Sur la somme d'un nombre fini de nombres ordinaux.

Par

A. Wakulicz (Katowice).

Le but de ce travail est de déterminer le nombre maximum m_n des valeurs distinctes que peut prendre une somme de n nombres ordinaux (où n est un nombre naturel donné) lorsqu'on effectue toutes les $n!$ permutations de ses termes. Je démontrerai qu'en posant

$$\varphi(n)=\mathrm{E}\frac{n-1}{5}, \quad \text{on a} \quad m_n=81^{6\varphi(n)-n+1}193^{n-1-5\varphi(n)} \quad \text{pour} \quad n>20,$$

et je calculerai les valeurs de m_n pour $n\leqslant 20$.

n étant un nombre naturel donné, le problème s'impose:

Existe-t-il, pour tout nombre naturel $k\leqslant m_n$, n nombres ordinaux dont la somme admet, pour toutes les permutations de ces nombres, k et seulement k valeurs distinctes?

Pour $n\leqslant 4$ la réponse est positive. Je démontrerai qu'elle est négative pour $n=5$.

1. Si $\alpha=\omega^{\alpha'}a'+\omega^{\alpha''}a''+\ldots+\omega^{\alpha^{(k)}}a^{(k)}$ est le développement normal du nombre ordinal α (où $k,a',a'',\ldots,a^{(k)}$ sont des nombres naturels et $\alpha\geqslant\alpha'>\alpha''>\ldots>\alpha^{(k)}\geqslant 0$), nous appelerons le nombre ordinal α' *degré* du nombre ordinal α.

Soient $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ n nombres ordinaux donnés, et supposons que $\alpha_1\geqslant\alpha_2\geqslant\ldots\geqslant\alpha_n$. Soient, parmi les n nombres $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$, k_1 qui sont du degré $\lambda_1=\alpha_1'$, k_2 qui sont du degré $\lambda_2=\alpha'_{k_1+1},\ldots,k_s$ qui sont du degré $\lambda_s=\alpha'_{k_1+k_2+\ldots+k_{s+1}+1}$, où $\lambda_1>\lambda_2>\ldots>\lambda_s\geqslant 0$ et où $k_1+k_2+\ldots+k_s=n$.

Soit $l_1,l_2,\ldots,l_n$ une permutation quelconque des nombres $1,2,\ldots,n$. La somme

$$\alpha_{l_1}+\alpha_{l_2}+\ldots+\alpha_{l_s}$$

est, comme on le voit sans peine, un nombre de la forme

$$\alpha_{r_1}+\alpha_{r_2}+\ldots+\alpha_{r_m}, \tag{1}$$

où $\alpha'_{r_i}\geqslant\alpha'_{r_{i+1}}$ pour $i=1,2,\ldots,m-1$, et où $\alpha'_{r_i}=\lambda_1$ pour $i=1,2,\ldots,k_1$. Soient, parmi les termes de la somme (1), p_i qui sont du degré λ_i. On a donc $p_1=k_1$ et $0\leqslant p_i\leqslant k_i$ pour $i=2,3,\ldots,s$.

La somme $\alpha_{r_1}+\alpha_{r_2}+\ldots+\alpha_{r_{k_1}}$, en tant que somme des nombres ordinaux de même degré, ne dépend, comme on le sait, que de son dernier terme (et du nombre de termes); elle admet donc au plus k_1 valeurs distinctes.

Les p_2 termes de la somme

$$\alpha_{r_{k_1+1}}+\alpha_{r_{k_1+2}}+\ldots+\alpha_{r_{k_1+p_2}} \tag{1'}$$

peuvent être pris arbitrairement parmi les k_2 termes de la suite $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ qui sont du degré λ_2; il y a donc $\binom{k_2}{p_2}$ cas et dans chacun d'eux on peut changer l'ordre de ces p_2 termes; comme la somme de ces p_2 termes (qui sont du même degré λ_2) ne dépend que de son dernier terme, on a tout au plus $p_2\binom{k_2}{p_2}$ valeurs de la somme (1′) pour p_2 donné. p_2 pouvant être un des nombres $0,1,2,\ldots,k_2$, on a au plus

$$1+1\cdot\binom{k_2}{1}+2\cdot\binom{k_2}{2}+3\cdot\binom{k_2}{3}+\ldots+k_2\binom{k_2}{k_2}=1+k_2 2^{k_2-1}$$

valeurs distinctes de la somme (1′).

On trouve de même que la somme

$$\alpha_{r_{k_1+p_2+1}}+\alpha_{r_{k_1+p_2+2}}+\ldots+\alpha_{r_{k_1+p_2+p_3}}$$

admet au plus $1+k_3 2^{k_3-1}$ valeurs distinctes et ainsi de suite.

En combinant les valeurs de la somme $\alpha_{r_1}+\alpha_{r_2}+\ldots+\alpha_{r_{p_1}}$ avec celles de la somme $\alpha_{r_{p_1+1}}+\alpha_{r_{p_1+2}}+\ldots+\alpha_{r_{p_1+p_2}}$ et ainsi de suite, on trouve que la somme (1) admet au plus

$$k_1(1+k_2 2^{k_2-1})(1+k_3 2^{k_3-1})\ldots(1+k_s 2^{k_s-1}) \tag{2}$$

valeurs distinctes.

