

SUITES RÉCURRENTES LINÉAIRES D'ORDRE 2 À DIVISIBILITÉ FORTE

A. BAUVAL

RÉSUMÉ. *On redémontre, de deux façons plus simples et tout aussi élémentaires, un résultat de [Horák et Skula, 1985], qui consistait à déterminer, parmi les suites d'entiers définies par*

$$u_1 = 1, \quad u_2 = R, \quad u_{n+2} = Pu_{n+1} - Qu_n$$

avec $P, Q, R \in \mathbb{Z}$, celles qui satisfont la condition de divisibilité forte :

$$\forall i, j \in \mathbb{N}^* \quad u_i \wedge u_j = |u_{i \wedge j}|,$$

où \wedge désigne le plus grand commun diviseur.

Pour Papa.

1. INTRODUCTION

La célèbre suite de Fibonacci F , définie par la relation de récurrence linéaire d'ordre 2

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

et l'initialisation $F_1 = 1, F_2 = 1$ (ou $F_0 = 0, F_1 = 1$) satisfait, entre autres propriétés remarquables, la divisibilité forte présentée en résumé introductif. Elle est le cas particulier $F = U(1, -1)$ de la suite de Lucas $U(P, Q)$ (définition 1), qui est à divisibilité forte si et seulement si $P \wedge Q = 1$ (proposition 1) – [Lucas, 1878], [Dickson, 1919].

Dans ce contexte, la valeur de la suite pour l'indice 0 n'ayant *a priori* pas grand intérêt ($k \wedge 0 = |k|$ pour tout entier k ; voir cependant la section 7), il semble naturel d'initialiser les suites à $u_1 = 1$ (simple convention de normalisation) et de considérer des suites qui dépendent de trois paramètres P, Q et R comme dans le résumé introductif.

Le cas $R = P$ correspond aux suites de Lucas. Pour $R \neq P$, on obtient de nouvelles suites. La stratégie de [Horák et Skula, 1985], pour trouver toutes celles qui sont à divisibilité forte, est de déterminer des conditions nécessaires sur (P, Q, R) pour que l'équation de divisibilité forte soit vérifiée au moins pour $i, j \leq 10$. En identifiant les rares candidats qui survivent à ce test sans être des suites de Lucas, ils constatent que ces quelques suites supplémentaires sont à divisibilité forte. Plus précisément, leur théorème peut se reformuler simplement (sans s'embarrasser du fait que certaines des solutions « exceptionnelles » sont en même temps des suites de Lucas : cf. remarque 2.b) :

Théorème 1. *Parmi les suites d'entiers définies par une récurrence linéaire d'ordre 2 et de premier terme $u_1 = 1$, celles qui sont à divisibilité forte sont les suites de Lucas $U(P, Q)$ avec P et Q premiers entre eux et les suites de l'une des trois formes suivantes, avec $r \in \mathbb{Z}$ et $\varepsilon = \pm 1$:*

$$(1, r, \varepsilon, \varepsilon r, 1, r, \dots) \text{ ou } (1, \varepsilon, -1, \varepsilon, -1, \dots) \text{ ou } (1, \varepsilon, -2, \varepsilon, 1, -2\varepsilon, 1, \varepsilon, \dots).$$

Horák et Skula parviennent à ce résultat à l'issue de calculs pénibles, éliminant progressivement de nombreux candidats qui ne survivent qu'à une partie de leur test. Tout en reprenant leur idée principale, nous proposons des énoncés et démonstrations plus lisibles.

[Schinzel, 1987] a généralisé leur théorème en remplaçant \mathbb{Z} par l'anneau des entiers d'un corps de nombres (pour d'autres corps que \mathbb{Q} , il trouve de nouvelles familles de « solutions exceptionnelles »). Nous présenterons une seconde démonstration du théorème de Horák et Skula, inspirée de la méthode de Schinzel mais dans le cas particulier de \mathbb{Z} , ce qui nous dispense de faire appel comme lui à la notion d'entier algébrique, et même à la représentation des solutions d'une récurrence linéaire à l'aide des racines de son équation caractéristique. Nous resterons à un niveau basique d'arithmétique, n'utilisant essentiellement que les trois propriétés suivantes du pgcd :

$$q \wedge (bq + r) = q \wedge r;$$

$$a \mid b \Leftrightarrow a \wedge b = |a|;$$

$$\text{si } a \wedge b = 1 \text{ alors } a \wedge (bc) = a \wedge c.$$

Le plan de l'article est le suivant : la section 2 énonce quelques propriétés élémentaires de divisibilité des suites récurrentes linéaires d'ordre 2, la section 3 les complète dans le cas particulier des suites de Lucas, la section 4 détermine une condition nécessaire de divisibilité forte, la section 5 utilise ce test pour établir le théorème, dont la section 6 donne une seconde démonstration ; la section 7 conclut par

quelques remarques sur diverses généralisations de propositions intermédiaires, en lien avec la notion de « divisibilité faible ».

