Problemen/UWC

Universitaire Wiskunde Competitie

Met ingang van het dit jaar zijn de Universitaire Wiskunde Competitie en de problemenrubriek samengevoegd. De rubriek zal steeds drie problemen bevatten waar studenten op de gebruikelijke manier punten mee kunnen verdienen. De ladderstand is gewoon naar het nieuwe jaar getransporteerd. Niet-studenten worden uitgedaagd om *hors-concours* hun oplossingen in te zenden.
De Universitaire Wiskunde Competitie wordt gesponsord door Optiver Derivatives Trading en wordt tevens ondersteund door bijdragen van de Nederlandse Onderwijs Commissie voor Wiskunde en de Vereniging voor Studie- en Studentenbelangen te Delft.

Opgave A
Een Pythagoreïsche driehoek is een rechthoekige driehoek waarvan alle zijden geheeltallig zijn. Van een Pythagoreische driehoek is de straal van de ingeschreven cirkel ook geheeltallig. Bepaal alle Pythagoreische driehoeken waarvan de straal van de ingeschreven cirkel N bedraagt ($N = 1, 2, 3, \dots$)

Opgave B
Een rechthoekige tafel waarvan de vier poten precies even lang zijn, staat in een historisch pand met een glooiende vloer. Is het mogelijk om de tafel ergens neer te zetten zodat deze niet wiebelt?

Opgave C
Het is algemeen bekend dat de oneindige rij $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$ niet sommeerbaar is. Verwijder nu uit bovenstaande rij alle getallen die 9 aaneengesloten negens in hun decimale ontwikkeling hebben. Houden we een sommeerbare rij over?

Ster-opgave
Zij V de complexe vectorruimte van alle functies $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$. Zij W de kleinste lineaire deelruimte van V met de volgende twee eigenschappen:
1. de functie $f(z) = z$ behoort tot W;
2. voor alle $f \in W$ geldt $|f| \in W$.
Behoort de functie $f(z) = \bar{z}$ tot W?
Opmerking: Een vermoeden in de theorie van Boolese algebra's kan tot deze vraag worden herleid.

Oplossingen van de Universitaire Wiskunde Competitie editie 2002/3
We ontvingen 7 inzendingen.

Opgave 2002/3-A
Toon aan dat

$$\ln 2 = \frac{2}{3} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(4n^2-1)}.$$

Oplossing Deze opgave werd door alle inzenders correct opgelost. De hier volgende oplossing werd door velen gevonden. Breuksplitsen en vervolgens termen tegen elkaar wegstrepen in de partiële sommen geeft:

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(4n^2-1)} &= \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{2}{2n} + \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= -\frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = -\frac{2}{3} + \ln 2.\end{aligned}$$

Redactie: Robbert Fokkink en Jan van Neerven
Problemen / Universitaire Wiskunde Competitie
Vakgroep Toegepaste Wiskundige Analyse
Technische Universiteit Delft
Postbus 5031, 2600 GA Delft
r.j.fokkink@its.tudelft.nl
j.vanneerven@its.tudelft.nl

Oplossingen

Opgave 2002/3-B
Definieer, voor $t > 0$,

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\Big(\frac{t}{n^2}\Big).$$

Toon aan dat de limiet $\lim_{t\to\infty} f(t)/\sqrt{t}$ bestaat en bepaal zijn waarde.

Oplossing Het gemakkelijkst gaat dit door de som, via een substitutie, om te werken tot een Riemannsom van een zekere oneigenlijke integraal. De moelijkheid bestaat er dan in om aan te tonen dat de limieten verwisseld mogen worden.
We substitueren $u = t^2$ en bewijzen dat

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\Big(\frac{t^2}{n^2}\Big) \;=\; \int_0^\infty \sin^2(1/x^2)\,dx \;=\; \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Zij $\varepsilon > 0$ vast. Kies $T > 0$ zo groot dat $1/(3T^3) < \varepsilon$; wegens $\sin^2(1/x^2) \le 1/x^4$ is dan ook $\int_T^\infty \sin^2(1/x^2)\,dx < \varepsilon$. We splitsen de som als volgt:

$$\frac{1}{t} \sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\Big(\frac{t^2}{n^2}\Big) \;=\; \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{\lceil tT\rceil} \sin^2\Big(\frac{t^2}{n^2}\Big) \;+\; \frac{1}{t} \sum_{n=\lceil tT\rceil+1}^{\infty} \sin^2\Big(\frac{t^2}{n^2}\Big).$$

De eerste som is een Riemannsom voor de integraal van $\sin^2(1/x^2)$ over het interval $[0, \lceil tT\rceil/t]$ en convergeert naar $\int_0^T \sin^2(1/x^2)\,dx$ als $t \to \infty$; dit volgt uit het feit dat $\sin(1/x^2)$ begrensd en continu is voor $x > 0$. De tweede som schatten we af:

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \sum_{n=\lceil tT\rceil+1}^{\infty} \sin^2\big(\frac{t^2}{n^2}\big) &\le \frac{1}{t} \sum_{n=\lceil tT\rceil+1}^{\infty} \big(\frac{t^2}{n^2}\big)^2 \\ &\le t^3 \int_{\lceil tT\rceil}^{\infty} \frac{1}{x^4}\,dx = \frac{t^3}{3\lceil tT\rceil^3} \le \frac{1}{3T^3} \le \varepsilon. \end{aligned}$$

Voor t voldoende groot vinden we aldus:

$$\begin{aligned} &\left|\frac{1}{t} \sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\big(\frac{t^2}{n^2}\big) - \int_0^\infty \sin^2\big(\frac{1}{x^2}\big)\,dx\right| \\ &\quad\le \left|\frac{1}{t} \sum_{n=1}^{\lceil tT\rceil} \sin^2\big(\frac{t^2}{n^2}\big) \;-\; \int_0^T \sin^2\big(\frac{1}{x^2}\big)\,dx\right| \\ &\qquad\quad + \left|\frac{1}{t} \sum_{n=\lceil tT\rceil+1}^{\infty} \sin^2\big(\frac{t^2}{n^2}\big)\right| + \left|\int_T^\infty \sin^2\big(\frac{1}{x^2}\big)\,dx\right| \\ &\quad\le \varepsilon \;+\; \varepsilon \;+\; \varepsilon = 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Opgave 2002/3-C
Bewijs voor alle $n, k \ge 1$ met $n \ge 2k$ de volgende identiteit:

$$\binom{n+1}{k} = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j+1} \binom{2j}{j} \binom{n-2j}{k-j}.$$

Oplossing We geven de oplossing van het team Hendrik Hubrechts en Steven Delvaux. Zij $D := \{(n,k) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} \,:\, n \geq 2k\}$ en definieer

$$f(n,k) := \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j+1}\binom{2j}{j}\binom{n-2j}{k-j}, \qquad (n,k) \in D.$$

We willen aantonen dat $f(n,k) = \binom{n+1}{k}$ voor alle $(n,k) \in D$. We doen dit via inductie naar k.
Voor $k = 0$ is dit triviaal. Stel nu dat $n = 2k$ met $k \geq 1$. Enig rekenwerk geeft

$$\begin{aligned} f(2k,k) = {} & \frac{2}{k+1}\sum_{j=0}^{k-1}\binom{2j}{j}\binom{2k-2j-2}{k-j-1}\cdot\frac{2k-2j-1}{j+1} \\ & + \frac{2}{k+1}\sum_{j=0}^{k-1}\binom{2j}{j}\binom{2k-2j-2}{k-j-1}\cdot\frac{2k-2j-1}{k-j} + \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}. \end{aligned}$$

Door in de tweede som $i = k-j-1$ te substitueren en de resulterende uitdrukkingen op te tellen en gebruik te maken van de inductiehypothese vinden we

$$\begin{aligned} f(2k,k) &= \frac{4}{k+1}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{j+1}\cdot\binom{2j}{j}\binom{2k-2j-2}{k-j-1} + \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k} \\ &= \frac{4}{k+1}\binom{2k-1}{k-1} + \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k} = \binom{2k+1}{k}. \end{aligned}$$

Door inductie naar k merken we vervolgens op dat f voldoet aan de identiteit

$$f(n+1,k+1) = f(n,k) + f(n,k+1)$$

voor alle $(n+1,k+1)$, (n,k) en $(n,k+1)$ in D. Het bewijs kan nu worden voltooid door dubbele inductie: naar $k \geq 0$ bij vaste $n \geq 0$, en naar $n \geq 2k$ waarbij het geval $n = 2k$ hierboven al beschouwd is.
Stel dat $k \geq 1$ en $n \geq 2k+1$ gegeven zijn, dan zitten (n,k), $(n-1,k-1)$ en $(n-1,k)$ in D en vinden we met behulp van de inductiehypothese dat

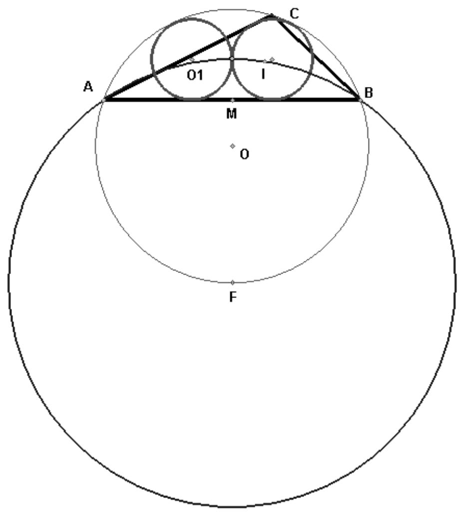
$$f(n,k) = f(n-1,k-1) + f(n-1,k) = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

Hubrechts en Delvaux merken tenslotte op dat dit bewijs zonder veel moeite kan worden uitgebreid naar paren (r,k) met $r \in \mathbf{R}$ en $k \in \mathbf{Z}$, mits men afspreekt dat $\binom{r}{k} = 0$ als $k \leq -1$ en $\binom{r}{k} = r(r-1)\cdot\ldots\cdot(r-k+1)/k!$ als $k \geq 0$.