Le nombre maximum m_n des valeurs de la somme de n nombres ordinaux (lorsqu'on effectue toutes les $n!$ permutations de ses termes) ne surpasse pas donc le maximum q_n de l'expression (2) pour s et $k_1,k_2,\ldots,k_s$ naturels satisfaisant à l'égalité $k_1+k_2+\ldots+k_s=n$. On a ainsi $m_n\leqslant q_n$.

Je dis que lorsque le nombre (2), où $k_1+k_2+\ldots+k_s=n$, est égal à q_n, nous pouvons supposer que $k_1=1$. Pour le voir il suffit de remarquer que si $k_1\geqslant 2$, on a, pour $k=k_1-1$:

$$1+k=k_1 \quad\text{et}\quad k_1\leqslant 1+(k_1-1)2^{k_1-2}=1\cdot(1+k2^{k-1}).$$

Ainsi q_n est le maximum de l'expression

(3) $$f(k_2,k_3,\ldots,k_s)=(1+k_2 2^{k_2-1})(1+k_3 2^{k_3-1})\ldots(1+k_s 2^{k_s-1}),$$

où $k_2,\ldots,k_s$, sont des nombres naturels tels que $k_2+k_3+\ldots+k_s=n-1$.

2. Je démontrerai maintenant qu'il existe, pour tout n naturel, n nombres ordinaux $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ dont la somme, pour toutes les permutations de ses termes, donne précisément q_n valeurs distinctes. q_n étant le maximum de l'expression (3) pour

$$k_2+k_3+\ldots+k_s=n-1,$$

il existe des nombres naturels $k_2,k_3,\ldots,k_s$, tels que

$$k_2+k_3+\ldots+k_s=n-1 \quad\text{et}\quad f(k_2,k_3,\ldots,k_s)=q_n;$$

nous appelerons une suite de tels nombres $k_2,k_3,\ldots,k_s$ *système* S_n.

Posons $k_1=1$, $\alpha_1=\omega^{2s}$ et, pour $i=2,3,\ldots,s$ et $j=1,2,\ldots,k_i$:

$$\alpha_{k_1+k_2+\ldots+k_{i-1}+j}=\omega^{2s-2i+1}2^{j-1}+\omega^{2s-2i}j.$$

Vu que $1+k_2+k_3+\ldots+k_s=n$, les nombres ordinaux $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ sont ainsi définis. On voit sans peine que la somme de ces nombres, pris dans un ordre quelconque, est de la forme

(4) $$\omega^{2s}+\omega^{2s-1}l_2+\omega^{2s-2}h_2+\omega^{2s-3}l_3+\omega^{2s-4}h_3+\ldots+$$
$$+\omega^3 l_{s-1}+\omega^2 h_{s-1}+\omega l_s+h_s,$$

où l_i et h_i ($i=2,3,\ldots,s$) sont des entiers tels que $0\leqslant l_i\leqslant 2^{k_i}-1$ et h_i est le nombre 0 si $l_i=0$ et si $l_i\neq 0$, 2^{h_i-1} est un des termes du développement dyadique du nombre l_i; vu que tout nombre naturel admet un développement dyadique, on démontre aisément que, quels que soient les entiers l_i et h_i ($i=2,3,\ldots,s$) satisfaisant à ces conditions, on peut changer l'ordre des termes de la somme $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n$ de sorte qu'on obtienne la somme (4).

En effet, si, pour un nombre donné $i=2,3,\ldots,s$, on a $l_i=0$, on a aussi $h_i=0$, et il suffit de placer tous les nombres $\alpha_{k_1+k_2+\ldots+k_{i-1}+j}$, où $j=1,2,\ldots,k_i$, avant le nombre α_1, et si $l_i=2^{r_1-1}+2^{r_2-1}+\ldots+2^{r_m-1}$,

où $k_i\geqslant r_1>r_2>\ldots>r_m\geqslant 1$ [1]), il suffit de placer les nombres $\alpha_{k_1+k_2+\ldots+k_{i-1}+r_j}$ après les nombres du degré supérieur et avant les nombres du degré inférieur et de les ranger les uns après les autres de façon que le nombre $\alpha_{k_1+k_2+\ldots+k_{i-1}+h_i}$ soit le dernier (en plaçant les nombres $\alpha_{k_1+k_2+\ldots+k_{i-1}+j}$, où $j=1,2,\ldots,k_i$ et $j\neq r_1,r_2,\ldots,r_m$, avant le nombre α_1).

Calculons maintenant le nombre des nombres de la forme (4).

Soit i un nombre de la suite $2,3,\ldots,s$. Si $l_i=0$, on a $h_i=0$ et si $0<l_i\leqslant 2^{k_i}-1$, 2^{h_i-1} est l'un des termes du développement dyadique du nombre l_i. On obtient tous les nombres $1,2,3,\ldots,2^{k_i}-1$ en prenant $1,2,\ldots,k_i$ termes distincts convenables de la somme $1+2+2^2+\ldots+2^{k_i-1}$.

