fermé, muni de l'ordre usuel.

$(a,b)^*$ désigne, comme d'habitude, l'ensemble des *mots finis* sur l'alphabet (a,b), muni de la structure de monoïde définie par la concaténation des mots.
Le *mot vide* sera noté e. La lecture et la concaténation se font de gauche à droite.

On note $(a,b)^\infty$ l'ensemble des *mots infinis* à droite sur l'alphabet (a,b).
Cet ensemble est totalement ordonné par *l'ordre alphabétique gauche* usuel, induit par l'ordre sur l'alphabet, a<b. Deux mots infinis sont comparés par la première lettre par laquelle ils diffèrent: étant donné deux mots distincts de $(a,b)^\infty$, l'un s'écrit mam', l'autre mbm", avec m dans $(a,b)^*$, m' et m" dans $(a,b)^\infty$.
Le mot fini m est *leur facteur gauche commun maximal.*
Dans la suite, m, m', m"", désigneront toujours des mots, finis ou non.

Pour toute partie P de $(a,b)^*$, P^* (resp P^∞) est l'ensemble des mots de $(a,b)^*$ (resp $(a,b)^\infty$ factorisables en mots de P. Lorsque cette factorisation est unique, P est un *code,* càd un sous-monoïde libre du monoïde libre $(a,b)^*$. Un mot de P^* ou P^∞ est un message.
Lorsque m est dans P, et mm' dans P^*, si cela implique que m' soit dans P^*, le code P est dit *préfixe gauche.*

Les facteurs gauches (resp. droits) d'un mot infini sont des mots finis (resp. infinis).

Nous utiliserons deux abréviations: ssi pour "si et seulement si", càd pour "c'est-à-dire".

2. Définitions et notations particulières .-

I . On notera $\mathbf{f_k}$ **l'application de [0,1] dans [0,1]** défine par

$$\mathbf{f_k(x)=kx-1 \text{ si } kx>1, \text{ et } kx \text{ sinon}}.$$

Soit $\mathbf{f_{k,a}}$ la restriction de f_k à [0,1/k] , et $\mathbf{f_{k,b}}$ la restriction de f_k à]1/k,1] .

$f_{k,a}$ et $f_{k,b}$ sont des applications monotones croissantes,

$f_{k,a}$ est la bijection de [0,1/k] sur [0,1] telle que $f_{k,a}(x)=kx$; son inverse sera noté $\mathbf{g_{k,a}}$,

$f_{k,b}$ est la bijection de]1/k,1] sur]0,k-1] telle que $f_{k,b}(x)=kx-1$; son inverse sera $\mathbf{g_{k,b}}$.

lorsque k-1=1/k, k est le nombre d'or.

II . On notera $\mathbf{d_k}$ **l'application de [0,1] dans** $\mathbf{(a,b)^\infty}$ définie par

$$\mathbf{d_k(x)=b.d_k(kx-1) \text{ si } kx>1, \text{ et } a.d_k(kx) \text{ sinon}}.$$

Cette application est une injection monotone croissante.

En effet, soit x et y deux éléments de [0,1] avec x<y; on conviendra $d_k(x)$ et $d_k(y)$ diffèrent; si les premières lettres de $d_k(x)$ et $d_k(y)$ diffèrent, c'est terminé, sinon on a encore $f_k(x)<f_k(y)$, et ce n'est que partie remise.

On dira que $d_k(x)$ est *le développement (de base k) du nombre x.*

Ainsi, $d_k(0)=a^\infty$, et $d_k(x)<d_k(1)$ pour tout x de [0,1[. Enfin, $d_k(1)=b.d_k(k-1)$.
Nous allons caractériser les développements licites.

Remarque: d_k est défini sur **[0,1]** et non sur les réels modulo 1, **[0,1[**: le fait de ne pas identifier 0 et 1 permet de considérer l'image de d_k comme partie de $(a,b)^\infty$, de telle sorte que l'application soit monotone.

III .   Pour tout x de [0,1] , on notera **t(x)** la suite des nombres de [0,1] qui détermine le développement base k de x:

$$\mathbf{x_0=x, \text{ et } x_{i+1}=f_k(x_i)}.$$

Cette suite t(x) sera dite *trajectoire* du nombre x.

Une équivalence naturelle R sur les nombres est la suivante:
xRy ssi il existe un nombre z commun aux trajectoires de x et y.

IV.   Lorsque 1 appartient à la trajectoire t(x), x sera dit *k-fini*.

Autrement dit, x est k-fini ssi xR1.

