Réseaux entiers unimodulaires sans racine en dimension 27 et 28

Roland Bacher et Boris Venkov

Résumé: Les réseaux entiers unimodulaires ont été classés (à isomorphisme près) jusqu'en dimension 25. Borcherds a démontré qu'il existe un unique réseau entier unimodulaire sans racine en dimension 26 et il a exhibé de tels réseaux en dimension 27. Nous montrons qu'il existe exactement 3 tels réseaux en dimension 27 et 38 en dimension 28. La preuve utilise les classifications de Borcherds des réseaux entiers unimodulaires dans les dimensions 24 et 25. Elle nécéssite en outre une classification partielle des réseaux avec système de racine kA_1 en dimensions 26 et 27. La liste des réseaux unimodulaires sans racine en dimension 28 fournit aussi la liste des 33 réseaux pairs de déterminant 4 en dimension 28 qui ne possèdent pas de racine.

1. Introduction et généralités

Un *réseau de dimension* n est un sous-groupe discret cocompact de l'espace vectoriel euclidien $\mathbf{E}^n$. Un réseau Λ est *entier* si la restriction du produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ à $\Lambda \times \Lambda$ est entière. La *norme* d'un élément $\lambda \in \Lambda$ est la valeur du produit scalaire $\langle \lambda, \lambda \rangle$; c'est donc le carré de la norme euclidienne de λ. Le *réseau dual* $\Lambda^\sharp$ d'un réseau $\Lambda \subset \mathbf{E}^n$ est défini par

$$\Lambda^\sharp = \{\mu \in \mathbf{E}^n \mid \langle \mu, \lambda \rangle \in \mathbf{Z} \text{ pour tout } \lambda \in \Lambda\} \quad .$$

Dans la suite tous les réseaux seront entiers à l'exception des réseaux duaux.

Le *déterminant* d'un réseau (entier) Λ est l'indice de Λ dans son réseau dual $\Lambda^\sharp$. C'est aussi le carré du volume d'un domaine fondamental $\mathbf{E}^n/\Lambda$. Un réseau Λ est de *type I* ou *impair* si l'homomorphisme $\varphi : \Lambda \longrightarrow \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ défini par $\lambda \longmapsto \langle \lambda, \lambda \rangle \pmod 2$ est non-trivial. Λ est de *type II* ou *pair* sinon. Des réseaux unimodulaires paires n'existent qu'en dimensions divisibles par 8.

Deux réseaux Λ et M sont *isomorphes* s'il existe une isométrie linéaire bijective entre Λ et M. Le *groupe des automorphismes* d'un réseau Λ est le groupe fini constitué des isométries linéaires de Λ dans Λ.

Un réseau est *décomposable* s'il peut s'écrire comme somme orthogonale de deux réseaux non-triviaux.

Pour un réseau Λ nous notons $\Lambda_i = \{\lambda \in \Lambda \mid \langle \lambda, \lambda \rangle = i\}$ l'ensemble des vecteurs de norme i dans Λ. Un élément de norme 1 ou 2 est une *racine* de Λ et l'ensemble $\Lambda_1 \cup \Lambda_2$ des racines constitue le *système de racine*. Les composantes irréductibles de Λ_2 sont parmi $A_i,\ D_j,\ E_6,\ E_7,\ E_8$ où $i \geq 1$ et $j \geq 4$. Les réflexions orthogonales par rapport aux racines engendrent un sous-groupe normal, appelé *groupe de Weyl*, du groupe $\mathrm{Aut}\Lambda$ des automorphismes de Λ. On dira qu'un réseau Λ est sans racine si la norme de tout élément non-nul de Λ est au moins 3, i.e. si Λ_1 et Λ_2 sont vides. (Des réseaux entiers non-unimodulaires peuvent contenir des racines de norme plus grand que 2. Dans cet article une racine désigne toujours un vecteur de norme 1 ou 2.)

Notre résultat principal est la classification des réseaux unimodulaires sans racine en dimensions 27 et 28.

Théorème 1.1. *En dimension 27 il existe (à isomorphisme près) exactement 3 réseaux unimodulaires sans racine. Un de ces réseaux possède un vecteur caractéristique de norme 3 (cas exceptionnel).*

Théorème 1.2. *En dimension 28 il existe (à isomorphisme près) exactement 38 réseaux unimodulaires sans racine. Deux de ces réseaux possèdent un vecteur caractéristique de norme 4 (cas exceptionnels).*

Théorème 1.3. *En dimension 28 il existe (à isomorphisme près) exactement 33 réseaux entiers pairs sans racine qui ont déterminant 4.*

La liste de ces réseaux se trouve dans les tables à la fin de cet article. Ces tables contiennent aussi la classification des réseaux unimdodulaires avec système de racine kA_1 en dimension 26.

Corollaire 1.4. *Tout réseau unimodulaire de dimension n avec $2 \leq n \leq 28$ possède des automorphismes autres que $\pm$Identité.*

Preuve. Si $n < 28$ cela résulte directement de la formule de masse (ou de la classification). En dimension 28 cela résulte de l'inspection des 38 réseaux mentionnés dans le théorème 1.1.

Le corollaire 1.4. montre que le résultat de **[Ba1]** est optimal.

Notons encore que nous utilisons indifféremment une notation additive ou multiplicative pour indiquer un système de racine. Ainsi $10A_1$ ou A_1^{10} désignent tous les deux le système de racine formé par 10 paires de vecteurs orthogonaux qui sont tous de norme 2.

2. Réseaux voisins et le graphe des voisins

Deux réseaux entiers Λ et M sont *voisins au sens de Kneser* s'il existe un sous-réseau N d'indice 2 de Λ et et un sous-réseau N' d'indice 2 de M avec N isomorphe à N'. Kneser a démontré dans **[Kn]** que pour deux réseaux entiers unimodulaires Λ et M de même dimension il existe un ensemble fini $\{M_0, \ldots, M_s\}$ de réseaux tel que $M_0 = \Lambda$, $M_s = M$ et M_i est voisin de M_{i+1} pour $i = 0, \ldots, s-1$.

On dira que deux réseaux entiers Λ et M sont *k-voisins* s'il existe des sous-réseaux $N \subset \Lambda$ et $N' \subset M$ avec Λ/N et M/N' cycliques d'ordre k et N isomorphe à N'. En particuliers, deux réseaux 2-voisins sont voisins.

Proposition 2.1. *Soit Λ et M deux réseaux entiers k-voisins. Supposons que k est premier au déterminant de Λ. Alors il existe un élément $v \in \Lambda$ de norme divisible par k^2 tel que M est isomorphe au réseau*

$$\Lambda(\frac{v}{k}) = \{\lambda \in \Lambda \mid \langle \lambda, v\rangle \in k\mathbf{Z}\} + \mathbf{Z}\frac{v}{k} \quad .$$

D'autre part, soit v est un élément de norme divisible par k^2 tel que v n'est pas de la forme lv' pour $l > 1$ un diviseur de k et v' dans Λ. Si k est premier au déterminant de Λ, alors les réseaux Λ et $\Lambda(\frac{v}{k})$ sont k-voisins.

Preuve. Supposons que Λ et M soient plongés dans $\mathbf{E}^n$ de manière à ce que $N = \Lambda \cap M$ soit d'indice k dans Λ et dans M. Soit $a \in M$ un générateur du groupe cyclique $M/N = \mathbf{Z}/k\mathbf{Z}$. On a donc $v = ka \in N \subset \Lambda$ et $k'a \notin \mathbf{N}$ pour tout diviseur stricte k' de k. Comme a appartient à un réseau entier la norme de v est divisible par k^2. Considérons l'homomorphisme de groupe $\lambda \longmapsto \langle \lambda, v\rangle \pmod{k}$ pour $\lambda \in \Lambda$. Si cet homomorphisme n'est pas surjectif, le réseau $\Lambda' = \Lambda + \mathbf{Z}\frac{v}{k'}$ est entier pour $k' > 1$ un diviseur convenable de k. On a alors $k'^2 \mathrm{det}\Lambda' = \mathrm{det}\Lambda$ ce qui est absurde car k et $\mathrm{det}\Lambda$ sont premiers entre eux.

Nous laissons au lecteur la preuve de la deuxième partie de la proposition 2.1. QED

J. Hsia a démontré récemment (voir **[H]**) que tout réseau entier unimodulaire de type I en dimension n est $p-$voisins de $\mathbf{Z^n}$ pour tout premier p assez grand. Un réseau entier unimodulaire peut donc être décrit par un vecteur convenable dans $\frac{1}{p}\mathbf{Z^n} \setminus \mathbf{Z^n}$. Ceci donne une description relativement compacte d'un réseau et nous l'utiliserons dans les tables à la fin de cet article.

Fixons maintenant un réseau entier unimodulaire Λ de dimension n et considérons l'espace vectoriel $\Lambda/2\Lambda$. On vérifie facilement que la "norme" d'un élément de $\Lambda/2\Lambda$ est bien définie modulo 4. Si Λ est de type I, il existe exactement $\sum_k \binom{n}{4k}$ classes de $\Lambda/2\Lambda$ dont la norme est congrue à 0 modulo 4. Chaque classe non nulle dont la norme est congrue à 0 modulo 4 définit deux réseaux voisins de Λ: en effet, soit $v \in \Lambda$ un représentant de la classe considérée et soit $a \in \Lambda$ un vecteur tel que $\langle v, a\rangle \equiv 1 \pmod{2}$. Alors les réseaux $\Lambda(\frac{v}{2})$ et $\Lambda(\frac{v+2a}{2})$ sont tous les deux voisins de Λ. De plus tous les réseaux voisins s'obtiennent de cette manière.

Utilisons l'ensemble des classes d'isomorphisme de réseaux entiers unimdulaires en dimension n pour définir un graphe NG appelé *graphe des voisins*. Le graphe NG est un graphe fini dont les arêtes sont orientées et peuvent être multiples. Les sommets de NG sont les classes d'isomorphisme de réseaux entiers unimodulaires en dimension n. Deux sommets représentés par des réseaux Λ et M sont reliés par k arêtes orientées de Λ à M s'il existe k plongements $p_1, \ldots, p_k$ du réseau M dans $\Lambda \otimes \mathbf{R}$ tels que $p_i(M) \neq p_j(M)$ pour $i \neq j$ et $p_i(M) \cap \Lambda$ est d'indice 2 dans Λ pour tout i. Autrement dit, k compte le nombre de façons dont M peut être obtenu comme voisin à partir de Λ. Notons $m(\Lambda, M) = k$ le nombre d'arêtes de NG qui relient le sommet représenté par Λ au sommet représenté par M. Le nombre $m(\Lambda, M)$ dénote donc la "multiplicité" de l'arête orientée partant de Λ et arrivant à M.

Proposition 2.2. *On a*

$$\frac{m(\Lambda, M)}{\mathrm{Aut}(\Lambda)} = \frac{m(M, \Lambda)}{\mathrm{Aut}(M)} \quad .$$

Preuve. Supposons que les deux réseaux (non-isomorphes) Λ et M contiennent tous les deux un sous-réseau d'indice 2 isomorphe à un réseau N. Notons $m(\Lambda, M)_N$ le nombre de plongements distincts p_i de M dans $\Lambda \otimes \mathbf{R}$ tels que $p_i(M) \cap \Lambda$ soit isomorphe à N. Le réseau $N^\sharp$ contient trois sous-réseaux unimodulaires: Λ, M et un réseau R.

Si R est non-isomorphe à Λ et à M on voit que N se plonge de $|\mathrm{Aut}\Lambda|/|\mathrm{Aut}N|$ façons différentes dans Λ et on a donc $m(\Lambda, M)_N = |\mathrm{Aut}\Lambda|/|\mathrm{Aut}N|$ et de même $m(M, \Lambda)_N = |\mathrm{Aut}M|/|\mathrm{Aut}N|$. On en déduit qu'on a

$$\frac{m(\Lambda, M)_N}{|\mathrm{Aut}\Lambda|} = \frac{m(M, \Lambda)_N}{|\mathrm{Aut}M|} \quad .$$

Si R est isomorphe à Λ alors N se plonge de $|\mathrm{Aut}\Lambda|/(|\mathrm{Aut}N|/2)$ façons dans Λ. Pour chacune de ces copies le sur-réseau $N^\sharp$ de N contient une fois le réseau M (à isomorphisme près). On a donc $m(\Lambda, M)_N = 2|\mathrm{Aut}\Lambda|/|\mathrm{Aut}N|$. D'autre part, N se plonge de $|\mathrm{Aut}M|/|\mathrm{Aut}N|$ façons dans le réseau M et chaque plongement fournit 2 copies du réseau Λ ce qui donne $m(M, \Lambda)_N = 2|\mathrm{Aut}M|/|\mathrm{Aut}N|$. On obtient donc aussi

$$\frac{m(\Lambda, M)_N}{|\mathrm{Aut}\Lambda|} = \frac{m(M, \Lambda)_N}{|\mathrm{Aut}M|}$$

et la preuve de la proposition 2.2 se déduit en sommant sur tous les différents réseaux N possibles. QED

Proposition 2.3. *Soit Λ un réseau unimodulaire qui possède un vecteur e de norme 1. Soit N un sous-réseau d'indice 2 de Λ qui ne contient pas e. Supposons que $N^\sharp$ contienne trois réseaux entiers unimodulaires Λ, M et R. Alors M et R sont isomorphes.*

Preuve. La réflexion $x \longmapsto x - 2\langle e, x\rangle e$ est un automorphisme de $N^\sharp$ qui échange M et R. QED

3. Vecteurs caracteristiques

Soit Λ un réseau entier de type I. L'application $\lambda \longmapsto \langle \lambda, \lambda \rangle \pmod 2$ est $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ linéaire. Il existe donc une unique classe non-nulle $\overline{c}$ de $\Lambda^\sharp/2\Lambda^\sharp$ telle que $\langle \lambda, \lambda \rangle = \langle \lambda, c \rangle \pmod 2$ pour tout $\lambda \in \Lambda$ et pour tout $c \in \Lambda^\sharp$ représentant $\overline{c}$. Un représentant c de cette classe est un *vecteur caractéristique*. Sa norme est toujours congrue à la dimension $\pmod 8$ de Λ si Λ est unimodulaire.

Proposition 3.1. *Soit Λ un réseau unimodulaire de type I. Soit c un vecteur caractéristique de Λ et soit k la norme de c. Soit M un réseau voisin de type I sans vecteur de norme 1 du réseau $\mathbf{Z} + \Lambda$. Alors M possède un vecteur caractéristique de norme $k + 1$.*

Preuve. Notons e l'un des deux générateurs de $\mathbf{Z}$. Les 2 vecteurs $c \pm e$ sont vecteurs caractéristiques de $\mathbf{Z} + \Lambda$. Nous allons montrer que exactement un des deux vecteurs $c \pm e$ est aussi un vecteur caractéristique de M. En effet, comme M et $\mathbf{Z} + \Lambda$ sont voisins il existe $v \in \mathbf{Z} + \Lambda$, de norme divisible par 4, tel que

$$M = \{\mu \in \mathbf{Z} + \Lambda \mid \langle \mu, v \rangle \in 2\mathbf{Z}\} + \mathbf{Z}\frac{v}{2} \quad .$$

Les égalités $0 \equiv \langle v, v \rangle \equiv \langle v, c \pm e \rangle \pmod 2$ montrent que les vecteurs $c \pm e$ appartiennent aussi au réseau M. Par hypothèse, $e \notin M$ et on a donc $\langle e, v \rangle \equiv 1 \pmod 2$. Ceci montre que les entiers $\langle c + e, \frac{v}{2} \rangle$ et $\langle c - e, \frac{v}{2} \rangle$ n'ont pas la même parité et un des deux a donc la même parité que $\langle \frac{v}{2}, \frac{v}{2} \rangle$. Le vecteur $c \pm e$ correspondant est un vecteur caractéristique de M. QED

La proposition suivante décrit le vecteur caractéristique d'un réseau $k-$voisin de $\mathbf{Z}^n$ pour k impair.

Proposition 3.2. *Soit $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbf{Z}^n$ tel que $\langle v, v \rangle$ soit divisible par k^2 pour k un entier impair. Considérons le réseau*

$$\Lambda = \mathbf{Z}^n(\frac{v}{k}) = \{\lambda \in \mathbf{Z}^n \mid \langle \lambda, \frac{v}{k} \rangle \in \mathbf{Z}\} + \mathbf{Z}\frac{v}{k} \quad .$$

Alors $a = \frac{1}{k}(a_1, \ldots, a_n) \in \Lambda$ est un vecteur caractéristique de Λ si et seulement si $a_1 \equiv \ldots \equiv a_n \equiv 1 \pmod 2$.

Preuve. On vérifie aisément que les vecteurs dans Λ qui sont caractéristiques pour le sous-réseau $k\mathbf{Z}^n$ sont exactement de cette forme. Or $k\mathbf{Z}^n$ est d'indice impair dans Λ ce qui montre qu'un tel vecteur est aussi caractéristique pour Λ. QED

Soit c un vecteur caractéristique d'un réseau unimodulaire Λ de type I en dimension n. Le sous-réseau

$$\Lambda_e = \{\lambda \in \Lambda \mid \langle \lambda, c\rangle \equiv 0 \pmod 2\}$$

est un réseau pair appelé *sous-réseau pair* de Λ. Si la dimension n de Λ est divisible par 4 alors le réseau $\Lambda_e^\sharp$ contient trois réseaux unimodulaires: le réseau Λ et deux autres réseaux M et M' qui sont appelés les *voisins pairs* de Λ. Ils sont de type II si $n \equiv 0 \pmod 8$ et de type I si $n \equiv 4 \pmod 8$.

4. Séries θ

La série θ d'un réseau Λ est donnée par

$$\theta_\Lambda(q) = \sum_{\lambda \in \Lambda} q^{\langle \lambda, \lambda \rangle} \quad .$$

On a

Proposition 4.1. *(i) Soit Λ un réseau unimodulaire sans racine de dimension 27. Alors*

$$\theta_\Lambda(q) = 1 + 1640q^3 + 119\ 574q^4 + \dots$$

si Λ possède un vecteur caractéristique de norme 3 et

$$\theta_\Lambda(q) = 1 + 2664q^3 + 101\ 142q^4 + \dots$$

autrement. Dans le dernier cas Λ possède 1728 vecteurs caractéristiques de norme 11 dans Λ.

(ii) Soit Λ un réseau unimodulaire avec système de racine A_1 en dimension 27. Alors

$$\theta_\Lambda(q) = 1 + 2q^2 + 1652q^3 + 119\ 550q^4 + \dots$$

si Λ possède un vecteur caractéristique de norme 3 et

$$\theta_\Lambda(q) = 1 + 2q^2 + 2676q^3 + 101\ 118q^4 + \dots$$

autrement. Dans le dernier cas Λ possède 1744 vecteurs caractéristiques de norme 11 dans Λ.

(iii) Soit Λ un réseau entier unimodulaire sans racine de dimension 28. Alors

$$\theta_\Lambda(q) = 1 + 1728q^3 + 106\ 472q^4 + \dots$$

si Λ possède un vecteur charactéristique de norme 4 et

$$\theta_\Lambda(q) = 1 + 2240q^3 + 98\ 280q^4 + \dots$$

autrement. Dans le dernier cas Λ possède 4480 vecteurs caractéristiques de norme 12.