Si l'on prend p termes distincts de cette somme, 2^{h_i-1} (qui doit être l'un de ces termes), donc aussi h_i, peut avoir p valeurs distinctes. On en conclut que pour i donné ($i=2,3,\ldots,s$), il existe

$$1+1\cdot\binom{k_i}{1}+2\cdot\binom{k_i}{2}+\ldots+k_i\binom{k_i}{k_i}=1+k_i 2^{k_i-1}$$

systèmes distincts (l_i,h_i), tels que $0\leqslant l_i\leqslant 2^{k_i}-1$, et $h_i=0$ si $l_i=0$ et, si $l_i\neq 0$, 2^{h_i-1} est l'un des termes du développement dyadique du nombre l_i, et aux systèmes (l_i,h_i) distincts correspondent évidemment des nombres (4) distincts. Il résulte sans peine de (3) que la somme (4) peut avoir $f(k_2,k_3,\ldots,k_s)$, donc q_n valeurs distinctes.

On a ainsi $m_n\geqslant q_n$, d'où $m_n=q_n$ en vertu de l'inégalité $m_n\leqslant q_n$ établie auparavant. Il existe donc pour tout n naturel un système $S_n,k_2,k_3,\ldots,k_s$, tel que $m_n=f(k_2,k_3,\ldots,k_s)$.

3. Si $k_2,k_3,\ldots,k_s$ est un système S_n, on a $k_i\leqslant 7$ pour $i=2,3,\ldots,s$.

En effet, soit p. e. $k_2\geqslant 8$. Si $k_2=2k$, on a $k_2=k+k$ et, pour $k\geqslant 4$, donc pour $k_2\geqslant 8$:

$$(1+k\cdot 2^{k-1})^2=1+k\cdot 2^k+k^2\cdot 2^{2k-2}>1+k^2\cdot 2^{2k-2}=$$
$$=1+2k\cdot\frac{k}{4}\cdot 2^{2k-1}\geqslant 1+2k2^{2k-1},$$

donc $(1+k\cdot 2^{k-1})^2>1+k_2 2^{k_2-1}$, c'est-à-dire $f(k,k)>f(k_2)$.

Si $k_2=2k+1$, on a $k_2=k+(k+1)$ et, comme pour $2k+1\geqslant 8$ on a $k\geqslant 4$, donc

$$k^2-3k-2=k(k-3)-2\geqslant k-2\geqslant 2 \quad\text{et}\quad 3k+2+(k^2-3k-2)2^k>0,$$

[1]) D'où il résulte que h_i est un des nombres $r_1,r_2,\ldots,r_m$.

on trouve

$$1+(2k+1)2^{2k}<(1+k2^{k-1})[1+(k+1)2^k] \quad \text{pour } k\geqslant 4,$$

donc $f(k_2)<f(k,k+1)$.

Lemme 1. *Si le système S_n contient le nombre 7, il se réduit à ce nombre.*

Cela résulte tout de suite des inégalités faciles à vérifier:

$f(1,7)=898<f(4,4)=1089$,
$f(2,7)=2245<f(5,4)=2673$,
$f(3,7)=5837<f(5,5)=6561$,
$f(4,7)=14817<f(5,6)=15633$,
$f(5,7)=36369<f(6,6)=37249$,
$f(6,7)=86657<f(4,4,5)=88209$,
$f(7,7)=201601<f(4,5,5)=216513$.

Il en résulte que, si le système S_n contient le nombre 7, on a $n-1=7$, d'où $n=8$. Donc, si $n\neq 8$, le système S_n ne peut contenir aucun nombre >6.

Lemme 2. *Si $n>20$, le système S_n ne contient aucun nombre autre que 5 et 6.*

Démonstration. On a pour k naturel $2^k>1$, d'où

$$(1+1)(1+k2^{k-1})=2+k2^k<1+2^k+k2^k=1+(k+1)2^k,$$

c'est-à-dire $f(1,k)<f(k+1)$.

D'autre part, on vérifie sans peine que

$$5(1+k2^{k-1})<1+(k+2)2^{k+1} \quad \text{pour } k=1,2,\ldots,6.$$

On a ainsi $f(2,k)<f(k+2)$ pour $k=1,2,\ldots,6$.

Les nombres 1 et 2 ne peuvent donc figurer dans le système S_n que dans le cas où ce système se réduit à un seul nombre 1 ou 2, ce qui ne peut avoir lieu si n est distinct de 2 et de 3.

Vu que $f(3,3)=(1+3\cdot 2^2)^2=169<f(6)=1+6\cdot 2^5=193$, et que $f(4,4,4)=(1+4\cdot 2^3)=33^3=35937<f(6,6)=193^2=37249$, le système S_n ne peut contenir plus qu'un terme égal à 3 et plus que deux termes égaux à 4.

Or, on vérifie sans peine que

$$f(3,4)=429<f(7)=449, \quad f(3,5)<f(4,4), \quad f(3,6)<f(4,5).$$

Le nombre 3 ne peut donc figurer dans le système S_n si $n\neq 4$.

Vu que $f(4,6)<f(5,5)$, le nombre 4 ne peut figurer dans S_n avec le nombre 6. Ainsi S_n ne peut contenir le nombre 4 plus que deux fois et s'il contient le nombre 4, il peut contenir encore seulement le nombre 5. Vu que

$$f(4,5,5,5,5)<f(6,6,6,6) \quad \text{et} \quad f(4,4,5,5)<f(6,6,6),$$

nous concluons que, si S_n contient le nombre 4 une fois, il ne peut contenir le nombre 5 plus que 3 fois, et si S_n contient le nombre 4 deux fois, il ne peut contenir le nombre 5 plus qu'une fois.