2. QUELQUES FAITS UTILES

Le lemme 1, immédiat et valable pour une suite quelconque (non nécessairement donnée par une récurrence linéaire), servira à vérifier la divisibilité forte des candidats sélectionnés. Le lemme 2 identifie deux premières conditions indispensables pour que les suites considérées soient à divisibilité forte. Le lemme 3, qui se démontre facilement par récurrence, déduit de ces deux conditions quelques propriétés de ces suites.

Lemme 1.

- Une suite d'entiers est à divisibilité forte si (et seulement si) sa valeur absolue l'est.
- Pour n'importe quels entiers $s > 0$ et t , la suite qui vaut t pour les indices multiples de s et qui vaut 1 ailleurs est à divisibilité forte.

À partir de maintenant, on considère une suite d'entiers u définie par récurrence comme dans le résumé introductif :

Hypothèse. $u_1 = 1, \quad u_2 = R, \quad u_{n+2} = Pu_{n+1} - Qu_n \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*).$

Remarque 1. En général, on peut retrouver les entiers P , Q et R à partir de u_2 , u_3 et u_4 grâce aux équations $R = u_2$, $Q = PR - u_3$ et $P(u_3 - R^2) = u_4 - Ru_3$. Une exception survient lorsque $u_3 - R^2 = 0$, c'est-à-dire $Q = R(P - R)$. Dans ce cas, la suite u est géométrique ($u_n = R^{n-1}$) et de Lucas ($u = U(R, 0)$).

Lemme 2.

$$u_3 \wedge u_4 = 1 \Leftrightarrow (P \wedge Q = 1 \text{ et } R \wedge Q = 1).$$

Démonstration. $u_3 = PR - Q$ et $u_4 = Pu_3 - QR$ donc

$$u_3 \wedge u_4 = 1 \Leftrightarrow u_3 \wedge (QR) = 1 \Leftrightarrow (u_3 \wedge Q = 1 \text{ et } u_3 \wedge R = 1)$$

$$\Leftrightarrow ((PR) \wedge Q = 1 \text{ et } Q \wedge R = 1) \Leftrightarrow (P \wedge Q = 1 \text{ et } R \wedge Q = 1). \quad \square$$

Remarque 2.

- a) Si $Q = 0$, la condition $(R \wedge Q = P \wedge Q = 1)$ est équivalente à $(P = \pm 1 \text{ et } R = \pm 1)$. Le cas $R = P$ fait partie des suites de Lucas. Dans le cas $R = -P$, on obtient deux suites : $(1, \varepsilon, -1, \varepsilon, -1, \dots)$ avec $\varepsilon := R = \pm 1$.
- b) Si $P = 0$, la condition $P \wedge Q = 1$ est équivalente à $Q = \pm 1$. Les suites obtenues sont de la forme $(1, r, \varepsilon, \varepsilon r, 1, r, \dots)$, avec $r := R \in \mathbb{Z}$ et $\varepsilon := -Q = \pm 1$ (la suite est de Lucas si $r = 0$ mais aussi, d'après la remarque 1, si $r^2 = \varepsilon = 1$).

Toutes ces suites sont à divisibilité forte d'après le lemme 1. Elles réapparaîtront dans le théorème 2. Le cas $Q = 0$, pris en compte par Horák et Skula, est brièvement évacué comme trivial par Schinzel.

Lemme 3. Si $P \wedge Q = 1$ et $R \wedge Q = 1$ alors (pour tout $n \in \mathbb{N}^*$) $u_n \wedge Q = 1$ et $u_n \wedge u_{n+1} = 1$.

(Sous les mêmes hypothèses, on peut également démontrer que si n est impair alors $u_n \wedge P = 1$ et $u_n \wedge u_{n+2} = 1$, mais ce ne sera pas utile.)

