
Übungen, Blatt 12

---

29) Thermovakuum im *Bose*-Fall

Die folgende Gleichung soll gezeigt werden:

$$\sqrt{1\,-\,exp(-\omega_B\,\hbar\,\beta)}\,e^{exp(-\omega_B\,\hbar\,\beta/2)\,\mathbf{a}^+\,\tilde{\mathbf{a}}^+}\,|0,\tilde{0}> \,=\, e^{\Theta_\beta\,(\mathbf{a}^+\,\tilde{\mathbf{a}}^+\,-\,\mathbf{a}\,\tilde{\mathbf{a}})}\,|0,\tilde{0}> \,,$$

wobei $cosh\,\Theta_\beta$ und $sinh\,\Theta_\beta$ bestimmt werden sollen. In den Exponenten treten die freien *Bose*-Erzeugungs- und Vernichtungsopertoren $\mathbf{a}^+$, $\mathbf{a}$, bzw. $\tilde{\mathbf{a}}^+$, $\tilde{\mathbf{a}}$ auf, zu denen das Vakuum $|0>$, bzw. $|\tilde{0}>$ gehört, und $|0,\tilde{0}> \equiv |0> \otimes |\tilde{0}>$. Die Operatoren mit Schlange vertauschen mit denen ohne Schlange.

a) Sehen Sie eine einfache Art diese Gleichung zu zeigen?

b) Berechnen Sie mit $\mathbf{A}^+ := \mathbf{a}^+\,\tilde{\mathbf{a}}^+$, $\mathbf{A} := \mathbf{a}\,\tilde{\mathbf{a}}$, $\mathbf{N} := \mathbf{a}^+\,\mathbf{a}$, $\tilde{\mathbf{N}} := \tilde{\mathbf{a}}^+\,\tilde{\mathbf{a}}$ und $\mathcal{N} := \mathbf{N} + \tilde{\mathbf{N}}$:

$$[\mathbf{A},\mathbf{A}^+],\ [\mathcal{N},(\mathbf{A}^+)^n],\ [\mathcal{N},(\mathbf{A})^n] \text{ und } [\mathbf{A},(\mathbf{A}^+)^n].$$

c) Berechnen Sie für $n = 0, ..., 5$ die Polynome $R_n(x)$ die in

$$(\mathbf{A}^+\,-\,\mathbf{A})^n\,|0,\tilde{0}> \,=\, R_n(\mathbf{A}^+)\,|0,\tilde{0}>$$

auftreten.

Erkennen Sie ein Muster? Formulieren Sie Ihre Vermutung, und versuchen Sie sie zu beweisen.

d) Wie ergibt sich dann die Behauptung?

30) Thermovakuum, Vernichter und Erzeuger im *Fermi*-Fall

a) Zeigen Sie, dass mit $\mathbf{d}(\beta) \;=\; exp(-i\,\mathbf{G}^F_\beta)\;\mathbf{d}\;exp(+i\,\mathbf{G}^F_\beta)$ (analog für $\mathbf{d}^+$) und mit $-i\,\mathbf{G}^F_\beta := \Theta^F_\beta\,(\mathbf{D}^+ - \mathbf{D})$, wobei $\mathbf{D}^+ := \mathbf{d}^+\,\tilde{\mathbf{d}}^+$ und $\mathbf{D} := (\mathbf{D}^+)^+ = \tilde{\mathbf{d}}\,\mathbf{d}$ ist, gilt:

$$\mathbf{d}(\beta)\,|0;\beta> \,=\, 0 \,=\, \tilde{\mathbf{d}}(\beta)\,|0;\beta> \quad .$$

Θ^F_β ist aus der Vorlesung bekannt.

b) Welche Zustände spannen den *Hilbert*raum mit dem thermalen Vakuum $|0;\beta>$ auf?

c) Zeigen Sie, dass diese vier Zustände Eigenzustände von $\hat{\mathbf{H}}^F_\beta := \mathbf{H}^F_\beta \otimes \mathbf{1} \,-\, \mathbf{1} \otimes \tilde{\mathbf{H}}^F_\beta$ sind. Dabei sind in den *Hamilton*operatoren mit Index β die thermalen Erzeuger und Vernichter zu verwenden. Welches sind die Eigenwerte?