Ainsi, si n est un nombre distinct des nombres 5, 9, 10, 14, 15 et 20, S_n ne peut contenir le nombre 4.

Le lemme 2 se trouve ainsi démontré.

Lemme 3. *Le système S_n ne peut contenir le nombre 6 plus que 4 fois.*

Cela résulte tout de suite de l'inégalité

$$f(6,6,6,6,6)<f(5,5,5,5,5,5),$$

c'est-à-dire $(1+6\cdot 2^5)^5<(1+5\cdot 2^4)^6$.

4. Soit $n>20$.

D'après les lemmes 2 et 3 le système S_n ne contient que les nombres 5 et 6 et le nombre 6 au plus 4 fois. Admettons que le système S_n contient le nombre 5 t fois et le nombre 6 r fois. On a donc $0\leqslant r\leqslant 4$. Il vient

$$n-1=5t+6r=5(t+r)+r$$

et, comme $0\leqslant r\leqslant 4$, on conclut que r est le reste de la division du nombre $n-1$ par 5 et $t+r$ est la partie entière du quotient $(n-1):5$. On trouve ainsi

$$t+r=\varphi(n) \quad \text{et} \quad r=n-1-5\varphi(n), \quad \text{d'où} \quad t=6\varphi(n)-n+1.$$

Comme $S_n=(k_2,k_3,\ldots,k_s)$ contient le nombre 5 t fois et le nombre 6 r fois et ne contient pas d'autres nombres, on a

$$f(k_2,k_3,\ldots,k_s)=(1+5\cdot 2^4)^t(1+6\cdot 2^5)^r=81^t\,193^r,$$

donc

$$m_n=81^{6\varphi(n)-n+1}193^{n-1-5\varphi(n)} \quad \text{pour } n>20. \tag{5}$$

Il en résulte que $m_n \leqslant 193^{\varphi(n)} \leqslant 193^{\frac{n-1}{5}}$ pour $n>20$, d'où:

$$\lim_{n=\infty} \frac{m_n}{n!} = 0,$$

c'est-à-dire le rapport du nombre m_n au nombre de toutes les sommes qu'on peut former de n nombres ordinaux donnés, en les rangeant dans un ordre quelconque, tend vers 0 pour $n \to \infty$.

Il résulte aussi de (5) que $\lim\limits_{n=\infty} m_n = +\infty$.

Il reste à calculer les nombres m_n pour $n \leqslant 20$. On a évidemment $m_1=1$ et $m_2=2$.

Le nombre m_3 est le maximum de $f(k_2,k_3,\ldots,k_s)$ pour $k_2,k_3,\ldots,k_s$ naturels, tels que $k_2+k_3+\ldots+k_s=2$. On ne peut avoir ici que $s=2$ et $k_2=2$ ou bien $s=3$, et $k_2=k_3=1$. Comme $(1+1)^2<1+2\cdot 2$, on trouve que c'est le premier cas qui a lieu, donc $m_3=5$, ce qui a été démontré directement par M. Sierpiński [2]).

Le nombre m_4 est le maximum de $f(k_1,k_2,\ldots,k_s)$ pour $k_2,k_3,\ldots,k_s$ naturels, tels que $k_2+k_3+\ldots+k_s=3$. On a donc $2 \leqslant s \leqslant 4$. Si $s=2$, on trouve $k_2=3$; si $s=3$, on a $k_2=1$ et $k_3=2$, si $s=3$, on a $k_2=k_3=k_4=1$. Or, comme

$$f(1,1,1)<f(1,2)<f(3),$$

on trouve $m_4=f(3)=13$, ce que j'ai démontré ailleurs [3]) par une autre voie.

Vu que $f(1,1,1,1)<f(1,1,2)<f(2,2)<f(1,3)<f(4)$, on trouve que $m_5=33$.

En procédant ainsi de suite, on trouve les valeurs suivantes:

$m_1=1$, $m_2=2$, $m_3=f(2)=5$, $m_4=f(3)=13$, $m_5=f(4)=33$
$m_6=f(5)=81$, $m_7=f(6)=193$, $m_8=f(7)=449$, $m_9=f(4,4)=33^2$,
$m_{10}=f(4,5)=33\cdot 81$, $m_{11}=f(5,5)=81^2$, $m_{12}=f(5,6)=81\cdot 193$,
$m_{13}=f(6,6)=193^3$, $m_{14}=f(4,4,5=33^2\cdot 81$, $m_{15}=f(4,5,5=33\cdot 81^2$,
$m_{16}=f(5,5,5)=81^3$, $m_{17}=f(5,5,6)=81^2\cdot 193$,
$m_{18}=f(5,6,6)=81\cdot 193^2$, $m_{19}=f(6,6,6)=193^3$,
$m_{20}=f(4,5,5,5)=33\cdot 81^3$.

Tenant compte de ces formules et de la formule (5), on conclut qu'on a $m_{5k+1}=81^k$ pour $k=0,1,2,\ldots$, et qu'on a $m_{6k+1}=193^k$ pour $k=0,1,2,3,4$, mais $m_{31}=81^6$.

[2]) Voir ce volume, p. 248.

[3]) Comptes rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, Cl. III, Année XLII (1949), séance du mai 1949.