Preuve. Posons $q = e^{i\pi z}$ et introduisons les fonctions θ de Jacobi

$$\begin{aligned}
\theta_2(z) &= \textstyle\sum_{-\infty}^{\infty} q^{(m+1/2)^2} = 2q^{1/4}(1 + q^2 + q^6 + \dots) \\
\theta_3(z) &= \textstyle\sum_{-\infty}^{\infty} q^{m^2} = 1 + 2q + 2q^4 + \dots \\
\theta_4(z) &= \textstyle\sum_{-\infty}^{\infty} (-q)^{m^2} = 1 - 2q + 2q^4 + \dots
\end{aligned}$$

(voir **[CS]**, chapitre 4 paragraphe 4). On vérifie facilement les identités

$$\theta_2(z+1) = \sqrt{i}\ \theta_2(z),\ \ \theta_3(z+1) = \theta_4(z),\ \ \theta_4(z+1) = \theta_3(z) \quad .$$

Rappelons que la formule de Jacobi relie les séries θ d'un réseau Λ et de son réseau dual $\Lambda^\sharp$ par l'égalité

$$\theta_{\Lambda^\sharp}(z) = (\det \Lambda)^{1/2}(i/z)^{n/2}\theta_\Lambda(-1/z)$$

(voir formule 19 du paragraphe 4, chapitre 4 dans **[CS]**). En appliquant la formule de Jacobi aux séries $\theta_{\mathbf{Z}}(z) = \theta_3(z)$, $\theta_{2\mathbf{Z}}(z) = (\theta_3(z) + \theta_4(z)/2$ et $\theta_{\frac{1}{2}\mathbf{Z}}(z) = (\theta_3(z) + \theta_2(z))/2$ on démontre les égalités

$$\begin{aligned} \theta_2(-1/z) &= (z/i)^{1/2}\theta_4(z), \\ \theta_3(-1/z) &= (z/i)^{1/2}\theta_3(z), \\ \theta_4(-1/z) &= (z/i)^{1/2}\theta_2(z) \quad . \end{aligned}$$

La série θ de tout réseau entier unimodulaire en dimension n est de la forme

$$\theta_\Lambda(z) = \sum a_r \theta_3(z)^{n-8r}\Delta_8(z)^r$$

où $a_i \in \mathbf{Z}$ et

$$\Delta_8(z) = \frac{1}{16}\theta_2(z)^4\theta_4(z)^4 = q - 8q^2 + 28q^3 - 64q^4 + 126q^5 - 224q^6 + \ldots$$

(voir théorème 7 chapitre 7 dans **[CS]**). Soit maintenant Λ un réseau entier unimodulaire de dimension 27. Sa série θ est donc de la forme

$$\begin{aligned} \theta_\Lambda(z) = \ & a_{27}\theta_3(z)^{27} + a_{19}\theta_3(z)^{19}\Delta_8(z) + a_{11}\theta_3(z)^{11}\Delta_8(z)^2 + a_3\theta_3(z)^3\Delta_8(z)^3 \\ = \ & a_{27} + (a_{19} + 54a_{27})q + (a_{11} + 30a_{19} + 1404a_{27})q^2 \\ & +(a_3 + 6a_{11} + 408a_{19} + 23400a_{27})q^3 + (-18a_3 - 12a_{11} + 3280a_{19} + 280854a_{27})q^4 + \ldots \quad . \end{aligned}$$

La série θ du réseau $M = \Lambda + \mathbf{Z}$ est alors $\theta_M(z) = \theta_\Lambda(z)\theta_3(z)$. La série θ du sous-réseau paire M_e de M est donc donnée par

$$\begin{aligned} \theta_{M_e}(q) &= \tfrac{1}{2}(\theta_M(q) + \theta_M(-q)) \\ &= \tfrac{1}{2}(\theta_M(z) + \theta_M(z+1)) \\ &= a_{27} + (a_{11} + 32a_{19})q^2 + (-16a_3 + 4096a_{19} + 327656a_{27})q^4 + \ldots \quad . \end{aligned}$$

En appliquant la formule de Jacobi au sous-réseau pair M_e de M on obtient

$$\begin{aligned} \theta_{M_e^\sharp}(z) &= 4^{1/2}(i/z)^{14}\theta_M(-1/z) \\ &= a_{27} + (-\tfrac{a_3}{256} + a_{19} + 56a_{27})q + (a_{11} + 32a_{19} + 1512a_{27})q^2 \\ &\quad +(\tfrac{75}{64}a_3 + 24a_{11} + 468a_{19} + 26208a_{27})q^3 + \ldots \quad . \end{aligned}$$

Or $\theta_\Lambda(z)$ est de la forme $\theta_\Lambda(q) = 1 + 0q + 0q^2 + \ldots$ car Λ est un réseau entier unimodulaire sans racines (vecteurs de norme 1 ou 2). On obtient donc

$$a_{27} = 1, \quad a_{19} = -54, \quad a_{11} = 216 \quad .$$

Il reste à déterminer a_3. Le réseau $M_e^\sharp$ n'est pas entier mais il est réunion de trois réseaux entiers ayant M_e comme sous-réseau pair en commun (cf. fin de la section 3). Comme un de ces réseaux est $\Lambda + \mathbf{Z}$, la proposition 2.3 montre que les deux autres sont isomorphes. Aucun de ces trois réseaux ne contient un élément de norme 2. Ceci implique que chacun de ces trois réseaux contient au plus une seule paire de vecteurs de norme 1.

Si un seul de ces trois réseaux contient un vecteur de norme 1, la série θ de $M_e^\sharp$ est de la forme $\theta_{M_e^\sharp}(q) = 1+2q+6120q^3+106472q^4+\ldots$ et on obtient $a_3 = 0$. Si deux au moins de ces trois réseaux possèdent un vecteur de norme 1, alors le troisième en possède aussi et on a $\theta_{M_e^\sharp}(q) = 1 + 6q + 4920q^3 + 122856q^4 + \ldots$ ce qui donne $a_3 = -1024$.

Dans ce dernier cas les trois réseaux sont isomorphes et possèdent un vecteur caractéristique de norme 3 obtenu en considérant la projection dans $\Lambda \otimes \mathbf{R}$ de $2r$ où r est un vecteur de norme 1 dans $M_e^\sharp$ qui n'appartient pas à Λ. Ce dernier cas sera appelé le cas exceptionnel.

Les preuves de (ii) et (iii) sont semblables et laissées au lecteur. QED

Remarque 4.2. Un réseau Λ unimodulaire exceptionnel (ayant un vecteur caractéristique de norme 4) sans vecteur de norme 1 en dimension 28 est toujours un voisin pair d'un réseau de la forme $M+\mathbf{Z}$ où M est un réseau unimodulaire de dimension 27. De plus, Λ et M ont les mêmes vecteurs de norme 2. Classer les réseaux entiers unimodulaires exceptionels (i.e. admettant un vecteur caractéristique de norme 4) sans racine en dimension 28 revient donc à classer les réseaux entiers unimodulaires non-exceptionnels sans racine en dimension 27.

5. Formes modulaires à coefficients harmoniques

Théorème 5.1. *Soit $\Lambda\subset\mathbf{E}^{32}$ un réseau entier unimodulaire paire. Notons $Y=\{\lambda\in\Lambda\mid\langle\lambda,\lambda\rangle=2\}$ l'ensemble des racines de Λ et $X=\{\lambda\in\Lambda\mid\langle\lambda,\lambda\rangle=4\}$ l'ensemble des vecteurs de norme 4 de Λ. Alors on a les 4 identités suivantes:*

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{x\in X}\langle x,\alpha\rangle^2 = {} & -2^4\cdot3\cdot11\textstyle\sum_{y\in Y}\langle y,\alpha\rangle^2+2^2\cdot3\cdot5\langle\alpha,\alpha\rangle u_2+2^3\cdot3^3\cdot5\cdot17\langle\alpha,\alpha\rangle\ ,\\
\textstyle\sum_{x\in X}\langle x,\alpha\rangle^4 = {} & 2^3\cdot3\cdot19\textstyle\sum_{y\in Y}\langle y,\alpha\rangle^4-2^3\cdot3^2\cdot7\langle\alpha,\alpha\rangle\sum_{y\in Y}\langle y,\alpha\rangle^2\\
& +2^2\cdot3^2\langle\alpha,\alpha\rangle^2u_2+2^4\cdot3^4\cdot5\langle\alpha,\alpha\rangle^2\ ,\\
\textstyle\sum_{x\in X}\langle x,\alpha\rangle^6 = {} & -2^5\cdot3^2\textstyle\sum_{y\in Y}\langle y,\alpha\rangle^6+2^2\cdot3^2\cdot5^2\langle\alpha,\alpha\rangle\sum_{y\in Y}\langle y,\alpha\rangle^4\\
& -2^2\cdot3^3\cdot5\langle\alpha,\alpha\rangle^2\textstyle\sum_{y\in Y}\langle y,\alpha\rangle^2+2\cdot3\cdot5\langle\alpha,\alpha\rangle^3u_2+2^4\cdot3^2\cdot5^2\langle\alpha,\alpha\rangle^3\ ,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\textstyle\sum_{x\in X}\langle x,\alpha\rangle^{10}-\frac{15}{4}\langle\alpha,\alpha\rangle\sum_{x\in X}\langle x,\alpha\rangle^8=\\
&\quad-2^4\cdot3\textstyle\sum_{y\in Y}\langle y,\alpha\rangle^{10}+2\cdot3^2\cdot5\langle\alpha,\alpha\rangle\sum_{y\in Y}\langle y,\alpha\rangle^8\\
&\quad+2^2\cdot3^2\cdot5\ 7\langle\alpha,\alpha\rangle^2\textstyle\sum_{y\in Y}\langle y,\alpha\rangle^6-2\cdot3^2\cdot5^2\cdot7\langle\alpha,\alpha\rangle^3\sum_{y\in Y}\langle y,\alpha\rangle^4\\
&\quad+3^2\cdot5^2\cdot7\langle\alpha,\alpha\rangle^4\textstyle\sum_{y\in Y}\langle y,\alpha\rangle^2-\frac{3^2\cdot5\cdot7}{2^2}\langle\alpha,\alpha\rangle^5u_2-2^3\cdot3^3\cdot5\cdot7\langle\alpha,\alpha\rangle^5\quad.
\end{aligned}$$

Ce théorème est démontré dans **[V]** comme conséquence du fait que $\sum_{\lambda\in\Lambda}P(\lambda)q^{\langle q,q\rangle}$ est une forme modulaire de poids $n/2+\nu$ pour P un polynôme harmonique homogène de degré ν et $\Lambda\subset\mathbf{E}^n$ un réseau unimodulaire. Ce théorème contient énormément d'informations sur les réseaux entiers unimodulaires de dimension au plus 32. Ainsi la proposition suivante rassemble quelque faits utiles pour la suite.

Proposition 5.2. *(i) Soit M un réseau unimodulaire sans racine en dimension 27 qui ne contient pas de vecteur caractéristique de norme 3. Choisissons un élément $\alpha\in M_3$ de norme 3 et définissons des entiers n_i par*

$$n_i=|\{\lambda\in M_3\mid\langle\lambda,\alpha\rangle=i\}|\quad.$$

Alors on a

$$n_{\pm3}=1,\quad n_{\pm1}=435,\quad n_0=1792,\quad n_i=0\ \text{sinon.}$$

(ii) Soit M un réseau unimodulaire sans racine en dimension 28 qui ne contient pas de vecteur caractéristique de norme 4. Définissons des entiers n_i comme ci-dessus. Alors on a

$$n_{\pm3}=1,\quad n_{\pm1}=351,\quad n_0=1536,\quad n_i=0\ \text{sinon.}$$

(iii) Soit M un réseau unimodulaire avec système de racine A_1 en dimension 27 qui ne contient pas de vecteur caractéristique de norme 3. Pour ρ une racine de M on définit des entiers m_i par

$$m_i=|\{\lambda\in M_4\mid\langle\lambda,\rho\rangle=i\}|\quad.$$

Alors on a

$$m_{\pm1}=14472,\quad m_0=,\quad m_i=0\ \text{sinon.}$$

(iv) Il n'existe pas de réseau unimodulaire exceptionnel (ayant un vecteur caractéristique de norme 3) avec système de racine A_1 en dimension 27.

Preuve. (i) Appliquons le théorème 5.1 au voisin pair Λ de $M+\mathbf{Z}^5$. Notons $e_1,\dots,e_5$ les éléments de la base standard de $\mathbf{Z}^5$. Les vecteurs caractéristiques les plus courts de $M+\mathbf{Z}^5$ sont de la forme $c\pm e_1\pm e_2\pm e_3\pm e_4\pm e_5$ pour c vecteur caractéristique de norme 11 dans M. Les vecteurs caractéristiques les plus courts de $M+\mathbf{Z}^5$ sont donc de norme 16. Ceci montre que l'ensemble Y des racines de Λ appartient déjà à $M+\mathbf{Z}^5$. On vérifie que toutes les racines $M+\mathbf{Z}^5$ sont orthogonales à M et qu'on a $Y=D_5$, $u_2=|Y|=40$.

La projection π dans $M\otimes\mathbf{R}$ d'un élément de Λ appartient à $M_e^\sharp$. Fixons donc $\alpha\in M$ de norme 3 et introduisons les entiers

$$\begin{aligned} m_i &= \{\lambda\in X \mid \pi(\lambda)\in M_4 \text{ et } \langle\lambda,\alpha\rangle=i\}\ , \\ l_i &= \{\lambda\in X \mid \pi(\lambda)\in M_3 \text{ et } \langle\lambda,\alpha\rangle=i\}\ , \\ r_i &= \{\lambda\in X \mid \pi(\lambda)\in (M_e^\sharp)_{11/4} \text{ et } \langle\lambda,\alpha\rangle=i\} \quad . \end{aligned}$$

On a $m_i=0$ si $i\notin\{0,\pm1,\pm2\}$, $l_i=0$ si $i\notin\{0,\pm1,\pm3\}$ (car M est sans racine) et $r_i=0$ si $i\notin\{\pm1/2,\pm3/2\}$ (car les vecteurs les plus courts de $M_e^\sharp$ sont de norme 11/4).

Les égalités évidentes $m_i=m_{-i}$, $l_i=l_{-i}$ et $r_{-i}=r_i$ permettent d'éliminer toutes les inconnues avec des indices strictement négatifs.

Pour $\mu\in M_3$, les vecteurs $\mu\pm e_i$ appartiennent à Λ pour $j=1,\dots,5$ et tous les éléments de $X=\Lambda_4$ qui se projettent par π sur des éléments de norme 3 de M sont de cette forme. On a donc $l_{\pm3}=10$ et $l_3+l_{-3}+l_1+l_{-1}+l_0=2l_3+2l_1+l_0=2664\cdot 10$ car la proposition 4.1 (i) montre que $\theta_M=1+2664q^3+101142q^4+\dots$.

Tout élément μ de norme 11/4 dans $M_e^\sharp$ se relève exactement de 16 façons en un élément de la forme $\mu+\frac{1}{2}(\pm e_1\pm e_2\pm e_3\pm e_4\pm e_5)$ de Λ. On a donc aussi $2r_{3/2}+2r_{1/2}=16\cdot1728$ (les vecteurs de norme 11/4 de $M_e^\sharp$ sont en bijection avec les 1728 vecteurs caractéristiques de norme 11 dans M).

L'application $\lambda\longmapsto\alpha-\lambda$ montre que les éléments λ de norme 4 dans Λ qui satisfont $\langle\lambda,\alpha\rangle=2$ sont en bijection avec les éléments μ de norme 3 dans Λ tels que $\langle\mu,\alpha\rangle=1$. Cette bijection démontre l'identité $10m_2=l_1$. Finalement on a aussi $2m_2+2m_1+m_0=101142$.

La première équation du théorème 5.1 s'écrit

$$\begin{aligned} &4(m_2+m_{-2})+(m_1+m_{-1})+9(l_3+l_{-3})+(l_1+l_{-1})+\tfrac{9}{4}(r_{3/2}+r_{-3/2})+\tfrac{1}{4}(r_{1/2}+r_{-1/2}) \\ &\quad=60\cdot3\cdot40+18360\cdot17\cdot3 \end{aligned}$$

ce qui donne après élimination des variables à indices négatifs et multiplication par 2

$$16m_2+4m_1+36l_3+4l_1+9r_{3/2}+r_{1/2}=124560 \quad .$$

En considérant deux équations supplémentaires dans le théorème 5.1 on obtient le système linéaire suivant

$$\begin{pmatrix} 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&2&2&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&1\\ 10&0&0&0&-1&0&0&0\\ 2&2&1&0&0&0&0&0\\ 16&4&0&36&4&0&9&1\\ 256&16&0&1296&16&0&81&1\\ 4096&64&0&46656&64&0&729&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_2\\ m_1\\ m_0\\ l_3\\ l_1\\ l_0\\ r_{3/2}\\ r_{1/2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\ 26640\\ 13824\\ 0\\ 101142\\ 124560\\ 570240\\ 4147200\end{pmatrix}$$

dont

$$m_2=435,\ m_1=20736,\ m_0=58800,\ l_3=10,\ l_1=4350,\ l_0=17920,\ r_{3/2}=13440,\ r_{1/2}=384$$

est l'unique solution. Le fait que chaque vecteur de norme 3 dans M se relève de dix façons en un vecteur de $X=\Lambda_4$ montre que les nombres n_i de la proposition satisfont $10n_i=l_i$ ce qui termine la preuve de (i).

(ii) La preuve est analogue à la preuve de (i). On applique donc le théorème 5.1 au voisin pair Λ de $M+\mathbf{Z}^4$. On a $u_2=|Y|=24$ et tous les éléments de Y sont orthogonaux à α. La projection π dans $M\otimes\mathbf{R}$ d'un élément de Λ appartient à $M_e^\sharp$. Fixons donc $\alpha\in M$ de norme 3 et introduisons les entiers

$$\begin{aligned} m_i &= \{\lambda\in X \mid \pi(\lambda)\in M_4 \text{ et } \langle\lambda,\alpha\rangle=i\}\ , \\ l_i &= \{\lambda\in X \mid \pi(\lambda)\in (M_e^\sharp)_3 \text{ et } \langle\lambda,\alpha\rangle=i\} \quad . \end{aligned}$$

Un raisonnement analogue à la preuve de (i) montre que les inconnues m_i et l_i satisfont le système d'équations linéaires

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & 4 & 0 & 36 & 9 & 4 & 1 & 0 \\ 256 & 16 & 0 & 1296 & 81 & 16 & 1 & 0 \\ 4096 & 64 & 0 & 46656 & 729 & 64 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_2 \\ m_1 \\ m_0 \\ l_3 \\ l_{3/2} \\ l_1 \\ l_{1/2} \\ l_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 17920 \\ 17920 \\ 0 \\ 98280 \\ 118800 \\ 528768 \\ 3732480 \end{pmatrix}$$

qui admet

$$m_2 = 351,\ m_1 = 19656,\ m_0 = 58266, l_3 = 8,\ l_{3/2} = 640,\ l_1 = 2808,\ l_{1/2} = 17280,\ l_0 = 12288$$

comme unique solution.

(iii) Considérons comme dans la preuve de (i) et (ii) un voisin pair Λ de $M + \mathbf{Z}^5$. Le système de racine de Λ est donné par $Y = D_5 + A_1$ et on a donc $u_2 = |Y| = 42$. Introduisons les entiers

$$\begin{aligned} m_i &= \{\lambda \in X \mid \pi(\lambda) \in M_4 \text{ et } \langle \lambda, \rho \rangle = i\}\ , \\ l_i &= \{\lambda \in X \mid \pi(\lambda) \in M_3 \text{ et } \langle \lambda, \rho \rangle = i\}\ , \\ r_i &= \{\lambda \in X \mid \pi(\lambda) \in (M_e^\sharp)_{11/4} \text{ et } \langle \lambda, \rho \rangle = i\}\ , \\ s_i &= \{\lambda \in X \mid \pi(\lambda) \in M_2 = \{\pm\rho\} \text{ et } \langle \lambda, \rho \rangle = i\} \end{aligned}$$

où π désigne la projection orthogonale sur $M \otimes \mathbf{R}$. On a $m_i = 0,\ l_i = 0,\ r_i = 0$ si $i \notin \{0, \pm 1\}$, et $s_i = 0$ si $i \notin \{\pm 2\}$ et on vérifie facilement que $s_2 = s_{-2} = 40$ (un élément de X qui se projette sur ρ est de la forme $\rho \pm e_i \pm e_j$). La proposition 4.1 montre qu'on a $m_0 + 2m_1 = 101118$, $l_0 + 2l_1 = 2676 \cdot 10$, $r_0 + 2r_1 = 1744 \cdot 16$.

La première équation du théorème 5.1 donne avec $\alpha = \rho$

$$2m_1 + 2l_1 + 2r_1 + 2 \cdot 4 s_2 = -528 \cdot 2 \cdot 4 + 60 \cdot 2 \cdot 42 + 18360 \cdot 2 = 37536 \quad .$$

Considérons maintenant α comme variable dans $M \otimes \mathbf{R}$ et appliquons le laplacien Δ_α à la deuxième équation du théorème 5.1. L'identité

$$\Delta_\alpha(\langle \alpha, \alpha \rangle^k \langle x, \alpha \rangle^{2l}) = 2k(27 + 2(k-1+2l))\langle \alpha, \alpha \rangle^{k-1} \langle x, \alpha \rangle^{2l} + 2l(2l-1)\langle \alpha, \alpha \rangle^k \langle x, \alpha \rangle^{2l-2} \langle \pi(x), \pi(x) \rangle$$

montre qu'on obtient

$$\begin{aligned} &\textstyle\sum_{x \in X} \langle x, \alpha \rangle^2 \langle \pi(x), \pi(x) \rangle = 456 \cdot 12 \sum_{y \in Y} \langle y, \alpha \rangle^2 \langle \pi(y), \pi(y) \rangle \\ &\quad -504 \big(62 \textstyle\sum_{y \in Y} \langle \alpha, y \rangle^2 + 2\langle \alpha, \alpha \rangle \sum_{y \in Y} \langle \pi(y), \pi(y) \rangle\big) + 36 \cdot 116 \langle \alpha, \alpha \rangle \cdot u_2 + 6480 \cdot 116 \langle \alpha, \alpha \rangle \end{aligned}$$

ce qui donne avec $\alpha = \rho$ l'équation

$$24(4m_1 + 3l_1 + \frac{11}{4} r_1 + 8s_2) = 1683684 \quad .$$

De la même manière, en appliquant deux fois le laplacien Δ_α à la troisième équation du théorème 5.1, on obtient

$$720(16m_1 + 9l_1 + \frac{121}{16} r_1 + 16 s_2) = 192058560$$

et le système linéaire

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 8 \\ 96 & 0 & 72 & 0 & 66 & 0 & 192 \\ 11520 & 0 & 6480 & 0 & 5445 & 0 & 11520 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_0 \\ l_1 \\ l_0 \\ r_1 \\ r_0 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 101118 \\ 26760 \\ 27904 \\ 37536 \\ 1683684 \\ 192058560 \end{pmatrix}$$

admet

$$m_1 = 14472 \ , m_0 = 72174 \ , l_1 = 2280 \ , l_0 = 22200 \ , r_1 = 1856 \ , r_0 = 24192 \ , s_2 = 40$$

comme unique solution.

