

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

DÉNOMBREMENT DE MULTIGRAPHES ENRICHIS

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR

GENEVIÈVE PAQUIN

JUILLET 2004

## REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je tiens à remercier Gilbert Labelle, mon directeur, qui a su me transmettre une partie de sa folie mathématique et qui a toujours été présent aux bons moments pour me donner de précieux conseils.

Merci aux membres de mon jury, Robert Bédard et Pierre Leroux, d'avoir pris le temps de corriger mon mémoire, et d'y avoir apporté des remarques pertinentes et constructives.

Merci à André Lauzon et à Gisèle Legault de m'avoir donné les coups de pouce nécessaires pour me faire découvrir certains mystères de LaTeX. Un gros merci à Manon Gauthier d'avoir été là pour répondre à mes multiples interrogations administratives, et ce, toujours avec gentillesse et bonne humeur. Merci aussi à Lise Tourigny, d'avoir été aussi disponible et aussi accueillante lors de mes nombreuses visites à son bureau.

Merci à ma famille: mon père Pierre et sa conjointe Diane, ma mère Suzanne et son conjoint Claude, pour leur présence et leur écoute qui ont su me remonter le moral à plusieurs reprises; mes soeurs, Annie et Isabelle, et mon beau-frère préféré, Yann, d'être aussi mes amis; mes grands-parents, Réjeanne, Rita et André, de m'encourager même s'ils trouvent que ce que je fais est un peu abstrait; ma tante Louise, de m'avoir suivie tout au long de mon cheminement.

Merci à mes amis: Myriam, ma troisième soeur, pour sa présence à distance et sa détermination contagieuse qui m'ont bien aidée; Pascale, pour ses multiples conseils, sans oublier son Philippon qui, avec ses nombreuses interrogations mathématiques, m'a fait beaucoup réfléchir; Amélie, que je connais depuis que je suis haute comme trois pommes, qui a toujours été là; Marie-eve, qui m'a suivie depuis le début de mes études universitaires, qui m'a convaincue que "l'info, c'est intéressant", qui m'a supportée moralement pendant une session un peu trop chargée, qui a aussi été ma preneuse de notes officielles et ma pharmacie d'urgence!; Nicolas, aussi connu sous le nom de Nico, pour sa présence, son écoute, son sens de l'humour et pour ses remarques pertinentes

pour mon mémoire...; “Annoue et Anik”, de m’avoir guidée au début de ma maîtrise; Xavier, pour sa bonne humeur, son optimisme, et pour m’avoir accompagnée dans la découverte de LaTeX; Mélissa, Frnak, Karine, Geneviève (l’autre!), Anissa, Phil, Francis, Roger, Gontrand, et j’en oublie! pour avoir égayé mon parcours d’étudiante de maîtrise!

Merci aussi au CRSNG, au FCAR, au LaCIM et à mon directeur de m’avoir apporté un soutien financier tout au long de ma maîtrise.

## TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES . . . . .	vi
LISTE DES TABLEAUX . . . . .	viii
RÉSUMÉ . . . . .	xi
INTRODUCTION . . . . .	1
CHAPITRE I	
INTRODUCTION À LA THÉORIE DES ESPÈCES . . . . .	4
1.1 Espèce de structures . . . . .	5
1.2 Séries associées . . . . .	10
1.2.1 Série génératrice ordinaire . . . . .	11
1.2.2 Série génératrice des types d'isomorphie . . . . .	12
1.2.3 Série indicatrice des cycles . . . . .	13
1.3 Opérations sur les espèces . . . . .	15
1.3.1 Somme d'espèces de structures . . . . .	17
1.3.2 Multiplication d'espèces de structures . . . . .	18
1.3.3 Substitution d'espèces de structures . . . . .	20
1.3.4 Dérivée d'une espèce de structures . . . . .	23
1.3.5 Autres opérations . . . . .	25
CHAPITRE II	
CONTEXTE MULTISORTE PONDÉRÉ . . . . .	26
2.1 Espèces à plusieurs sortes . . . . .	26
2.2 Espèces pondérées . . . . .	29
2.3 Espèces pondérées à plusieurs sortes . . . . .	34
CHAPITRE III	
ESPÈCES DE MULTIGRAPHERS ENRICHIS . . . . .	39
3.1 Multigraphes . . . . .	39
3.2 Multigraphes simples enrichis . . . . .	42

3.3	Ajout d'arcs et de boucles . . . . .	45
3.4	Présentation du problème . . . . .	48
CHAPITRE IV		
FORMULES ÉNUMÉRATIVES . . . . .		
4.1	Lemme préliminaire . . . . .	52
4.2	Formule énumérative explicite . . . . .	55
4.3	Formule énumérative récursive . . . . .	76
CHAPITRE V		
RÉSULTATS OBTENUS . . . . .		
5.1	Exemples spécifiques . . . . .	80
5.1.1	Polynômes $w_k^*(x)$ . . . . .	80
5.1.2	Suites d'entiers $(w_k^*(1))_{k \geq 0}$ . . . . .	90
5.2	Suites particulières . . . . .	100
5.2.1	Multigraphes ordinaires sans arcs ni boucles et revêtements . . . . .	101
5.2.2	Multigraphes orientés avec boucles et $B(2n)$ . . . . .	102
5.2.3	Multigraphes orientés sans boucle et nombres de Bell généralisés . . . . .	104
5.2.4	Graphes simples et groupe de permutations oligomorphiques . . . . .	105
5.2.5	Multigraphes ordinaires avec boucles et factorisation de $(p_n)^2$ . . . . .	106
CONCLUSION . . . . .		
APPENDICE A		
TABLES DES PREMIÈRES VALEURS DE $c_p$ ET DE $\omega_{i,j}$ . . . . .		
APPENDICE B		
QUELQUES PROGRAMMES <i>MAPLE</i> . . . . .		
RÉFÉRENCES . . . . .		

## LISTE DES FIGURES

1.1	Exemple de transport d'un arbre le long de $\sigma$ . . . . .	8
1.2	Représentation générale d'une $F$ -structure. . . . .	9
1.3	Représentation générale d'un $(F + G)$ -structure. . . . .	18
1.4	Représentation générale d'une $(F \cdot G)$ -structure. . . . .	20
1.5	Exemple de substitution dans les espèces. . . . .	21
1.6	Représentation générale d'une $(F \circ G)$ -structure. . . . .	22
1.7	Représentation générale d'une $F'$ -structure. . . . .	24
1.8	Exemple des opérations d'ajout d'un lien et de pointage. . . . .	25
2.1	Exemple de graphe simple avec deux types de sommets. . . . .	27
2.2	Représentation générale d'une $F$ -structure sur deux sortes. . . . .	29
2.3	Exemple d'un graphe $\gamma$ avec $w(\gamma) = t^2$ . . . . .	30
3.1	Exemple de multigraphe simple. . . . .	40
3.2	Illustration du transport des multigraphes le long de $\sigma$ . . . . .	41
3.3	Exemple de multigraphe $R$ -enrichi. . . . .	43
3.4	Exemple de désétiquettage. . . . .	46
4.1	Graphes simples avec 2 arêtes étiquetées. . . . .	74

5.1	Énumération des multigraphes ordinaires pour $k = 0, 1, 2, 3$ . . . . .	90
-----	---	----

## LISTE DES TABLEAUX

4.1	Premières valeurs de $c_p$ . . . . .	59
4.2	Permutations de $[p]$ n'ayant que des cycles de longueur $\geq 3$ . . . . .	59
5.1	$w_k^*(x)$ pour $R = E, \Lambda = E_2$ . . . . .	81
5.2	$w_k^*(x)$ pour $R = 1 + Y, \Lambda = E_2$ . . . . .	82
5.3	$w_k^*(x)$ pour $R = 1 + Y, \Lambda = X + X^2$ . . . . .	83
5.4	$w_k^*(x)$ pour $R = 1 + C, \Lambda = E_2$ . . . . .	84
5.5	$w_k^*(x)$ pour $R = L, \Lambda = E_2 + X + X^2$ . . . . .	85
5.6	$w_k^*(x)$ pour $R = \text{Par}, \Lambda = \varepsilon E_2$ . . . . .	86
5.7	$w_k^*(x)$ pour $R = \text{Par}, \Lambda = E_2$ . . . . .	87
5.8	$w_k^*(x)$ pour $R = \text{Par}, \Lambda = 5E_2$ . . . . .	88
5.9	$w_k^*(x)$ pour $R = \text{Par}, \Lambda = \alpha X^2$ . . . . .	89
5.10	$w_k^*(x)$ pour $R = \text{Par}, \Lambda = 7X^2$ . . . . .	89
5.11	$w_k^*(1)$ pour $R(Y) = E(Y), R(y) = e^y$ . . . . .	90
5.12	$w_k^*(1)$ pour $R(Y) = 1 + Y, R(y) = 1 + y$ . . . . .	91
5.13	$w_k^*(1)$ pour $R(Y) = L(Y), R(y) = \frac{1}{1-y}$ . . . . .	91
5.14	$w_k^*(1)$ pour $R(Y) = 1 + C(Y), R(y) = 1 - \log(1 - y)$ . . . . .	92



