Een onvoorstelbaar lang woord

Dion Gijswijt

Dit stukje gaat over woorden. Normaal gesproken moeten woorden een betekenis hebben, maar onze woorden mogen van alles zijn. Ieder rijtje letters noemen we een woord. Als we bijvoorbeeld alleen de letters ‘a’ en ‘b’ willen gebruiken dan is W een prima voorbeeld van een woord:

$$W = abaababa$$

In dit stukje gaan we dit soort woorden ophakken in *blokken*. De eerste twee letters van W vormen het eerste blok, letter 2 tot en met 4 vormen het tweede blok, letter 3 tot en met 6 vormen het derde blok enzovoort. Het woord W heeft bijvoorbeeld vier blokken:

$$W(1) = ab$$

$$W(2) = baa$$

$$W(3) = aaba$$

$$W(4) = ababa$$

Er bestaat geen vijfde blok $W(5)$, want W heeft maar 9 letters.
Als je goed kijkt, dan zie je dat het tweede blok een deel is van het vierde blok: de tweede, derde en vijfde letter van $W(4)$ vormen samen het blok $W(2)$. Of anders gezegd: als je de eerste en de vierde letter van het vierde blok wegstreept, dan hou je precies het tweede blok over.

$$\cancel{a}\;b\;a\;\cancel{b}\;a$$
$$\downarrow$$
$$b\;a\;a$$

In het algemeen zeggen we dat een blok een deel is van een ander blok, als je het krijgt door van dat andere blok een aantal letters te verwijderen. Zo is $W(1)$ een deel van $W(3)$ en $W(4)$, maar niet van $W(2)$.

OPGAVE 1. Ga van de blokken $W(2)$ en $W(3)$ na of ze een deel zijn van een ander blok.

OPGAVE 2. De woorden U en V zijn gegeven door: $U = ababab$ en $V = aabbba$. Ga na dat van elk tweetal blokken van U de grootste een deel is van de kleinere. Is er een blok van V dat een deel is van een ander blok van V?

Speciale woorden

We hebben gezien dat je bij een gegeven woord een aantal blokken kunt maken en dat zo’n blok soms een deel van een ander blok kan zijn. Het woord $V = aabbba$ in de vorige opgave had de bijzondere eigenschap dat geen enkel blok een deel van een ander blok was. Zijn er nog meer van deze *speciale* woorden? Ja, bijvoorbeeld het woord $aabba$. Als je zo’n speciaal woord hebt, dan vormen de eerste zoveel letters van dat woord natuurlijk ook een speciaal woord en woorden van lengte 3 zijn altijd speciaal (zie je waarom?). Korte speciale woorden zijn dus makkelijk te vinden en de echte kunst is om zo lang mogelijke speciale woorden te vinden. De grote vraag is: **Wat is het langste speciale woord?**

Een voorbeeld

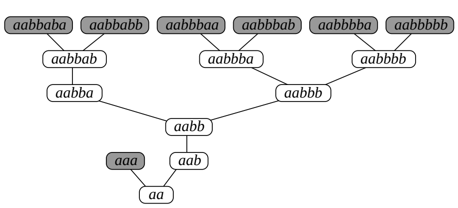
We beginnen met het woord $W = aabba$. Dit is een speciaal woord van lengte 5 met twee blokken:

$$W(1) = aa$$

en

$$W(2) = abb$$

. Laten we eens proberen of we dit woord kunnen uitbreiden tot een langer speciaal woord. Als we achter W nog een a plakken, dan ontstaat een woord van lengte 6, en daarmee ook een nieuw blok: $bbaa$. Maar nu is het eerste blok (aa) een deel van dit derde blok, en dat willen we niet. Als we W echter met een b uitbreiden, dan gaat het wel goed: het derde blok wordt dan $bbab$ en noch aa noch abb is hier een deel van. We hebben nu dus een speciaal woord $W' = aabbab$ van lengte 6.
Nu kunnen we W' met een a uitbreiden zodat we $aabbaba$ krijgen. Dit gaat goed want er komt geen nieuw blok bij omdat de lengte nu oneven is. Dus $W'' = aabbaba$ is een speciaal woord van lengte 7.
Als we nu W'' met een a of een b uitbreiden, dan komt er een vierde blok bij, dat in het eerste geval $babaa$ is en in het tweede geval $babab$. In beide gevallen is het eerste blok aa een deel van dit vierde blok. Het woord W'' kunnen we dus niet verder uitbreiden, we zijn op een dood spoor gekomen. Misschien hadden we door geen a maar een b aan W' vast te plakken meer geluk gehad. In de volgende figuur zie je een hele boom van alle mogelijke speciale woorden die beginnen met aa.