3. SUITES DE LUCAS

Rappelons la définition des suites de Lucas et, parmi leurs nombreuses propriétés classiques, seulement celles dont nous aurons besoin, en laissant au lecteur la démonstration de quelques lemmes, par la méthode de son choix (récurrence, méthode matricielle, expression des suites à l'aide des racines de l'équation caractéristique...).

Définition 1. La suite de Lucas $U(P, Q)$ – notée simplement U lorsque les deux entiers P et Q sont fixés – est définie par :

$$U_0 = 0, \quad U_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+2} = PU_{n+1} - QU_n.$$

Nous exploiterons le cas particulier suivant d'une propriété générale des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 ([Johnson, 2009]) :

Lemme 4. Pour $U = U(P, Q)$ et pour toute suite u comme dans l'hypothèse,

$$\forall m, n \in \mathbb{N}^* \quad u_{m+n} = U_m u_{n+1} - QU_{m-1} u_n.$$

En particulier, $u_{m+n} \wedge u_n = (U_m u_{n+1}) \wedge u_n$.

Proposition 1. $U(P, Q)$ est à divisibilité forte si (et seulement si) P et Q sont premiers entre eux.

Démonstration. Si la suite est à divisibilité forte alors $P \wedge Q = 1$, d'après le lemme 2.

Réciproquement, supposons que $P \wedge Q = 1$ et démontrons la divisibilité forte de $U(P, Q)$. D'après les lemmes 4 et 3 :

$$\forall m, n \in \mathbb{N}^* \quad U_{m+n} \wedge U_n = (U_m U_{n+1}) \wedge U_n = U_m \wedge U_n.$$

Par anthypthèrese, la divisibilité forte s'ensuit. \square

Lemme 5. $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = U_n + (R - P)U_{n-1}$.

Lemme 6. Si $P^2 - 4Q = 0$ alors $U_n = n(P/2)^{n-1}$.

4. CONDITION POUR QUE $u_n \mid u_{2n}$

L'énoncé suivant, inspiré d'un argument de Schinzel mais démontré ici bien plus rapidement, sera la clé de la preuve du théorème principal.

Proposition 2. Si $R \wedge Q = P \wedge Q = 1$ alors (pour tout $n \in \mathbb{N}^*$) :

$$u_n \mid u_{2n} \Rightarrow u_n \mid R - P.$$

Démonstration. D'après les lemmes 4, 3 et 5 :

$$u_{2n} \wedge u_n = (U_n u_{n+1}) \wedge u_n = U_n \wedge u_n = U_n \wedge (R - P)U_{n-1} = U_n \wedge (R - P) = u_n \wedge (R - P). \quad \square$$

On peut déduire de cette proposition (ou démontrer directement) une condition nécessaire de divisibilité forte un peu plus contraignante que celle du lemme 2 :

Corollaire 1.

$$(u_3 \wedge u_4 = 1 \text{ et } u_2 \mid u_4) \Rightarrow (P \wedge Q = 1 \text{ et } R \mid P).$$

Démonstration. D'après le lemme 2, $u_3 \wedge u_4 = 1$ implique $P \wedge Q = R \wedge Q = 1$ or sous cette hypothèse, d'après la proposition ci-dessus, $u_2 \mid u_4 \Rightarrow R \mid P$. \square

On déduit aussi de cette proposition le critère suivant, qui est une version plus aboutie des propositions 3.1 et 3.4 de Horák et Skula et rend inutile leur proposition 3.2 (relative à $u_4 \mid u_8$) :

Corollaire 2. Si $R \neq 0$ et $u_3 \wedge u_4 = 1$ et si

$$u_2 \mid u_4, \quad u_3 \mid u_6 \quad \text{et} \quad u_5 \mid u_{10}$$

alors, $f := \frac{P}{R}$ est un entier et $f - 1$ est divisible par u_3 et u_5 .