5.15	$w_k^*(1)$ pour $R(Y) = \beta(Y)$ , $R(y) = \frac{1-\sqrt{1-4y}}{2y}$ . . . . .	92
5.16	$w_k^*(1)$ pour $R(Y) = \text{Par}(Y)$ , $R(y) = e^{e^y-1}$ . . . . .	93
5.17	$w_k^*(1)$ pour $R(Y) = \text{Der}(Y)$ , $R(y) = \frac{e^{-y}}{1-y}$ . . . . .	93
5.18	$w_k^*(1)$ pour $R(Y) = \mathcal{P}(Y)$ , $R(y) = e^{2y}$ . . . . .	94
5.19	$w_k^*(1)$ pour $R(Y) = E_{\text{pair}}$ , $R(y) = \cosh(y)$ . . . . .	94
5.20	$w_k^*(1)$ pour $R(Y) = E_{\text{impair}}$ , $R(y) = 1 + \sinh(y)$ . . . . .	95
5.21	$w_k^*(1)$ pour $R(Y) = E_{\text{mod}3}(Y)$ , $R(y) = \frac{1}{3}e^y + \frac{2}{3}e^{\frac{-y}{2}} \cos(\frac{\sqrt{3}y}{2})$ . . . . .	95
5.22	$w_k^*(1)$ pour $R(Y) = E_{\text{mod}4}(Y)$ , $R(y) = \frac{1}{4}e^y + \frac{1}{2} \cos(y) + \frac{1}{4}e^{-y}$ . . . . .	96
5.23	$w_k^*(1)$ pour $R(Y) = E_{\text{mod}6}(Y)$ , $R(y) = \frac{1}{6}e^y + \frac{1}{3}e^{\frac{y}{2}} \cos(\frac{\sqrt{3}y}{2}) + \frac{1}{3}e^{\frac{-y}{2}} \cos(\frac{\sqrt{3}y}{2}) + \frac{1}{6}e^{-y}$ . . . . .	96
5.24	$w_k^*(1)$ pour $R(Y) = E^\pm$ , $R(y) = 2e^y - (1+y)$ . . . . .	97
5.25	$w_k^*(1)$ pour $R(Y) = \text{Inv}$ , $R(y) = e^{y+\frac{y^2}{2}}$ . . . . .	97
5.26	$w_k^*(1)$ pour $R(Y) = \mathcal{G}$ , $R(y) = \sum_{n \geq 0} 2^{\binom{n}{2}} \frac{y^n}{n!}$ . . . . .	98
5.27	$w_k^*(1)$ pour $R(Y) = \mathcal{G}_o$ , $R(y) = \sum_{n \geq 0} 2^{n^2} \frac{y^n}{n!}$ . . . . .	98
5.28	$w_k^*(1)$ pour $R(Y) = \text{End}(Y)$ , $R(y) = \sum_{n \geq 0} n^n \frac{y^n}{n!}$ . . . . .	99
5.29	$w_k^*(1)$ pour $R(Y) = \mathcal{A}(Y)$ , $R(y) = \sum_{n \geq 1} n^{n-1} \frac{y^n}{n!}$ . . . . .	99
5.30	$w_k^*(1)$ pour $R(Y) = \mathfrak{a}(Y)$ , $R(y) = \sum_{n \geq 1} n^{n-2} \frac{y^n}{n!}$ . . . . .	100
5.31	Nombres de Bell et nombres de Stirling généralisés . . . . .	104
A.1	$c_p$ pour $0 \leq p \leq 24$ . . . . .	110
A.2	$c_p$ pour $25 \leq p \leq 55$ . . . . .	111

A.3	$c_p$ pour $56 \leq p \leq 79$ . . . . .	112
A.4	$\omega_{i,j}$ pour $0 \leq i \leq 20$ et $0 \leq j \leq 6$ . . . . .	113
A.5	$\omega_{i,j}$ pour $0 \leq i \leq 20$ et $7 \leq j \leq 13$ . . . . .	114
A.6	$\omega_{i,j}$ pour $0 \leq i \leq 20$ et $14 \leq j \leq 20$ . . . . .	115

## RÉSUMÉ

En 1997, Gilbert Labelle s'est intéressé au dénombrement de multigraphes enrichis ayant des sommets non étiquetés et un nombre précis d'arêtes étiquetées. Il a publié un bref article présentant ses résultats. Il a trouvé deux façons de faire le dénombrement voulu: une formule explicite, et une formule récursive. Il a fait certains calculs à partir de ces formules pour les multigraphes enrichis par des ensembles, des cycles, des ordres linéaires et des singletons. L'objectif de ce travail est dans un premier temps, d'explicitier son article en détaillant les preuves et en donnant plus d'exemples. Dans un deuxième temps, nous explorons les multigraphes enrichis par des espèces un peu plus complexes telles que les dérangements, les arborescences, les partitions, etc. Nous ajoutons des couleurs aux arêtes, boucles et arcs afin de voir de quelle façon cet ajout influence le nombre de multigraphes enrichis. Nous utilisons le logiciel de calcul formel *Maple* afin de trouver les suites de nombres et de polynômes dénombrant les multigraphes enrichis. À quelques exceptions près, nous constatons que les suites trouvées ne figurent pas dans la base de données électronique des suites d'entiers de *Sloane-Plouffe Encyclopedia of Integer Sequences*. Nous terminons en tentant de faire des bijections entre les objets décrits par les suite déjà répertoriées et les multigraphes correspondant.

**Mots clés:** multigraphes enrichis, espèces de structures, dénombrement, suites d'entiers, étiquettes.

## INTRODUCTION

La théorie des espèces a été introduite au début des années 1980 par Joyal (Joyal, 1981). Une version partielle et plus élémentaire de cette théorie a été publiée par la suite (Labelle J., 1983). Puis, dix années plus tard, G.Labelle (Labelle G., 1993) a fait une synthèse d'une bonne partie des développements de la théorie touchant la symétrie et l'asymétrie des structures combinatoires. En 1994, Bergeron, Labelle et Leroux publient un ouvrage (Bergeron, Labelle et Leroux, 1994) important sur la théorie des espèces. Cette théorie a une grande importance en combinatoire, entre autres parce qu'elle permet d'analyser des structures combinatoires étiquetées et non étiquetées. À la fin des années 1990, G.Labelle (Labelle G., 2000) a pensé à une nouvelle structure combinatoire, en joignant la théorie des espèces à la combinatoire. Cette nouvelle structure est constituée de multigraphes dans lesquels des espèces enrichissent les arêtes et cette structure est appelée multigraphe enrichi. Labelle a étudié le dénombrement de multigraphes enrichis dans lesquels les sommets et les arêtes sont étiquetés. Il s'est aussi intéressé au dénombrement de multigraphes partiellement étiquetés, c'est-à-dire des multigraphes enrichis où seules les arêtes ou seuls les sommets sont étiquetés. Contrairement au dénombrement des multigraphes enrichis pour lesquels les sommets et arêtes sont étiquetés, et à celui des multigraphes enrichis pour lesquels seuls les sommets sont étiquetés, le dénombrement des multigraphes enrichis pour lesquels seules les arêtes sont étiquetées s'avère difficile.

Dans son article publié en 2000, Labelle a trouvé deux formules qui effectuent le dénombrement souhaité: une explicite, et une récursive. Jusqu'à maintenant, ce sont les deux seules façons connues pour effectuer ce dénombrement. L'objectif de ce travail est d'abord de bien comprendre les résultats de Labelle, puis d'explicitier ses preuves parfois très courtes en donnant les détails nécessaires à la bonne compréhension des résultats

donnés. Le deuxième objectif de ce travail est d'explorer les multigraphes enrichis avec des espèces plus complexes. Dans son article, Labelle s'est limité aux multigraphes enrichis par des singletons, des ensembles, des ordres linéaires et des cycles. Nous nous intéresserons donc au dénombrement de multigraphes enrichis par des espèces un peu plus farfelues telles que les dérangements, les partitions et même l'espèce des graphes!

Nous ferons plusieurs calculs à l'aide du logiciel de calcul formel *Maple*. Nous vérifierons si les suites d'entiers ainsi obtenues sont répertoriées dans la base de données des suites d'entiers de *Sloane-Plouffe Encyclopedia of Integer Sequences* (Sloane et Plouffe, 2004)<sup>1</sup> ou pas. Pour celles déjà répertoriées, nous étudierons le lien unissant les multigraphes enrichis correspondant et l'autre structure dénombrée par la même suite.

Ce travail est divisé en cinq chapitres. Le premier introduit les notions de base de la théorie des espèces. Nous définissons d'abord les espèces de structures, puis nous donnons plusieurs exemples en commençant par des espèces plutôt triviales telles que l'espèce vide, l'espèce des singletons, l'espèce des ensembles, et puis des plus complexes telles que l'espèce des scrutins, l'espèce des arborescences, l'espèce des permutations. Nous introduisons ensuite les séries associées aux espèces: la série génératrice ordinaire, la série génératrice des types d'isomorphie et la série indicatrice des cycles. Nous terminons ce chapitre en définissant sur les espèces de structures, des opérations algébriques telles que la somme, la multiplication, la substitution et la dérivée. Il est important de bien définir toutes ces notions puisqu'elles sont préalables aux chapitres ultérieurs.

Le deuxième chapitre généralise le concept d'espèce de structures. Dans un premier temps, nous rappelons ce qu'est une espèce de structures sur plus d'une sorte: nous adaptons les notions vues au premier chapitre pour des espèces pouvant vivre sur plusieurs sortes. Dans un deuxième temps, nous adaptons les notions vues au premier chapitre cette fois pour des espèces à une sorte, mais pour lesquelles des pondérations ont été ajoutées. Puis finalement, nous terminons ce chapitre en combinant ces deux variantes

---

<sup>1</sup>Cette base de données électronique est une extension du livre (Sloane et Plouffe, 1995).

de la notion d'espèce en définissant les espèces pondérées à plusieurs sortes.

Dans le troisième chapitre, nous présentons le problème qui motive ce travail. Pour ce faire, nous introduisons d'abord la définition de multigraphes, puis nous enrichissons les arêtes par une espèce et nous obtenons ainsi des multigraphes simples enrichis. Par la suite, nous généralisons les multigraphes simples enrichis en donnant la possibilité d'avoir des arcs et des boucles. Ces multigraphes enrichis généraux forment une espèce. Nous nous intéressons au dénombrement de l'espèce des multigraphes enrichis pour lesquels seuls les arêtes, arcs et boucles sont étiquetés.

Le quatrième chapitre est consacré à l'étude de notre problème, soit le dénombrement de multigraphes enrichis avec sommets non étiquetés et avec  $k$  arêtes, arcs et boucles étiquetés. Nous présentons deux formules donnant ce dénombrement: une explicite, et une récursive. Puis, nous en faisons les démonstrations ainsi que quelques exemples.

Dans le dernier chapitre, nous présentons les résultats obtenus à l'aide du logiciel de calcul formel *Maple* pour différents enrichissements, et différents types de liens (arêtes, arcs et boucles) permis. Ainsi, nous obtenons des suites de polynômes et des suites d'entiers contenant l'information concernant le dénombrement voulu. Nous concluons ce travail en nous intéressant aux suites d'entiers obtenues en vérifiant si elles sont déjà dans la base de données électronique des suites d'entiers de *Sloane-Plouffe Encyclopedia of Integer Sequences* ou non. Dans l'affirmative, nous tenterons de comprendre le lien unissant le multigraphe enrichi et l'objet décrit par la suite répertoriée.

En annexe, nous présentons les premières valeurs de  $c_p$ , soit le nombre de permutations de  $[p]$  ne contenant que des cycles de longueur  $\geq 3$ . Ensuite, nous donnons les valeurs de  $\omega_{i,j}$  pour  $i \leq 20$  et  $j \leq 20$ . Finalement, les principaux programmes *Maple* utilisés dans ce travail se trouvent à la toute fin des annexes.

## CHAPITRE I

### INTRODUCTION À LA THÉORIE DES ESPÈCES

Dans ce chapitre, nous présentons la base de la théorie des espèces. Dans la première section, nous définissons de façon informelle ce qu'est une espèce de structures, nous introduisons le concept de transport de structures le long d'une bijection, puis nous donnons la définition formelle d'une espèce de structures. Par la suite, nous présentons des exemples d'espèces de structures de base, ainsi que d'autres espèces un peu plus compliquées qui nous seront utiles par la suite.