(iv) Supposons qu'un tel réseau M existe. Considérons alors le voisin pair Λ de $M + \mathbf{Z}^5$. Soit c un vecteur caractéristique de norme 3 et ρ une racine de M. Le réseau Λ contient 74 racines: 40 sont de la forme $\pm e_i \pm e_j$, 32 sont de la forme $\frac{1}{2}(\pm c \pm e_1 + \cdots \pm e_5)$, les deux racines restantes sont $\pm\rho$. Introduisons les entiers m_i, l_i, r_i et s_i comme dans la preuve de (iii). Les deux premières équations du théorème 5.1 s'écrivent

$$2(m_1 + l_1 + r_1 + 4s_2) = -528 \cdot 2 \cdot 4 + 60 \cdot 2 \cdot 74 + 18360 \cdot 2 = 413760$$

$$2(m_1 + l_1 + r_1 + 16s_2) = 456 \cdot 2 \cdot 16 - 504 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 + +36 \cdot 4 \cdot 74 + 6480 \cdot 4 = 42816$$

Or $s_2 = 40$ et ces deux équations n'admettent aucune solution. QED

6. Classification des réseaux entiers unimodulaires avec système de racine kA_1 en dimension 26.

On aimerait classer les réseaux entiers unimodulaires Λ en dimension 26 dont le système de racine est kA_1, i.e. dont toutes les racines sont de norme 2 et dont les paires de racines sont mutuellement orthogonales.

Un résultat de Borcherds montre que le nombre de racines dans un réseau unimodulaire en dimension 26 est un multiple 4 ce qui implique que k est pair. Borcherds a en outre démontré qu'il existe un unique réseau unimodulaire sans racine en dimension 26. Nous supposerons donc dorénavant qu'un tel réseau Λ possède au moins deux racines orthogonales r et s. Considérons le réseau voisin

$$\Lambda(\frac{r+s}{2}) = \{\lambda \in \Lambda \mid \langle \lambda, r+s \rangle \in 2\mathbf{Z}\} + \mathbf{Z}\frac{r+s}{2} \quad .$$

Les 4 vecteurs $\frac{\pm r \pm s}{2}$ sont les seuls éléments de norme 1 dans $\Lambda(\frac{r+s}{2})$. Le réseau $\Lambda(\frac{r+s}{2})$ est donc de la forme $M + \mathbf{Z}^2$ où M est un réseau entier unimodulaire de dimension 24 sans vecteur de norme 1. Supposons M de type II (un exercice montre que c'est par exemple le cas si la racine r ou s est un vecteur caractéristique de Λ). Notre réseau Λ est donc un voisin du réseau $(M + \mathbf{Z}) + \mathbf{Z}$ et $M + \mathbf{Z}$ possède un vecteur caractéristique de norme 1. Il s'ensuit de la proposition 3.1 que Λ possède un vecteur caractéristique c de norme 2. Le sous-réseau orthogonal à c est un réseau pair de déterminant 2 en dimension 25. De tels réseaux ont été classés par Borcherds (cf. table -2 dans **[Bo]**). En parcourant la liste de Borcherds on voit qu'il n'existe qu'un unique tel réseau Λ. C'est le réseau $R_{26,7e}(A_1^{10})$ de la table 3. Son système de racine est $10A_1$.

Soit maintenant Λ un réseau non-exceptionnel (sans racine caractéristique) ayant au moins 2 racines orthogonales. On a donc $\Lambda(\frac{r+s}{2}) = M + \mathbf{Z}^2$ avec M unimodulaire de type I en dimension 24.

On dira que le système de racine R contient le système de racine R' s'il existe une isométrie φ de $R' \otimes \mathbf{R}$ dans $R \otimes \mathbf{R}$ tel que $\varphi(R') \subset R$. Ainsi on a par exemple $A_i \subset A_j$ pour $i \leq j$, $A_i \subset D_j$ pour $i < j$ et $A_5,\ D_5 \subset E_6$.

Proposition 6.1. *Le système de racine de M ne contient pas de A_4.*

Preuve. Supposons que le réseau M contient A_4 dans son système de racine. Notons L le sous-réseau engendré par les racines de A_4. Comme $M + \mathbf{Z}^2$ et Λ sont voisins il existe $v \in M + \mathbf{Z}^2$ tel que

$$\Lambda = \{\mu \in M + \mathbf{Z}^2 \mid \langle \mu, v \rangle \in 2\mathbf{Z}\} + \mathbf{Z}\frac{v}{2} \quad .$$

Or deux racines r et r' de Λ sont mutuellement orthogonales (sauf si $r' = \pm r$). Le vecteur v se projette donc sur un élément $\tilde{v}$ du réseau dual $L^\sharp$ de L tel que le sous-ensemble des racines de L défini par

$$\{r \in L_2 \mid \langle r, \tilde{v} \rangle \in 2\mathbf{Z}\}$$

est constitué de paires de racines mutuellement orthogonales. Une petite vérification montre qu'un tel vecteur $\tilde{v}$ n'existe pas dans $L^\sharp$. QED

Classification. Soit L_k une liste de réseaux non-isomorphes, unimodulaires avec système de racine kA_1 en dimension 26. On peut supposer $k \geq 2$ car $k = 0$ a été fait par Borcherds et $k = 1$ est impossible par un résultat de Borcherds. On peut aussi supposer connu les réseaux exceptionnels (ayant un vecteur caractéristique de norme 2). De ce qui précède, un réseau non-exceptionnel $\Lambda \in L_k$ possède $k(k-1)/2$ voisins de la forme $M + \mathbf{Z}^2$ obtenus en considérant $\Lambda(\frac{r+s}{2})$ pour r et s deux racines orthogonales de Λ. Le réseau M est unimodulaire de type I et son système de racine ne contient pas de A_4. Pour $\Lambda \in L_k$ et M unimodulaire en dimension 24 notons $m(\Lambda, M + \mathbf{Z^2})$ le nombre d'arêtes de Λ vers $M + \mathbf{Z}^2$ dans le graphe des voisins. Désignons par $m(M + \mathbf{Z}^2, kA_1)$ le nombre d'arêtes de $M + \mathbf{Z}^2$ vers des réseaux unimodulaires avec système de racine kA_1 (on écrira $m(M + \mathbf{Z}^2, \emptyset)$ à la place de $m(M + \mathbf{Z}^2, 0A_1)$). La proposition 2.2 montre qu'on a

$$\sum_{\Lambda \in L_k} \frac{m(\Lambda, M + \mathbf{Z}^2)}{|\mathrm{Aut}\Lambda|} \leq \frac{m(M + \mathbf{Z}^2, kA_1)}{8 \cdot |\mathrm{Aut}M|}$$

avec égalité si et seulement si la liste L_k est complète (le facteur 8 provient du fait que $\mathrm{Aut}(M + \mathbf{Z}^2) = \mathrm{Aut}(M)\mathrm{Aut}(\mathbf{Z}^2)$ car M est sans vecteur de norme 1). La liste de tous les réseaux unimodulaires en dimension 24 qui ne contiennent pas A_4 est connue grâce à la classification des réseaux unimodulaires en dimension 24. La table 1 contient cette liste ainsi que les nombres $m(M + \mathbf{Z}^2, kA_1)$ et l'ordre de $\mathrm{Aut}(M)$. Pour construire la liste L_k on cherche donc des éléments dans L_k jusqu'à avoir égalité pour tous les réseaux M de la table 1.

Exemple 6.2. Montrons qu'il n'existe qu'un seul réseau unimodulaire avec système de racine $4A_1$ en dimension 26.

La table 3 contient en effet un tel réseau. Son groupe d'automorphismes est d'ordre 92160. Les voisins de la forme $M + \mathbf{Z}^2$ de ce réseau sont 2 fois le réseau $R_{24,2} + \mathbf{Z}^2$ et 4 fois le réseau $R_{24,3} + \mathbf{Z}^2$ où $R_{24,i}$ désigne un réseau dans la table 1. Les données des tables 1 et 3 permettent de montrer les égalités requises pour les deux réseaux $R_{24,2}$ et $R_{24,3}$. Un inspection de la table 1 montre que $m(M + \mathbf{Z}^2, 2A_1) = 0$ pour tous les autres réseaux de la table 1. Ceci termine la preuve.

Tous les autres cas se traitent de la même manière.

Remarque 6.3. (i) Pour simplifier nous avons seulement calculé les systèmes de racine des réseaux M apparaissant ci-dessus. Ceci explique pourqoui la table 3 ne contient par exemple que la valeur de $m(\Lambda, R_{26,14} + \mathbf{Z}^2) + m(\Lambda, R_{26,15} + \mathbf{Z}^2)$ et non les valeurs individuelles car les réseaux $R_{26,14}$ et $R_{26,15}$ ont même système de racine. Ceci est aussi vrai pour les réseaux $R_{26,26}$ et $R_{26,30}$. La classification ne souffre pas de ce procédé comme on voit en sommant sur les inégalités correspondantes à ces différents réseaux.

(ii) Le réseau $R_{26,7e}(10A_1)$ possède des voisins de la forme $M + \mathbf{Z}^2$ où M est l'unique réseau de Niemaier (réseau unimodulaire pair en dimension 24) avec système de racine $24A_1$. Dans la table 3 nous dénotons ce réseau par la lettre ψ.

7. Classification des réseaux unimodulaires sans racine en dimension 27.

Proposition 7.1. *Soit Λ et M deux réseaux voisins. Il existe donc $v \in \Lambda$ de norme divisible par 4 tel que M soit donné (à isomorphisme près) par*

$$M = \Lambda(\frac{v}{2}) = \{\lambda \in \Lambda \mid \langle \lambda, v \rangle \in 2\mathbf{Z}\} + \mathbf{Z}\frac{v}{2} \quad .$$

Supposons $\Lambda_1 \cap M_1 = \emptyset$ et $\Lambda_2 \cap M_2 = \emptyset$, i.e. Λ et M sont sans racine commune. Alors Λ et M ne possèdent que des paires de racine orthogonales. De plus, ils possèdent au plus une seule paire de vecteurs de norme 1.

Preuve. Il suffit de démontrer la proposition pour Λ. Soit $r \neq \pm s$ deux racines de Λ. Comme $r, s \in M$ on doit avoir $\langle r, v \rangle \equiv \langle s, v \rangle \equiv 1 \pmod 2$. Les vecteurs $r + s$ et $r - s$ appartiennent donc à M et au moins un des deux est une racine si r et s ne sont pas orthogonales ou si les deux sont de norme 1. QED

Soit Λ un réseau unimodulaire sans racine. Notons $m(\Lambda, kA_1 + \mathbf{Z})$ le nombre d'arêtes de Λ vers un réseau $M + \mathbf{Z}$ où M a système de racine kA_1 et considérons le polynôme

$$n_4(a) = \sum_k m(\Lambda, kA_1 + \mathbf{Z})a^k \quad .$$

Pour $\lambda \in \Lambda_4$ considérons l'ensemble $R(\lambda)$ défini par

$$R(\lambda) = \{\mu \in \Lambda_3 \mid \langle \mu, \lambda \rangle = 2\} \quad .$$

Le système de racine du réseau M où $M + \mathbf{Z} = \Lambda(\frac{\lambda}{2})$ est obtenu par projection orthogonale de $R(\lambda)$ dans $M \otimes \mathbf{R}$. On a donc aussi

$$n_4(a) = \frac{1}{2} \sum_{\lambda \in \Lambda_4} a^{|R(\lambda)|/2} \quad .$$

En particulier, les nombres $m(\Lambda, kA_1 + \mathbf{Z})$ sont facilement calculables.

Proposition 7.2. *Soit Λ un réseau entier unimodulaire sans racine en dimension 27. Alors il existe un vecteur λ de norme 4 dans Λ tel que l'ensemble*

$$R(\lambda) = \{\mu \in \Lambda_3 \mid \langle \mu, \lambda \rangle = 2\}$$

contient au plus 10 *éléments.*

Preuve. Supposons d'abord Λ non-exceptionnel. La série θ de Λ est $\theta_\Lambda = 1 + 2664q^3 + 101142q^4 + \ldots$ (cf. proposition 4.1 (i)).

Pour $\lambda \in \Lambda_4$ notons $R(\lambda)$ l'ensemble R défini ci-dessus. La cardinalité de $R(\lambda)$ est toujours paire car l'application $x \longrightarrow \lambda - x$ définit une involution sans point fixe de $R(\lambda)$. Cette involution montre aussi que $R(\lambda)$ est constitué de paires $\mu_1, \mu_2 \in \Lambda_3$ qui vérifient $\langle \mu_1, \mu_2 \rangle = -1,\ \mu_1 + \mu_2 = \lambda$.

La proposition 5.2 (i) montre que chaque $\mu \in \Lambda_3$ appartient exactement à 435 ensembles $R(\lambda)$ distincts car pour $\mu \in \Lambda_3$ donné il existe exactement 435 vecteurs $\lambda \in \Lambda_3$ tels que $\langle \mu, \lambda \rangle = -1$. On a donc

$$\sum_{\lambda \in M_4} |R(\lambda)| = 435 \cdot 2664 \quad .$$

Comme $|\Lambda_4| = 101142$ on voit que la moyenne des $R(\lambda)$ est égale à $11,46\ldots$.

Si Λ est exceptionnel la proposition 4.1 montre que la série θ de Λ est $1 + 1640q^3 + 119574q^4 + \ldots$. Pour $\mu \in \Lambda_3$ il existe donc au plus $(1640 - 2)/2 = 819$ vecteurs μ' de norme 3 tels que $\langle \mu, \mu' \rangle = -1$ (l'égalité est atteinte pour μ un vecteur caractéristique). On a donc

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} |R(\lambda)| \leq 1640 \cdot 819$$

et la moyenne arithmétique des $R(\lambda)$ est majorée par $1640 \cdot 819/1343160 < 12$. QED

Classification. Soit L une liste de réseaux unimodulaires non-isomorphes sans racine en dimension 27. Notons $m(\Lambda, kA_1 + \mathbf{Z})$ le nombre d'arêtes de Λ vers un voisin de la forme $M + \mathbf{Z}$ où M est un réseau avec système de racine kA_1. Pour M un réseau en dimension 26 notons $m(M + \mathbf{Z}, \emptyset)$ le nombre d'arêtes de $M + \mathbf{Z}$ vers un réseau sans racine en dimension 27. Notons S_k l'ensemble des réseaux unimodulaires avec système de racine kA_1 en dimension 26. La proposition 2.2 implique alors que

$$\sum_{\Lambda \in L} \frac{m(\Lambda, kA_1 + \mathbf{Z})}{|\mathrm{Aut}\Lambda|} \leq \sum_{M \in S_k} \frac{m(M + \mathbf{Z}, \emptyset)}{2 \cdot |\mathrm{Aut}M|}$$

avec égalité pour tout k si et seulement si la liste L est complète. Or la proposition 7.2 montre que la liste L est déjà complète si on a égalité pour $k \leq 5$ et comme k est un entier pair (cf. un résultat de Borcherds cité dans la section 6) il suffit d'avoir égalité pour $k = 0, 2$ et 4.

Exemple 7.3. Soit L la liste des trois réseaux unimodulaire sans racine données au début de la table 4. Vérifions l'égalité pour $k = 0$. La table 4 montre que le côté gauche dans l'inégalité est égal à

$$\frac{384}{7680} + 0 + 0 = \frac{1}{20} \quad .$$

L'ensemble S_0 ne contient que le réseau $R_{26,1}(\emptyset)$ de la table 3. On a $m(R_{26,1}(\emptyset)+\mathbf{Z},\emptyset) = 1872000$.

Le côté droit de l'inégalité est égal à

$$\frac{1872000}{2 \cdot 18720000} = \frac{1}{20}$$

et on a donc égalité pour $k = 0$. Les cas restants se démontrent de la même manière.

8. Classification des réseaux unimodulaires avec système de racine A_1 en dimension 27.

Soit Λ un réseau unimodulaire en dimension 27 avec système de racine A_1. La proposition 5.2 (iv) montre que Λ n'est pas exceptionnel. Soit r une racine de Λ. La proposition 5.2 (iii) montre qu'il existe 14472 vecteurs $\lambda \in \Lambda_4$ tels que $\langle r, \lambda\rangle = 1$. Soit donc $\lambda \in \Lambda_4$ un tel vecteur. Les hypothèses de la proposition 7.1 sont vérifiées pour la paire de réseaux voisins Λ et $\Lambda(\frac{\lambda}{2}) = \{\mu \in \Lambda \mid \langle \mu, \lambda\rangle \equiv 0 \pmod 2\} + \mathbf{Z}\frac{\lambda}{2}$. Le réseau $\Lambda(\frac{\lambda}{2})$ est donc de la forme $M + \mathbf{Z}$ où M est un réseau unimodulaire avec système de racine kA_1 en dimension 26. Pour N un réseau avec système de racine kA_1 en dimension 26 dénotons par $m(\Lambda, N + \mathbf{Z})$ le nombre d'arêtes dans le graphe des voisins qui relient le réseau Λ à $N + \mathbf{Z}$. Ces arêtes correspondent à des plongements de $N+\mathbf{Z}$ dans $\Lambda\otimes\mathbf{R}$ tels que $(N+\mathbf{Z})\cap\Lambda$ est d'indice 2 dans Λ. Dénotons par $m(\Lambda, N+\mathbf{Z}|\cap_2 = \emptyset)$ le nombre de tels plongements qui satisfont en outre la condition $\Lambda_2 \cap (N + \mathbf{Z})_2 = \emptyset$. On peut alors définir les nombres $m(\Lambda, kA_1 + \mathbf{Z}|\cap_2 = \emptyset)$ et $m(M + \mathbf{Z}, A_1|\cap_2 = \emptyset)$ de la même manière qu'aux sections précédentes en y incluant la condition que les réseaux plongés correspondants sont sans racine commune.

Soit maintenant L une liste de réseaux unimodulaires avec système de racine A_1 en dimension 27. Dénotons par S_k la liste complète des réseaux unimodulaires avec système de racine kA_1 en dimension 26. D'après la proposition 2.2 on a donc

$$\sum_{\Lambda\in L_1} \frac{m(\Lambda, kA_1 + \mathbf{Z}|\cap_2 = \emptyset)}{|\mathrm{Aut}\Lambda|} \leq \sum_{M\in S_k} \frac{m(M + \mathbf{Z}, A_1|\cap_2 = \emptyset)}{2|\mathrm{Aut}M|}$$

avec égalité pour tout k si la liste L est complète. Or $m(M + \mathbf{Z}, A_1|\cap_2) = 0$ si $k \geq 16$ car

$$\Lambda = \{\lambda \in M + \mathbf{Z} \mid \langle \lambda, v\rangle \in 2\mathbf{Z}\} + \mathbf{Z}\frac{v}{2}$$

avec $v = 2r$ (où r est une racine de Λ). On a donc $\langle v, v\rangle = 8$ et $\langle v, s\rangle \equiv 1 \pmod 2$ pour toute racine s de M et il s'ensuit qu'on a

$$8 = \langle v, v\rangle \geq \frac{1}{2}\sum_{s\in M_2} |\langle v, s\rangle|^2 \geq \frac{k}{2} \quad .$$

Il suffit donc de vérifier les égalités ci-dessus pour $0 \leq k \leq 16$ en utilisant les données des tables 2 et 4.