5. n étant un nombre naturel, désignons par N_n l'ensemble de tous les nombres naturels $\leqslant n$ et par E_n l'ensemble de tous les nombres naturels k tels qu'il existe n nombres ordinaux dont la somme donne, pour toutes les permutations de ces nombres, k et seulement k valeurs distinctes. On a évidemment $E_n \subset N_{m_n}$ pour n naturels et $E_1=N_{m_1}=N_1$, $E_2=N_{m_2}=N_2$. Comme l'a démontré M. Sierpiński (l. c.), on a $E_3=N_{m_3}=N_5$. J'ai démontré (l. c.) qu'on a $E_4=N_{m_4}=N_{13}$. Or, je vais montrer que $E_5 \neq N_{m_5}$, à savoir que $E_5=N_{33}-\{30\}$.

Je prouverai d'abord que 30 non-$\in E_5$.

Nous avons démontré auparavant que, si $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ sont n nombres ordinaux parmi lesquels il y a k_i du degré λ_i pour $i=1,2,\ldots,s$, où $\lambda_1>\lambda_2>\ldots>\lambda_s\geqslant 0$ et $k_1+k_2+\ldots+k_s=n$, la somme $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n$ admet, pour toutes les permutations de ses termes, au plus

$$g(k_1,k_2,\ldots,k_s)=k_1\prod_{i=2}^{s}(1+k_i 2^{k_i-1})$$

valeurs distinctes.

Pour $n=5$, on a les décompositions suivantes du nombre n:

$$5=1+4=2+3=3+2=4+1=1+1+3=1+2+2=1+3+1=$$
$$=2+1+2=2+2+1=3+1+1=1+1+1+2=1+1+2+1=$$
$$=1+2+1+1=2+1+1+1=1+1+1+1+1,$$

qui donnent les valeurs

$g(5)=5$, $g(1,4)=33$, $g(2,3)=26$, $g(3,2)=15$, $g(4,1)=8$,
$g(1,1,3)=26$, $g(1,2,2)=25$, $g(2,1,2)=g(2,2,1)=20$,
$g(3,1,1)=12$, $g(1,1,1,2)=g(1,1,2,1)=g(1,2,1,1)=20$,
$g(2,1,1,1)=g(1,1,1,1,1)=16$.

Il en résulte que, si la somme $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5$ admet 30 valeurs distinctes, on a nécessairement $s=2$, $k_1=1$ et $k_2=4$. Ainsi α_1 est un nombre ordinal du degré λ_1 et $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ et α_5 sont des nombres ordinaux du degré λ_2, où $\lambda_1>\lambda_2\geqslant 0$. Soit

$$\alpha_i=\omega^{\lambda_2}l_i+\varrho_i \quad \text{pour} \quad i=2,3,4,5,$$

où l_i sont des nombres naturels et ϱ sont des nombres ordinaux de degré $<\lambda_2$.

En effectuant toutes les 120 permutations des termes de la somme $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5$, on obtient, selon la place occupée par le terme α_1, uniquement les sommes suivantes:

1) α_1 (lorsque le terme α_1 est le dernier),

2) $\alpha_1+\alpha_{i_1}$, où i_1 est un des nombres de la suite 2,3,4,5,

3) $\alpha_1+\alpha_{i_1}+\alpha_{i_2}$, où i_1 et i_2 sont des nombres distincts de la suite 2,3,4,5,

4) $\alpha_1+\alpha_{i_1}+\alpha_{i_2}+\alpha_{i_3}$, où i_1, i_2 et i_3 sont des nombres distincts de la suite 2,3,4,5,

5) $\alpha_1+\alpha_{i_1}+\alpha_{i_2}+\alpha_{i_3}+\alpha_{i_4}$, où i_1, i_2, i_3 et i_3 sont des nombres distincts de la suite 2,3,4,5.

Il y a évidemment au plus 4 nombres distincts de la forme 2), au plus $2\cdot\binom{4}{2}=12$ nombres distincts de la forme 3), au plus $3\binom{4}{3}=12$ nombres distincts de la forme 4) (vu que la somme $\alpha_{i_1}+\alpha_{i_2}+\alpha_{i_3}$, en tant que somme de nombres du même degré, ne dépend que de son dernier terme) et au plus 4 valeurs distinctes de la forme 5). En tout, on a donc au plus $1+4+12+12+4=33$ valeurs distinctes.

Admettons qu'il existe deux indices distincts p et q de la suite 2,3,4,5, tels que $\varrho_p=\varrho_q$. On a alors

$$\alpha_1+\alpha_p+\alpha_q=\alpha_1+\alpha_q+\alpha_p$$

et r et $s\neq r$ étant deux nombres de la suite 2,3,4,5 autres que p et q:

$$\alpha_1+\alpha_p+\alpha_r+\alpha_q=\alpha_1+\alpha_q+\alpha_r+\alpha_p,$$
$$\alpha_1+\alpha_p+\alpha_s+\alpha_q=\alpha_1+\alpha_q+\alpha_s+\alpha_p,$$
$$\alpha_1+\alpha_p+\alpha_r+\alpha_s+\alpha_q=\alpha_1+\alpha_q+\alpha_r+\alpha_s+\alpha_p.$$

La somme $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5$ admet donc (pour toutes les permutations de ses termes) au plus $33-4=29$ valeurs distinctes.

Il en résulte que si cette somme admet 30 valeurs distinctes, tous les nombres $\varrho_2, \varrho_3, \varrho_4$ et ϱ_5 sont distincts.