Dans la deuxième section, nous introduisons les trois plus importantes séries associées aux espèces de structures, tout en définissant les concepts de type d'isomorphie et de type cyclique d'une permutation. Nous verrons que chacune de ces séries contient de précieuses informations sur les propriétés énumératives des espèces de structures. Nous donnons, pour chacune des séries, des exemples pour quelques espèces de structures. Nous montrons aussi de quelle manière les trois types de séries sont reliés.

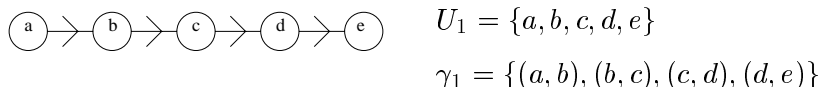
Finalement, dans la dernière section, nous définissons des opérations algébriques sur les espèces de structures. Entre autres, nous verrons de quelle manière l'addition, la multiplication, la composition et la dérivation sont définis sur des espèces. Nous montrons aussi de quelle manière les différentes séries sont affectées par les diverses opérations.

## 1.1 Espèce de structures

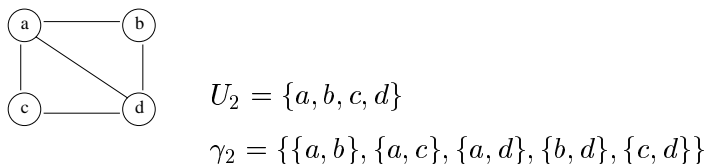
Informellement, on dit qu'une structure est un couple  $s = (\gamma, U)$ , où  $\gamma$  est une construction sur l'ensemble de données  $U$ . Autrement dit,  $s$  est une structure construite selon la «règle»  $\gamma$  sur l'ensemble  $U$ .

### Exemples

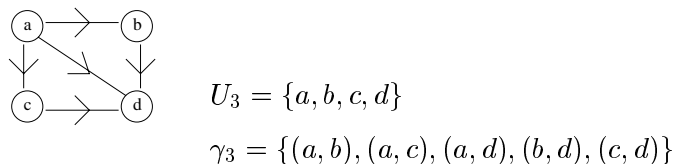
1. Ordre linéaire:



2. Graphe simple:



3. Graphe orienté:

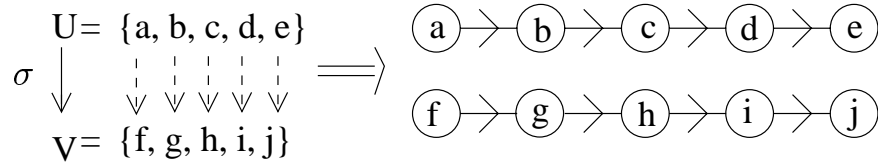


**Remarque 1.1.1** Dans les deux derniers exemples, notons que  $s_2$ , le graphe simple, et  $s_3$ , le graphe orienté, ont exactement le même ensemble de sommets  $U$ . De plus, remarquons que  $\gamma_2$  et  $\gamma_3$  ne diffèrent que par le fait que  $\gamma_2$  est un ensemble d'ensembles, alors que  $\gamma_3$  est un ensemble de couples. Ainsi, dans cette représentation des structures, il est important de porter une attention particulière à l'ensemble  $\gamma$  afin de savoir s'il est constitué d'arêtes, ou d'arcs. Il est aussi possible que l'ensemble  $\gamma$  soit constitué à la fois d'arêtes et d'arcs, ou encore, de constructions ensemblistes plus complexes.



Cette définition de structure n'est pas exactement complète. Il nous faut donc définir de façon plus rigoureuse le concept de structure. Pour ce faire, nous utiliserons l'approche fonctorielle. Mais avant tout, introduisons la notion de *transport des structures* le long de bijections que nous utiliserons dans la définition formelle d'espèce de structures.

Considérons l'ordre linéaire  $s = (\gamma, U)$  vu précédemment, dont l'ensemble sous-jacent est  $U = \{a, b, c, d, e\}$ . En remplaçant chaque élément de  $U$  par ceux d'un autre ensemble  $V = \{f, g, h, i, j\}$  via la bijection  $\sigma : U \rightarrow V$  décrite dans la figure suivante, on voit bien que cette bijection permet de transporter l'ordre linéaire  $s$  sur un ordre linéaire correspondant  $t = (\tau, V)$ .



Ainsi, il s'agit de remplacer chaque sommet  $u \in U$  par le sommet correspondant  $\sigma(u) \in V$ . On dit alors que l'ordre linéaire  $t$  a été obtenu par transport de l'ordre linéaire  $s$  le long de la bijection  $\sigma$ , donc que  $t = \sigma \cdot s = (\{(f, g), (g, h), (h, i), (i, j)\}, \{f, g, h, i, j\})$ .

Ce transport de structure le long d'une bijection a le même effet que de remplacer chaque élément  $u \in U$  dans  $\gamma$  par l'élément correspondant  $\sigma(u) \in V$  dans l'expression de  $\gamma$ . Ainsi, s'il existe un tel transport de structures le long d'une bijection  $\sigma$  de  $U$  dans  $V$ , on dit que  $s$  et  $t$  sont *isomorphes* et  $\sigma$  est un *isomorphisme* de  $s$  à  $t$ . Nous reviendrons sur ce concept dans la section suivante.

**Définition 1.1.1** Une espèce de structures est une règle  $F$  qui associe :

- (i) à chaque ensemble fini  $U$ , un ensemble fini  $F[U]$  ;
- (ii) à chaque bijection  $\sigma : U \rightarrow V$ , une fonction  $F[\sigma] : F[U] \rightarrow F[V]$ .

De plus, les fonctions  $F[\sigma]$  doivent satisfaire les propriétés de functorialité suivantes :

(iii) pour toute bijection  $\sigma : U \rightarrow V$  et  $\tau : V \rightarrow W$ , on a

$$F[\tau \circ \sigma] = F[\tau] \circ F[\sigma];$$

(iv) pour la bijection identité  $Id_U : U \rightarrow U$ , on a

$$F[Id_U] = Id_{F[U]}.$$

On appelle une  $F$ -structure sur  $U$  un élément  $s \in F[U]$ . Une  $F$ -structure sur  $U$  est aussi appelée une structure d'espèce  $F$  sur  $U$ . De plus, la fonction  $F[\sigma]$  est appelée le *transport des  $F$ -structures le long de  $\sigma$* . Notons que  $F[\sigma]$  est bijective.

**Exemple** Définissons l'espèce des arbres, notée  $\mathbf{a}$ . La notation  $\mathbf{a}[U]$  désigne l'ensemble de toutes les structures d'arbres sur l'ensemble des sommets  $U$ . On a :

$$\mathbf{a}[U] = \{(\gamma, U) : \gamma \subseteq \mathcal{P}_2[U], \forall u, v \in U, \exists! n \in \mathbb{N}, \exists! [x_0, \dots, x_n] \text{ tel } x_0 = u, x_n = v\},$$

où  $\mathcal{P}_2[U]$  est l'ensemble des couples d'éléments de  $U$ , et où  $[x_0, x_1, \dots, x_n]$  désigne un chemin de longueur  $n$  du sommet  $x_0$  au sommet  $x_n$ , où chacun des sommets du chemin sont reliés par des éléments de  $\gamma$ .

Rappelons que dans l'arbre  $a = (\gamma, U)$ ,  $\gamma$  désigne l'ensemble des arêtes et  $U$ , l'ensemble des sommets de l'arbre.

Vérifions que  $\mathbf{a}[U]$  est bien une espèce de structure.

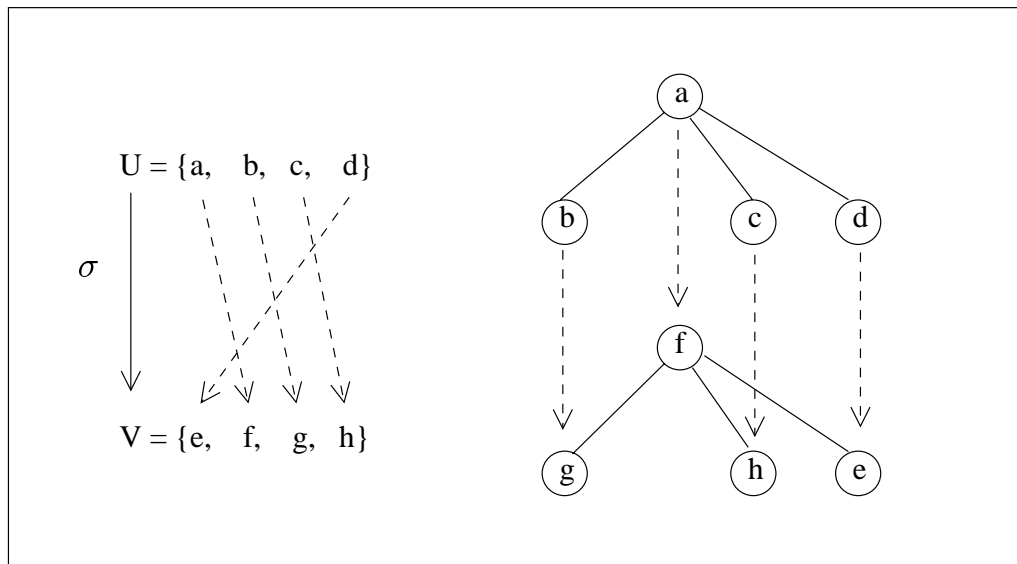
(i) Si  $U$  est un ensemble fini, alors  $\mathbf{a}[U]$  est aussi un ensemble fini. En effet, en théorie des graphes, on a le résultat bien connu que le nombre d'arbres sur  $n$  sommets est  $n^{n-2}$ .

(ii) Chaque bijection  $\sigma : U \rightarrow V$  induit, par transport de structures, une fonction

$$\mathbf{a}[\sigma] : \mathbf{a}[U] \rightarrow \mathbf{a}[V]$$

qui est en fait le transport des arbres le long de  $\sigma$ .

La figure 1.1 donne un exemple de transport d'un arbre le long de  $\sigma$ .