Démonstration. Sous ces hypothèses, $R \mid P$ et (d'après la proposition 2) $P - R = R(f - 1)$ est divisible par u_3 et u_5 . On conclut en utilisant qu'ils sont premiers avec R : on a même $u_3 \wedge P = Q \wedge P = 1$ et $u_5 \wedge P = (Q u_3) \wedge P = 1$. (On pourrait démontrer que $f - 1$ est divisible par le produit $u_3 u_5$ et même, si $u_4 \mid u_8$, par $u_3 \frac{u_4}{R} u_5$, mais ce ne sera pas utile.) \square

5. SUITES EXCEPTIONNELLES

Dans la recherche de suites à divisibilité forte, on impose aux paramètres P, Q, R les conditions $P \wedge Q = 1$ et $R \mid P$ (issues du corollaire 1) et, pour exclure le cas connu des suites de Lucas, on suppose $P \neq R$ mais aussi $Q \neq R(P - R)$ (cf. remarque 1). Puisque R divise P sans lui être égal, il est non nul, ce qui permet de se placer dans les conditions du corollaire ci-dessus.

Le théorème 1 résulte alors immédiatement du suivant.

Théorème 2. Si

$$P \neq R, \quad Q \neq R(P - R), \quad u_3 \wedge u_4 = 1, \quad u_2 \mid u_4, \quad u_3 \mid u_6 \quad \text{et} \quad u_5 \mid u_{10}$$

alors ou bien $P = 0$ et $Q = \pm 1$, ou bien $P = -R = \pm 1$ et $Q = 0$ ou 1.

La famille des suites $(1, r, \varepsilon, \varepsilon r, 1, r, \dots)$ du théorème 1 correspond au cas $P = 0$, traité dans la remarque 2.b). Elles sont de période 1, 2 ou 4.

Les deux suites de la forme $(1, \varepsilon, -1, \varepsilon, -1, \dots)$ correspondent au cas $P = \pm 1, Q = 0$, traité dans la remarque 2.a). Elles sont, à partir de l'indice 2, de période 1 ou 2.

Les deux suites supplémentaires, de la forme $(1, \varepsilon, -2, \varepsilon, 1, -2\varepsilon, 1, \varepsilon, \dots)$, correspondent au cas $P = \pm 1, Q = 1$. Elles sont de période 3 ou 6.

Toutes sont à divisibilité forte, d'après le lemme 1.

Démonstration. Par hypothèse,

$$k := R^2 - u_3 = Q - R(P - R) \neq 0$$

et $f := \frac{P}{R} \neq 1$. Excluons aussi le cas $f = 0$ (c'est-à-dire $P = 0$), déjà traité. Traitons le cas $f = -1$ puis montrons que les autres valeurs de f sont impossibles. Pour cela, remarquons que

$$u_5 = u_3^2 - kP^2$$

et appliquons le corollaire 2.

Si $f = -1$ (c'est-à-dire $P = -R$) alors $|k|P^2 \leq u_3^2 + |u_5| \leq (f-1)^2 + |f-1| = 6$ et P^2 n'est pas égal à 4 (sinon, $u_3 = R^2 - k$ serait égal à 4 ± 1 et ne diviserait pas $|f-1| = 2$). Par conséquent, $P^2 = 1$, si bien que $Q = k - 2$, $u_3 = 1 - k$ et $u_5 = u_3^2 - k$. Les seules solutions pour que u_3 et u_5 divisent 2 sont $k = 2$ ou 3 , c'est-à-dire $Q = 0$ ou 1 .

Montrons maintenant par l'absurde que les autres valeurs de f sont impossibles. Supposons donc $|f| \geq 2$. Alors, $|f-1| < f^2$ et $(f-1)^2 < 3f^2$ donc :

$$k > -1 \text{ car } f^2 > |f-1| \geq u_5 \geq -kP^2 = -kf^2R^2;$$

$$k \leq 3 \text{ et } R^2 = 1 \text{ car } kf^2R^2 \leq (f-1)^2 + |f-1| < 4f^2.$$

Par conséquent, $1 \leq k < 1 + f^2$ et $u_5 = (1-k)^2 - kf^2 = (k-1)(k-1-f^2) - f^2 \leq -f^2 < -|f-1|$, d'où la contradiction. \square

6. PREUVE PAR PÉRIODICITÉ

En utilisant pleinement la proposition 2 (plutôt que son corollaire 2, limité à quelques indices), on peut déduire le théorème 1 d'une proposition moins forte (en un certain sens) que le théorème ci-dessus, mais dont la preuve est plus naturelle :

Proposition 3. *Si $P \neq R$, $Q \neq R(P-R)$, $u_3 \wedge u_4 = 1$ et si, à partir d'un certain rang, $u_n \mid u_{2n}$, alors ou bien $P = 0$ et $Q = \pm 1$, ou bien $P = -R = \pm 1$ et $Q = 0$ ou 1 .*

Démonstration. Excluons les deux cas triviaux $P = 0$ ou $Q = 0$ (cf. remarque 2).