9. Classification des réseaux unimodulaires avec système de racine kA_1 pour $k \geq 2$ en dimension 27.

Cette classification est analogue à la classification en dimension 26, i.e. on se ramène à des réseaux unimodulaires sans A_4 en dimension 25 en considérant le réseau voisin $\Lambda(\frac{r+s}{2})$ de Λ pour r, s deux racines orthogonales dans Λ. La table 4 contient la liste complète des réseaux unimodulaires avec système de racine $2A_1$, $3A_1$ et $4A_1$. Or la table 2 ne contient pas tous les réseaux unimodulaires sans A_4 en dimension 25. Beaucoup de ces réseaux ne sont jamais voisin (après addition de $\mathbf{Z}^2$) d'un réseau Λ avec au plus 4 paires de racines orthogonales. En effet, supposons par exemple qu'un tel réseau M contient A_3. Le système de racine A_3 fournit déjà 2 paires de racines à Λ, deux autres provenant de $\mathbf{Z}^2$. Le réseau M ne peut donc contenir aucune autre composante de rang ≥ 2. De même, si M contient $2A_2$ les autres composantes sont toutes de rang 1. La table 2 ne contient donc que des réseaux M sans A_4 qui vérifient quelques hypothèses supplémentaires. Nous laissons au lecteur le soin de justifier l'omission de certains réseaux. Les arguments sont en général faciles.

10. Classification des réseaux unimodulaires sans racine en dimension 28.

On procède comme pour les réseaux sans racine en dimension 27. La seule différence notable est le fait qu'on peut supposer connu les réseaux exceptionnels (ayant un vecteur caractéristique de norme 4). En effet, d'après la remarque 4.2 un tel réseau est toujours un voisin pair d'un réseau de la forme $M+\mathbf{Z}$ où M est un réseau non-exceptionnel sans racine en dimension 27. Il suffira donc de classer les réseaux non-exceptionnels en dimension 28.

Proposition 10.1. *Soit Λ un réseau unimodulaire sans racine en dimension 28 qui n'est pas exceptionnel. Alors il existe un vecteur λ de norme 4 dans Λ tel que l'ensemble*

$$R(\lambda)=\{\mu\in\Lambda_3 \mid \langle\lambda,\mu\rangle=2\}$$

contient au plus 8 éléments.

Preuve. La preuve est analogue à la première partie de la preuve de la proposition 7.2. Nous laissons les détails au lecteur.

Cette proposition montre que la classification des réseaux unimodulaires sans racine en dimension 28 qui sont non-exceptionnels ne nécessite que la liste complète des réseaux unimodulaires avec système de racine kA_1 pour $0\le k\le 4$ en dimension 27. La liste complète de ces réseaux a été construite en utilisant les sections 7,8 et 9 et elle se trouve dans la table 4.

Pour la suite de la classification on procède comme dans la section 7. En particulier, on vérifie que les nombres

$$\sum_{\Lambda\in L}\frac{m(\Lambda,kA_1+\mathbf{Z})}{\mathrm{Aut}\ \Lambda}$$

valent respectivement

$$\begin{array}{ll}\frac{29775455}{41472} & \text{pour } k=0\ ,\\ \frac{69554}{27} & \text{pour } k=1\ ,\\ \frac{867917}{180} & \text{pour } k=2\ ,\\ \frac{56555}{9} & \text{pour } k=3\ ,\\ \frac{1188246065}{186624} & \text{pour } k=4\end{array}$$

où L désigne la liste des réseaux donnée par la table 5. La masse de ces réseaux est égale à

$$\sum_{\Lambda\in L}\frac{1}{\mathrm{Aut}\ \Lambda}=\frac{17\ 924\ 389\ 897}{26\ 202\ 009\ 600}\quad .$$

11. Réseaux pairs sans racine en dimension 28.

Soit Λ un réseau pair de déterminant 4 en dimension 28. Le groupe $\Lambda^\sharp/\Lambda$ est alors isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}+\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ et $\Lambda^\sharp$ contient exactement 3 sous-réseaux entiers unimodulaires. Notons ces 3 réseaux L, M et N. Les 3 cas suivants sont possibles:

(i) Les trois réseaux sont non-isomorphes. Ceci implique $|\mathrm{Aut}\Lambda|=|\mathrm{AutL}|=|\mathrm{Aut}M|=|\mathrm{Aut}N|$.

(ii) L et M sont isomorphes mais non-isomorphes à N. Dans ce cas on a $|\mathrm{Aut}\Lambda|=|\mathrm{Aut}N|=|2\mathrm{Aut}L|$.

(iii) L, M et N sont isomorphes. On a alors $|\mathrm{Aut}\Lambda|=3|\mathrm{AutL}|$.

Supposons maintenant que Λ ne possède pas de racine. Dans ce cas au plus un seul des trois réseaux L, M et N possède un vecteur de norme 1. Un tel réseau est donc toujours le sous-réseau pair d'un réseau entier unimodulaire sans racine en dimension 28.

En étudiant les réseaux de la table 5 on vérifie que le cas (ii) arrive seulement avec les trois réseaux $R_{28,4}$, $R_{28,5}$ et $R_{28,6}$.

Le cas (ii) arrive avec $2R_{28,14}$, $R_{28,21}$, avec $2R_{28,16}$, $R_{28,21}$ et avec $2R_{28,27}$, $R_{28,28}$. (Le 2 devant un réseau signifie qu'il est 2 fois contenu dans le dual de son sous-réseau pair.)

Pour tous les autres réseaux on se trouve dans le cas (i).

La table 6 reprend ces données et indique aussi l'ordre des groupes d'automorphismes des réseaux en question. Il y a 33 tels réseaux et leur masse est égal

$$\frac{71\ 704\ 398\ 823}{314\ 424\ 115\ 200} \quad .$$

12. Codes autoduaux de distance minimal 9 sur $\mathbf{F}_3^{28}$.

Un code C est un sous-espace linéaire d'un espace vectoriel fini $\mathbf{F}_p^n$ où p est un nombre premier. Un code $C \subset \mathbf{F}_p^{2n}$ est autodual s'il est de dimension n et si la restriction du produit scalaire standard de $\mathbf{F}_p^{2n}$ à C est identiquement nulle. Identifions les deux $\mathbf{F}_p$−espaces vectoriels $\frac{1}{\sqrt{p}}\mathbf{Z}^{2n}/\sqrt{p}\mathbf{Z}^{2n}$ et $\mathbf{F}_p^{2n}$ de la manière évidente et considérons le réseau

$$\Lambda_C \subset \frac{1}{\sqrt{p}}\mathbf{Z}^{2n}$$

défini par

$$\Lambda_C = \{\lambda \in \frac{1}{\sqrt{p}}\mathbf{Z}^{2n} \mid \lambda \pmod{\sqrt{p}\mathbf{Z}^{2n}) \in C\} \quad .$$

Le réseau Λ_C est entier unimodulaire si et seulement si C est un code autodual. D'autre part, si un réseau unimodulaire Λ contient $2n$ vecteurs orthogonaux $v_1, \ldots, v_{2n} \in \Lambda$ de norme p, alors l'application $\mathbf{F}_p$-linéaire $\varphi : \Lambda \longrightarrow \mathbf{F}_p^{2n}$ définie par $\varphi(\lambda) = (\langle\lambda, v_1\rangle \pmod p), \ldots, \langle\lambda, v_{2n}\rangle \pmod p))$ est une projection de Λ sur un code autodual C. Le *poids de Hamming* $w(c)$ d'un élément $c \in C$ est le cardinal du support de c (l'ensemble de ses coordonnées non-nulles). Le *poids minimal* de C est égal à

$$\min_{c \in C \setminus \{0\}} w(c) \quad .$$

Considérons maintenant un code autodual C dans $\mathbf{F}_3^{28}$. On vérifie facilement que Λ_C est sans racine si et seulement si le poids minimal de C est au moins 9. Le polynôme des poids $W_C = \sum_{c \in C} x^{w(c)} y^{28-w(c)}$ est alors déterminé de manière unique et on a

$$\begin{aligned} W_C(x,y) = \quad & y^{28} \\ & +2184x^9y^{19} \\ & +78624x^{12}y^{16} \\ & +768096x^{15}y^{13} \\ & +2159976x^{18}y^{10} \\ & +1555632x^{21}y^7 \\ & +216216x^{24}y^4 \\ & +2240x^{27}y^1 \end{aligned}$$

(ceci résulte de l'identité Mac-Williams, cf. Theorem 2.11.1 dans **[AK]** ou le chapitre 3 dans **[CS]**). En particulier, les formules reliant $W_C(x,y)$ à $\theta_\Lambda(q)$ montrent que les réseaux exceptionnels sans racine ne proviennent pas de codes autoduaux sur $\mathbf{F}_3^{28}$.

Un $t-(v,k,\lambda)$ *design* est la donnée d'un ensemble fini $\mathcal{P}$ ayant v éléments et d'une famille $\mathcal{B}$ de sous-ensembles de $\mathcal{P}$ telle que tout membre $B \in \mathcal{B}$ contient k éléments et telle que tout sous-ensemble à t-éléments de $\mathcal{P}$ est contenu dans exactement λ membres de la famille $\mathcal{B}$. Il s'ensuit du théorème de Assmus-Mattson (cf. Theorem 2.11.2 dans **[AK]**) que l'ensemble des vecteurs de poids 9 d'un code autodual de poids minimal 9 dans $\mathbf{F}_3^{28}$ est un $3-(28,9,56)$ et un $2-(28,9,208)$ design. Un tel code fournit un des 36 réseaux unimodulaires non-exceptionnels de la table 5. Il suffit donc de déterminer (à action par le groupe d'automorphisme près) l'ensemble des sous-réseaux isomorphes à $\sqrt{3}\mathbf{Z}^{28}$ dans ces réseaux. Or si v_1 et v_2 sont deux vecteurs orthogonaux de norme 3 qui se complètent en une base $v_1, \ldots, v_{28}$ de $\sqrt{3}\mathbf{Z}^{28}$, le théorème de Assmus-Mattson montre qu'on a

$$\{\lambda \in \Lambda_3 \mid \langle\lambda, v_1\rangle = \pm 1,\ \langle\lambda, v_2\rangle = \pm 1\} = 208 \quad .$$

Un critère analogue existe pour les triplets v_1, v_2, v_3 qui se complètent en une base orthogonale de $\sqrt{3}\mathbf{Z}^{28}$. Ce critère permet peut-être une classification des sous-réseaux isomorphes à $\sqrt{3}\mathbf{Z}^{28}$ (à action par le groupe des automorphismes près) contenus dans les réseaux de la table 5. Ceci donnerait alors la classification des codes autoduaux de poids minimal 9 sur $\mathbf{F}_3^{28}$.

Remarque 12.1. Les codes autoduaux provenant de $R_{28,36}(\emptyset)$ ont été classés dans **[D]**. Il y en a trois (à isomorphisme près).

13. Les tables.

Les tables qui suivent permettent de construire les réseaux unimodulaires avec système de racine kA_1 en dimension 26 (table 3), les réseaux unimodulaires avec système de racine kA_1 pour $0 \leq k \leq 4$ en dimension 27 (table 4) et les réseaux unimodulaires sans racine en dimension 28 (table 5). Les tables 1 et 2 contiennent toutes les informations pour prouver que les tables 3-5 sont complètes. Les réseaux sont dénotés par $R_{n,i}(\mathcal{R})$ où n est la dimension et $\mathcal{R}$ le système de racine du réseau en question. L'indice i numérote les réseaux de même dimension qui ont même système de racine, généralement par ordre croissant de leur groupe d'automorphismes. Une lettre e après l'indice i indique que le réseau en question est exceptionnel, i.e. possède un vecteur caractéristique de norme 2 (en dimension 26), 3 (en dimension 27) ou 4 (en dimension 28). Les réseaux exceptionnels se trouvent après les réseaux non-exceptionnels ayant même système de racine.

Les réseaux des tables sont décrits comme $k-$voisins de $\mathbf{Z}^{28}$. Pour cela il suffit de donner un vecteur v de norme entière de la forme

$$v = \frac{1}{k}(a_1, \ldots, v_n)$$

avec $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{Z}^n$ et $a_1, \ldots, a_n, k$ premiers entre eux. Le réseau en question est alors isomorphe à

$$\Lambda = \{\lambda \in \mathbf{Z}^n \mid \langle \lambda, v \rangle \in \mathbf{Z}\} + \mathbf{Z}v \quad .$$

Les vecteurs v choisis dans les tables permettent facilement de trouver une base (et donc une matrice de Gram du réseau): en effet un des coefficients a_i est toujours égal à 1 et un autre au moins est premier à k. Supposons donc $v = \frac{1}{k}(1, a_2, \ldots, a_n)$ avec k et a_n premier. Soit $e_1, \ldots, e_n$ la base standard de $\mathbf{Z}^n$. Comme a_n et k sont premiers entre eux, il existe des entiers l_i tels que les vecteurs de la forme $e_i + l_i e_n$ appartiennent à Λ pour $1 \leq i < n$. Notons b_i ces vecteurs. Posons $b_0 = v$ et $b_n = ke_n$. Il est facile de vérifier que

$$b_1 = kb_0 - \sum_{i=2}^{n-1} a_i b_i + \nu b_n$$

pour un entier ν convenable. Ceci montre que $b_0, b_2, \ldots, b_n$ est une $\mathbf{Z}$-base de Λ car $b_0, \ldots, b_n$ engendrent le réseau Λ.

Pour un réseau Λ sans racine nous avons aussi indiqué l'invariant m_Λ qui est défini comme suit. Soit Λ_3 l'ensemble des vecteurs de norme 3 de Λ. A $v \in \Lambda_3$ on associe le polynôme

$$m_v(x) = \sum_{\alpha \in \Lambda_3, \langle v, \alpha \rangle = 1} x^{\sharp\{\beta \in \Lambda_3 \ \mid \langle v, \beta \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle = -1\}} \quad .$$

On ordonne ensuite les éléments de $\mathbf{R}[x]$ par

$$f(x) > g(x) \Longleftrightarrow \lim_{x \to \infty} f(x) - g(x) = +\infty \quad .$$

et on pose

$$m_\Lambda(x) = \min_{v \in \Lambda_3} m_v(x) \quad .$$

Le nombre de polynômes $m_v(x)$ distincts est aussi indiqué. De même on définit un invariant $n_4(a) \in \mathbf{R}[a]$ par

$$n_4(a) = \frac{1}{2} \sum_{\lambda \in \Lambda_4} a^{\sharp\{\mu \in \Lambda_3 \ \mid \ \langle \lambda, \mu \rangle = 2\}} \quad .$$

L'invariant $n_4(a)$ dénombre les voisins de la forme $\mathbf{Z}+M$ avec système de racine donné (cf. section 7).

Remarque 13.1. Les ordres des groupes d'automorphismes des réseaux en dimension 25 sont parfois erronnés d'un facteur de 2 dans **[Bo]**.

14. Quelques réseaux remarquables.

Plusieurs réseaux apparaissant dans ce travail sont aussi apparus ailleurs. Ainsi le réseau $R_{28,36}(\emptyset)$ a été décrit dans **[BV]**. Les réseaux $R_{28,32}(\emptyset)$, $R_{28,34}(\emptyset)$, $R_{28,35}(\emptyset)$ et $R_{28,36}(\emptyset)$ apparaissent aussi dans **[N]** car les groupes d'automorphismes de leurs sous-réseaux pairs sont des sous-groupes finis maximaux de $\mathrm{GL}(28,\mathbf{Z})$.

Le réseau $R_{27,3e}(\emptyset)$ est mentionné dans **[Bo]** ainsi que plusieurs autres réseaux de ce travail.

Le réseau de Barnes-Wall est l'unique réseau entier pair sans racine de déterminant 2^8 en dimension 16. Ce réseau s'obtient par exemple en considérant le sous-réseau orthogonal à toutes les racines de $R_{26,6}(10A_1)$ ou de $R_{26,7e}(10A_1)$.

15. Remerciements.

Nous remercions P. de la Harpe, M.Kervaire, G. Nebe pour des discussions. Nous remercions aussi B. Souvignier pour la mise à disposition de son programme pour le calcul du groupe d'automorphismes d'un réseau.

Références.

[AK] E.F. Assmus Jr., J.D. Key, *Designs and their Codes*, Cambridge University Press (1992).

[Ba1] R. Bacher, *Unimodular Lattices without Nontrivial Automorphisms*, International Mathematics Research Notices, No. 2 (1994), 91-95.

[Ba2] R. Bacher, *Tables de réseaux entiers unimodulaires construit comme $k-$voisins de $\mathbf{Z}^n$* (Préprint), Genève, 1994.

[Bo] R.E. Borcherds, *The Leech lattice and other lattices* (Thesis), Trinity College, Cambrigde, 1984.

[BV] R. Bacher, B. Venkov, *Lattices and association schemes: a unimodular example in dimension 28*, Annales de l'Institut Fourier.

[CS] J.H. Conway, N.J. Sloane *Sphere packings, Lattices and Groups*, Springer (1993) (2-ième édition).

[D] Dempwolff, *Translation planes of order 27*, Designs, Codes Crypt. 4 (1994), 105-121.

[H] Hsia .. (Préprint).

[K] M. Kneser, *Klassenzahlen definiter quadratischer Formen*, Arch. Math. (Basel) 8 (1957), 241-250.

[N] G. Nebe, *Finite Subgroups of $GL_n(\mathbf{Q})$ for* $25 \leq n \leq 31$ (Préprint), Aachen, 1995.

[S] B. Souvignier, *AUTO, programme pour le calcul du groupe d'automorphisme d'un réseau*, Aachen (1995).

[V] B. Venkov, *On even unimodular lattices of dimension 32*, J. Soviet. Math. 26 (1994), 1860-1867.

Roland Bacher, Université de Grenoble I, Institut Fourier, B.P. 74, 38402 St Martin d'Hères, Cedex, France.

Boris Venkov, St. Petersbourgs departement of the Steklov mathematical Institute, Fontanka 27, St. Petersbourg, Russie.

Table 1: Réseaux sans A_4 en dimension 24

$\mathbf{R_{24,1}}$: Système de racine: $\emptyset$. 1 002 795 171 840 automorphismes. Construction

$$\frac{1}{53}(1,3,4,48,6,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26) \quad .$$

$$m(R_{24,1}+\mathbf{Z}^2, 2A_1) = 2\ 637\ 824 \quad .$$

$\mathbf{R_{24,2}}$: Système de racine: A_1^8. 5 284 823 040 automorphismes. Construction

$$\frac{1}{37}(1,1,2,2,40,4,4,5,6,7,7,8,9,10,10,11,12,13,13,14,15,17,18,18) \quad .$$

Pour $M = R_{24,2}+\mathbf{Z}^2$ on a

$$\begin{array}{lll} m(M,2A_1) = 61\ 440, & m(M,4A_1) = 917\ 504, & m(M,6A_1) = 1\ 433\ 600, \\ m(M,8A_1) = 344\ 064, & m(M,10A_1) = 13\ 568 \quad . & \end{array}$$

$\mathbf{R_{24,3}}$: Système de racine: A_1^{12}. 778 567 680 automorphismes. Construction

$$\frac{1}{29}(28,1,3,3,25,4,6,6,7,7,8,8,9,9,10,10,11,11,12,12,13,13,14,14) \quad .$$

Pour $M = R_{24,3}+\mathbf{Z}^2$ on a

$$\begin{array}{lll} m(M,4A_1) = 270\ 336, & m(M,6A_1) = 1\ 013\ 760, & m(M,8A_1) = 1\ 115\ 136, \\ m(M,10A_1) = 380\ 160, & m(M,12A_1) = 47\ 520, & m(M,14A_1) = 440 \quad . \end{array}$$

$\mathbf{R_{24,4}}$: Système de racine: A_1^{16}. 2 818 572 288 automorphismes. Construction

$$\frac{1}{29}(30,1,2,2,3,3,4,4,5,5,6,6,7,7,8,8,10,11,11,12,13,13,14,14) \quad .$$

Pour $M = R_{24,4}+\mathbf{Z}^2$ on a

$$\begin{array}{lll} m(M,6A_1) = 573\ 440, & m(M,8A_1) = 917\ 504, & m(M,10A_1) = 946\ 176, \\ m(M,12A_1) = 344\ 064, & m(M,14A_1) = 107\ 520, & m(M,18A_1) = 896 \quad . \end{array}$$

$\mathbf{R_{24,5}}$: Système de racine: $A_1^{10}A_2^2$. 212 336 640 automorphismes. Construction

$$\frac{1}{29}(1,1,1,2,2,2,3,4,4,34,5,6,6,7,7,8,8,9,9,11,12,13,14,14)$$

Pour $M = R_{24,5}+\mathbf{Z}^2$ on a

$$\begin{array}{lll} m(M,6A_1) = 414\ 720, & m(M,8A_1) = 967\ 680, & m(M,10A_1) = 552\ 960, \\ m(M,12A_1) = 103\ 680, & m(M,14A_1) = 2\ 448 \quad . & \end{array}$$

$\mathbf{R_{24,6}}$: Système de racine: A_1^{24}. 2 319 282 339 840 automorphismes. Construction

$$\frac{1}{37}(1,1,2,2,3,3,4,4,5,5,7,7,8,8,9,9,11,11,24,14,17,17,18,18) \quad .$$

Pour $M = R_{24,6} + \mathbf{Z}^2$ on a

$$m(M,10A_1) = 1\ 536\ 000, \quad m(M,14A_1) = 1\ 179\ 648, \quad m(M,18A_1) = 368\ 640,$$
$$m(M,24A_1) = 1\ 280 \quad .$$