**Figure 1.1** Exemple de transport d'un arbre le long de  $\sigma$ .

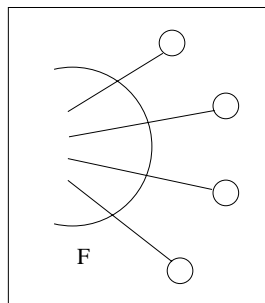
Ainsi, si  $a = (\gamma, U) \in \mathbf{a}[U]$ , alors  $\mathbf{a}[\sigma][a] = \sigma \cdot a = (\sigma \cdot \gamma, V)$  où  $\sigma \cdot \gamma$  est l'ensemble des paires  $\{\sigma(x), \sigma(y)\}$  d'éléments de  $V$  obtenues à partir de paires  $\{x, y\} \in \gamma$ . Toute arête  $\{x, y\}$  de  $a$  est réétiquetée  $\{\sigma(x), \sigma(y)\}$  dans  $\sigma \cdot \gamma$ .

Vérifions maintenant les propriétés de fonctorialité. Nous venons tout juste de voir que le transport des arbres le long de  $\sigma$  n'est en fait qu'un réétiquetage des sommets et des arêtes. Ainsi, il est clair que pour toute bijection  $\sigma : U \rightarrow V$  et  $\tau : V \rightarrow W$ , on a

$$\mathbf{a}[\tau \circ \sigma] = \mathbf{a}[\tau] \circ \mathbf{a}[\sigma],$$

et que pour  $Id_U : U \rightarrow U$ , on a  $\mathbf{a}[Id_U] = Id_{\mathbf{a}[U]}$ . Ainsi,  $\mathbf{a}[U]$  respecte toutes les propriétés d'espèce de structures. ■

La figure 1.2 est une représentation générale d'une  $F$ -structure, où les cercles blancs représentent les éléments de l'ensemble sous-jacent non structuré, et la  $F$ -structure sur ces éléments est représentée par un arc de cercle. Tout au long de ce travail, nous utiliserons cette représentation générale afin d'illustrer diverses espèces de structures.



**Figure 1.2** Représentation générale d'une  $F$ -structure.

**Exemples** Quelques espèces de structures.

Il est possible de décrire une espèce de structures  $F$  de différentes façons. D'abord, nous pouvons utiliser un système d'axiomes  $\mathcal{U}$  et ensuite poser

$$s = (\gamma, U) \in F[U] \iff s = (\gamma, U) \text{ est un modèle de } \mathcal{U}.$$

Les transports  $F[\sigma]$  se font de façon similaire aux transports vus précédemment. Ainsi, nous pouvons facilement décrire les espèces suivantes: les arbres ( $\mathfrak{a}$ ), les arborescences ( $\mathcal{A}$ ), les graphes simples ( $\mathcal{G}$ ), les graphes orientés ( $\mathcal{G}_o$ ), les graphes simples connexes ( $\mathcal{G}^c$ ), les graphes simples non connexes ( $\mathcal{G}^d$ )<sup>1</sup>, les arborescences binaires ( $\mathcal{B}$ ), les permutations cycliques ( $C$ ), les permutations cycliques impaires ( $C^i$ ), les permutations cycliques paires ( $C^p$ ), les ordres linéaires ( $L$ ), les permutations ( $S$ ), les scrutins (Scru), etc.

Il est aussi possible de décrire certaines espèces de structures de façon explicite. En voici quelques exemples:

1. L'espèce vide, notée  $0$ , est définie par  $0[U] = \emptyset$ , pour tout  $U$ .

---

<sup>1</sup>Le lecteur est invité à consulter (Harary et Palmer, 1973) pour les aspects énumératifs de diverses classes de graphes.

2. L'espèce des singletons, notée  $X$ , est définie par

$$X[U] = \begin{cases} \{U\} & , \text{ si } |U| = 1; \\ \emptyset & , \text{ sinon.} \end{cases}$$

3. L'espèce caractéristique de l'ensemble vide, notée  $1$ , est définie par

$$1[U] = \begin{cases} \{U\} & , \text{ si } U = \emptyset; \\ \emptyset & , \text{ sinon.} \end{cases}$$

4. L'espèce des ensembles, notée  $E$ , est définie par  $E[U] = \{U\}$ . Ainsi, sur tout ensemble fini  $U$ , il existe une unique  $E$ -structure, c'est-à-dire l'ensemble  $U$  lui-même.

5. L'espèce des éléments, notée  $\in$ , est définie par  $\in[U] = U$ . Ainsi, les structures sur  $U$  sont les éléments de  $U$ .

## 1.2 Séries associées

Nous présentons dans cette section trois types de séries formelles importantes associées aux espèces de structures:

1.  $F(x)$ , la série génératrice de l'espèce  $F$ ;
2.  $\tilde{F}(x)$ , la série génératrice des types de l'espèce  $F$ ;
3.  $Z_F(x_1, x_2, x_3, \dots)$ , la série indicatrice des cycles de  $F$ .

L'importance de ces séries découle du fait qu'elles permettent d'encoder des informations parfois difficiles à calculer au sujet du dénombrement de  $F$ -structures.

Dans ce qui suit, nous adopterons comme convention que  $[n]$  est l'ensemble  $\{1, 2, \dots, n\}$  tandis que  $F[n]$  est l'ensemble  $F[\{1, 2, \dots, n\}]$ .

### 1.2.1 Série génératrice ordinaire

**Définition 1.2.1** La série génératrice d'une espèce de structures  $F$ , noté  $F(x)$ , est définie par la série formelle exponentielle

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{x^n}{n!},$$

où le coefficient  $f_n = |F[n]|$ , c'est-à-dire que  $f_n$  est le nombre de  $F$ -structures possibles sur un ensemble de  $n$  éléments.

#### Exemples

1. Soit l'espèce des *ensembles*  $E$ . La série génératrice de l'espèce des ensembles est  $E(x) = e^x$ . En effet, on peut vérifier facilement que  $\forall n, f_n = 1$  et ainsi,

$$E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \frac{x^n}{n!} = e^x. \quad (1.1)$$

2. Soit l'espèce des *ordres linéaires*  $L$ . La série génératrice de l'espèce des ordres linéaires est  $L(x) = \frac{1}{1-x}$ . En effet, on peut vérifier facilement que  $\forall n, f_n = n!$  et ainsi,

$$L(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n! \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}. \quad (1.2)$$

3. Soit l'espèce des *singletons*  $X$ . La série génératrice de l'espèce des singletons est  $X(x) = x$ . En effet, par définition de l'espèce des singletons, on a que  $f_1 = 1$  et que  $\forall n \neq 1, f_n = 0$  et ainsi,

$$X(x) = x. \quad (1.3)$$

4. Soit l'espèce des *permutations*  $S$ . La série génératrice de l'espèce des permutations est  $S(x) = \frac{1}{1-x}$ . En effet, on peut vérifier facilement que  $\forall n, f_n = n!$  et ainsi,

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n! \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}. \quad (1.4)$$

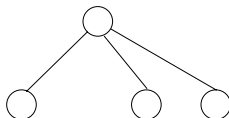
### 1.2.2 Série génératrice des types d'isomorphie

Avant d'introduire ce qu'est une série génératrice des types d'isomorphie, nous devons d'abord définir ce que nous entendons par «types d'isomorphie».

**Définition 1.2.2** *On définit la relation d'équivalence «même type d'isomorphie» en disant que deux  $F$ -structures,  $s \in F[U]$  et  $t \in F[U]$ , ont le même type d'isomorphie si et seulement s'il existe une bijection  $\beta : U \rightarrow V$  telle que  $F[\beta](s) = t$ . Un type d'isomorphie est une classe de cette relation d'équivalence.*

Il est facile de voir qu'à la figure 1.1, les deux arbres sont isomorphes. La bijection est bien illustrée par les flèches de cette figure. Une représentation pratique d'un type d'isomorphie consiste à oublier les étiquettes désignant les éléments des ensembles sous-jacents.

La figure suivante représente le type d'isomorphie des arbres de la figure 1.1.



**Définition 1.2.3** *La série génératrice des types d'isomorphie d'une espèce de structures  $F$ , notée  $\tilde{F}(x)$ , aussi appelée série tilda, est définie par la série formelle ordinaire*

$$\tilde{F}(x) = \sum_{n \geq 0} \tilde{f}_n x^n$$

où le coefficient  $\tilde{f}_n$  est le nombre de types d'isomorphie de  $F$ -structures sur  $n$  éléments.

**Exemples** L'espèce  $L(x)$  des ordres linéaires n'a qu'un seul type d'isomorphie sur  $n$  sommets. Ainsi, on a que  $\tilde{f}_n = 1$  pour tout  $n$ , et donc que

$$\tilde{L}(x) = \sum_{n \geq 0} 1x^n = 1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}.$$

Par des calculs semblables, on trouve les séries génératrices de types suivantes:

$$1. \quad \tilde{E}(x) = \frac{1}{1-x}, \quad 2. \quad \tilde{X}(x) = x, \quad 3. \quad \tilde{S}(x) = \prod_{k \geq 1} \frac{1}{1-x^k}.$$

### 1.2.3 Série indicatrice des cycles

Parmi les trois types de séries présentés ici, la série indicatrice des cycles est celle qui contient le plus d'informations énumératives. Contrairement aux deux séries précédentes, cette série formelle contient une infinité de variables  $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots$ . Avant de présenter cette troisième série, nous devons avant tout introduire ce qu'est le *type cyclique d'une permutation*.

**Définition 1.2.4** Soit  $U$ , un ensemble fini et  $\sigma$ , une permutation de  $U$ . Le *type cyclique* de la permutation  $\sigma$  est la suite  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots)$ , où pour  $k \geq 1$ ,  $\sigma_k$  est le nombre de cycles de longueur  $k$  de la décomposition de  $\sigma$  en cycles disjoints.

Par exemple, soit  $U = [9]$ , et  $\sigma = (1)(26)(384)(5)(97)$ , une permutation de  $U$ . Le type cyclique de la permutation  $\sigma$  est  $(2, 2, 1, 0, 0, \dots)$ , puisque  $\sigma_1 = 2$ ,  $\sigma_2 = 2$ ,  $\sigma_3 = 1$  et  $\sigma_k = 0$  pour tout  $k \geq 4$ .

Remarquons que  $\sigma_1$  représente le nombre de points fixes de  $\sigma$ . De plus, si  $|U| = n$  et  $k > n$ , alors on a que  $\sigma_k = 0$ .

Dans ce qui suit, nous utiliserons les notations suivantes:

$$\begin{aligned} \text{Fix } \sigma &= \{u \in U \mid \sigma(u) = u\}, \\ \text{fix } \sigma &= |\text{Fix } \sigma|. \end{aligned}$$

Ainsi,  $\text{Fix } \sigma$  est l'ensemble des points laissés fixes par  $\sigma$ , alors que  $\text{fix } \sigma$  représente le nombre de points laissés fixes par  $\sigma$ .