Suivant cette définition, 1 lui-même est k-fini.

L'ensemble des développements des nombres k-finis sera noté **F(k)**.

Remarquer que $d_k(1)$ est périodique ssi k-1 est k-fini.

Remarque :

Lorsque k est rationnel, les nombres k-finis sont rationnels.

En effet, $d_k(1)$ appartient à F(k), et, le processus énumératif suivant inscrit ces nombres sur les sommets d'un arbre binaire infini:

-si $d_k(x)$ appartient à F(k), il en va de même du développement $a.d_k(x)$ de $g_{k,a}(x)=x/k$;
-si en outre 0<x<k-1, alors le développement $bd_k(x)$ de $g_{k,b}(x)=(x+1)/k$ appartient à F(k).

Nous vérifierons que le bord droit de cet arbre infini est périodique.

V.   On notera **C(k)** *le code préfixe* constitué des mots ma de $(a,b)^*$ ainsi définis:

le mot ma appartient à C(k) ssi mb est facteur gauche de $d_k(1)$.

Suivant cette définition, a appartient à C(k).

3. Caractérisations.-

Nous voici en mesure de caractériser

-les développements $d_k(x)$ pour k fixé,

-les développements $d_k(1)$ lorsque k varie.

Proposition 1.-

1) $\mathbf{F(k)=C(k)^*.d_k(1)}$, ensemble dénombrable des développements d'éléments k-finis,

2) $\mathbf{d_k([0,1]) -F(k)=C(k)^\infty}$, ensemble qui a la puissance du continu.

\

Autrement dit, les développements des éléments k-finis sont assimilables aux messages finis engendrés par le code C(k), tandis que les développements qui n'appartiennent pas à F(k) sont assimilés aux messages infinis.
L'inclusion est évidente dans un sens: l'ensemble F(k) des développements k-finis est inclus dans $C(k)^*.d_k(1)$, et tout développement qui n'est pas k-fini est dans $C(k)^\infty$.

Les éléments k-finis sont-ils denses sur [0,1]?

Reste à vérifier que
les mots de l'union de $C(k)^\infty$et $C(k)^*.d_k(1)$ sont tous des développements.
Cela résulte du

Lemme .-

1) si x est un élément de [0,1], de développement $d_k(x)$, et si ma est un mot du code préfixe C(k), alors $ma.d_k(x)$ est le développement d'un élément de [0,1] .

2) tout développement de $C(k)^\infty$ est obtenu comme limite de développements de F(x).
La topologie est évidemment celle induite par l'ordre.

\

Soit ma dans C(x). Clairement, le développement maximal possible admettant ma pour facteur gauche, c'est $ma.d_k(1)$. Si l'on établit que ce développement existe, autrement dit que F(k) contient $C(k).d_k(1)$, alors $ma.d_k(x)$ existe à fortiori pour tout x de [0,1], du fait de la monotonie de d_k.

\

Examen de la structure de $d_k(1)$, injection monotone croissante de]1,2[dans $(a,b)^\infty$:

Proposition 2.-

a)-aucun facteur droit strict de $d_k(1)$ n'est strictement supérieur à $d_k(1)$
b)-dans le cas où l'égalité a lieu, $d_k(1)$ est périodique, et, dans ce cas,
k est raçine d'un polynôme à coefficients 0 ou 1 de degré n=ordre de la période de $d_k(1)$.

\

Ces conditions, nécessaires, sont-elles suffisantes?
Lorsque $d_k(1)$ n'est pas périodique, les facteurs droits de $d_k(1)$ définissent-ils un ensemble de nombre dense sur [0,1]?

A l'exception du développement de zéro, le développement de tout nombre x est de la forme

A l'exception du développement de zéro, le développement de tout nombre x est de la forme $d_k(x)=\prod a^{i(n)}b^{1+j(n)}$, "produit ordonné de facteurs élémentaires" pour n dans l'ensemble **N** des entiers naturels. Un tel développement est identifié par la suite i(n). Notons i_x l'application de **N** dans **N** qui caractérise le nombre x.

Pour le développement de 1, on a $i_1(0)=0$, et ensuite $i_1(n)$ au moins égal à $i_1(1)$.
C'est $i_1(1)$ qui détermine la période du bord droit de l'arbre binaire infini sur lequel s'inscrivent les éléments k-finis.

Il est clair que si $d_k(1)=m^\infty$ est périodique, et si m est cette période, minimale, le mot m est primitif, et alphabétiquement supérieur à ses conjugués stricts -càd que pour factorisation de m en deux facteurs non vides, m=m'm", on a m>m"m', alphabétiquement.