OPGAVE 3. Het langste speciale woord dat begint met aa heeft volgens het schema lengte 7. Bepaal, zonder te proberen, wat de lengte is van het langste speciale woord dat begint met bb. Om het langste speciale woord te vinden hoeven we dus alleen nog de woorden te onderzoeken die beginnen met ab.

Het maken van een boom voor de speciale woorden die beginnen met ab, laten we aan de lezer over. In plaats van met de hand kun je dit probleem ook heel makkelijk met de computer oplossen. Je vindt dan het volgende resultaat:

Stelling. *Elk speciaal woord bestaande uit twee letters heeft hoogstens lengte 11 en $abbbaaaaaaa$ is zo'n speciaal woord van lengte 11.*

De blokken van dit woord zijn ab, bbb, $bbaa$, $baaaa$ en $aaaaaa$. Zoals je ziet is inderdaad geen enkel blok een deel van een ander blok. Als je nog een extra letter zou toevoegen, dan ontstaat er een zesde blok $aaaaaa*$ en is het vijfde blok een deel van het zesde blok. Het woord is dus niet verder uit te breiden.

Drie of meer letters

Als je drie of zelfs meer letters mag gebruiken, dan kun je veel langere speciale woorden maken, bijvoorbeeld: $abbbaaaaaaacccccccccc$ van lengte 20. Als je eventjes probeert, of de computer aan het werk zet, dan zul je merken dat je echt enorm lange speciale woorden kunt maken. Je kunt je dan ook afvragen of er misschien wel speciale woorden van willekeurige lengte zijn, en er geen langste woord is. Of nog erger, misschien is er wel een oneindig lang speciaal woord, met oneindig veel blokken, waarvan geen enkele een deel is van een andere! De wiskundige Harvey Friedman heeft echter het volgende verrassende feit kunnen bewijzen:

Stelling. *Voor elk aantal letters is er een speciaal woord van maximale lengte.*

In het geval van 3 letters is er dus ook een langste speciaal woord. Deze lengte is echter enorm groot. Niet alleen is het onmogelijk om zo'n langste woord met de hand te vinden, het is zelfs onmogelijk om het met de grootste supercomputer te doen. Deze maximale lengte is zelfs zo groot dat het onmogelijk is om het getal op te schrijven omdat het getal meer cijfers heeft dan er atomen in het heelal zijn!

De functie van Ackermann

Wie de 'Tabel van Ackermann' uit het vorige nummer heeft gelezen, herinnert zich misschien nog wel dat de getallen uit de tweede rij niet zo snel groeiden, de getallen uit de derde rij al behoorlijk snel groot werden, en het derde getal van de vierde rij al duizenden cijfers had. Volgens Friedman is zelfs het getal in de *zevenduizendste* rij op de *honderdduizendste* plaats in de tabel van Ackermann nog veel en veel kleiner dan de lengte van het langste speciale woord met drie letters. Voor vier letters is de lengte van het langste woord zo enorm dat zelfs de tabel van Ackermann tekort schiet. Als n_1 het miljoenste getal van de miljoenste kolom uit de Ackermann tabel is, en n_2 het n_1-de getal uit de n_1-de rij, en n_3 het n_2-de getal uit de n_2-de rij enzovoorts, dan komt het miljoenste getal uit deze rij, $n_{1000000}$, nog lang niet in de buurt van de lengte van het langste speciale woord van 4 letters. Het langste speciale woord met 26 letters? Dit woord is pas écht onvoorstelbaar groot.