**Définition 1.2.5** La *série indicatrice des cycles de l'espèce  $F$*  est la série formelle à



une infinité de variables  $x_1, x_2, x_3, \dots$

$$Z_F(x_1, x_2, x_3, \dots) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \left( \sum_{\sigma \in S_n} \text{fix } F[\sigma] x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3} \dots \right), \quad (1.5)$$

où  $S_n$  est le groupe des permutations de  $[n]$  (c'est-à-dire que  $S_n = S[n]$ ) et  $\text{fix } F[\sigma]$  est le nombre de  $F$ -structures sur  $[n]$  laissées fixes par  $F[\sigma]$ . Autrement dit,  $\text{fix } F[\sigma]$  est le nombre de structures sur  $[n]$  dont  $\sigma$  est un automorphisme.

**Exemples** Pour l'espèce  $L(x)$  des ordres linéaires, seule la permutation identité laisse fixe un nombre non nul de structures, et ce nombre est  $n!$ . Ainsi, on a

$$Z_L(x_1, x_2, x_3, \dots) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} (n! x_1^n) = \frac{1}{1 - x_1}.$$

Par des calculs semblables, on peut obtenir:

1.  $Z_E(x_1, x_2, x_3, \dots) = e^{x_1 + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} + \dots}$ ,
2.  $Z_X(x_1, x_2, x_3, \dots) = x_1$ ,
3.  $Z_S(x_1, x_2, x_3, \dots) = \frac{1}{(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)\dots}$ .

Le théorème suivant montre que la notion de série indicatrice  $Z_F$  est à la fois une généralisation de la série  $F(x)$  et de la série  $\tilde{F}(x)$ .

**Théorème 1.2.1** *Pour toute espèce de structures  $F$ , on a*

- a)  $F(x) = Z_F(x, 0, 0, \dots)$ ,
- b)  $\tilde{F}(x) = Z_F(x, x^2, x^3, \dots)$ .

**Preuve**

a) Afin d'obtenir la première égalité, on remplace dans l'équation (1.5)  $x_1$  par  $x$  et  $x_i$

par 0, pour  $i \geq 2$ . Ainsi, on obtient

$$Z_F(x, 0, 0, \dots) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \left( \sum_{\sigma \in S_n} \text{fix } F[\sigma] x^{\sigma_1} 0^{\sigma_2} 0^{\sigma_3} \dots \right) \quad (1.6)$$

$$= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \text{fix } F[Id_n] x^n \quad (1.7)$$

$$= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} f_n x^n \quad (1.8)$$

$$= F(x) \quad (1.9)$$

Le passage de l'équation (1.6) à l'équation (1.7) est dû au fait que pour chaque valeur fixée de  $n \geq 0$ ,  $x^{\sigma_1} 0^{\sigma_2} 0^{\sigma_3} \dots = 0$ , sauf si  $\sigma_1 = n$  et  $\sigma_i = 0$  pour  $i \geq 2$ . En effet, seules les permutations identités, notées  $\sigma = Id_n$ , peuvent contribuer à la somme. ■

b) En remplaçant dans l'équation (1.5) les  $x_i$  par  $x^i$ , on obtient:

$$Z_F(x, x^2, x^3, \dots) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \text{fix } F[\sigma] x^{\sigma_1} x^{2\sigma_2} x^{3\sigma_3} \dots \quad (1.10)$$

$$= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \text{fix } F[\sigma] x^{\sigma_1 + 2\sigma_2 + 3\sigma_3 + \dots} \quad (1.11)$$

$$= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \text{fix } F[\sigma] x^n \quad (1.12)$$

$$= \sum_{n \geq 0} \tilde{f}_n x^n \quad (1.13)$$

$$= \tilde{F}(x). \quad (1.14)$$

Notez que le passage de l'égalité (1.12) à l'égalité (1.13) utilise le lemme de Cauchy-Frobenius, aussi connu sous le nom de lemme de Burnside (Bergeron, Labelle et Leroux, 1994). ■

### 1.3 Opérations sur les espèces

Maintenant que nous avons introduit les espèces de structures ainsi que les principales séries qui leur sont associées, il est naturel de se demander s'il est possible de définir

entre les espèces elles-mêmes, des opérations similaires aux opérations algébriques bien connues, en particulier l'addition, la multiplication, la substitution et la dérivation. Dans cette *algèbre combinatoire*, nous aimerions que les opérations sur les espèces de structures permettent de créer d'autres espèces de structures de telle sorte que

1.  $(F + G)(x) = F(x) + G(x)$ ;
2.  $(F \cdot G)(x) = F(x)G(x)$ ;
3.  $(F \circ G)(x) = F(G(x))$ ;
4.  $F'(x) = \frac{d}{dx}F(x)$ .

Ainsi, afin d'avoir les égalités précédentes, il faut que les nouvelles espèces  $(F + G)$ ,  $(F \cdot G)$ ,  $(F \circ G)$  et  $F'$  soient entièrement définies de façon à ce que le dénombrement de leurs structures ne dépende que du dénombrement des  $F$  et  $G$ -structures. On veut donc avoir que

1. le nombre de  $(F + G)$ -structures sur  $n$  éléments est donné par

$$|(F + G)[n]| = |F[n]| + |G[n]|;$$

2. le nombre de  $(F \cdot G)$ -structures sur  $n$  éléments est donné par

$$|(F \cdot G)[n]| = \sum_{i+j=n} \frac{n!}{i!j!} |F[i]| |G[j]|;$$

3. le nombre de  $(F \circ G)$ -structures sur  $n$  éléments est donné par

$$|(F \circ G)[n]| = \sum_{j=0}^n \left( \sum_{\substack{n_1+n_2+\dots+n_j=n \\ n_i \geq 0}} \frac{1}{j!} \binom{n}{n_1 n_2 \dots n_j} |F[j]| \prod_{i=1}^j |G[n_i]| \right);$$

4. le nombre de  $F'$ -structures sur  $n$  éléments est donné par

$$|F'[n]| = |F[n + 1]|.$$

Ces quatre égalités proviennent de la comparaison entre les coefficients des séries génératrices exponentielles de part et d'autre des quatre égalités vues précédemment.

### 1.3.1 Somme d'espèces de structures

Nous présentons cette opération en commençant par un exemple introductif. Considérons l'espèce des graphes connexes  $\mathcal{G}^c$  et l'espèce des graphes non connexes  $\mathcal{G}^d$ . Comme tout graphe est connexe ou non connexe, on a l'égalité suivante pour un ensemble fini  $U$  :

$$\mathcal{G}[U] = \mathcal{G}^c[U] + \mathcal{G}^d[U], \quad (1.15)$$

où l'addition est une somme disjointe ensembliste et où  $\mathcal{G}$  désigne l'espèce de tous les graphes simples. On dit alors que l'espèce  $\mathcal{G}$  est la somme des espèces  $\mathcal{G}^d$  et  $\mathcal{G}^c$  et on écrit

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}^c + \mathcal{G}^d. \quad (1.16)$$

Définissons maintenant formellement ce qu'est l'addition de deux espèces quelconques  $F$  et  $G$ .

**Définition 1.3.1** *Soient  $F$  et  $G$ , deux espèces de structures. L'espèce  $(F + G)$ , que l'on appelle la somme de  $F$  et  $G$ , est définie comme suit: une  $(F + G)$ -structure sur  $U$  est*

*une  $F$ -structure sur  $U$  ou une  $G$ -structure sur  $U$ .*

*Notons que ou signifie un ou exclusif, au sens où les structures communes à  $F[U]$  et  $G[U]$  sont dédoublées, si elles existent.*

*Autrement dit, pour tout ensemble fini  $U$ , on a*

$$(F + G)[U] = (F[U] \times \{1\}) \cup (G[U] \times \{2\}) = F[U] + G[U], \quad (1.17)$$

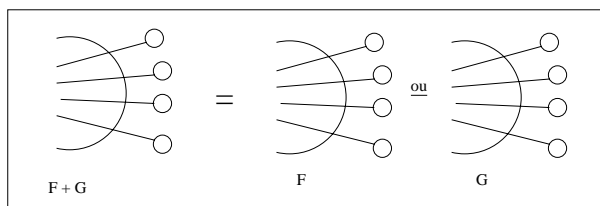
*qui est une réunion disjointe ensembliste.*

Pour la somme, le transport le long d'une bijection  $\sigma : U \rightarrow V$  est défini par

$$(F + G)[U] = \begin{cases} F[\sigma](s) & , \text{ si } s \in F[U], \\ G[\sigma](s) & , \text{ si } s \in G[U], \end{cases}$$

où  $s$  est une  $(F + G)$ -structure sur  $U$ .

Nous pouvons représenter de façon générale une  $(F + G)$ -structure, comme dans la figure 1.3.



**Figure 1.3** Représentation générale d'un  $(F + G)$ -structure.

Il est simple de vérifier que cette opération d'addition est associative et commutative, à isomorphisme près. De plus, on a l'élément neutre pour l'addition qui est l'espèce nulle  $0$ . Ainsi, on a que pour toute espèce  $F$ ,

$$(F + 0) = (0 + F) = F.$$

**Proposition 1.3.1** *Soient  $F$  et  $G$ , deux espèces de structures. Les séries associées à l'espèce  $(F + G)$  satisfont les égalités suivantes:*

1.  $(F + G)(x) = F(x) + G(x)$ ;
2.  $(\widetilde{F + G})(x) = \widetilde{F}(x) + \widetilde{G}(x)$ ;
3.  $Z_{F+G}(x_1, x_2, x_3, \dots) = Z_F(x_1, x_2, x_3, \dots) + Z_G(x_1, x_2, x_3, \dots)$ .

### 1.3.2 Multiplication d'espèces de structures

Tout comme pour l'addition, avant d'introduire l'opération de multiplication, nous allons d'abord donner un exemple qui illustre bien ce que fait cette opération. Considérons l'espèce des permutations  $S$ . Toute permutation peut être représentée par un ensemble de cycles. Il y a deux types de cycles possibles: des cycles orientés pairs, et des cycles orientés impairs. Rappelons que la parité d'un cycle dépend du nombre de sommets dans

le cycle. Comme tout cycle a soit un nombre pair, soit un nombre impair de sommets, toute permutation peut être représentée par un couple de deux structures disjointes, formé d'une permutation dont tous les cycles sont impairs et d'une permutation dont tous les cycles sont pairs. Ainsi, nous dirons que l'espèce  $S$  des permutations est le *produit* de l'espèce  $S^i$  des permutations à cycles impairs par l'espèce  $S^p$  des permutations à cycles pairs et nous écrivons

$$S = S^i \cdot S^p. \quad (1.18)$$

Définissons maintenant formellement ce qu'est le produit de deux espèces quelconques  $F$  et  $G$ .