Admettons maintenant qu'il existe deux nombres distincts p et q de la suite 2,3,4,5, tels que $l_p=l_q$. Si r et s sont deux nombres distincts de la suite 2,3,4,5, autres que p et q, on a, comme on le voit sans peine:

$$\alpha_1+\alpha_p+\alpha_r=\alpha_1+\alpha_q+\alpha_r,\quad \alpha_1+\alpha_p+\alpha_s=\alpha_1+\alpha_q+\alpha_s,$$
$$\alpha_1+\alpha_p+\alpha_r+\alpha_s=\alpha_1+\alpha_q+\alpha_r+\alpha_s,\quad \alpha_1+\alpha_p+\alpha_s+\alpha_r=\alpha_1+\alpha_q+\alpha_s+\alpha_r,$$

et il en résulte que la somme $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5$ admet au plus $33-4=29$ valeurs distinctes. Donc, si cette somme admet 30 valeurs distinctes, tous les nombres l_2, l_3, l_4 et l_5 sont distincts.

Comme on sait, l'égalité $\alpha_1+\beta=\alpha_1+\gamma$ entraîne pour les nombres ordinaux l'égalité $\beta=\gamma$. Donc, si deux des nombres 1)–5) sont égaux, on a l'égalité

$$\alpha_{i_1}+\alpha_{i_2}+\ldots+\alpha_{i_p}=\alpha_{j_1}+\alpha_{j_2}+\ldots+\alpha_{j_q}, \tag{6}$$

où p et q sont deux nombres naturels $\leqslant 4$ (distincts ou non), $i_1, i_2, \ldots, i_p$ sont des nombres distincts de la suite 2,3,4,5, et $j_1, j_2, \ldots, j_q$ sont des nombres distincts de la suite 2,3,4,5.

L'égalité (6) entraîne l'égalité

$$\omega^{\lambda_2}(l_{i_1}+l_{i_2}+\ldots+l_{i_p})+\varrho_{i_p}=\omega^{\lambda_2}(l_{j_1}+l_{j_2}+\ldots+l_{j_q})+\varrho_{j_q}$$

et, vu que, ϱ_{i_p} et ϱ_{j_q} sont des nombres de degré $<\lambda_2$, il en résulte que

$$l_{i_1}+l_{i_2}+\ldots+l_{i_p}=l_{j_1}+l_{j_2}+\ldots+l_{j_q} \quad \text{et} \quad \varrho_{i_p}=\varrho_{j_q},$$

ce qui donne $i_p=j_q$ (puisque les nombres $\varrho_2, \varrho_3, \varrho_4$, et ϱ_5 sont distincts dans le cas considéré). On a donc $l_{i_p}=l_{j_q}$ et

$$l_{i_1}+l_{i_2}+\ldots+l_{i_{p-1}}=l_{j_1}+l_{j_2}+\ldots+l_{j_{q-1}} \quad (\text{où } p-1\leqslant 3 \text{ et } q-1\leqslant 3). \tag{7}$$

Les nombres l_2, l_3, l_4 et l_5 sont distincts: soit $l_a<l_b<l_c<l_d$, où a,b,c,d est une permutation des nombres 2,3,4,5.

L'égalité (7) est une égalité entre les sommes de deux vrais sous-ensembles distincts de l'ensemble $L=\{l_a,l_b,l_c,l_d\}$ et, comme on le vérifie sans peine en examinant tous les 14 vrais sous-ensembles non vides de l'ensemble L, elle n'est possible que dans le cas où l'on a soit

$$l_c=l_a+l_b,$$

soit une des égalités suivantes (deux à deux incompatibles):

$$l_d=l_a+l_b,\quad l_d=l_a+l_c,\quad l_d=l_b+l_c.$$

Chacune de ces égalités n'entraîne qu'une seule égalité du type (7). Il y a donc au plus deux égalités du type (7), donc parmi les 33 nombres 1)–5) il y a au plus deux paires de nombres qui sont égaux, contrairement à l'hypothèse qu'il y a (seulement) 30 nombres distincts.

Nous avons ainsi démontré que 30 non-ϵ E_5.

Nous allons démontrer maintenant que $N_{33}-\{30\}=E_5$. A cet effet nous prouverons d'abord le lemme suivant dû à M. Sierpiński:

Lemme. *n et k étant deux nombres naturels tels que $n\leqslant k<2^n$, il existe une suite formée de n nombres naturels $(a_1,a_2,\dots,a_n)$, dont les sous-suites*[4]*) ont pour sommes tous les nombres naturels de 1 à k et seulement ces nombres.*

Démonstration. Le lemme étant évident pour $n=1$, soit $n>1$ et supposons que le lemme soit vrai pour chaque nombre k, où $n\leqslant k<2^n$. Soit l un nombre naturel tel que $n+1\leqslant l<2^{n+1}$. Si $l\leqslant 2^n$, on a $n\leqslant l-1<2^n$ et, le lemme étant supposé vrai pour $n\leqslant k<2^n$, il existe une suite de n nombres naturels $a_1,a_2,\dots,a_n$, dont les sous-suites ont pour sommes tous les nombres naturels de 1 à $l-1$ et seulement ces nombres. Or, il est évident que les sous-suites de la suite $(a_1,a_2,\dots,a_n,1)$ ont pour sommes tous les nombres, naturels de 1 à l et seulement ces nombres.