$\mathbf{R_{24,7}}$: Système de racine: $A_1^8 A_2^4$. 127 401 984 automorphismes. Construction

$$\frac{1}{23}(1,1,1,2,2,2,26,3,4,4,4,5,5,6,6,7,7,7,8,8,10,10,11,11) \quad .$$

Pour $M = R_{24,7} + \mathbf{Z}^2$ on a

$$m(M,8A_1) = 580\ 608, \quad m(M,10A_1) = 725\ 760, \quad m(M,12A_1) = 171\ 072,$$
$$m(M,14A_1) = 3\ 888 \quad .$$

$\mathbf{R_{24,8}}$: Système de racine: $A_1^6 A_2^6$. 716 636 160 automorphismes. Construction

$$\frac{1}{19}(1,1,1,2,2,2,3,3,3,4,4,5,5,5,6,6,7,7,7,8,8,8,9,9)$$

Pour $M = R_{24,8} + \mathbf{Z}^2$ on a

$$m(M,10A_1) = 699\ 840, \quad m(M,12A_1) = 349\ 920, \quad m(M,14A_1) = 23\ 328 \quad .$$

$\mathbf{R_{24,9}}$: Système de racine: $A_1^{12} A_3^2$. 1 811 939 328 automorphismes. Construction

$$\frac{1}{23}(1,1,1,1,2,2,3,3,4,4,5,5,6,6,7,7,8,8,9,9,10,12,11,11) \quad .$$

Pour $M = R_{24,9} + \mathbf{Z}^2$ on a

$$m(M,10A_1) = 359\ 424, \quad m(M,12A_1) = 221\ 184, \quad m(M,14A_1) = 124\ 416,$$
$$m(M,18A_1) = 2\ 880 \quad .$$

$\mathbf{R_{24,10}}$: Système de racine: $A_1^6 A_2^4 A_3$. 191 102 976 automorphismes. Construction

$$\frac{1}{19}(1,1,1,1,2,2,2,3,3,4,4,4,5,5,6,6,7,7,7,8,8,9,9,9) \quad .$$

Pour $M = R_{24,10} + \mathbf{Z}^2$ on a

$$m(M,10A_1) = 466\ 560, \quad m(M,12A_1) = 233\ 280, \quad m(M,14A_1) = 15\ 552 \quad .$$

$\mathbf{R_{24,11}}$: Système de racine: A_2^8. 1 128 701 952 automorphismes. Construction

$$\frac{1}{17}(16,1,1,2,2,2,3,3,3,4,4,4,5,5,5,6,6,6,7,7,7,8,8,8) \quad ,$$

$$m(R_{24,11} + \mathbf{Z}^2, 10A_1) = 734\ 832 \quad .$$

$\mathbf{R_{24,12}}$: Système de racine: $A_1^4 A_2^8$. 10 319 560 704 automorphismes. Construction

$$\frac{1}{23}(22,1,1,2,2,2,3,3,3,4,4,4,6,6,7,7,7,15,8,8,10,10,11,11) \quad .$$

Pour $M = R_{24,12} + \mathbf{Z}^2$ on a

$$m(M, 12A_1) = 629\ 856, \quad m(M, 14A_1) = 52\ 488 \quad .$$

$\mathbf{R_{24,13}}$: Système de racine: $A_1^4 A_2^4 A_3^2$. 191 102 976 automorphismes. Construction

$$\frac{1}{17}(18, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 8) \quad .$$

Pour $M = R_{24,13} + \mathbf{Z}^2$ on a

$$m(M, 12A_1) = 279\ 936, \quad m(M, 14A_1) = 23\ 328 \quad .$$

$\mathbf{R_{24,14}}$: Système de racine: $A_1^8 A_3^4$. 32 614 907 904 automorphismes. Construction

$$\frac{1}{19}(1, 1, 1, 1, 2, 2, 22, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 8, 9) \quad .$$

Pour $M = R_{24,14} + \mathbf{Z}^2$ on a

$$m(M, 14A_1) = 290\ 304, \quad m(M, 18A_1) = 10\ 368 \quad .$$

$\mathbf{R_{24,15}}$: Système de racine: $A_1^8 A_3^4$. 4 076 863 488 automorphismes. Construction

$$\frac{1}{17}(1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 8, 8, 8, 8) \quad .$$

Pour $M = R_{24,15} + \mathbf{Z}^2$ on a

$$m(M, 14A_1) = 124\ 416, \quad m(M, 18A_1) = 10\ 368 \quad .$$

$\mathbf{R_{24,16}}$: Système de racine: $A_1^2 A_2^4 A_3^3$. 1 146 617 856 automorphismes. Construction

$$\frac{1}{17}(1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 11, 6, 7, 7, 8, 8) \quad ,$$

$$m(R_{24,16} + \mathbf{Z}^2, 14A_1) = 69\ 984 \quad .$$

$\mathbf{R_{24,18}}$: Système de racine: $A_1^2 A_2^2 A_3^4$. 1 528 823 808 automorphismes. Construction

$$\frac{1}{17}(1, 1, 1, 1, 19, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 8, 8, 8) \quad ,$$

$$m(R_{24,18} + \mathbf{Z}^2, 14A_1) = 46\ 656 \quad .$$

$\mathbf{R_{24,19}}$: Système de racine: $A_1^4 A_3^4$. 127 401 984 automorphismes. Construction

$$\frac{1}{17}(1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 6, 6, 6, 10, 7, 8, 8, 8) \quad .$$

$\mathbf{R_{24,20}}$: Système de racine: A_3^6. 45 864 714 240 automorphismes. Construction

$$\frac{1}{13}(12, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6) \quad .$$

$\mathbf{R_{24,23}}$: Système de racine: $A_1^4A_3^6$. 97 844 723 712 automorphismes. Construction

$$\frac{1}{17}(1,1,1,1,2,2,2,2,3,3,3,3,4,4,5,5,5,5,10,7,7,8,8,8) \quad ,$$

$$m(R_{24,23}+\mathbf{Z}^2,18A_1) = 46\ 656 \quad .$$

$\mathbf{R_{24,25}}$: Système de racine: $A_1^{16}D_4^2$. 2 783 138 807 808 automorphismes. Construction

$$\frac{1}{29}(1,1,1,1,2,2,3,3,4,4,5,5,6,7,7,8,20,10,10,12,12,12,12,14) \quad ,$$

$$m(R_{24,25}+\mathbf{Z}^2,18A_1) = 276\ 480, \quad m(R_{24,25}+\mathbf{Z}^2,26A_1) = 4\ 608 \quad .$$

$\mathbf{R_{24,26}}$: Système de racine: $A_1^4A_3^4D_4$. 48 922 361 856 automorphismes. Construction

$$\frac{1}{17}(18,1,1,1,2,2,2,2,3,3,3,3,4,4,4,5,5,6,7,7,8,8,8,8) \quad ,$$

$$m(R_{24,26}+\mathbf{Z}^2,18A_1) = 31\ 104 \quad .$$

$\mathbf{R_{24,30}}$: Système de racine: $A_1^4A_3^4D_4$. 32 614 907 904 automorphismes. Construction

$$\frac{1}{19}(1,1,1,1,2,2,2,2,22,3,4,4,4,4,5,5,6,7,7,7,8,8,8,9) \quad ,$$

$$m(R_{24,30}+\mathbf{Z}^2,18A_1) = 31\ 104 \quad .$$

$\mathbf{R_{24,32}}$: Système de racine: A_3^8. 42 268 920 643 584 automorphismes. Construction

$$\frac{1}{23}(1,1,1,1,3,3,3,3,4,4,4,4,5,5,5,7,7,7,13,10,10,11,11,11) \quad .$$

$\mathbf{R_{24,38}}$: Système de racine: $A_3^4D_4^2$. 391 378 894 848 automorphismes. Construction

$$\frac{1}{17}(18,1,1,1,2,2,2,2,3,3,3,3,4,4,4,4,6,7,7,7,7,8,8,8) \quad .$$

$\mathbf{R_{24,50}}$: Système de racine: $A_1^8D_4^4$. 16 698 832 846 848 automorphismes. Construction

$$\frac{1}{23}(1,1,1,1,2,2,2,2,3,3,4,4,5,5,5,5,7,7,15,9,11,11,11,11) \quad ,$$

$$m(R_{24,50}+\mathbf{Z}^2,26A_1) = 20\ 736 \quad .$$

$\mathbf{R_{24,74}}$: Système de racine: D_4^6. 2 404 631 929 946 112 automorphismes. Construction

$$\frac{1}{19}(1,1,1,1,2,2,2,2,22,3,3,3,5,5,5,5,7,7,7,7,8,8,8,8) \quad .$$

Table 2: Quelques réseaux en dimension 25

$\mathbf{R_{25}(A_1^2)}$: 709 632 000 automorphismes. Construction:

$$\frac{1}{53}(1,1,2,2,4,58,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,23,24,26) \quad .$$

Pour $M = R_{25}(A_1^2) + \mathbf{Z}^2$ on a

$$m(M,2A_1) = 2\ 464\ 000, \quad m(M,3A_1) = 4\ 190\ 208, \quad m(M,4A_1) = 1\ 663\ 200 \quad .$$

$\mathbf{R_{25}(A_2^2)}$: 1 881 169 920 automorphismes. Construction:

$$\frac{1}{47}(1,1,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,23,24) \quad ,$$

$$m(R_{25}(A_2^2) + \mathbf{Z}^2, 4A_1) = 5\ 648\ 832 \quad .$$

$\mathbf{R_{25}(A_1^6)}$: 17 694 720 automorphismes. Construction:

$$\frac{1}{43}(1,1,2,2,3,4,4,48,6,7,7,8,9,10,10,11,12,13,14,15,16,19,20,20,21) \quad .$$

Pour $M = R_{25}(A_1^6) + \mathbf{Z}^2$ on a

$$m(M,2A_1) = 221\ 184, \quad m(M,3A_1) = 1\ 130\ 496, \quad m(M,4A_1) = 2\ 350\ 080 \quad .$$

$\mathbf{R_{25}(A_1^7A_2)}$: 7 741 440 automorphismes. Construction:

$$\frac{1}{43}(1,1,1,2,3,4,5,6,7,7,8,9,10,11,11,12,13,14,15,16,17,18,24,20,21)$$

Pour $M = R_{25}(A_1^7A_2) + \mathbf{Z}^2$ on a

$$m(M,3A_1) = 92\ 160, \quad m(M,4A_1) = 580\ 608 \quad .$$

$\mathbf{R_{25}(A_1^{10})}$: 3 932 160 automorphismes. Construction:

$$\frac{1}{31}(32,1,2,2,3,3,4,4,5,5,6,6,7,8,8,9,10,10,11,12,13,13,14,14,15) \quad .$$

Pour $M = R_{25}(A_1^{10}) + \mathbf{Z}^2$ on a

$$m(M,2A_1) = 12\ 288, \quad m(M,3A_1) = 163\ 840, \quad m(M,4A_1) = 640\ 000 \quad .$$

$\mathbf{R_{25}(A_1^8A_3)}$: 264 241 152 automorphismes. Construction

$$\frac{1}{41}(1,1,1,1,43,3,4,5,6,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,17,18,19,20) \quad ,$$

$$m(R_{25}(A_1^8A_3) + \mathbf{Z}^2, 4A_1) = 43\ 008 \quad .$$

$\mathbf{R_{25}(A_1^8A_2^2)}$: 2 359 296 automorphismes. Construction:

$$\frac{1}{29}(1,1,1,31,2,3,3,4,4,5,6,6,7,7,8,8,9,9,10,11,11,12,13,13,14) \quad ,$$

$$m(R_{25}(A_1^8 A_2^2)+\mathbf{Z}^2, 4A_1) = 27\ 648 \quad .$$

$\mathbf{R_{25}(A_1^{11}A_2)}$: 2 949 120 automorphismes. Construction:

$$\frac{1}{37}(1,1,1,2,2,3,3,4,4,32,5,31,6,7,7,8,8,9,10,12,16,16,17,18,18) \quad ,$$

$$m(R_{25}(A_1^{11} A_2)+\mathbf{Z}^2, 4A_1) = 67\ 584 \quad .$$

$\mathbf{R_{25}(A_1^{14})}$: 37 748 736 automorphismes. Construction:

$$\frac{1}{31}(1,1,2,2,34,3,4,4,5,5,6,6,7,7,8,8,9,10,11,11,12,12,14,14,15) \quad ,$$

$$m(R_{25}(A_1^{14})+\mathbf{Z}^2, 4A_1) = 110\ 592 \quad .$$

$\mathbf{R_{25}(A_1^{12}A_3)}$: 283 115 520 automorphismes. Construction:

$$\frac{1}{29}(1,1,1,1,2,3,3,4,4,5,5,6,6,8,8,9,10,10,11,11,12,12,13,13,15,) \quad .$$

$\mathbf{R_{25}(A_1^{12}A_2^2)}$: 42 467 328 automorphismes. Construction:

$$\frac{1}{29}(1,1,1,2,2,3,3,4,4,5,5,6,6,7,7,9,10,10,11,11,12,12,13,14,15,) \quad .$$

$\mathbf{R_{25}(A_1^{16}A_3)}$: 2 264 924 160 automorphismes. Construction:

$$\frac{1}{29}(1,1,1,30,2,3,3,4,4,5,5,6,6,7,7,8,8,10,10,12,12,13,13,14,14) \quad .$$

Table 3: Réseaux unimodulaires avec système de racine kA_1 en dimension 26

Sans racine.

Série θ: $\theta_\Lambda(q) = 1 + 3120q^3 + \ldots$.
$\mathbf{R_{26,1}}(\emptyset)$: 18 720 000 (?) automorphismes. Construction:

$$\frac{1}{53}(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,74,22,23,24,25,26) \quad .$$

Pour $M = R_{26,1}(\emptyset) + \mathbf{Z}$ on a

$$m(M,\emptyset) = 1\ 872\ 000, \quad m(M,A_1) = 6\ 240\ 000, \quad m(M,2A_1) = 8\ 658\ 000 \quad .$$

Système de racine A_1^2. Série θ: $\theta_\Lambda(q) = 1 + 4q^2 + 3136q^3 + \ldots$.

$\mathbf{R_{26,1}(A_1^2)}$: 688 128 automorphismes. Construction:

$$\frac{1}{53}(52,1,2,2,3,4,5,6,7,8,9,10,12,13,14,15,16,17,18,20,21,22,23,24,25,26) \quad .$$

On a $m(R_{26,1}(A_1^2), R_{24,2} + \mathbf{Z}^2) = 1$.
Pour $M = R_{26,1}(A_1^2) + \mathbf{Z}$ on a:

$$m(M,\emptyset) = 799\ 744, \quad m(M,A_1|\cap_2 = \emptyset) = 2\ 064\ 384, \quad m(M,2A_2|\cap_2 = \emptyset) = 2\ 652\ 160 \quad .$$

$\mathbf{R_{26,2}(A_1^2)}$: 3 041 280 automorphismes. Construction:

$$\frac{1}{53}(1,1,2,2,4,48,6,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26) \quad .$$

On a $m(R_{26,2}(A_1^2), R_{24,1} + \mathbf{Z}^2) = 1$.
Pour $M = R_{26,2}(A_1^2) + \mathbf{Z}$ on a:

$$m(M,\emptyset) = 760\ 320, \quad m(M,A_1|\cap_2 = \emptyset) = 2\ 027\ 520, \quad m(M,2A_2|\cap_2 = \emptyset) = 2\ 804\ 736 \quad .$$

Système de racine A_1^4. Série θ: $\theta_\Lambda(q) = 1 + 8q^2 + 3152q^3 + \ldots$.

$\mathbf{R_{26,1}(A_1^4)}$: 92 160 automorphismes. Construction:

$$\frac{1}{47}(1,1,2,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,18,19,20,68,22,23) \quad .$$

Pour $\Lambda = R_{26,1}(A_1^4)$ et $M = R_{26,1}(A_1^4) + \mathbf{Z}$ on a

$$m(\Lambda, R_{24,2} + \mathbf{Z}^2) = 2, \quad m(\Lambda, R_{24,3} + \mathbf{Z}^2) = 4,$$

$$m(M,\emptyset) = 322\ 560, \quad m(M,A_1|\cap_2 = \emptyset) = 721\ 920, \quad m(M,2A_2|\cap_2 = \emptyset) = 721\ 920 \quad .$$

Système de racine A_1^6. Série θ: $\theta\Lambda(q) = 1 + 12q^2 + 3168q^3 + \ldots$.

$\mathbf{R_{26,1}(A_1^6)}$: 49 152 automorphismes. Construction:

$$\frac{1}{41}(1,1,2,2,3,4,4,5,5,6,7,8,9,10,11,12,13,13,14,15,16,17,18,60,20,20) \quad .$$

Pour $\Lambda = R_{26,1}(A_1^6)$ et $M = R_{26,1}(A_1^6) + \mathbf{Z}$ on a

$$m(\Lambda, R_{24,3} + \mathbf{Z}^2) = 8, \quad m(\Lambda, R_{24,4} + \mathbf{Z}^2) = 1, \quad m(\Lambda, R_{24,5} + \mathbf{Z}^2) = 6,$$

$$m(M, \emptyset) = 139\ 264, \quad m(M, A_1 | \cap_2 = \emptyset) = 237\ 568, \quad m(M, 2A_2 | \cap_2 = \emptyset) = 139\ 264 \quad .$$

$\mathbf{R_{26,2}(A_1^6)}$: 98 304 automorphismes. Construction:

$$\frac{1}{41}(40, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 20)$$

Pour $\Lambda = R_{26,2}(A_1^6)$ et $M = R_{26,2}(A_1^6) + \mathbf{Z}$ on a

$$m(\Lambda, R_{24,2} + \mathbf{Z}^2) = 3, \quad m(\Lambda, R_{24,5} + \mathbf{Z}^2) = 12,$$

$$m(M, \emptyset) = 135\ 168, \quad m(M, A_1 | \cap_2 = \emptyset) = 245\ 760, \quad m(M, 2A_2 | \cap_2 = \emptyset) = 135\ 168 \quad .$$

$\mathbf{R_{26,3}(A_1^6)}$: 1 769 472 automorphismes. Construction:

$$\frac{1}{47}(1, 1, 2, 4, 5, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 61, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 21, 22, 23, 23) \quad .$$

Pour $\Lambda = R_{26,3}(A_1^6)$ et $M = R_{26,3}(A_1^6) + \mathbf{Z}$ on a

$$m(\Lambda, R_{24,2} + \mathbf{Z}^2) = 6, \quad m(\Lambda, R_{24,4} + \mathbf{Z}^2) = 9,$$

$$m(M, \emptyset) = 110\ 592, \quad m(M, A_1 | \cap_2 = \emptyset) = 294\ 912, \quad m(M, 2A_2 | \cap_2 = \emptyset) = 110\ 592 \quad .$$

Système de racine A_1^8. Série θ: $\theta_\Lambda(q) = 1 + 16q^2 + 3184q^3 + \ldots$.

$\mathbf{R_{26,1}(A_1^8)}$: 24 576 automorphismes. Construction:

$$\frac{1}{37}(38, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 10, 11, 12, 12, 13, 14, 15, 16, 16, 17, 18)$$

Pour $\Lambda = R_{26,1}(A_1^8)$ et $M = R_{26,1}(A_1^8) + \mathbf{Z}$ on a

$$m(\Lambda, R_{24,3} + \mathbf{Z}^2) = 4, \quad m(\Lambda, R_{24,5} + \mathbf{Z}^2) = 12, \quad m(\Lambda, R_{24,7} + \mathbf{Z}^2) = 12,$$

$$m(M, \emptyset) = 61\ 440, \quad m(M, A_1 | \cap_2 = \emptyset) = 61\ 440, \quad m(M, 2A_2 | \cap_2 = \emptyset) = 0 \quad .$$

$\mathbf{R_{26,2}(A_1^8)}$: 122 880 automorphismes. Construction:

$$\frac{1}{37}(1, 1, 35, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 6, 7, 8, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 13, 14, 15, 15, 16, 17, 17, 18) \quad .$$

Pour $\Lambda = R_{26,2}(A_1^8)$ et $M = R_{26,2}(A_1^8) + \mathbf{Z}$ on a

$$\begin{array}{lll} m(\Lambda, R_{24,2} + \mathbf{Z}^2) = 1, & m(\Lambda, R_{24,3} + \mathbf{Z}^2) = 2, & m(\Lambda, R_{24,4} + \mathbf{Z}^2) = 5, \\ m(\Lambda, R_{24,5} + \mathbf{Z}^2) = 10, & m(\Lambda, R_{24,7} + \mathbf{Z}^2) = 10, & \end{array}$$

$$m(M, \emptyset) = 61\ 440, \quad m(M, A_1 | \cap_2 = \emptyset) = 61\ 440, \quad m(M, 2A_2 | \cap_2 = \emptyset) = 0 \quad .$$

Système de racine A_1^{10}. Série θ: $\theta_\Lambda(q) = 1 + 20q^2 + 3200q^3 + \ldots$.