**Définition 1.3.2** *Soient  $F$  et  $G$ , deux espèces de structures. L'espèce  $(F \cdot G)$ , que l'on appelle le produit de  $F$  et  $G$ , est définie comme suit. Une  $(F \cdot G)$ -structure sur  $U$  est un couple  $s = (f, g)$  où*

1.  $f$  est une  $F$ -structure sur une partie  $U_1 \subseteq U$ ;
2.  $g$  est une  $G$ -structure sur une partie  $U_2 \subseteq U$ ;
3.  $(U_1, U_2)$  est une décomposition de  $U$ , c'est-à-dire que  $U_1 \cup U_2 = U$  et  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ .

Autrement dit, pour tout ensemble fini  $U$ , on a

$$(F \cdot G)[U] = \sum_{(U_1, U_2)} F[U_1] \times G[U_2], \quad (1.19)$$

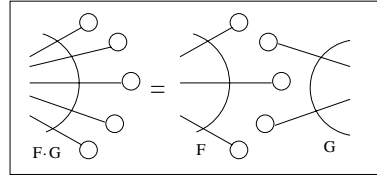
la somme disjointe étant étendue à tous les couples  $(U_1, U_2)$  formant une décomposition de  $U$ .

Pour le produit, le transport le long d'une bijection  $\sigma : U \rightarrow V$  s'effectue en posant, pour toute  $(F \cdot G)$ -structure  $s = (f, g)$  sur  $U$ ,

$$(F \cdot G)[\sigma](s) = (F[\sigma_1](f), G[\sigma_2](g)), \quad (1.20)$$

où  $\sigma_i = \sigma|_{U_i}$  est la restriction de  $\sigma$  à  $U_i$ ,  $i = 1, 2$ .

Nous pouvons représenter une  $(F \cdot G)$ -structure générale par la figure 1.4.



**Figure 1.4** Représentation générale d'une  $(F \cdot G)$ -structure.

On peut vérifier que cette opération de multiplication d'espèces est associative et commutative, à isomorphisme près. De plus, la multiplication admet l'espèce 1 comme élément neutre et l'espèce 0 comme élément absorbant. Ainsi, on a les égalités

$$(1 \cdot F) = (F \cdot 1) = F, \quad (0 \cdot F) = (F \cdot 0) = 0.$$

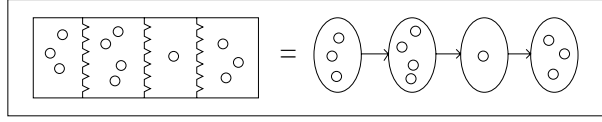
Il est aussi possible de vérifier que la multiplication est distributive par rapport à l'addition.

**Proposition 1.3.2** *Soient  $F$  et  $G$ , deux espèces de structures. Les séries associées à l'espèce  $(F \cdot G)$  satisfont les égalités suivantes:*

1.  $(F \cdot G)(x) = F(x)G(x)$ ;
2.  $\widetilde{(F \cdot G)}(x) = \widetilde{F}(x)\widetilde{G}(x)$ ;
3.  $Z_{F \cdot G}(x_1, x_2, x_3, \dots) = Z_F(x_1, x_2, x_3, \dots)Z_G(x_1, x_2, x_3, \dots)$ .

### 1.3.3 Substitution d'espèces de structures

Comme pour les deux opérations vues précédemment, avant de définir formellement la substitution dans les espèces, nous présentons d'abord un exemple illustrant bien cette opération. Considérons *Scru*, l'espèce des scrutins. Soit le scrutin de la figure 1.5.



**Figure 1.5** Exemple de substitution dans les espèces.

Cette figure illustre le fait que tout scrutin peut être exprimé comme étant un ordre linéaire sur, non pas un ensemble de sommets, mais plutôt sur un ensemble d'ensembles non vides. Ainsi, tout scrutin s'identifie naturellement à une  $L$ -structure placée sur un ensemble de  $E_+$ -structures disjointes. Autrement dit, tout Scru-structure est une « $L$ -assemblée» de  $E_+$ -structures. Ainsi, on a les deux équations combinatoires suivantes:

$$\text{Scru} = L \circ E_+, \quad (1.21)$$

$$\text{Scru} = L(E_+). \quad (1.22)$$

Remarquons que les deux équations précédentes ont exactement le même sens. Ce ne sont que deux notations différentes.

Passons maintenant à la définition formelle de la substitution de deux espèces quelconques  $F$  et  $G$ .

**Définition 1.3.3** Soient  $F$  et  $G$ , deux espèces de structures telles que  $G[0] = 0$ , c'est-à-dire qu'il n'y a aucune  $G$ -structure sur l'ensemble vide. L'espèce  $(F \circ G)$ , aussi notée  $F(G)$ , que l'on appelle la composée de  $G$  dans  $F$ , est définie comme suit: une  $(F \circ G)$ -structure sur  $U$  est un couple  $s = (\varphi, \gamma)$  où

1.  $\varphi$  est une  $F$ -structure sur l'ensemble des classes d'une partition arbitraire  $\pi$  de  $U$ ;
2.  $\gamma = (\gamma_p)_{p \in \pi}$  où, pour chaque classe  $p$  de  $\pi$ ,  $\gamma_p$  est une  $G$ -structure sur  $p$ .

Autrement dit, pour tout ensemble fini  $U$ , on a

$$(F \circ G)[U] = \sum_{\pi \text{ partition de } U} F[\pi] \times \prod_{p \in \pi} G[p], \quad (1.23)$$

la somme disjointe étant prise sur l'ensemble des partitions  $\pi$  de  $U$ .



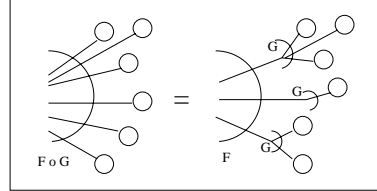
Pour la substitution, le transport le long d'une bijection  $\sigma : U \rightarrow V$  s'effectue en posant, pour toute  $(F \circ G)$ -structure  $s = (\varphi, (\gamma_p)_{p \in \pi})$  sur  $U$ ,

$$(F \circ G)[\sigma](s) = (\bar{\varphi}, (\bar{\gamma}_{\bar{p}})_{\bar{p} \in \bar{\pi}}), \quad (1.24)$$

où

1.  $\bar{\pi}$  est la partition de  $V$  obtenue par transport de  $\pi$  le long de  $\sigma$ ;
2. pour chaque  $\bar{p} = \sigma(p) \in \bar{\pi}$ , la structure  $\bar{\gamma}_{\bar{p}}$  est obtenue de la structure  $\gamma_p$  par  $G$ -transport le long de  $\sigma|_p$ ;
3. la structure  $\bar{\varphi}$  est obtenue de la structure  $\varphi$  par  $F$ -transport le long de la bijection  $\bar{\sigma}$  induite sur  $\pi$  par  $\sigma$ .

Nous pouvons représenter une  $(F \circ G)$ -structure générale par la figure 1.6.



**Figure 1.6** Représentation générale d'une  $(F \circ G)$ -structure.

Contrairement aux deux premières opérations qui préservent des égalités naturelles quant aux séries qui leurs étaient associées, la substitution elle, agit différemment sur les séries, comme nous le verrons dans la proposition suivante.

**Proposition 1.3.3** *Soient  $F$  et  $G$ , deux espèces de structures et supposons que  $G[\emptyset] = \emptyset$ . Les séries associées à l'espèce  $(F \circ G)$  satisfont les égalités suivantes:*

1.  $(F \circ G)(x) = F(G(x));$
2.  $(\widetilde{F \circ G})(x) = Z_F(\widetilde{G}(x), \widetilde{G}(x^2), \widetilde{G}(x^3), \dots);$

$$\begin{aligned}
3. \quad Z_{F \circ G}(x_1, x_2, x_3, \dots) &= (Z_F \circ Z_G)(x_1, x_2, \dots) \\
&= Z_F(Z_G(x_1, x_2, \dots), Z_G(x_2, x_4, \dots), (Z_G(x_3, x_6, \dots), \dots)).
\end{aligned}$$

Pour la preuve du troisième résultat, nous renvoyons le lecteur à (Bergeron, Labelle et Leroux, 1994). Cette troisième égalité utilise la *substitution pléthystique* de  $Z_G$  dans  $Z_F$ , notée  $(Z_F \circ Z_G)$ . Elle est définie par

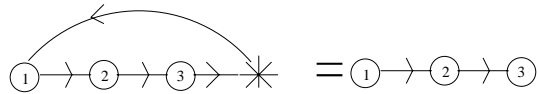
$$(Z_F \circ Z_G) = (f \circ g) = f(g_1, g_2, \dots), \quad (1.25)$$

où  $g_i = g(x_i, x_{2i}, x_{3i}, \dots)$ .

### 1.3.4 Dérivée d'une espèce de structures

Pour cette opération de dérivation, nous aimerions que la définition de la dérivée  $F'$  d'une espèce  $F$  soit telle que l'égalité  $F'(x) = \frac{d}{dx}F(x)$  soit respectée, où  $F'(x)$  et  $F(x)$  sont évidemment les séries génératrices des espèces  $F'$  et  $F$ . Cette égalité revient à écrire que  $|F'[n]| = |F[n+1]|$ . L'espèce  $F'$  ainsi contruite devrait donc être telle que le nombre de  $F'$ -structures sur un ensemble fini  $U$  est égal au nombre de  $F$ -structures sur l'ensemble  $U$  augmenté d'un sommet.

Voici un exemple illustrant cette opération de dérivation. Soit  $C$ , l'espèce des cycles. La figure suivante illustre une  $C'$ -structure sur l'ensemble  $\{1, 2, 3\}$ .



Le cycle illustré ci-haut est construit sur l'ensemble des sommets  $\{1, 2, 3, *\}$ . L'ordre linéaire sur l'ensemble des sommets  $\{1, 2, 3\}$  illustré dans la figure précédente représente canoniquement ce cycle. Dans la définition qui suit, nous verrons que l'espèce  $L$ , les ordres linéaires, est la dérivée de l'espèce  $C$  des cycles.

**Définition 1.3.4** Soit  $F$ , une espèce de structures. L'espèce  $F'$ , aussi notée  $\frac{d}{dX}F(X)$ , que l'on appelle la dérivée de  $F$ , est définie comme suit. Une  $F'$ -structure sur  $U$  est une  $F$ -structure sur  $U^+ = U \cup \{*\}$ , où  $* = *_U$  est un point choisi à l'extérieur de  $U$ .