Evidemment, $d_k(k-1)=d_k(f_k(1))$ lui-même se factorise sur les mots du code C(k) lorsque n croît.

<u>A propos de cas particuliers exemplaires</u>:

1)

Si k est le nombre d'or, $k=(1+5^{1/2})/2$, (dans ce cas, k-1=1/k),
alors $d_k(1)=(ba)^\infty$, de période ba.

De manière plus générale, lorsque $d_k(1)$ est périodique de période n+1, k est la racine comprise entre 1 et 2 d'un polynôme de degré n+1.
Plus précisément, il existe des coefficients c(1).... c(n-1), valant 0 ou 1, tels que l'on ait

$$k^{n+1}-k^n-c(1)k^{n-1}\ldots\ldots -c(n-1)k -1=0$$

En particulier, lorsque les coefficients c(i) sont tous nuls, $(k-1)k^n=1$, et $d_k(1)=(ba^n)^\infty$.

En résulte-t-il que tout mot bma, où m est dans $(a,b)^*$, |m|=n-1, est la période de $d_k(1)$ pour une certaine valeur de k, racine d'un tel polynôme de degré n+1? Certes pas, puisque cette période ne peut être quelconque: $d_k(1)$ est supérieur à ses facteurs droits.
Autrement dit, la période est un mot supérieur à ses conjugués (càd un "mot standard de Lyndon").

Si l'on se donne un mot infini non périodique, tel qu'il ne soit surpassé pour l'ordre de l'alphabet par aucun de ses facteurs droits, supposons donc qu'il existe un nombre k dont ce mot est la représentation; on a donc un code C(k); les mots de ce code C(k) sont en bijection avec les entiers, de telle sorte que le n-ième mot m(n) de ce code définisse un mot infini périodique $m(n)^\infty$, lequel est le développement de 1 pour un certain nombre $k_{m(n)}$ raçine d'un polynôme à coefficients 0,1,-1:
le nombre k considéré est limite de la suite croissante des $k_{m(n)}$.

2)

Nous examinerons particulièrement le cas k=3/2, qui servira d'exemple.

On vérifiera que le début de $d_{3/2}(1)$, le développement de 1 en base 3/2, est bien représenté par la suite d'entiers

0 1 5 2 2 1 9 6 4 6 2 2 1 11 3 2 .....

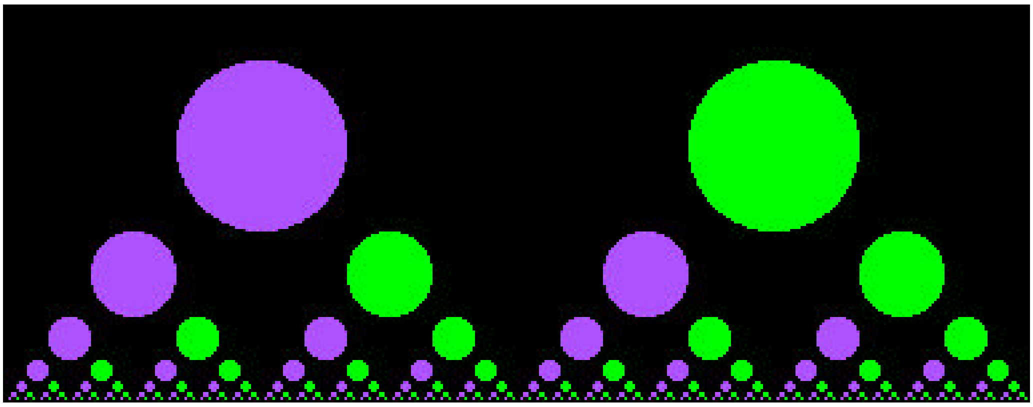
qui donne la taille des premiers blocs de "a", séparés par des occurrences de "b":

$d_{3/2}(1)$=babaaaaabaabaababaaaaaaaaabaaaaaa.................