$\mathbf{R_{26,1}(A_1^{10})}$: 65 536 automorphismes. Construction:

$$\frac{1}{37}(1,1,2,2,3,3,4,4,5,5,6,7,8,9,9,10,11,12,13,13,14,15,16,17,18,18) \quad .$$

Pour $\Lambda = R_{26,1}(A_1^{10})$ et $M = R_{26,1}(A_1^{10}) + \mathbf{Z}$ on a

$$\begin{array}{lll} m(\Lambda, R_{24,3}+\mathbf{Z}^2)=4, & m(\Lambda, R_{24,5}+\mathbf{Z}^2)=6, & m(\Lambda, R_{24,7}+\mathbf{Z}^2)=20, \\ m(\Lambda, R_{24,8}+\mathbf{Z}^2)=4, & m(\Lambda, R_{24,9}+\mathbf{Z}^2)=1, & m(\Lambda, R_{24,10}+\mathbf{Z}^2)=10 \end{array}$$

$$m(M,\emptyset)=24\ 576, \quad m(M, A_1|\cap_2=\emptyset)=m(M,2A_2|\cap_2=\emptyset)=0 \quad .$$

$\mathbf{R_{26,2}(A_1^{10})}$: 98 304 automorphismes. Construction:

$$\frac{1}{37}(1,1,2,2,3,3,4,4,5,5,6,6,7,8,8,9,10,11,12,13,14,15,21,17,17,18) \quad .$$

Pour $\Lambda = R_{26,2}(A_1^{10})$ et $M = R_{26,2}(A_1^{10}) + \mathbf{Z}$ on a

$$\begin{array}{lll} m(\Lambda, R_{24,4}+\mathbf{Z}^2)=3, & m(\Lambda, R_{24,5}+\mathbf{Z}^2)=8, & m(\Lambda, R_{24,7}+\mathbf{Z}^2)=24, \\ m(\Lambda, R_{24,8}+\mathbf{Z}^2)=6, & m(\Lambda, R_{24,11}+\mathbf{Z}^2)=4, & \end{array}$$

$$m(M,\emptyset)=24\ 576, \ m(M, A_1|\cap_2=\emptyset)=m(M,2A_2|\cap_2=\emptyset)=0 \quad .$$

$\mathbf{R_{26,3}(A_1^{10})}$: 98 304 automorphismes. Construction:

$$\frac{1}{37}(1,1,39,2,3,3,4,4,5,5,6,7,7,8,9,10,11,11,12,13,14,15,16,16,17,18) \quad .$$

Pour $\Lambda = R_{26,3}(A_1^{10})$ et $M = R_{26,3}(A_1^{10}) + \mathbf{Z}$ on a

$$\begin{array}{lll} m(\Lambda, R_{24,4}+\mathbf{Z}^2)=1, & m(\Lambda, R_{24,5}+\mathbf{Z}^2)=12, & m(\Lambda, R_{24,7}+\mathbf{Z}^2)=16, \\ m(\Lambda, R_{24,10}+\mathbf{Z}^2)=12, & m(\Lambda, R_{24,11}+\mathbf{Z}^2)=4, & \end{array}$$

$$m(M,\emptyset)=24\ 576, \quad m(M, A_1|\cap_2=\emptyset)=m(M,2A_2|\cap_2=\emptyset)=0 \quad .$$

$\mathbf{R_{26,4}(A_1^{10})}$: 655 360 automorphismes. Construction:

$$\frac{1}{37}(1,1,2,2,3,3,4,4,5,5,6,7,8,9,9,10,10,11,12,12,13,14,21,17,17,18) \quad .$$

Pour $\Lambda = R_{26,4}(A_1^{10})$ et $M = R_{26,4}(A_1^{10}) + \mathbf{Z}$ on a

$$m(\Lambda, R_{24,5}+\mathbf{Z}^2)=20, \quad m(\Lambda, R_{24,9}+\mathbf{Z}^2)=5, \quad m(\Lambda, R_{24,10}+\mathbf{Z}^2)=20,$$

$$m(M,\emptyset)=24\ 576, \quad m(M, A_1|\cap_2=\emptyset)=m(M,2A_2|\cap_2=\emptyset)=0 \quad .$$

$\mathbf{R_{26,5}(A_1^{10})}$: 12 582 912 automorphismes. Construction:

$$\frac{1}{41}(1,1,2,3,3,4,5,5,6,7,7,8,9,9,11,11,12,14,15,15,16,17,17,18,19,19) \quad .$$

Pour $\Lambda = R_{26,5}(A_1^{10})$ et $M = R_{26,5}(A_1^{10}) + \mathbf{Z}$ on a

$$\begin{array}{lll} m(\Lambda, R_{24,2}+\mathbf{Z}^2)=4, & m(\Lambda, R_{24,4}+\mathbf{Z}^2)=16, & m(\Lambda, R_{24,6}+\mathbf{Z}^2)=1, \\ m(\Lambda, R_{24,9}+\mathbf{Z}^2)=24, & & \end{array}$$

$$m(M,\emptyset)=57\ 344, \quad m(M, A_1|\cap_2=\emptyset)=m(M,2A_2|\cap_2=\emptyset)=0 \quad .$$

$\mathbf{R_{26,6}(A_1^{10})}$: 7 549 747 200 automorphismes. Construction:

$$\frac{1}{89}(1,2,2,3,4,4,5,5,8,8,9,13,14,14,19,21,21,23,31,31,33,35,39,47,47,55)$$

Pour $\Lambda = R_{26,5}(A_1^{10})$ et $M = R_{26,5}(A_1^{10}) + \mathbf{Z}$ on a

$$m(\Lambda, R_{24,2} + \mathbf{Z}^2) = 20, \quad m(\Lambda, R_{24,6} + \mathbf{Z}^2) = 25,$$

$$m(M, \emptyset) = 122\ 880, \quad m(M, A_1|\cap_2 = \emptyset) = m(M, 2A_2|\cap_2 = \emptyset) = 0 \quad .$$

Série θ exceptionnelle: $\theta_\Lambda(q) = 1 + 20q^2 + 1152q^3 + \ldots$.

$\mathbf{R_{26,7e}(A_1^{10})}$: 95 126 814 720 (?) automorphismes. Construction:

$$\frac{1}{67}(1,1,3,3,5,5,7,7,9,9,11,11,13,13,15,15,17,19,21,23,25,27,31,33,35,37) \quad .$$

Pour $\Lambda = R_{26,7e}(A_1^{10})$ et $M = R_{26,7e}(A_1^{10}) + \mathbf{Z}$ on a

$$m(\Lambda, R_{24,2} + \mathbf{Z}^2) = 36, \quad m(\Lambda, \psi + \mathbf{Z}^2) = 9,$$

$$m(M, \emptyset) = 122\ 880, \quad m(M, A_1|\cap_2 = \emptyset) = m(M, 2A_2|\cap_2 = \emptyset) = 0 \quad ,$$

(ψ dénote le réseau pair avec système de racine $24A_1$ en dimension 24).

Système de racine A_1^{12}. Série θ: $\theta_\Lambda(q) = 1 + 24q^2 + 3216q^3 + \ldots$.

$\mathbf{R_{26,1}(A_1^{12})}$: 131 072 automorphismes. Construction:

$$\frac{1}{29}(1,2,2,3,3,4,4,5,5,6,6,7,7,8,8,9,9,10,10,40,11,12,13,13,14,14) \quad .$$

Pour $\Lambda = R_{26,1}(A_1^{12})$ et $M = R_{26,1}(A_1^{12}) + \mathbf{Z}$ on a

$$\begin{array}{lll} m(\Lambda, R_{24,3} + \mathbf{Z}^2) = 1, & m(\Lambda, R_{24,4} + \mathbf{Z}^2) = 2, & m(\Lambda, R_{24,5} + \mathbf{Z}^2) = 4, \\ m(\Lambda, R_{24,7} + \mathbf{Z}^2) = 18, & m(\Lambda, R_{24,8} + \mathbf{Z}^2) = 8, & m(\Lambda, R_{24,10} + \mathbf{Z}^2) = 16, \\ m(\Lambda, R_{24,12} + \mathbf{Z}^2) = 1, & m(\Lambda, R_{24,13} + \mathbf{Z}^2) = 16, & \end{array}$$

$$m(M, \emptyset) = m(M, A_1|\cap_2 = \emptyset) = m(M, 2A_2|\cap_2 = \emptyset) = 0 \quad .$$

$\mathbf{R_{26,2}(A_1^{12})}$: 393 216 automorphismes. Construction:

$$\frac{1}{37}(1,1,2,2,3,3,4,5,5,6,7,8,8,9,9,10,11,11,12,13,14,15,16,17,18,18) \quad .$$

Pour $\Lambda = R_{26,2}(A_1^{12})$ et $M = R_{26,2}(A_1^{12}) + \mathbf{Z}$ on a

$$\begin{array}{lll} m(\Lambda, R_{24,5} + \mathbf{Z}^2) = 12, & m(\Lambda, R_{24,7} + \mathbf{Z}^2) = 12, & m(\Lambda, R_{24,9} + \mathbf{Z}^2) = 6, \\ m(\Lambda, R_{24,10} + \mathbf{Z}^2) = 12, & m(\Lambda, R_{24,13} + \mathbf{Z}^2) = 24, & \end{array}$$

$$m(M, \emptyset) = m(M, A_1|\cap_2 = \emptyset) = m(M, 2A_2|\cap_2 = \emptyset) = 0 \quad .$$

Système de racine A_1^{14}. Série θ: $\theta_\Lambda(q) = 1 + 28q^2 + 3232q^3 + \ldots$.

$\mathbf{R_{26,1}(A_1^{14})}$: 2 097 152 automorphismes. Construction:

$$\frac{1}{37}(1,1,2,2,3,3,4,4,5,5,6,6,7,7,8,8,9,11,11,13,14,22,16,17,17,18) \quad .$$

Pour $\Lambda = R_{26,1}(A_1^{14})$ et $M = R_{26,1}(A_1^{14}) + \mathbf{Z}$ on a

$$\begin{array}{lll} m(\Lambda, R_{24,4}+\mathbf{Z}^2) = 8, & m(\Lambda, R_{24,5}+\mathbf{Z}^2) = 2, & m(\Lambda, R_{24,7}+\mathbf{Z}^2) = 8, \\ m(\Lambda, R_{24,9}+\mathbf{Z}^2) = 8, & m(\Lambda, R_{24,10}+\mathbf{Z}^2) = 12, & m(\Lambda, R_{24,13}+\mathbf{Z}^2) = 32, \\ m(\Lambda, R_{24,16}+\mathbf{Z}^2) = 8, & m(\Lambda, R_{24,18}+\mathbf{Z}^2) = 4, & \\ \multicolumn{3}{l}{m(\Lambda, R_{24,14}+\mathbf{Z}^2) + m(\Lambda, R_{24,15}+\mathbf{Z}^2) = 9 \quad ,} \end{array}$$

$$m(M,\emptyset) = m(M, A_1|\cap_2 = \emptyset) = m(M, 2A_2|\cap_2 = \emptyset) = 0 \quad .$$

$\mathbf{R_{26,2}(A_1^{14})}$: 6 291 456 automorphismes. Construction:

$$\frac{1}{37}(1,1,2,2,3,3,4,4,5,5,6,6,7,7,9,10,10,11,12,13,13,22,16,16,17,17) \quad .$$

Pour $\Lambda = R_{26,2}(A_1^{14})$ et $M = R_{26,2}(A_1^{14}) + \mathbf{Z}$ on a

$$\begin{array}{lll} m(\Lambda, R_{24,4}+\mathbf{Z}^2) = 6, & m(\Lambda, R_{24,8}+\mathbf{Z}^2) = 16, & m(\Lambda, R_{24,9}+\mathbf{Z}^2) = 18, \\ m(\Lambda, R_{24,10}+\mathbf{Z}^2) = 24, & m(\Lambda, R_{24,14-15}+\mathbf{Z}^2) = 3, & m(\Lambda, R_{24,16}+\mathbf{Z}^2) = 24, \end{array}$$

$$m(M,\emptyset) = m(M, A_1|\cap_2 = \emptyset) = m(M, 2A_2|\cap_2 = \emptyset) = 0 \quad .$$

$\mathbf{R_{26,3}(A_1^{14})}$: 15 728 640 automorphismes. Construction:

$$\frac{1}{37}(1,1,2,2,40,3,4,4,5,5,6,6,7,7,9,10,10,12,12,13,13,14,14,17,18,18) \quad .$$

Pour $\Lambda = R_{26,3}(A_1^{14})$ et $M = R_{26,3}(A_1^{14}) + \mathbf{Z}$ on a

$$\begin{array}{lll} m(\Lambda, R_{24,5}+\mathbf{Z}^2) = 6, & m(\Lambda, R_{24,6}+\mathbf{Z}^2) = 1, & m(\Lambda, R_{24,8}+\mathbf{Z}^2) = 24, \\ m(\Lambda, R_{24,9}+\mathbf{Z}^2) = 30, & m(\Lambda, R_{24,18}+\mathbf{Z}^2) = 30, & \end{array}$$

$$m(M,\emptyset) = m(M, A_1|\cap_2 = \emptyset) = m(M, 2A_2|\cap_2 = \emptyset) = 0 \quad .$$

$\mathbf{R_{26,4}(A_1^{14})}$: 56 623 104 automorphismes. Construction:

$$\frac{1}{37}(1,1,2,2,3,3,4,4,5,5,6,6,7,7,8,8,9,9,11,11,24,15,16,16,17,18) \quad .$$

Pour $\Lambda = R_{26,4}(A_1^{14})$ et $M = R_{26,4}(A_1^{14}) + \mathbf{Z}$ on a

$$\begin{array}{lll} m(\Lambda, R_{24,3}+\mathbf{Z}^2) = 4, & m(\Lambda, R_{24,5}+\mathbf{Z}^2) = 6, & m(\Lambda, R_{24,10}+\mathbf{Z}^2) = 36, \\ m(\Lambda, R_{24,12}+\mathbf{Z}^2) = 36, & m(\Lambda, R_{24,14-15}+\mathbf{Z}^2) = 9, & \end{array}$$

$$m(M,\emptyset) = m(M, A_1|\cap_2 = \emptyset) = m(M, 2A_2|\cap_2 = \emptyset) = 0 \quad .$$

Système de racine A_1^{18}. Série θ: $\Lambda_\theta(q) = 1 + 36q^2 + 3264q^3 + \ldots$.

$\mathbf{R_{26,1}(A_1^{18})}$: 201 326 592 automorphismes. Construction:

$$\frac{1}{37}(1,1,2,2,40,3,4,4,5,5,6,6,7,7,8,8,9,9,13,13,15,15,16,17,17,18) \quad .$$

Pour $\Lambda = R_{26,1}(A_1^{18})$ et $M = R_{26,1}(A_1^{18}) + \mathbf{Z}$ on a

$$\begin{array}{lll} m(\Lambda, R_{24,4} + \mathbf{Z}^2) = 8, & m(\Lambda, R_{24,6} + \mathbf{Z}^2) = 4, & m(\Lambda, R_{24,9} + \mathbf{Z}^2) = 28, \\ m(\Lambda, R_{24,23} + \mathbf{Z}^2) = 12, & m(\Lambda, R_{24,25} + \mathbf{Z}^2) = 1, & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} m(\Lambda, R_{24,14} + \mathbf{Z}^2) + m(\Lambda, R_{24,15} + \mathbf{Z}^2) = 72, \\ m(\Lambda, R_{24,26} + \mathbf{Z}^2) + m(\Lambda, R_{24,30} + \mathbf{Z}^2) = 28 \quad . \end{array}$$

$\mathbf{R_{26,2}(A_1^{18})}$: 1 207 959 552 automorphismes. Construction:

$$\frac{1}{43}(1,1,2,2,3,3,4,4,5,5,6,6,8,8,10,10,11,11,14,15,15,17,25,25,19,20) \quad .$$

Pour $\Lambda = \mathbf{R_{26,2}(A_1^{18})}$ et $M = R_{26,2}(A_1^{18}) + \mathbf{Z}$ on a

$$m(\Lambda, R_{24,9} + \mathbf{Z}^2) = 72, \quad m(\Lambda, R_{24,25} + \mathbf{Z}^2) = 9,$$

$$m(\Lambda, R_{24,26} + \mathbf{Z}^2) + m(\Lambda, R_{24,30} + \mathbf{Z}^2) = 72 \quad .$$

Système de racine A_1^{26}**.** Série θ: $\Lambda_\theta(q) = 1 + 52q^2 + 3328q^3 + \ldots$.

$\mathbf{R_{26,1}(A_1^{26})}$: 753 766 760 448 automorphismes. Construction:

$$\frac{1}{47}(1,1,2,2,3,3,4,4,5,5,7,7,9,9,11,11,12,12,15,15,18,19,20,20,21,22) \quad .$$

Pour $\Lambda = R_{26,1}(A_1^{26})$ et $M = R_{26,1}(A_1^{26}) + \mathbf{Z}$ on a

$$m(\Lambda, R_{24,6} + \mathbf{Z}^2) = 52, \quad m(\Lambda, R_{24,25} + \mathbf{Z}^{\mathbf{2}}) = 156, \quad m(\Lambda, R_{24,50} + \mathbf{Z}^2) = 117 \quad .$$

Table 4. Réseaux entiers unimodulaires en dimension 27

Réseaux sans racine: Série θ: $\theta(q) = 1 + 2664q^3 + 101142q^4 + \ldots$.

$\mathbf{R_{27,1}}(\emptyset)$: 7 680 automorphismes. Construction et invariants (7 polynômes m_v):

$$\frac{1}{61}(1,2,3,5,6,7,53,9,10,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29) \quad ,$$

$$m_\Lambda(x) = 96x^6 + 240x^{10} + 96x^{14} + 3x^{18} \quad ,$$

$$n_4(a) = 384 + 5400a^2 + 13440a^4 + 16320a^6 + 11520a^8 + 3507a^{10} \quad ,$$

$$m(R_{27,1}(\emptyset) + \mathbf{Z}, \emptyset) = 11\ 002\ 424 \quad .$$

$\mathbf{R_{27,2}}(\emptyset)$: 3 317 760 automorphismes. Construction et invariants (2 polynômes m_v):

$$\frac{1}{71}(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,14,16,17,18,22,23,24,26,27,100,31,32,33,34,35) \quad .$$

$$m_\Lambda(x) = 24x^2 + 384x^{10} + 27x^{18} \quad ,$$

$$n_4(a) = 9720a^2 + 34560a^6 + 6291a^{10} \quad ,$$

$$m(R_{27,2}(\emptyset) + \mathbf{Z}, \emptyset) = 11\ 007\ 992 \quad .$$

Série θ exceptionnelle:
Série θ: $\theta(q) = 1 + 1640q^3 + 119574q^4 + \ldots$.
$\mathbf{R_{27,3e(\emptyset)}}$: 1 268 047 872 automorphismes. Construction et invariants (? polynômes m_v):

$$\frac{1}{97}(1,3,5,7,9,11,13,15,17,19,21,23,25,27,29,31,33,35,37,39,41,43,45,47,51,59,61) \quad .$$

$$m_\Lambda(x) = 288x^2 + 19x^{18} \quad ,$$

$$n_4(a) = 58968a^2 + 819a^{10} \quad ,$$

$$m(R_{27,3e(\emptyset)} + \mathbf{Z}, \emptyset) = 6\ 742\ 008 \quad .$$

Système de racine A_1: Série θ: $\theta(q) = 1 + 2q^2 + 2676q^3 + 101\ 118q^4 + \ldots$.

$\mathbf{R_{27,1}(A_1)}$: 1 296 automorphismes. Construction:

$$\frac{1}{59}(1,1,3,4,5,6,8,9,49,11,12,13,14,15,16,17,18,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29) \quad .$$

Pour $\Lambda = R_{27,1}(A_1)$ et $M = R_{27,1}(A_1) + \mathbf{Z}$ on obtient

$m(\Lambda, \emptyset + \mathbf{Z}) = 216,$ $m(\Lambda, 2A_1 + \mathbf{Z}|\cap_2 = \emptyset) = 2376,$ $m(\Lambda, 4A_1 + \mathbf{Z}|\cap_2 = \emptyset) = 5076,$
$m(\Lambda, 6A_1 + \mathbf{Z}|\cap_2 = \emptyset) = 4860,$ $m(\Lambda, 8A_1 + \mathbf{Z}|\cap_2 = \emptyset) = 1944,$

$$m(M, \emptyset) = 6\ 677\ 184 \quad .$$

Système de racine A_1^2. Série θ: $\theta(q) = 1 + 4q^2 + 2688q^3 + \ldots$.