Autrement dit, pour tout ensemble fini  $U$ , on a

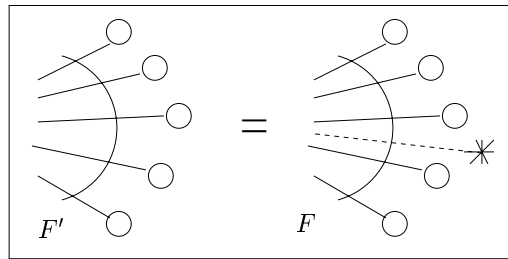
$$F'[U] = F[U^+]. \quad (1.26)$$

Pour la dérivation, le transport le long d'une bijection  $\sigma : U \rightarrow V$  s'effectue en posant, pour toute  $F'$ -structure  $s$  sur  $U$ ,

$$F'[\sigma](s) = F[\sigma^+](s), \quad (1.27)$$

où  $\sigma^+ : U + \{*\} \rightarrow V + \{*\}$  est l'extension canonique de  $\sigma$  obtenue en posant  $\sigma^+(u) = \sigma(u)$  si  $u \in U$ , et  $\sigma^+(* ) = *$ .

Nous pouvons représenter une  $F'$ -structure par la figure 1.7.



**Figure 1.7** Représentation générale d'une  $F'$ -structure.

Notons que le point  $*$  extérieur à  $U$  ne fait pas partie de l'ensemble sous-jacent de la  $F'$ -structure sur  $U$ .

Dans la proposition qui suit, le comportement des trois séries importantes par rapport à la dérivation est décrit.

**Proposition 1.3.4** Soit  $F$ , une espèce de structures. On a les égalités

1.  $F'(x) = \frac{d}{dx}F(x)$ ;
2.  $\widetilde{F}'(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}Z_F\right)(x, x^2, x^3, \dots)$ ;
3.  $Z_{F'}(x_1, x_2, x_3, \dots) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}Z_F\right)(x_1, x_2, x_3, \dots)$ .

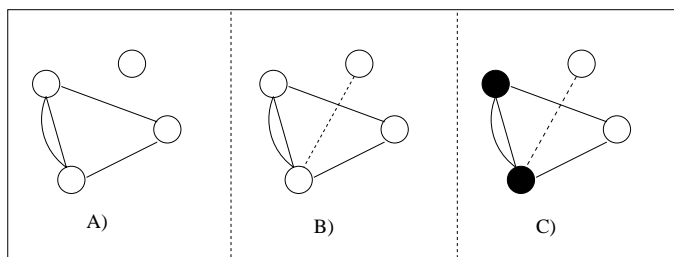
### 1.3.5 Autres opérations

Les quatre opérations sur les espèces présentées précédemment sont les plus importantes. Par contre, il en existe d'autres. Dans ce qui suit, nous présentons deux autres opérations qui seront fort utiles dans ce travail: l'opération d'ajout d'un lien, notée  $\frac{\partial}{\partial Y}$ , et l'opération de  $\Lambda$ -pointage, notée  $\Lambda \ll X \frac{\partial}{\partial X} \gg$ , dans le contexte des graphes et multigraphes.

Nous ne ferons qu'une brève description de ces deux opérations. L'opération d'ajout d'un lien,  $\frac{\partial}{\partial Y}$ , comme son nom l'indique, ajoute un lien extérieur à l'ensemble des liens. Ici, nous entendons par *lien*, soit une arête, soit un arc. Ce nouveau lien ajouté se représente graphiquement en pointillés pour bien le distinguer des autres. Par convention, ce lien pointillé n'est pas considéré comme faisant partie de l'ensemble sous-jacent des liens de la structure. L'opérateur  $\frac{\partial}{\partial Y}$  sera utilisé au chapitre 4.

Étant donné une espèce  $\Lambda = \Lambda(X)$ , le  $\Lambda$ -pointage,  $\Lambda \ll X \frac{\partial}{\partial X} \gg$ , consiste à ajouter une  $\Lambda$ -structure sur un sous-ensemble de l'ensemble des sommets. Les sommets affectés par cette  $\Lambda$ -structure doivent être représentés distinctivement.

**Exemple** Soit la structure représentée en A), à la figure 1.8. Un des résultats possibles suite à l'application de l'opérateur d'ajout d'un lien à cette structure est la structure représentée en B). Notons que dans cette structure, l'ensemble sous-jacent de liens est formé de 4 liens et non de 5. Puis, à cette dernière structure, l'application de l'opérateur  $E_2 \ll X \frac{\partial}{\partial X} \gg$  peut donner la structure représentée en C).



**Figure 1.8** Exemple des opérations d'ajout d'un lien et de pointage.

## CHAPITRE II

### CONTEXTE MULTISORTE PONDÉRÉ

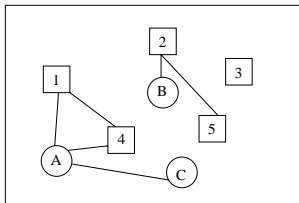
Maintenant que nous avons bien défini ce qu'est une espèce de structures et que nous savons de quelle façon sont définies les diverses opérations sur les espèces, nous présentons dans ce chapitre une généralisation des espèces de structures sur une sorte, aux espèces de structures pondérées à plusieurs sortes. Pour ce faire, nous procéderons par étapes. D'abord, nous définissons ce qu'est une espèce à plusieurs sortes, puis nous voyons de quelle façon l'on peut ajouter des pondérations à une espèce à une sorte, et finalement, dans la dernière section, nous combinons ces deux nouvelles notions et ainsi, nous définissons ce qu'est une espèce de structures pondérée à plusieurs sortes.

#### 2.1 Espèces à plusieurs sortes

Nous présenterons la définition générale d'espèce de structures à  $k$  sortes. Par contre, dans l'ensemble de ce travail, nous nous limiterons à  $k = 2$ , c'est-à-dire à des espèces de structures sur seulement deux sortes.

En analyse, les fonctions à plusieurs variables sont une généralisation des fonctions à une seule variable. Nous verrons ici que de façon similaire, les espèces de structures à plusieurs sortes sont la généralisation du concept d'espèce vu précédemment.

Mais avant de définir formellement ce qu'est une espèce de structures à plusieurs sortes, voyons un exemple illustratif.



**Figure 2.1** Exemple de graphe simple avec deux types de sommets.

**Exemple** Soit le graphe simple de la figure 2.1. Ce graphe simple a deux types de sommets: des sommets de forme carrée et des sommets de forme ronde. Ainsi, ce graphe simple est bien un graphe sur deux sortes de sommets: l'ensemble des sommets carrés  $U_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  et l'ensemble des sommets ronds  $U_2 = \{A, B, C\}$ . L'ensemble sous-jacent à ce graphe est remplacé par un couple d'ensembles  $(U_1, U_2)$  pour signifier que l'on a une structure sur deux sortes de sommets.

Voyons maintenant de quelle façon s'effectue le *transport des structures le long de bijections*. Pour les espèces à plusieurs sortes, il y aura autant de bijections qu'il y aura de sortes, chacune de ces bijections ne s'appliquant qu'à une seule sorte d'éléments. Ainsi, dans l'exemple précédent, chaque sommet carré doit être envoyé sur un sommet carré et de la même manière, chaque sommet rond doit être envoyé sur un sommet rond, par une certaine bijection de la forme

$$\sigma : U_1 + U_2 \rightarrow V_1 + V_2,$$

où les sommets de l'ensemble  $U_1$  sont envoyés sur les sommets de l'ensemble  $V_1$  et ceux de  $U_2$  sur ceux de  $V_2$ .

Les définitions suivantes sont préalables à la définition formelle d'espèces de structures à plusieurs sortes.

**Définition 2.1.1** Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Un *multiensemble à  $k$  sortes d'éléments* est un  $k$ -uplet  $U$  d'ensembles  $U_i$  représenté par  $U = (U_1, U_2, \dots, U_k)$ . On appelle *élément de  $U$  de sorte  $i$*  un  $u \in U_i$ .

Le *multicardinal* de  $U$  est le  $k$ -uple de cardinaux

$$|U| = (|U_1|, |U_2|, \dots, |U_k|),$$

et le *cardinal total* de  $U$  est la somme

$$||U|| = |U_1| + |U_2| + \dots + |U_k|.$$

Le transport le long des bijections nécessite l'introduction de la définition suivante.

**Définition 2.1.2** Une multifonction  $f$  de  $(U_1, \dots, U_k)$  vers  $(V_1, \dots, V_k)$ , notée

$$f : (U_1, \dots, U_k) \rightarrow (V_1, \dots, V_k),$$

est un  $k$ -uple de fonctions  $f = (f_1, f_2, \dots, f_k)$ , où  $f_i : U_i \rightarrow V_i$ , pour  $i = 1 \dots k$ .

On dira qu'une multifonction est *bijective* si chacune des fonctions  $f_i$  est bijective.

**Définition 2.1.3** Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Une espèce de structures sur  $k$  sortes est une règle  $F$  qui associe

- (i) à chaque multienemble fini  $U = (U_1, U_2, \dots, U_k)$ , un ensemble fini  $F[U_1, U_2, \dots, U_k]$ ;
- (ii) à chaque multifonction bijective  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k) : (U_1, U_2, \dots, U_k) \rightarrow (V_1, V_2, \dots, V_k)$ , une fonction  $F[\sigma] : F[U_1, U_2, \dots, U_k] \rightarrow F[V_1, V_2, \dots, V_k]$ .

De plus, les fonctions  $F[\sigma]$  doivent satisfaire les propriétés de functorialité suivantes:

(iii) pour toutes fonctions bijectives

$$\sigma : (U_1, U_2, \dots, U_k) \rightarrow (V_1, V_2, \dots, V_k) \text{ et } \tau : (V_1, V_2, \dots, V_k) \rightarrow (W_1, W_2, \dots, W_k),$$

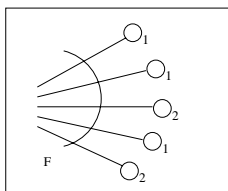
$$\text{on a } F[\tau \circ \sigma] = F[\tau] \circ F[\sigma];$$

(iv) pour la multifonction identité  $Id_U : U \rightarrow U$ , on a

$$F[Id_U] = Id_{F[U]}.$$

On appelle une  $F$ -structure sur  $(U_1, U_2, \dots, U_k)$  un élément  $s \in F[U_1, U_2, \dots, U_k]$ . De plus, la fonction  $F[\sigma]$  est appelée le *transport des  $F$ -structures le long de*  $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k)$ .

La représentation générale pour les  $F$ -structures sur plusieurs sortes ne diffère de celle des  $F$ -structures sur une sorte que par l'ajout de numéros aux sommets de différentes sortes. Notez que l'on peut aussi utiliser des couleurs ou encore des formes. La figure 2.2 est une représentation générale d'une  $F$ -structure sur deux sortes. Un rond affecté d'un indice  $i$  représente un élément de sorte  $i$  où  $i = 1, 2$ .