Le lemme étant supposé vrai pour $n\leqslant k<2^n$, il existe une suite $(b_1,b_2,\dots,b_n)$ dont les sous-suites ont pour sommes tous les nombres naturels de 1 à 2^n-1 et seulement ces nombres.

Si $2^n\leqslant l<2^{n+1}$, les sous-suites de la suite

$$s=(b_1,b_2,\dots,b_n,\,l-2^n+1)$$

ont pour sommes tous les nombres naturels de 1 à l et seulement ces nombres.

En effet, d'après la propriété de la suite $(b_1,b_2,\dots,b_n)$, tout nombre naturel de 1 à 2^n-1 est somme d'une sous-suite de cette suite et, à plus forte raison, de la suite s. D'autre part, on a évidemment

$$b_1+b_2+\dots+b_n=2^n-1,\quad \text{d'où}\quad b_1+b_2+\dots+b_n+(l-2^n+1)=l$$

et il en résulte que les sous-suites de s ont des sommes $\leqslant l$. Soit enfin k un nombre naturel quelconque tel que $2^n\leqslant k\leqslant l$; vu que $l<2^{n+1}$, on a $0<k-l+2^n-1<2^n$ et, d'après la propriété de la suite $(b_1,b_2,\dots,b_n)$, il existe une sous-suite $b_{i_1},b_{i_2},\dots,b_{i_p}$ de cette suite dont la somme est $k-l+2^n-1$, d'où il résulte que la somme de la suite $(b_{i_1},b_{i_2},\dots,b_{i_p},l-2^n+1)$ qui est une sous-suite de la suite s, est k.

[4]) Nous appelons *sous-suite* de la suite $a_1,a_2,\dots,a_n$ toute suite $a_{i_1},a_{i_2},\dots,a_{i_p}$, où $1\leqslant i_1<i_2<\dots<i_p\leqslant n$.

La suite s jouit donc de la propriété désirée.

Le lemme est ainsi vrai pour le nombre $n+1$. Il en résulte, par induction, qu'il est vrai pour tout n naturel, c. q. f. d.

Corollaire. *On a pour tout n naturel $E_n\supset N_{2^{n-1}}$.*

Démonstration. Le corollaire étant évident pour $n=1$, soit donc $n>1$. Soient k un nombre naturel $\leqslant n$ et $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$, n nombres ordinaux dont $n-k+1$ sont égaux à ω et $k-1$ sont égaux à 1. On voit sans peine que, pour toutes les permutations de ces nombres, leur somme a pour valeurs les nombres $\omega,\omega+1,\omega+2,\dots,\omega+(k-1)$ et seulement ces nombres; elle admet donc précisément k valeurs distinctes. D'où

(8) $$k\in E_n\quad\text{pour}\quad k\leqslant n.$$

D'autre part, soit k un nombre naturel tel que $n<k\leqslant 2^{n-1}$, donc $n-1<k-1<2^{n-1}$. D'après le lemme, il existe une suite de $n-1$ nombres naturels $a_1,a_2,\dots,a_{n-1}$ dont les sous-suites ont pour sommes tous les nombres naturels de 1 à $k-1$ et seulement ces nombres. Il en résulte sans peine que la somme de n nombres ordinaux $\omega,a_1,a_2,\dots,a_{n-1}$, pour toutes les permutations de ses termes, a comme valeurs les nombres $\omega,\omega+1,\omega+2,\dots,\omega+(k-1)$ et seulement ces nombres; elle admet donc précisément k valeurs distinctes et on a

(9) $$k\in E_n\quad\text{pour}\quad n<k\leqslant 2^{n-1}.$$

D'après (8) et (9), $k\in E_n$ pour $k\leqslant 2^{n-1}$, donc $N_{2^{n-1}}\subset E_n$, c. q. f. d.

Il en résulte tout de suite que $m_n\geqslant 2^{n-1}$ pour tout n naturel.

Le lemme et le corollaire permettent de trouver pour tout nombre naturel $k\leqslant 16$ une somme σ_k de 5 nombres ordinaux qui, pour toutes les permutations de ses termes donne k et seulement k valeurs distinctes. Ce sont les sommes:

$$\begin{array}{ll}
\sigma_1=\omega+\omega+\omega+\omega+\omega, & \sigma_2=\omega+\omega+\omega+\omega+1,\\
\sigma_3=\omega+\omega+\omega+1+1, & \sigma_4=\omega+\omega+1+1+1,\\
\sigma_5=\omega+1+1+1+1, & \sigma_6=\omega+1+1+1+2,\\
\sigma_7=\omega+1+1+2+2, & \sigma_8=\omega+1+1+2+3,\\
\sigma_9=\omega+1+1+2+4, & \sigma_{10}=\omega+1+2+2+4,\\
\sigma_{11}=\omega+1+2+3+4, & \sigma_{12}=\omega+1+2+4+4,\\
\sigma_{13}=\omega+1+2+4+5, & \sigma_{14}=\omega+1+2+4+6,\\
\sigma_{15}=\omega+1+2+4+7, & \sigma_{16}=\omega+1+2+4+8.
\end{array}$$