D'après la proposition 2 et l'hypothèse $R - P \neq 0$, le couple (u_n, u_{n+1}) ne prend qu'un nombre fini de valeurs, donc la suite u est périodique à partir d'un certain rang.

D'après l'hypothèse $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_2 & u_3 \end{vmatrix} = PR - Q - R^2 \neq 0$, toute suite $(v_n)_{n \geq 1}$ de nombres complexes vérifiant $v_{n+2} = Pv_{n+1} - Qv_n$ est combinaison linéaire des deux suites (u_n) et (u_{n+1}) , donc est également périodique à partir d'un certain rang.

En particulier, les deux racines α et β de l'équation caractéristique $X^2 - PX + Q = 0$ sont distinctes (d'après le lemme 6) et les suites géométriques associées, (α^n) et (β^n) , sont périodiques. Par conséquent, $|Q| = |\alpha\beta| = 1$ et $|P| = |\alpha + \beta| < 2$.

Chacun des deux entiers P et Q est donc égal à 1 ou -1 et l'on a $R = -P$ (car $R \mid P = \pm 1$ et $R \neq P$) et $Q \neq -1$ (car $u_3 = PR - Q = -1 - Q$ doit être non nul, pour diviser $|R - P| = 2$). \square

7. REMARQUES

Remarque 3. Pour toutes les valeurs de P, Q , la suite de Lucas $U = U(P, Q)$ est à *divisibilité faible*, c'est-à-dire que

$$\forall i, j \in \mathbb{N}^* \quad i \mid j \Rightarrow U_i \mid U_j.$$

En effet, la suite U est le cas particulier $R - P = 0$ de la suite u , or cette dernière vérifie la propriété suivante (dont la proposition 2 offrait une réciproque, sous l'hypothèse $R \wedge Q = P \wedge Q = 1$) :

$$\text{si } u_n \mid R - P \text{ alors } \forall k \in \mathbb{N}^* \quad u_n \mid u_{kn}.$$

Cette propriété se démontre par récurrence sur k , en remarquant que – d'après le lemme 4 – si $u_n \mid R - P$ et si de plus $u_n \mid u_m$ (ou, ce qui d'après le lemme 5, est équivalent : si de plus $u_n \mid U_m$) alors $u_n \mid u_{m+n}$. Accessoirement, on en déduit que si $R \mid P$ alors $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad R \mid u_{2k}$.

Remarque 4. La divisibilité faible de $U(P, Q)$, et sa divisibilité forte si $P \wedge Q = 1$, sont classiques. Notre preuve de la proposition 1 (divisibilité forte) est une légère variante de celle de [Bala, 2014], qui remarque qu'elle est encore valide lorsqu'on remplace l'anneau des entiers par n'importe quel anneau – commutatif et intègre – à PGCD). On peut faire la même remarque pour la divisibilité faible. Ces deux propriétés sont donc vérifiées par exemple dans n'importe quel anneau factoriel. Curieusement, le *Fibonacci Quarterly* a accepté de publier un article ([Norfleet, 2005]) qui consistait à les redémontrer dans le cas particulier de l'anneau $\mathbb{Z}[X]$.

Remarque 5. La proposition 2 se généralise, en supprimant l'hypothèse $R \wedge Q = P \wedge Q = 1$: si une suite u comme dans l'hypothèse est à divisibilité faible alors $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n \mid Q^{n-1}(R - P)$. Plus généralement, si une suite d'entiers $(u_n)_{n \geq 1}$ vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre quelconque k

$$u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + \dots + a_k u_n$$

est à divisibilité faible, alors $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n \mid (a_k)^{n-1} [u_k - (a_1 u_{k-1} + \dots + a_{k-2} u_2 + a_{k-1} u_1)]$.