$\mathbf{R_{27,1}(A_1^2)}$: 768 automorphismes. Construction:

$$\frac{1}{59}(1,1,2,3,4,5,65,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,18,19,20,21,23,24,27,28) \quad .$$

$$m(R_{27,1}(A_1^2), R_{25}(A_1^6)+\mathbf{Z}^2)=1,\quad m(R_{27,1}(A_1^2)+\mathbf{Z},\emptyset)=4\ 042\ 304\quad .$$

$$m(\Lambda,\emptyset+\mathbf{Z}^2)=96,\qquad m(\Lambda,2A_1+\mathbf{Z}|\cap_2=\emptyset)=1\ 000,$$
$$m(\Lambda,4A_1+\mathbf{Z}|\cap_2=\emptyset)=1\ 664,\quad m(\Lambda,6A_1+\mathbf{Z}|\cap_2=\emptyset)=872\quad .$$

$\mathbf{R_{27,2}(A_1^2)}$: 2 304 automorphismes. Construction:

$$\frac{1}{59}(1,1,2,62,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,23,25,25,26,29)\quad .$$

$$m(R_{27,2}(A_1^2), R_{25}(A_1^2)+\mathbf{Z}^2)=1,\quad m(R_{27,2}(A_1^2)+\mathbf{Z},\emptyset)=3\ 987\ 584\quad .$$

$$m(\Lambda,\emptyset+\mathbf{Z}^2)=144,\qquad m(\Lambda,2A_1+\mathbf{Z}|\cap_2=\emptyset)=1\ 216,$$
$$m(\Lambda,4A_1+\mathbf{Z}|\cap_2=\emptyset)=1\ 728,\quad m(\Lambda,6A_1+\mathbf{Z}|\cap_2=\emptyset)=576\quad .$$

$\mathbf{R_{27,3}(A_1^2)}$: 2 560 automorphismes. Construction:

$$\frac{1}{59}(1,1,2,3,4,5,6,7,7,8,9,10,11,47,46,14,15,16,17,19,20,22,23,24,26,27,29)\quad .$$

$$m(R_{27,3}(A_1^2), R_{25}(A_1^2)+\mathbf{Z}^2)=1,\quad m(R_{27,3}(A_1^2)+\mathbf{Z},\emptyset)=4\ 086\ 144\quad .$$

$$m(\Lambda,\emptyset+\mathbf{Z})=80,\qquad m(\Lambda,2A_1+\mathbf{Z}|\cap_2=\emptyset)=640,$$
$$m(\Lambda,4A_1+\mathbf{Z}|\cap_2=\emptyset)=1\ 600,\quad m(\Lambda,6A_1+\mathbf{Z}|\cap_2=\emptyset)=1\ 280\quad .$$

$\mathbf{R_{27,4}(A_1^2)}$: 3 840 automorphismes. Construction:

$$\frac{1}{59}(1,1,2,3,4,5,6,7,67,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,21,22,23,24,26)\quad .$$

$$m(R_{27,4}(A_1^2), R_{25}(A_1^6)+\mathbf{Z}^2)=1,\quad m(R_{27,4}(A_1^2)+\mathbf{Z},\emptyset)=4\ 044\ 416\quad .$$

$$m(\Lambda,\emptyset+\mathbf{Z})=48,\qquad m(\Lambda,2A_1+\mathbf{Z}|\cap_2=\emptyset)=1\ 184,$$
$$m(\Lambda,4A_1+\mathbf{Z}|\cap_2=\emptyset)=1\ 440,\quad m(\Lambda,6A_1+\mathbf{Z}|\cap_2=\emptyset)=960\quad .$$

Système de racine A_1^3. Série θ: $\theta(q)=1+6q^2+2700q^3+\ldots$.

$\mathbf{R_{27,1}(A_1^3)}$: 256 automorphismes. Construction:

$$\frac{1}{53}(1,1,2,2,3,4,4,5,6,7,8,9,10,12,13,14,15,16,17,19,20,21,22,23,24,78,26)\quad .$$

$$m(R_{27,1}(A_1^3), R_{25}(A_1^6)+\mathbf{Z}^2)=2,\quad m(R_{27,1}(A_1^3), R_{25}(A_1^{10})+\mathbf{Z}^2)=1,$$
$$m(R_{27,1}(A_1^3)+\mathbf{Z},\emptyset)=2\ 441\ 984\quad .$$

$\mathbf{R_{27,2}(A_1^3)}$: 1 536 automorphismes. Construction:

$$\frac{1}{53}(1,1,2,2,3,4,4,6,8,9,10,11,12,13,14,15,16,36,18,19,33,32,22,23,24,25,26)\quad .$$

$$m(R_{27,2}(A_1^3), R_{25}(A_1^2)+\mathbf{Z}^2)=1,\quad m(R_{27,2}(A_1^3), R_{25}(A_1^{10})+\mathbf{Z}^2)=2,$$
$$m(R_{27,2}(A_1^3)+\mathbf{Z},\emptyset)=2\ 437\ 376\quad .$$

$\mathbf{R_{27,3}(A_1^3)}$: 2 016 automorphismes. Construction:

$$\frac{1}{53}(1,1,55,3,3,4,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,26)\quad .$$

$$m(R_{27,3}(A_1^3), R_{25}(A_1^7A_2)+\mathbf{Z}^2)=3, \quad m(R_{27,3}(A_1^3)+\mathbf{Z},\emptyset)=2\ 494\ 464 \quad .$$

$\mathbf{R_{27,4}(A_1^3)}$: 11 520 automorphismes. Construction:

$$\frac{1}{53}(1,1,2,3,4,5,6,7,61,9,11,11,65,13,14,15,16,17,18,19,21,22,22,23,24,25,26) \quad .$$

$$m(R_{27,4}(A_1^3), R_{25}(A_1^2)+\mathbf{Z}^2)=1, \quad m(R_{27,4}(A_1^3), R_{25}(A_1^6)+\mathbf{Z}^2)=2,$$
$$m(R_{27,4}(A_1^3)+\mathbf{Z},\emptyset)=2\ 355\ 200 \quad .$$

Série θ exceptionnelle : $\theta_\Lambda(q)=1+6q^2+1676q^3+\ldots$.

$\mathbf{R_{27,5e}(A_1^3)}$: 12 096 000 automorphismes. Construction:

$$\frac{1}{83}(1,3,5,7,9,11,11,13,15,17,19,21,21,23,25,27,29,31,33,35,37,39,41,41,43,45,47) \quad .$$

$$m(R_{27,5}(A_1^3), R_{25}(A_1^2)+\mathbf{Z}^2)=3, \quad m(R_{27,5}(A_1^3)+\mathbf{Z},\emptyset)=2\ 016\ 000 \quad .$$

Système de racine A_1^4. Série θ: $\theta(q)=1+8q^2+2712q^3+\ldots$.

$\mathbf{R_{27,1}(A_1^4)}$: 256 automorphismes. Construction:

$$\frac{1}{47}(1,1,2,2,3,4,5,6,6,7,8,9,10,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,70) \quad ,$$

$$m(R_{27,1}(A_1^4), R_{25}(A_1^6)+\mathbf{Z}^2)=2, \quad m(R_{27,1}(A_1^4), R_{25}(A_1^{10})+\mathbf{Z}^2)=4,$$
$$m(R_{27,1}(A_1^4)+\mathbf{Z},\emptyset)=1\ 474\ 816 \quad .$$

$\mathbf{R_{27,2}(A_1^4)}$: 384 automorphismes. Construction:

$$\frac{1}{47}(1,1,2,2,3,4,5,41,7,8,9,10,11,12,13,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,22,23) \quad ,$$

$$m(R_{27,2}(A_1^4), R_{25}(A_1^6)+\mathbf{Z}^2)=2, \qquad m(R_{27,2}(A_1^4), R_{25}(A_1^{10})+\mathbf{Z}^2)=1,$$
$$m(R_{27,2}(A_1^4), R_{25}(A_1^7A_2)+\mathbf{Z}^2)=2, \quad m(R_{27,2}(A_1^4), R_{25}(A_1^{11}A_2)+\mathbf{Z}^2)=1,$$
$$m(R_{27,2}(A_1^4)+\mathbf{Z},\emptyset)=1\ 484\ 800 \quad .$$

$\mathbf{R_{27,3}(A_1^4)}$: 1 024 automorphismes. Construction:

$$\frac{1}{53}(1,1,2,3,4,5,5,47,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,33,21,21,23,23,27) \quad ,$$

$$m(R_{27,3}(A_1^4), R_{25}(A_1^6)+\mathbf{Z}^2)=1, \qquad m(R_{27,3}(A_1^4), R_{25}(A_1^7A_2)+\mathbf{Z}^2)=4,$$
$$m(R_{27,3}(A_1^4), R_{25}(A_1^8A_2^2)+\mathbf{Z}^2)=1, \quad m(R_{27,3}(A_1^4)+\mathbf{Z},\emptyset)=1\ 498\ 624 \quad .$$

$\mathbf{R_{27,4}(A_1^4)}$: 1 536 automorphismes. Construction:

$$\frac{1}{53}(1,1,2,3,4,5,5,6,7,8,9,10,42,42,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,23,23,25) \quad ,$$

$$m(R_{27,4}(A_1^4), R_{25}(A_1^6)+\mathbf{Z}^2)=3, \quad m(R_{27,4}(A_1^4), R_{25}(A_1^{10})+\mathbf{Z}^2)=3,$$
$$m(R_{27,4}(A_1^4)+\mathbf{Z},\emptyset)=1\ 442\ 816 \quad .$$

$\mathbf{R_{27,5}(A_1^4)}$: 7 680 automorphismes. Construction:

$$\frac{1}{53}(1,1,2,3,4,5,6,8,9,10,11,13,14,68,16,17,17,18,18,20,21,22,23,24,24,25,26) \quad ,$$

$$m(R_{27,5}(A_1^4), R_{25}(A_1^2)+\mathbf{Z}^2)=1, \qquad m(R_{27,5}(A_1^4), R_{25}(A_2^2)+\mathbf{Z}^2)=1,$$
$$m(R_{27,5}(A_1^4), R_{25}(A_1^7A_2)+\mathbf{Z}^2)=2, \quad m(R_{27,5}(A_1^4), R_{25}(A_1^{11}A_2)+\mathbf{Z}^2)=2,$$

$$m(R_{27,5}(A_1^4)+\mathbf{Z},\emptyset)=1\ 456\ 640 \quad .$$

$\mathbf{R_{27,6}(A_1^4)}$: 8 192 automorphismes. Construction:

$$\frac{1}{59}(1,1,2,3,4,5,6,66,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,17,18,18,19,19,21,25,28,29) \quad ,$$

$$m(R_{27,6}(A_1^4), R_{25}(A_2^2)+\mathbf{Z}^2)=2, \quad m(R_{27,6}(A_1^4), R_{25}(A_1^8A_2^2)+\mathbf{Z}^2)=4,$$
$$m(R_{27,6}(A_1^4)+\mathbf{Z},\emptyset)=1\ 517\ 568 \quad .$$

$\mathbf{R_{27,7}(A_1^4)}$: 12 288 automorphismes. Construction:

$$\frac{1}{59}(1,1,61,3,4,5,6,7,8,9,10,10,11,12,13,15,16,17,18,19,20,21,24,24,26,29,29) \quad ,$$

$$m(R_{27,7}(A_1^4), R_{25}(A_1^2)+\mathbf{Z}^2)=2, \qquad m(R_{27,7}(A_1^4), R_{25}(A_1^6)+\mathbf{Z}^2)=1,$$
$$m(R_{27,7}(A_1^4), R_{25}(A_1^{10})+\mathbf{Z}^2)=2, \quad m(R_{27,7}(A_1^4), R_{25}(A_1^{14})+\mathbf{Z}^2)=1,$$

$$m(R_{27,7}(A_1^4)+\mathbf{Z},\emptyset)=1\ 399\ 296 \quad .$$

$\mathbf{R_{27,8}(A_1^4)}$: 12 288 automorphismes. Construction:

$$\frac{1}{59}(1,1,2,3,4,5,6,7,7,8,9,10,48,47,13,13,14,15,16,17,18,20,22,25,26,29,29) \quad ,$$

$$m(R_{27,8}(A_1^4), R_{25}(A_1^6)+\mathbf{Z}^2)=4, \quad m(R_{27,8}(A_1^4), R_{25}(A_1^{14})+\mathbf{Z}^2)=2,$$
$$m(R_{27,8}(A_1^4)+\mathbf{Z},\emptyset)=1\ 467\ 392 \quad .$$

$\mathbf{R_{27,9}(A_1^4)}$: 16 384 automorphismes. Construction:

$$\frac{1}{53}(1,1,2,3,3,4,5,6,7,8,9,10,42,12,40,14,14,15,16,17,18,19,20,21,22,26,26) \quad ,$$

$$m(R_{27,9}(A_1^4), R_{25}(A_1^6)+\mathbf{Z}^2)=4, \quad m(R_{27,9}(A_1^4), R_{25}(A_1^{14})+\mathbf{Z}^2)=2,$$
$$m(R_{27,9}(A_1^4)+\mathbf{Z},\emptyset)=1\ 470\ 976 \quad .$$

$\mathbf{R_{27,10}(A_1^4)}$: 294 912 automorphismes. Construction:

$$\frac{1}{59}(1,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,10,11,12,46,16,41,19,19,20,21,23,25,26,26,27,29) \quad ,$$

$$m(R_{27,10}(A_1^4), R_{25}(A_1^8A_3)+\mathbf{Z}^2)=6, \quad m(R_{27,10}(A_1^4)+\mathbf{Z},\emptyset)=1\ 592\ 576 \quad .$$

$\mathbf{R_{27,11}(A_1^4)}$: 5 971 968 automorphismes. Construction:

$$\frac{1}{67}(1,1,2,2,70,4,5,6,7,8,9,10,13,14,15,16,18,20,22,23,24,25,26,29,30,31,32) \quad ,$$

$$m(R_{27,11}(A_1^4), R_{25}(A_2^2)+\mathbf{Z}^2)=6, \quad m(R_{27,11}(A_1^4)+\mathbf{Z},\emptyset)=1\ 366\ 016 \quad .$$

Table 5. Réseaux entiers unimodulaires sans racine en dimension 28.

Série θ: $\theta(q) = 1 + 2240q^3 + 98\ 280q^4 + \ldots$.

$\mathbf{R_{28,1}}(\emptyset)$: 8 automorphismes. Construction et invariants (304 polynômes m_v):

$$\frac{1}{67}(1,2,4,5,7,8,9,57,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,24,25,27,28,29,30,32,33) \quad ,$$

$$m_\Lambda(x) = 4 + 41x^2 + 50x^4 + 92x^6 + 68x^8 + 55x^{10} + 30x^{12} + 11x^{14} \quad ,$$

$$n_4(a) = 1056 + 3760a + 7020a^2 + 9232a^3 + 9348a^4 + 7732a^5 + 5440a^6 + 3140a^7 + 1568a^8 + 652a^9 + 132a^{10} + 60a^{11} \quad .$$

$\mathbf{R_{28,2}}(\emptyset)$: 16 automorphismes. Construction et invariants (144 polynômes m_v):

$$\frac{1}{67}(1,3,4,5,6,7,8,58,10,11,12,13,14,15,17,18,19,20,21,22,23,24,27,29,30,31,32,33) \quad ,$$

$$m_\Lambda(x) = 7 + 30x^2 + 59x^4 + 79x^6 + 77x^8 + 50x^{10} + 31x^{12} + 16x^{14} + 2x^{16} \quad ,$$

$$n_4(a) = 1020 + 3760a + 7048a^2 + 9152a^3 + 9204a^4 + 7832a^5 + 5656a^6 + 3304a^7 + 1460a^8 + 552a^9 + 112a^{10} + 40a^{11} \quad .$$

$\mathbf{R_{28,3}}(\emptyset)$: 16 automorphismes. Construction et invariants (147 polynômes m_v):

$$\frac{1}{67}(1,3,4,5,6,7,8,9,10,12,14,16,17,18,86,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29,30,31,32) \quad ,$$

$$m_\Lambda(x) = 4 + 34x^2 + 62x^4 + 77x^6 + 85x^8 + 46x^{10} + 30x^{12} + 10x^{14} + 3x^{16} \quad ,$$

$$n_4(v) = 1032 + 3744a + 7088a^2 + 9280a^3 + 9144a^4 + 7808a^5 + 5416a^6 + 3312a^7 + 1592a^8 + 496a^9 + 216a^{10} + 12a^{12} \quad .$$

$\mathbf{R_{28,4}}(\emptyset)$: 16 automorphismes. Construction et invariants (144 polynômes m_v):

$$\frac{1}{67}(1,2,5,6,8,9,10,12,13,14,15,16,17,18,19,47,21,22,23,24,25,27,28,29,30,31,32,33) \quad ,$$

Invariant:

$$m_\Lambda(x) = 5 + 32x^2 + 61x^4 + 73x^6 + 81x^8 + 52x^{10} + 33x^{12} + 10x^{14} + 4x^{16} \quad ,$$

$$n_4(v) = 1076 + 3760a + 6984a^2 + 9272a^3 + 9244a^4 + 7736a^5 + 5560a^6 + 3176a^7 + 1508a^8 + 616a^9 + 128a^{10} + 80a^{11} \quad .$$

$\mathbf{R_{28,5}}(\emptyset)$: 16 automorphismes. Construction et invariants (144 polynômes m_v):

$$\frac{1}{67}(68,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,24,26,28,30,32,33) \quad ,$$

$$m_\Lambda(x) = 5 + 26x^2 + 51x^4 + 85x^6 + 67x^8 + 54x^{10} + 39x^{12} + 18x^{14} + 6x^{16} \quad ,$$

$$n_4(a) = 1028 + 3760a + 7128a^2 + 9232a^3 + 9212a^4 + 7768a^5 + 5400a^6 + 3192a^7 + 1588a^8 + 648a^9 + 144a^{10} + 40a^{11} \quad .$$

$\mathbf{R_{28,6}}(\emptyset)$: 16 automorphismes. Construction et invariants (144 polynômes m_v):

$$\frac{1}{67}(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,80,14,82,16,17,18,19,20,25,26,27,29,30,31,32,33) \quad ,$$

$$m_\Lambda(x) = 7 + 24x^2 + 55x^4 + 74x^6 + 70x^8 + 62x^{10} + 33x^{12} + 23x^{14} + 3x^{16} \quad ,$$

$$\begin{aligned} &1076 + 3760a + 6952a^2 + 9232a^3 + 9428a^4 + 7776a^5 \\ &+5328a^6 + 3168a^7 + 1548a^8 + 672a^9 + 168a^{10} + 32a^{11} \quad . \end{aligned}$$

$\mathbf{R_{28,7}}(\emptyset)$: 24 automorphismes. Construction et invariants (117 polynômes m_v):

$$\frac{1}{67}(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,14,15,16,18,20,21,22,23,24,25,26,94,28,29,32,33) \quad ,$$

$$m_\Lambda(x) = 4 + 31x^2 + 61x^4 + 62x^6 + 82x^8 + 53x^{10} + 39x^{12} + 13x^{14} + 6x^{16} \quad ,$$

$$\begin{aligned} n_4(a) = &1036 + 3816a + 7086a^2 + 9116a^3 + 9465a^4 + 7764a^5 \\ &+5216a^6 + 3156a^7 + 1602a^8 + 532a^9 + 330a^{10} + 21a^{12} \quad . \end{aligned}$$

$\mathbf{R_{28,8}}(\emptyset)$: 32 automorphismes. Construction et invariants (79 polynômes m_v):

$$\frac{1}{61}(1,2,3,4,7,8,9,10,11,12,13,14,15,45,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29,30) \quad ,$$

$$m_\Lambda(x) = 6 + 30x^2 + 48x^4 + 85x^6 + 73x^8 + 54x^{10} + 38x^{12} + 14x^{14} + 3x^{16} \quad ,$$

$$\begin{aligned} &1084 + 3776a + 6864a^2 + 9088a^3 + 9356a^4 + 7984a^5 \\ &+5616a^6 + 3120a^7 + 1516a^8 + 592a^9 + 128a^{10} + 16a^{11} \quad . \end{aligned}$$

$\mathbf{R_{28,9}}(\emptyset)$: 32 automorphismes. Construction et invariants (98 polynômes m_v):

$$\frac{1}{67}(1,2,3,4,5,61,7,8,9,10,12,13,14,15,16,18,19,20,21,22,24,25,26,27,29,30,31,33) \quad ,$$

$$m_\Lambda(x) = 8 + 32x^2 + 49x^4 + 72x^6 + 92x^8 + 51x^{10} + 33x^{12} + 11x^{14} + 2x^{16} + x^{18} \quad ,$$

$$\begin{aligned} n_4(a) = &1040 + 3808a + 7032a^2 + 8992a^3 + 9396a^4 + 8016a^5 \\ &+5304a^6 + 3264a^7 + 1512a^8 + 496a^9 + 272a^{10} + 8a^{12} \quad . \end{aligned}$$