D'autre part, on vérifie facilement que chacune des sommes suivantes c_k donne, pour toutes les permutations de ses termes, k et seulement k valeurs distinctes:

$$\sigma_{17}=\omega^2+(\omega+1)+(\omega+2)+(\omega+3)+(\omega+4),$$
$$\sigma_{18}=\omega^2+(\omega+1)+\omega\cdot 2+\omega\cdot 3+\omega\cdot 4,$$
$$\sigma_{19}=\omega^2+\omega+(\omega\cdot 2+1)+\omega\cdot 3+\omega\cdot 5,$$
$$\sigma_{20}=\omega^2+(\omega+1)+\omega\cdot 2+\omega\cdot 3+\omega\cdot 6,$$
$$\sigma_{21}=\omega^2+(\omega+1)+\omega\cdot 2+\omega\cdot 3+\omega\cdot 7,$$
$$\sigma_{22}=\omega^2+(\omega+1)+\omega\cdot 2+\omega\cdot 4+\omega\cdot 7,$$
$$\sigma_{23}=\omega^2+(\omega+1)+\omega\cdot 2+\omega\cdot 4+\omega\cdot 8,$$
$$\sigma_{24}=\omega^2+(\omega+1)+(\omega\cdot 2+1)+\omega\cdot 4+\omega\cdot 7,$$
$$\sigma_{25}=\omega^2+(\omega+1)+(\omega\cdot 2+1)+\omega\cdot 4+\omega\cdot 8,$$
$$\sigma_{26}=\omega^2+\omega+(\omega+1)+(\omega\cdot 2+2)+(\omega\cdot 3+3),$$
$$\sigma_{27}=\omega^2+(\omega+1)+(\omega\cdot 2+2)+(\omega\cdot 2+3)+(\omega\cdot 3+4),$$
$$\sigma_{28}=\omega^2+(\omega+1)+(\omega+2)+(\omega\cdot 2+3)+(\omega\cdot 4+4),$$
$$\sigma_{29}=\omega^2+(\omega+1)+(\omega+2)+(\omega\cdot 3+3)+(\omega\cdot 5+4),$$
$$\sigma_{31}=\omega^2+(\omega+1)+(\omega\cdot 2+2)+(\omega\cdot 3+3)+(\omega\cdot 4+4),$$
$$\sigma_{32}=\omega^2+(\omega+1)+(\omega\cdot 2+2)+(\omega\cdot 3+3)+(\omega\cdot 6+4),$$
$$\sigma_{33}=\omega^2+(\omega+1)+(\omega\cdot 2+2)+(\omega\cdot 4+3)+(\omega\cdot 8+4).$$

Il est ainsi établi que $E_5=N_{33}-\{30\}$.

Extensions of measure.

By

J. Łoś and E. Marczewski (Wrocław).

In measure theory one is especially interested in extension problems. This paper deals with the most elementary one, namely with extension of a measure from any field $\boldsymbol{M}$ of sets to the field determined by $\boldsymbol{M}$ and an arbitrary set Z which does not belong to $\boldsymbol{M}$ [1]).

We get a simple effective method of extension (*canonical extensions*) [2]) which can be used in some cases (Theorems 1, 2 and 4 [3])), in particular for each measure assuming only finite values [4]). We deal also with remained cases of infinite values (Theorem 3 and 5 [5])).

Terminology and symbolism. We denote by $\boldsymbol{A}$ a fixed Boolean algebra (e. g. the class of all subsets of a set). An additive and complementative subclass of $\boldsymbol{A}$ is called a *field* in $\boldsymbol{A}$. A σ-additive field in a Boolean σ-algebra $\boldsymbol{A}$ is called *σ-field* in $\boldsymbol{A}$.

We use the symbols $+$, $\cdot$, $\subset$, etc. in both meanings: in the sense of Boolean algebra for elements of $\boldsymbol{A}$ and in the sense of Theory of sets for subclasses of $\boldsymbol{A}$. For each $E\in\boldsymbol{A}$ we denote by E' the complement of E.

A class $\boldsymbol{I}\subset\boldsymbol{A}$ is called *ideal in* $\boldsymbol{A}$ if it is hereditary (i. e. if the relations: $A\in\boldsymbol{A}$, $B\in\boldsymbol{I}$ and $A\subset B$ imply $A\in\boldsymbol{I}$) and additive. An ideal $\boldsymbol{I}$ is *proper* if $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{I}$. A proper ideal is *prime* if, for each $E\in\boldsymbol{A}$, we have $E\in\boldsymbol{I}$ or $E'\in\boldsymbol{I}$.

---

[1]) Comp. O. Nikodym, *Sur les fonctions d'ensemble.* Comptes Rendus du I Congrès des Math. des Pays Slaves, Varsovie 1929 (1930), pp. 304-313, esp. pp. 310-312.

[2]) Our metod has been recently used by Sikorski in his study of homomorphisms in Boolean algebras. See R. Sikorski, *A theorem on extension of homomorphisms*, Ann. Soc. Pol. Math. **21** (1948), pp. 332-335.

[3]) Presented to the Polish Mathematical Society, Warsaw Section, on September 21, 1945.

[4]) The possibility of extension in this case is well known. See e. g. A. Horn and A. Tarski, *Measures in Boolean algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **64** (1948), pp. 467-497, esp. pp. 476-477 and, for σ-measures, Nikodym, l. c.

[5]) Presented to the Polish Mathematical Society, Wrocław Section, on March 25, 1949.