Solutions to the problem sections volume 3, numbers 3 and 4

Problem 35 (Floor van Lamoen)
Let two congruent circles (O_1) and (O_2) be tangent to each other, to segment AB and to the circumcircle of triangle ABC, in such a way that O_1, O_2 and C lie on the same side of AB. Prove that the point of contact of (O_1) and (O_2) is concyclic with A, B and the incenter I of ABC.

Solution Solved by A.J.Th. Maassen and by Floor van Lamoen. Let O be the circumcenter and P the point of contact of (O_1) and (O_2). Let F be the midpoint of the arc AB opposite to C and let M be the midpoint of AB. Denote the radius of (O_1) as r and let s be the length of MO. Then in the triangle OO_1P we find that $(R-r)^2 = r^2 + (r-s)^2$ which gives $r = s - R + \sqrt{2R(R-s)}$ where we used the fact that r is positive. From this we see that $FP = r - s + R = \sqrt{2R(R-s)}$. On the other hand $MB^2 = R^2 - s^2$ and $MF = R - s$ so that $FB = FP$. Recall that a quadrilateral $ABCD$ is inscribed in a circle if and only if opposite angles are complementary. Since $AFBC$ is in (O) the angles F and C are complementary. This implies that $APB = AIB$ so $APIB$ is on (F).



Problem 36

Let k be a positive integer, and write $n = 4k+1$. Prove that $(n^n - 1)/(n-1)$ is not a prime number.

Solution The only interesting case is n is prime. Let z be a primitive n-th root of unity. Then $(n^n-1)/(n-1)$ is equal to the norm $N(n-z)$. Now $\sqrt{n} \in \mathbf{Q}(z)$ so $n - z = a^2 - b^2$ for two elements of $\mathbf{Q}(z)$. Then $N(n-z) = N(a+b)N(a-b)$ is a non-trivial factorization.

Problem 37 (Open problem)

Does there exist a continuous surjection $f\colon [0,1] \to [0,1]^2$ such that every convex set has a convex image?

Solution This problem remains open. See e.g., Pach and Rogers, Partly convex Peano curves, Bull. London Math. Soc. 15 (1983), no. 4, 321–328.

Problem 38

Let $S = 4, 8, 9, 16, 25, 27, 32, 36, ...$ be the set of positive integers that are proper powers. Evaluate the sum $\sum_{s\in S} \frac{1}{s-1}$.

Solution Dick Tjaden recognizes this as an identity of Jan Kristian Hauglund as communicated through the internet. The sum equals 1 and Hauglund has a very cute argument. Let s denote an integer ≥ 2 and let σ be equal to $\sum_{s\in S} \frac{1}{s}$. All series below converge.

$$\sigma = \sum_{s\notin S} \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3} + \ldots = \sum_{s\notin S} \frac{1}{s(s-1)} = 1 - \sum_{s\in S} \frac{1}{s(s-1)}$$

$$= 1 - \sum_{s\in S} \frac{1}{s(s-1)} = 1 - \sum_{s\in S} \{\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}\} = 1 - \sum_{s\in S} \frac{1}{s-1} + \sigma.$$

So the sum equals 1. The true identity of σ remains unknown, but its appearance is appreciated.

J. Groeneveld gives the following solution. Let S be the set of proper powers and let T be the complement of S in the set of integers > 1. If $t^m = s^k$ for $t, s \in T$ then m is a multiple of k since the order of the prime divisors of t has gcd 1. By symmetry $s = t$. So every element of S is a proper power of a unique element of T and we may write

$$\sum_{n \in S} \frac{1}{n-1} = \sum_{n \in S} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{n^m} = \sum_{q=2}^{\infty} \sum_{t \in T} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{t^{qm}}$$

Since $\{t^m : t \in T, m \in \mathbf{N}\}$ equals the set of integers > 1 we rewrite this sum as

$$\sum_{q=2}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^q} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$$

This is a telescopic series that adds up to 1.

Problem 39 (M. Bencze)
Let $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ be a differentiable function for which $f(x^2) + f(y^2) \leq 2f(\sqrt{xy})$. Prove that $f(1) - f(\frac{1}{e}) \leq \int_0^1 \sqrt{x} f'(x) dx$.