$\mathbf{R_{28,10}}(\emptyset)$: 32 automorphismes. Construction et invariants (103 polynômes m_v):

$$\frac{1}{67}(1,2,3,4,5,6,60,9,10,11,12,13,14,15,16,17,19,20,21,23,24,25,26,27,28,31,32,33) \quad ,$$

$$m_\Lambda(x) = 4 + 48x^2 + 48x^4 + 77x^6 + 84x^8 + 60x^{10} + 24x^{12} + 6x^{14} \quad ,$$

$$\begin{aligned} n_4(a) = &1108 + 3648a + 7152a^2 + 9104a^3 + 9138a^4 + 8064a^5 \\ &+5384a^6 + 3216a^7 + 1560a^8 + 544a^9 + 216a^{10} + 6a^{12} \quad . \end{aligned}$$

$\mathbf{R_{28,11}}(\emptyset)$: 32 automorphismes. Construction et invariants (79 polynômes m_v):

$$\frac{1}{71}(1,2,3,4,76,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,21,22,24,25,27,29,31,33,34) \quad ,$$

$$m_\Lambda(x) = 8 + 26x^2 + 50x^4 + 90x^6 + 71x^8 + 49x^{10} + 36x^{12} + 17x^{14} + 3x^{16} + x^{18} \quad ,$$

$$\begin{aligned} n_4(a) = &1020 + 3776a + 7168a^2 + 9312a^3 + 9340a^4 + 7568a^5 \\ &+5296a^6 + 3088a^7 + 1564a^8 + 752a^9 + 176a^{10} + 80a^{11} \quad . \end{aligned}$$

$\mathbf{R_{28,12}}(\emptyset)$: 64 automorphismes. Construction et invariants (43 polynômes m_v):

$$\frac{1}{67}(1,65,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,18,19,20,21,22,23,24,26,27,28,29,30,31) \quad ,$$

$$m_\Lambda(x) = 12 + 22x^2 + 48x^4 + 63x^6 + 90x^8 + 54x^{10} + 36x^{12} + 20x^{14} + 6x^{16} \quad ,$$

$$n_4(a) = 1120 + 3712a + 6880a^2 + 9280a^3 + 9396a^4 + 7744a^5$$
$$+5440a^6 + 3264a^7 + 1504a^8 + 576a^9 + 224a^{10} \quad .$$

$\mathbf{R_{28,13}}(\emptyset)$: 96 automorphismes. Construction et invariants (39 polynômes m_v):

$$\frac{1}{67}(66, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 29, 31, 33) \quad ,$$

$$m_\Lambda(x) = 4 + 29x^2 + 58x^4 + 70x^6 + 83x^8 + 51x^{10} + 34x^{12} + 17x^{14} + 5x^{16} \quad ,$$

$$n_4(a) = 1008 + 3808a + 7200a^2 + 8832a^3 + 9372a^4 + 8160a^5$$
$$+5112a^6 + 3312a^7 + 1560a^8 + 528a^9 + 248a^{10} \quad .$$

$\mathbf{R_{28,14}}(\emptyset)$: 96 automorphismes. Construction et invariants (37 polynômes m_v):

$$\frac{1}{71}(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 22, 26, 27, 30, 32, 33, 34, 106) \quad ,$$

$$m_\Lambda(x) = 4 + 29x^2 + 65x^4 + 83x^6 + 84x^8 + 45x^{10} + 27x^{12} + 10x^{14} + 4x^{16} \quad ,$$

$$984 + 3968a + 6792a^2 + 8712a^3 + 9908a^4 + 8088a^5$$
$$+5064a^6 + 3368a^7 + 1608a^8 + 504a^9 + 144a^{10} \quad .$$

$\mathbf{R_{28,15}}(\emptyset)$: 112 automorphismes. Construction et invariants (24 polynômes m_v):

$$\frac{1}{71}(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 24, 27, 28, 32, 33, 34, 106) \quad ,$$

$$m_\Lambda(x) = 11 + 25x^2 + 56x^4 + 75x^6 + 88x^8 + 57x^{10} + 22x^{12} + 10x^{14} + 7x^{16} \quad ,$$

$$n_4(a) = 980 + 3920a + 7056a^2 + 9184a^3 + 9380a^4 + 7728a^5$$
$$+5432a^6 + 2912a^7 + 1484a^8 + 784a^9 + 168a^{10} + 112a^{11} \quad .$$

$\mathbf{R_{28,16}}(\emptyset)$: 160 automorphismes. Construction et invariants (20 polynômes m_v):

$$\frac{1}{67}(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 20, 22, 23, 91, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 33) \quad ,$$

$$m_\Lambda(x) = 8 + 29x^2 + 49x^4 + 77x^6 + 80x^8 + 46x^{10} + 43x^{12} + 14x^{14} + 4x^{16} + x^{18} \quad ,$$

$$n_4(a) = 960 + 4000a + 6960a^2 + 9480a^3 + 9260a^4 + 7560a^5$$
$$+5200a^6 + 3080a^7 + 1680a^8 + 520a^9 + 400a^{10} + 40a^{12} \quad .$$

$\mathbf{R_{28,17}}(\emptyset)$: 192 automorphismes. Construction et invariants (28 polynômes m_v):

$$\frac{1}{67}(1, 2, 3, 71, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30) \quad ,$$

$$m_\Lambda(x) = 2 + 36x^2 + 72x^4 + 67x^6 + 84x^8 + 36x^{10} + 42x^{12} + 12x^{14} \quad ,$$

$$n_4(a) = 1032 + 3712a + 7416a^2 + 8304a^3 + 9668a^4 + 7776a^5$$
$$+5760a^6 + 3680a^7 + 1296a^8 + 144a^9 + 328a^{10} + 24a^{12} \quad .$$

$\mathbf{R_{28,18}}(\emptyset)$: 192 automorphismes. Construction et invariants (18 polynômes m_v):

$$\frac{1}{67}(1, 2, 3, 71, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 33) \quad ,$$

$$m_\Lambda(x) = 4 + 36x^2 + 52x^4 + 78x^6 + 76x^8 + 58x^{10} + 32x^{12} + 11x^{14} + 4x^{16} \quad ,$$

$$n_4(a) = 1016 + 3456a + 7680a^2 + 9344a^3 + 8400a^4 + 8256a^5$$
$$+5472a^6 + 3072a^7 + 1776a^8 + 448a^9 + 192a^{10} + 28a^{12} \quad .$$

$\mathbf{R_{28,19}}(\emptyset)$: 256 automorphismes. Construction et invariants (17 polynômes m_v):

$$\frac{1}{71}(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,18,19,20,22,24,25,26,29,30,33,34,106) \quad ,$$

$$m_\Lambda(x) = 12 + 24x^2 + 42x^4 + 77x^6 + 68x^8 + 68x^{10} + 34x^{12} + 22x^{14} + 4x^{16} \quad ,$$

$$n_4(a) = 992 + 3840a + 7104a^2 + 9088a^3 + 9396a^4 + 7680a^5$$
$$+5248a^6 + 3456a^7 + 1632a^8 + 512a^9 + 192a^{10} \quad .$$

$\mathbf{R_{28,20}}(\emptyset)$: 256 automorphismes. Construction et invariants (18 polynômes m_v):

$$\frac{1}{67}(1,2,3,4,5,6,7,59,9,10,11,12,13,14,15,18,20,21,23,24,25,26,27,28,29,30,31,32) \quad ,$$

$$m_\Lambda(x) = 8 + 20x^2 + 48x^4 + 75x^6 + 72x^8 + 64x^{10} + 40x^{12} + 16x^{14} + 8x^{16} \quad ,$$

$$n_4(a) = 1116 + 3840a + 6720a^2 + 8960a^3 + 9436a^4 + 8128a^5$$
$$+5728a^6 + 3008a^7 + 1468a^8 + 576a^9 + 96a^{10} + 64a^{11} \quad .$$

$\mathbf{R_{28,21}}(\emptyset)$: 320 automorphismes. Construction et invariants (14 polynômes m_v):

$$\frac{1}{73}(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,15,16,18,19,21,23,24,25,28,29,30,105,33,35,36) \quad ,$$

$$m_\Lambda(x) = 10 + 25x^2 + 55x^4 + 59x^6 + 69x^8 + 57x^{10} + 39x^{12} + 26x^{14} + 11x^{16} \quad ,$$

$$n_4(a) = 1040 + 3680a + 7200a^2 + 9520a^3 + 9500a^4 + 7440a^5$$
$$+4840a^6 + 3200a^7 + 1560a^8 + 800a^9 + 360a^{10} \quad .$$

$\mathbf{R_{28,22}}(\emptyset)$: 400 automorphismes. Construction et invariants (10 polynômes m_v):

$$\frac{1}{71}(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,19,20,23,26,27,99,29,30,31,33,34,35) \quad ,$$

$$m_\Lambda(x) = 5 + 25x^2 + 54x^4 + 78x^6 + 76x^8 + 55x^{10} + 28x^{12} + 25x^{14} + 5x^{16} \quad ,$$

$$n_4(a) = 1180 + 3600a + 6960a^2 + 9400a^3 + 9300a^4 + 7720a^5$$
$$+5200a^6 + 3320a^7 + 1700a^8 + 600a^9 + 160a^{10} \quad .$$

$\mathbf{R_{28,23}}(\emptyset)$: 512 automorphismes. Construction et invariants (13 polynômes m_v):

$$\frac{1}{73}(1,75,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,17,18,22,23,24,26,27,28,30,104,34,35,36) \quad ,$$

$$m_\Lambda(x) = 8 + 35x^2 + 50x^4 + 65x^6 + 97x^8 + 45x^{10} + 36x^{12} + 12x^{14} + x^{16} + 2x^{18} \quad ,$$

$$n_4(a) = 984 + 3584a + 7936a^2 + 8960a^3 + 8480a^4 + 8704a^5$$
$$+4928a^6 + 2816a^7 + 1792a^8 + 512a^9 + 384a^{10} + 60a^{12} \quad .$$

$\mathbf{R_{28,24}}(\emptyset)$: 768 automorphismes. Construction et invariants (13 polynômes m_v):

$$\frac{1}{73}(1,2,3,4,5,6,7,8,10,11,13,16,17,18,20,21,23,24,48,47,27,29,30,31,32,33,35,36) \quad ,$$

$$m_\Lambda(x) = 8 + 20x^2 + 64x^4 + 79x^6 + 36x^8 + 74x^{10} + 40x^{12} + 16x^{14} + 12x^{16} + 2x^{18} \quad ,$$

$$n_4(a) = 1052 + 3840a + 7136a^2 + 9472a^3 + 9340a^4 + 7488a^5 + 5152a^6 + 2880a^7 + 1564a^8 + 704a^9 + 320a^{10} + 192a^{11} \quad .$$

$\mathbf{R_{28,25}}(\emptyset)$: 1 728 automorphismes. Construction et invariants (7 polynômes m_v):

$$\frac{1}{73}(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,18,19,20,22,25,27,29,30,31,33,35,109) \quad ,$$

$$m_\Lambda(x) = 18 + 18x^2 + 126x^6 + 36x^8 + 18x^{12} + 135x^{14} \quad ,$$

$$n_4(a) = 864 + 3744a + 7632a^2 + 8640a^3 + 9900a^4 + 7488a^5 + 4968a^6 + 3312a^7 + 1944a^8 + 432a^9 + 216a^{10} \quad .$$

$\mathbf{R_{28,26}}(\emptyset)$: 6 144 automorphismes. Construction et invariants (5 polynômes m_v):

$$\frac{1}{79}(1,77,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,16,17,21,23,24,25,26,27,29,31,33,45,35,39) \quad ,$$

$$m_\Lambda(x) = 40x^2 + 64x^4 + 83x^6 + 80x^8 + 56x^{10} + 16x^{12} + 12x^{14} \quad ,$$

$$n_4(a) = 768 + 4096a + 7104a^2 + 7680a^3 + 9812a^4 + 9216a^5 + 5376a^6 + 3584a^7 + 1248a^8 + 256a^{10} \quad .$$

$\mathbf{R_{28,27}}(\emptyset)$: 7 680 automorphismes. Construction et invariants (2 polynômes m_v):

$$\frac{1}{118}(1,4,5,6,12,14,15,16,17,18,20,23,24,26,27,28,29,37,38,46,48,50,51,56,58,59,69,93) \quad ,$$

$$m_\Lambda(x) = 6 + 27x^2 + 36x^4 + 105x^6 + 51x^8 + 27x^{10} + 42x^{12} + 48x^{14} + 9x^{16} \quad ,$$

$$n_4(a) = 1192 + 3840a + 6720a^2 + 7680a^3 + 13560a^4 + 6528a^5 + 2240a^6 + 3840a^7 + 2880a^8 + 640a^9 + 20x^{12} \quad .$$

$\mathbf{R_{28,28}}(\emptyset)$: 15 360 automorphismes. Construction et invariants (7 polynômes m_v):

$$\frac{1}{79}(1,2,3,4,5,6,7,8,9,89,11,12,13,15,16,17,21,104,26,27,29,30,31,33,34,36,37,39) \quad ,$$

$$m_\Lambda(x) = 54x^2 + 135x^6 + 130x^{10} + 30x^{14} + 2x^{22} \quad ,$$

$$n_4(a) = 2600 + 12288a^2 + 21240a^4 + 8940a^6 + 3840a^8 + 212a^{12} \quad .$$

$\mathbf{R_{28,29}}(\emptyset)$: 15 552 automorphismes. Construction et invariants (5 polynômes m_v):

$$\frac{1}{73}(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,17,18,19,21,22,23,25,26,27,28,33,107,35,36) \quad ,$$

$$m_\Lambda(x) = 14 + 20x^2 + 18x^4 + 80x^6 + 100x^8 + 63x^{10} + 36x^{12} + 15x^{14} + 5x^{18} \quad ,$$

$$n_4(a) = 1080 + 4608a + 6264a^2 + 6048a^3 + 11772a^4 + 9072a^5 + 5184a^6 + 3888a^7 + 864a^8 + 360a^{10} \quad .$$

$\mathbf{R_{28,30}}(\emptyset)$: 55 296 automorphismes. Construction et invariants (4 polynômes m_v):

$$\frac{1}{118}(1,2,3,4,5,6,9,10,11,12,13,16,19,20,23,27,29,33,34,40,41,49,51,52,58,59,92,97) \quad ,$$

$$m_\Lambda(x) = 72x^2 + 45x^6 + 72x^8 + 36x^{10} + 72x^{12} + 54x^{14} \quad ,$$

$$n_4(a) = 6144a + 6912a^2 + 4608a^3 + 13428a^4 + 9216a^5$$
$$+2304a^6 + 4608a^7 + 1152a^8 + 768a^{10} \quad .$$

$\mathbf{R_{28,31}}(\emptyset)$: 96 768 automorphismes. Construction et invariants (2 polynômes m_v):

$$\frac{1}{106}(1,5,7,8,12,15,16,17,18,19,21,23,27,30,32,33,39,40,42,43,44,47,48,49,52,53,55,56) \quad ,$$

$$m_\Lambda(x) = 48x^2 + 168x^6 + 48x^{10} + 84x^{14} + 3x^{22} \quad ,$$
$$n_4(a) = 2520 + 12096a^2 + 24192a^4 + 4032a^6 + 6048a^8 + 252x^{12} \quad .$$

$\mathbf{R_{28,32}}(\emptyset)$: 116 480 automorphismes. Construction et invariants (1 polynôme m_v):

$$\frac{1}{73}(1,2,3,4,5,6,7,65,9,10,11,12,13,14,17,18,20,21,22,26,27,29,30,31,33,34,35,36) \quad ,$$

$$m_\Lambda(x) = 52x^2 + 117x^6 + 156x^{10} + 26x^{14} \quad ,$$
$$n_4(a) = 1820 + 14560a^2 + 16380a^4 + 14560a^6 + 1820a^8 \quad .$$

$\mathbf{R_{28,33}}(\emptyset)$: 344 064 automorphismes. Construction et invariants (2 polynômes m_v):

$$\frac{1}{113}(1,116,4,5,6,7,12,16,17,19,20,21,23,24,27,28,29,30,33,34,35,37,42,45,46,48,49,55) \quad ,$$

$$m_\Lambda(x) = 48x^2 + 174x^6 + 48x^{10} + 72x^{14} + 9x^{22} \quad ,$$
$$n_4(a) = 3080 + 10752a^2 + 25704a^4 + 3584a^6 + 5376a^8 + 644a^{12} \quad .$$

$\mathbf{R_{28,34}}(\emptyset)$: 9 676 800 automorphismes. Construction et invariants (1 polynôme m_v):

$$\frac{1}{197}(1,4,5,6,17,19,21,22,23,24,28,29,30,165,33,161,40,43,53,59,61,62,65,71,76,83,93,95) \quad ,$$

$$m_\Lambda(x) = 72x^2 + 135x^6 + 144x^{14} \quad ,$$
$$n_4(a) = 20160a^2 + 18900a^4 + 10080a^8 \quad .$$

$\mathbf{R_{28,35}}(\emptyset)$: 696 729 600 automorphismes. Construction et invariants (1 polynôme m_v):

$$\frac{1}{113}(1,3,4,108,7,10,12,16,19,20,21,23,27,28,29,30,33,34,35,37,38,39,40,43,47,48,49,54) \quad ,$$

$$m_\Lambda(x) = 270x^6 + 81x^{22} \quad ,$$
$$n_4(a) = 7560 + 37800a^4 + 3780x^{12} \quad .$$

$\mathbf{R_{28,36}}(\emptyset)$: 18 341 406 720 automorphismes. Construction et invariants (1 polynôme m_v):

$$\frac{1}{113}(1,2,4,7,8,9,102,13,14,15,16,18,22,25,26,28,30,31,32,36,41,44,49,50,51,52,53,56) \quad ,$$

$$m_\Lambda(x) = 351x^6 \quad ,$$
$$n_4(a) = 49140a^4 \quad .$$

Série θ exceptionnelle:
Série θ: $\theta(q) = 1 + 1728q^3 + 106\,472q^4 + \ldots$

$\mathbf{R_{28,37e}}(\emptyset)$: 7 680 automorphismes. Construction et invariants (2 polynômes m_v):

$$\frac{1}{89}(1,3,5,7,9,11,13,15,17,19,21,23,25,27,29,31,33,35,37,39,41,43,45,47,53,57,59,61) \quad ,$$

$$m_\Lambda(x) = 30 + 65x^2 + 110x^4 + 45x^6 + 5x^8 + 17x^{10} + 15x^{16} \quad ,$$
$$n_4(a) = 3528 + 11520a + 16320a^2 + 14080a^3 + 5400a^4 + 384a^5 + 1344a^6 + 640a^9 + 20a^{12} \quad .$$

$\mathbf{R_{28,38e}}(\emptyset)$: 3 317 760 automorphismes. Construction et invariants (1 polynôme m_v):

$$\frac{1}{101}(1,3,5,7,9,11,13,15,17,19,21,23,27,29,31,33,35,37,39,43,45,49,53,55,57,59,71,83) \quad ,$$

$$m_\Lambda(x) = 160x^2 + 90x^6 + 32x^{10} + 5x^{22} \quad ,$$
$$n_4(a) = 6472 + 34560a^2 + 9720a^4 + 2304a^6 + 180a^{12} \quad .$$

Table 6. Réseaux pairs de déterminant 4 sans racine en dimension 28.

Réseaux unimodulaires associés	Nombre d'automorphismes
$3R_{28,1}$	24
$3R_{28,2}$	48
$3R_{28,3}$	48
$R_{28,4} + R_{28,5} + R_{28,6}$	16
$3R_{28,7}$	72
$3R_{28,8}$	96
$3R_{28,9}$	96
$3R_{28,10}$	96
$3R_{28,11}$	96
$3R_{28,12}$	192
$3R_{28,13}$	288
$2R_{28,14} + R_{28,17}$	192
$3R_{28,15}$	336
$2R_{28,16} + R_{28,21}$	320
$3R_{28,18}$	576
$3R_{28,19}$	768
$3R_{28,20}$	768
$3R_{28,22}$	1200
$3R_{28,23}$	1536
$3R_{28,24}$	2304
$3R_{28,25}$	5184
$3R_{28,26}$	18432
$2R_{28,27} + R_{28,28}$	15360
$3R_{28,29}$	46656
$3R_{28,30}$	165888
$3R_{28,31}$	290304
$3R_{28,32}$	349440
$3R_{28,33}$	1032192
$3R_{28,34}$	29030400
$3R_{28,35}$	2090188800
$3R_{28,36}$	55024220160
$2R_{28,37e} + (R_{27,1}(\emptyset) + \mathbf{Z})$	15360
$2R_{28,38e} + (R_{27,2}(\emptyset) + \mathbf{Z})$	6635520