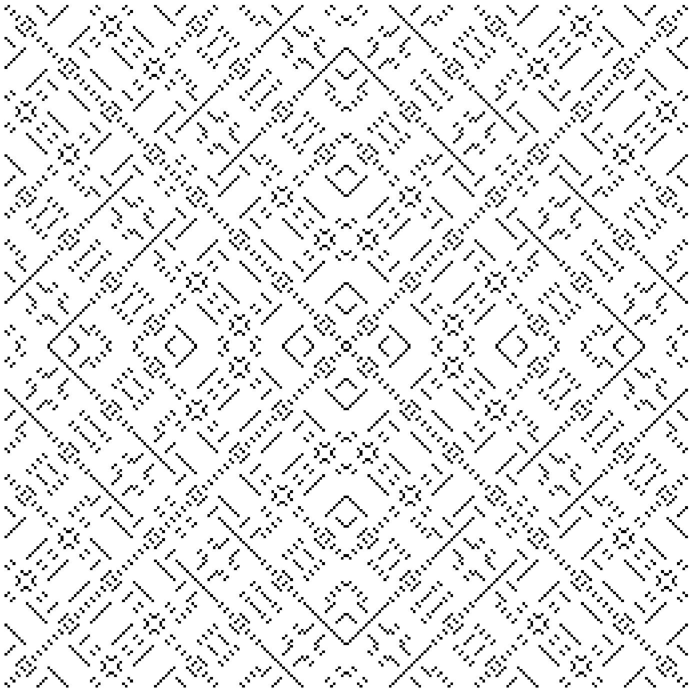
Si l'on désire faire en entiers le calcul du début de de la trajectoire de 1, le n-ième nombre $x(n)/2^n$, $0<x(n)<2^n$ est obtenu par la récurrence x(1)=1, x(n)=3*x(n-1) modulo 2^n, le début de cette suite étant

1 3 1 3 9 27 81 243 217 651 1953 1763 5289 15867 14833 44499 2425 7275 21825 65475 196425 589275 1767825 5303475 15910425 47731275 8976097 26928291 80784873 242354619 727063857 2181191571 6543574713 2450854955 7352564865 22057694595 66173083785 198519251355 45801940177 137405820531 412217461593
….
suite d'entiers distincte de la suite 3^n modulo 2^n, qui commence ainsi:

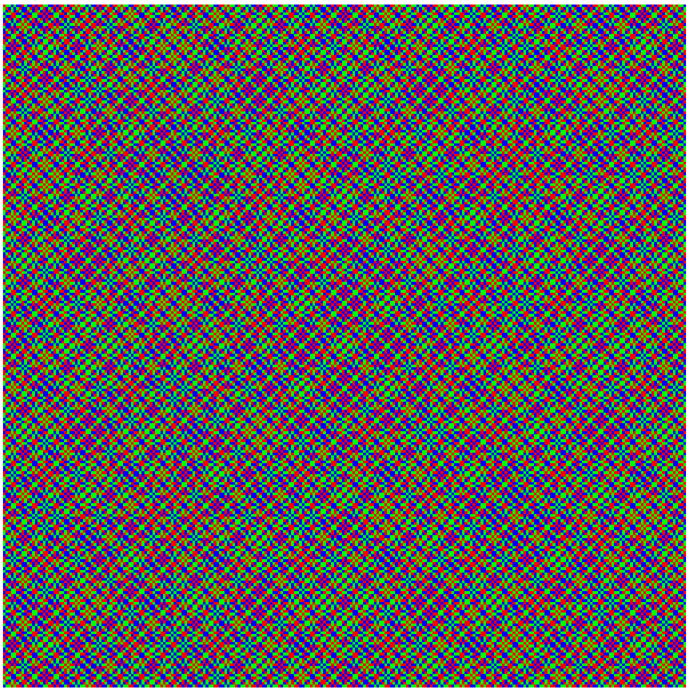
1 1 3 1 19 25 11 161 227 681 1019 3057 5075 15225 29291 55105 34243 233801 439259 269201 1856179 3471385 6219851 1882337 5647011 50495465 17268667 186023729 21200275 63600825 1264544299
…..
\



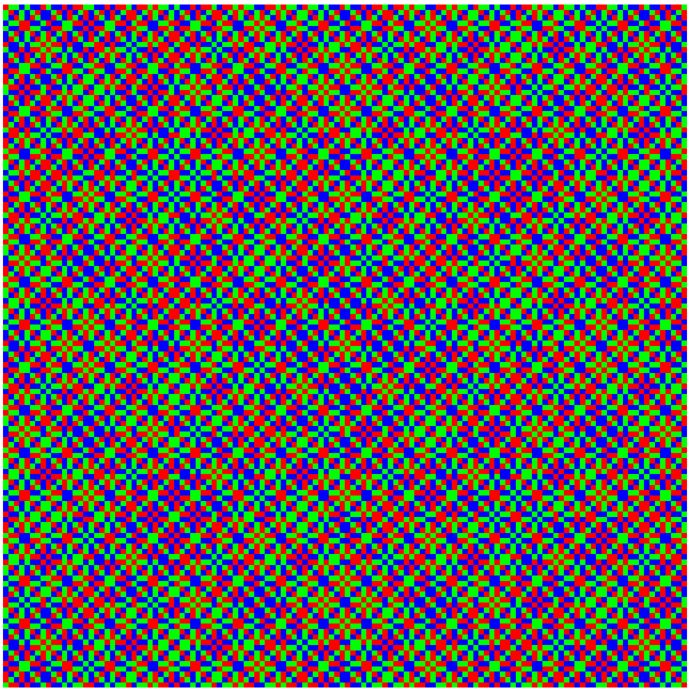
Somme de Nim i+j congrue à 1 modulo 11:



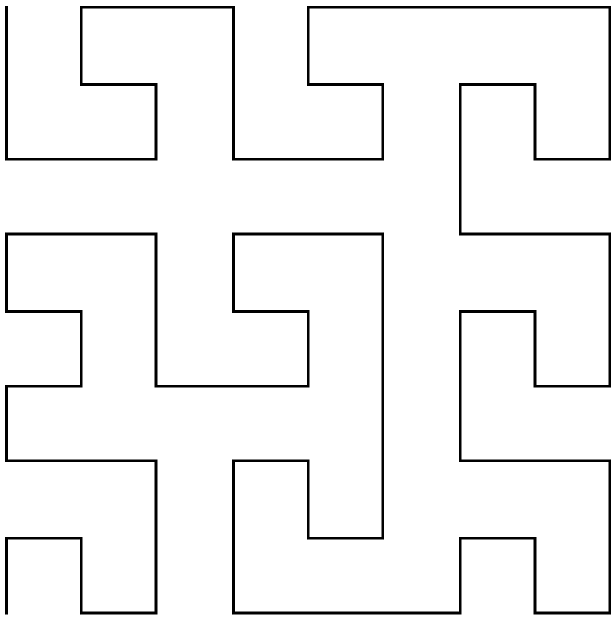
Résidu modulo 3 (tricolore) du nombre de 1 de la somme de Nim i+j:



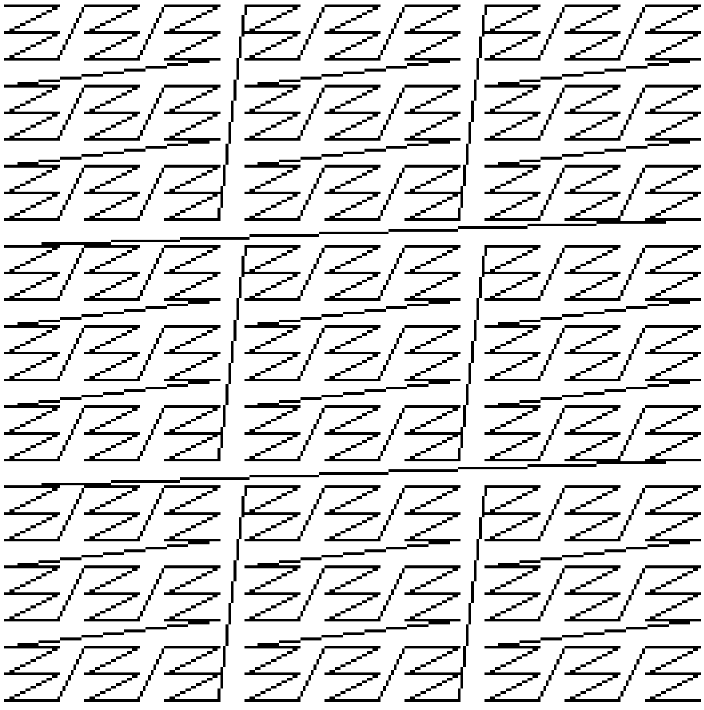
le même, grossi:



Début du balayage continu du plan, où un carré est découpé en 3*3=9 carrés. Itérer.



Ci-dessous, balayage du plan par mélange alterné en base 3:
si une coordonnée est $x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6$ .... en base 3
si l'autre coordonnée est $y_1\ y_2\ y_3\ y_4\ y_5\ y_6$ .... en base 3
le n-ième point est $x_1\ y_1\ x_2\ y_2\ x_3\ y_3$ .... en base 3
(plus faibles poids à gauche, afin de plonger les mots finis se terminant par un caractère non nul dans les mots infinis, en complétant indéfiniment par des zéros)



Il n'est pas difficile de prévoir ce que l'on va obtenir en base b, quel que soit b.