Solution Ruud Jeurissen shows that f is trivial, assuming only that f is continuous in 0. Let $0 \leq z < 1$. Taking $x = \sqrt{z}$, $y = 0$ we see that $f(z) \leq f(0)$. Taking $x = y = z$ we see that $f(z^2) \leq f(z)$. So the $f(z^{2^n})$ form a non-increasing sequence. Its limit is $f(0)$ and all terms are $\leq f(0)$, so f is a constant function, and the inequality to prove is $0 \leq 0$, which is left to the reader.

Problem 40 (Matthé van der Lee)
For $t, m \in \mathbf{N}$, let $b_m(t) = \binom{tm-1}{t-1}$, let $a(t)$ be a sequence of natural numbers and let $n \in \mathbf{N}$ be fixed. Verify the equivalence of the following statements:

- For all $t|n$ we have that $\sum_{d|t} a(d) = 0 \mod t$
- For all $t|n$ there is an $m \in \mathbf{N}$ such that $\sum_{d|t} a(d) b_m(t/d) = 0 \mod t$
- For all $t|n$ and $m \in \mathbf{N}$ we have that $\sum_{d|t} a(d) b_m(t/d) = 0 \mod t$

Solution By Matthé van der Lee. Let G be a finite group of order tm acting on the family $X = \{T \subset G\colon |T| = t\}$ by translation. Then T is fixed by g if and only if it is a union of cosets. In particular $o(g)|t$. Denote $d = t/o(g)$. Then g has exactly

$$\binom{dm}{d} = m\binom{dm-1}{d-1}$$

fixed points in X, provided that $d|t$. Apply Burnside's Lemma to find

$$\sum_{d|t} b_m(d) w(t/d) = 0 \text{ mod } t$$

where $w(k)$ denotes the number of points of order k in G.
Consider the set A_n of all functions $f\colon \mathbf{N} \to \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ endowed with the usual ring structure of addition and convolution. An element f is a unit if and only if $f(1)$ is a unit in $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. In particular, the functions b_m and w above are units in A_n. Consider the set R_n of all functions that satisfy $f(t) = 0 \text{ mod } t$ if $t|n$. It is subring of A_n and if $f \in R_n$ is a unit in A_n then it is a unit in R_n as well.
Let $E(t) = 1$ for all $t \in \mathbf{N}$ and let μ be the Möbius function. We have to show the equivalence of $a * E \in R_n$ and $a * b_m \in R_n$. If $f \in R_n$ then also $f * E \in R_n$ and, since E is a unit with inverse μ, if f is a unit so is $f * E$. Observe that $w * E \in R_n$ where w is the function defined above. Now

$$a * E = a * b_m * (b_m * w)^{-1} * (w * E) \in R_n,$$

which demonstrates the equivalence of the statements.

Uitslag Editie 2002/3

De weging van de opgaven is 3 : 4 : 5.

	Naam	A	B	C	*Totaal*
1.	Team Hendrik Hubrechts (Leuven)	8	9	11	115
2.	Team Gerben Stavenga (Utrecht)	8	9	10	110
3.	Filip de Smet (Gent)	8	5	8	84

Ladderstand Universitaire Wiskunde Competitie

We vermelden alleen de top 5. Voor de complete ladderstand verwijzen we naar de UWC-website.

	Naam	*Punten*
1.	Roelof Oosterhuis	356
2.	Team Hendrik Hubrechts	238
3.	Mark Veraar	208
4.	Jan Maas	200
5.	Team Filip Cools	199

Reglement

De Universitaire Wiskunde Competitie is een ladderwedstrijd voor studenten, georganiseerd in samenwerking met de Vlaamse Wiskunde Olympiade.De opgaven worden tevens gepubliceerd op de internetpagina http://academics.its.tudelft.nl /uwc

Ieder nummer bevat de ladderopgaven A, B, en C waarvoor respectievelijk 30, 40 en 50 punten kunnen worden behaald. Daarnaast zijn er respectievelijk 6, 8 en 10 extra punten te winnen voor elegantie en generalisatie. Er worden drie editieprijzen toegekend, van 100, 50 en 25 Euro. De puntentotalen van winnaars tellen voor 0, 50 en 75 procent mee in de laddercompetitie. De aanvoerder van de ladder ontvangt een prijs van 100 Euro en begint daarna weer onderaan. Daarnaast wordt twee maal per jaar een ster-opgave aangeboden waarvan de redactie geen oplossing bekend is. Voor de eerst ontvangen correcte oplossing van deze ster-opgave wordt eveneens 100 Euro toegekend.

Groepsinzendingen zijn toegestaan. Elektronische inzending in LaTeX wordt op prijs gesteld. De inzendtermijn voor de oplossingen sluit op 1 augustus 2003. Voor een ster-opgave geldt een inzendtermijn van een jaar.