En effet, [Hall, 1936] a démontré que si une suite d'entiers $(v_n)_{n \geq 0}$ vérifiant cette même récurrence d'ordre k est à divisibilité faible, alors v_0 est divisible par tout entier premier avec a_k qui divise l'un des v_n , ce que [Kimberling, 1979] a précisé en :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n \mid (a_k)^n v_0.$$

Or en excluant le cas immédiat $a_k = 0$, l'étude des suites u de l'énoncé ci-dessus (de premier terme u_1) se ramène à celle des suites v de Hall (de premier terme v_0) en posant

$$v_0 = u_k - (a_1 u_{k-1} + \cdots + a_{k-2} u_2 + a_{k-1} u_1) \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n = a_k u_n.$$

Remarque 6. L'argument essentiel de la section 6 (la périodicité, déduite ici de la proposition 2) s'étend également aux récurrences d'ordre quelconque. En effet, dès son article de 1979 (antérieur à celui de Horák et Skula), Kimberling avait déjà démontré qu'une suite d'entiers $(v_n)_{n \geq 0}$ à divisibilité forte et vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre quelconque

$$v_{n+k} = a_1 v_{n+k-1} + \cdots + a_k v_n$$

(avec $a_k \neq 0$) est périodique dès que son premier terme v_0 est non nul. Autrement dit (par le même procédé que dans la remarque précédente) : une suite $(u_n)_{n \geq 1}$ à divisibilité forte et vérifiant cette même récurrence est périodique dès que

$$u_k \neq a_1 u_{k-1} + \cdots + a_{k-1} u_1,$$

c'est-à-dire, dans notre cas ($k = 2$, $a_1 = P$, $0 \neq a_k = a_2 = -Q$, $u_1 = 1$, $u_2 = R$), dès que $R \neq P$.

Même pour $k = 2$, la situation est bien plus complexe lorsqu'on remplace \mathbb{Z} par l'anneau des entiers d'un corps de nombres ([Schinzel, 1987]) car u n'est alors périodique qu'à produit près par une suite d'éléments inversibles de l'anneau.

RÉFÉRENCES

- [Bala, 2014] Peter Bala, Divisibility sequences from strong divisibility sequences, *OEIS*, 2014, p. 9, Proposition A.3
<https://oeis.org/A238600/a238600.pdf>
- [Dickson, 1919] Leonard Eugene Dickson, *History of the Theory of Numbers*, vol. 1, 1919, chap. 17, p. 393-411
<http://www.archive.org/details/historyoftheory01dick>
- [Hall, 1936] Marshall Hall, Divisibility sequences of the third order, *American J. Math.*, vol. 58, n° 3, 1936, p. 577-584
<http://www.jstor.org/stable/2370976>
- [Horák et Skula, 1985] P. Horák et L. Skula, A characterization of the second-order strong divisibility sequences, *The Fibonacci Quarterly*, vol. 23, n° 2, 1985, p. 126-132
<http://www.fq.math.ca/Scanned/23-2/horak.pdf>
- [Johnson, 2009] Robert C. Johnson, *Fibonacci numbers and matrices*, 2009, Université de Durham, p. 40 (A.10)
<http://maths.dur.ac.uk/dma0rcj/PED/fib.pdf>
- [Kimberling, 1979] C. Kimberling, Strong divisibility sequences and some conjectures, *The Fibonacci Quarterly*, vol. 17, 1979, p. 13-17
<http://www.fq.math.ca/Scanned/16-6/kimberling.pdf>
- [Lucas, 1878] Édouard Lucas, Théorie des fonctions numériques simplement périodiques, *Amer. J. Math.*, vol. 1, no 2, 1878, p. 184-196, 197-240, 289-321
http://edouardlucas.free.fr/oeuvres/Theorie_des_fonctions_simplement_periodiques.pdf
- [Norfleet, 2005] M. Norfleet, Characterization of second-order strong divisibility sequences of polynomials, *The Fibonacci Quarterly*, vol. 43, n° 2, 2005, p. 166-169
<http://www.fq.math.ca/Papers1/43-2/paper43-2-12.pdf>
- [Schinzel, 1987] Andrzej Schinzel, Second order strong divisibility sequences in an algebraic number field, *Archivum Mathematicum*, vol. 23, n° 3, 1987, p. 181-186
<https://eudml.org/doc/18221>

Anne Bauval, bauval@math.univ-toulouse.fr
 Institut de Mathématiques de Toulouse
 Équipe Émile Picard, UMR 5580, Université Toulouse III
 118 Route de Narbonne, 31400 Toulouse - France