**Figure 2.2** Représentation générale d'une  $F$ -structure sur deux sortes.

**Remarque 2.1.1** *Il n'est pas nécessaire d'avoir un minimum d'un élément par sorte. Ainsi, toute espèce à  $k$  sortes peut être vue comme une espèce à  $l$  sortes, où  $k \leq l$ .*

## 2.2 Espèces pondérées

Nous allons maintenant voir de quelle façon l'on peut ajouter des pondérations aux espèces à une seule sorte. L'idée d'ajouter des poids aux structures est intéressante, puisque, comme nous le verrons, ceci nous permettra de faire une énumération plus précise des structures, en les classant à l'aide de ce nouveau paramètre qu'est le poids. Mais avant de donner les définitions formelles, voici un exemple introductif.

**Exemple** On peut associer un poids, noté  $w(\gamma)$ , à chaque graphe simple  $\gamma \in \mathcal{G}$ , en posant

$$w(\gamma) = t^{p(\gamma)}, \quad (2.1)$$

où  $t$  est la variable formelle et  $p(\gamma)$  désigne le nombre de sommets pairs du graphe  $\gamma$ . Rappelons qu'un sommet d'un graphe est dit *pair* si le nombre d'arêtes qui lui sont incidentes est pair.

Il est alors possible de regrouper les graphes simples selon le paramètre descriptif *nombre*



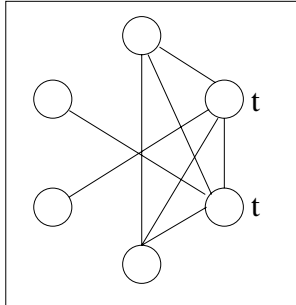
de sommets pairs. On dit que l'ensemble  $\mathcal{G}[U]$  de tous les graphes simples sur  $U$  est pondéré par la fonction de poids donné par l'équation (2.1). L'inventaire des graphes simples sur  $U$  selon cette pondération  $w$ , que l'on note  $|\mathcal{G}[U]|_w$ , est obtenu en faisant la somme des poids  $w(\gamma)$ , pour  $\gamma \in \mathcal{G}[U]$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} |\mathcal{G}[U]|_w &= \sum_{\gamma \in \mathcal{G}[U]} w(\gamma) \\ &= \sum_{\gamma \in \mathcal{G}[U]} t^{p(\gamma)}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

En regroupant les termes selon les puissances de la variable  $t$ , on obtient un polynôme en  $t$ . En posant  $|U| = n$ , on a alors

$$|\mathcal{G}[U]|_w = g_n(t) = \sum_{k=0}^n g_{n,k} t^k. \quad (2.3)$$

Les coefficients  $g_{n,k}$  donnent le nombre de graphes simples sur  $n$  éléments dont  $k$  sont des sommets pairs. Nous constatons donc rapidement que l'ajout de pondérations permet d'obtenir beaucoup plus d'informations concernant les structures. Dans l'exemple de la



**Figure 2.3** Exemple d'un graphe  $\gamma$  avec  $w(\gamma) = t^2$ .

figure 2.3, nous savons que notre graphe a six sommets, mais en plus, puisque  $w(\gamma) = t^2$ , nous savons qu'il possède exactement deux sommets de degrés pairs.

**Définition 2.2.1** *Un ensemble  $\mathbb{A}$ -pondéré est un couple  $(A, w)$ , où  $A$  est un ensemble,  $w : A \rightarrow \mathbb{A}$  est une fonction qui associe un poids  $w(\alpha) \in \mathbb{A}$  à chaque élément  $\alpha \in A$ , et  $\mathbb{A}$  est un anneau de polynômes en une ou plusieurs variables formelles.*

On appelle  $|A|_w = \sum_{\alpha \in A} w(\alpha)$  le *poids total* de l'ensemble pondéré  $(A, w)$ , et si cette somme existe, on dit alors que l'ensemble pondéré  $(A, w)$  est *sommable*.

**Définition 2.2.2** Soit  $(A, w)$  et  $(B, v)$ , des ensembles  $\mathbb{A}$ -pondérés. On appelle *morphisme d'ensemble  $\mathbb{A}$ -pondérés*

$$f : (A, w) \rightarrow (B, v),$$

une fonction  $f : A \rightarrow B$  qui préserve les poids au sens suivant:

$$\forall a \in A : v(f(a)) = w(a).$$

Il est possible d'effectuer certaines opérations sur des ensembles  $\mathbb{A}$ -pondérés, comme nous le verrons dans les deux définitions suivantes.

**Définition 2.2.3** Soient  $(A, w)$  et  $(B, v)$ , des ensembles  $\mathbb{A}$ -pondérés. La somme  $(A, w) + (B, v)$  est l'ensemble  $\mathbb{A}$ -pondéré  $(A + B, \mu)$ , où  $(A + B)$  représente la réunion disjointe des ensembles  $A$  et  $B$  et  $\mu$  est la fonction de poids définie par

$$\mu(x) = \begin{cases} w(x) & , \text{ si } x \in A; \\ v(x) & , \text{ si } x \in B. \end{cases}$$

**Définition 2.2.4** Soient  $(A, w)$  et  $(B, v)$ , des ensembles  $\mathbb{A}$ -pondérés. Le produit  $(A, w) \times (B, v)$  est l'ensemble  $\mathbb{A}$ -pondéré  $(A \times B, \rho)$ , où  $(A \times B)$  représente le produit cartésien usuel des ensembles  $A$  et  $B$ , et  $\rho$  est la fonction de poids définie par

$$\rho(x, y) = w(x)v(y).$$

La proposition suivante explicite la relation entre le poids total de chacun des ensembles pondérés et le poids total de la somme et du produit de ces mêmes ensembles pondérés.

**Proposition 2.2.1** Soient  $(A, w)$  et  $(B, v)$ , des ensembles  $\mathbb{A}$ -pondérés sommables. Alors  $(A, w) + (B, v)$  et  $(A, w) \times (B, v)$  sont sommables et on a les égalités

1.  $|A + B|_\mu = |A|_w + |B|_v,$

$$2. |A \times B|_\rho = |A|_w |B|_v,$$

avec les notations des définitions 2.2.3 et 2.2.4.

Nous pouvons maintenant définir ce qu'est une espèce pondérée.

**Définition 2.2.5** Soit  $\mathbb{A}$ , un anneau de séries formelles en les variables  $t_1, t_2, \dots$ . Une espèce  $\mathbb{A}$ -pondérée est une règle  $F$  qui associe à

- (i) chaque ensemble fini  $U$ , un ensemble fini  $\mathbb{A}$ -pondéré  $(F[U], w_U)$  où chaque  $w_U(s)$  est un monôme en  $t_1, t_2, \dots$  pour chaque  $s \in F[U]$ ;
- (ii) chaque bijection  $\sigma : U \rightarrow V$ , une fonction

$$F[\sigma] : (F[U], w_U) \rightarrow (F[V], w_V),$$

qui est un morphisme d'ensembles pondérés.

De plus, les fonctions  $F[\sigma]$  doivent satisfaire les propriétés de functorialité suivantes:

- (iii) si  $\sigma : U \rightarrow V$  et  $\tau : V \rightarrow W$  sont des bijections, alors

$$F[\tau \circ \sigma] = F[\tau] \circ F[\sigma];$$

- (iv) pour chaque ensemble  $U$ , si  $Id_U$  est la bijection identité de  $U$  à  $U$ , alors

$$F[Id_U] = Id_{F[U]}.$$

Tout comme pour les espèces non pondérées, on appelle une  $F$ -structure sur  $U$  un élément  $s \in F[U]$  et la fonction  $F[\sigma]$  est appelée le transport des  $F$ -structures le long de  $\sigma$ . L'ajout de pondération laisse la fonction  $F[\sigma]$  bijective.

**Remarque 2.2.1** Toute espèce non pondérée peut être vue comme une espèce pondérée pour laquelle l'ensemble  $\mathbb{A}$ -pondéré est l'ensemble  $U$  et que tout élément de cet ensemble  $U$  a un poids 1. On aurait ainsi que  $|A|_w = |A|$ . On peut étendre le concept

d'espèce  $\mathbb{A}$ -pondérée en acceptant des ensembles  $F[U]$  possiblement infinis à condition que  $(F[U], w_U)$  soit toujours sommable.

Voyons maintenant de quelle manière sont définies les séries associées aux espèces pondérées.

**Définition 2.2.6** Soit  $F = F_w$ , une espèce de structures  $\mathbb{A}$ -pondérée. La série génératrice de  $F$  est la série formelle exponentielle  $F_w(x)$  à coefficients dans  $\mathbb{A}$  définie par

$$F_w(x) = \sum_{n \geq 0} |F[n]|_w \frac{x^n}{n!},$$

où  $|F[n]|_w$  est le poids total de toutes les  $F$ -structures sur  $[n]$ .

**Définition 2.2.7** Soit  $F = F_w$ , une espèce de structures  $\mathbb{A}$ -pondérée. La série indicatrice des cycles est définie par

$$Z_{F_w}(x_1, x_2, \dots) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \left( \sum_{\sigma \in S_n} |\text{Fix}F[\sigma]|_w x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3} \dots \right),$$

où  $\sigma_i$  dénote le nombre de cycles de longueur  $i$  dans  $\sigma$ .

**Définition 2.2.8** Soit  $F = F_w$ , une espèce de structures  $\mathbb{A}$ -pondérée. La série génératrice des types de l'espèce  $F_w$  est définie par

$$\widetilde{F}_w(x) = \sum_{n \geq 0} |F[n]/\sim|_w x^n,$$

où  $|F[n]/\sim|_w$  est le poids total de tous les types de  $F$ -structures sur  $[n]$ . Ici, le poids d'un type est, par convention, le poids d'une structure quelconque représentant ce type.

Tout comme dans le cas d'espèces non pondérées, les égalités suivantes sont respectées dans le cadre des espèces pondérées:

1.  $F_w(x) = Z_{F_w}(x, 0, 0, \dots)$ ;
2.  $\widetilde{F}_w(x) = Z_{F_w}(x, x^2, x^3, \dots)$ .

De plus, les opérations vues dans la section 1.3 s'appliquent aussi aux espèces pondérées. Ainsi, on a que si  $F_w$  et  $G_v$  sont deux espèces de structures  $\mathbb{A}$ -pondérées, alors

1.  $(F_w + G_v)(x) = F_w(x) + G_v(x)$ ;
2.  $(F_w \cdot G_v)(x) = F_w(x) \cdot G_v(x)$ ;
3.  $F_w'(x) = \frac{d}{dx}F_w(x)$ ;
4.  $(F_w \circ G_v)(x) = F_w(G_v(x))$ .

Pour les séries indicatrices, on a les égalités

1.  $Z_{(F_w+G_v)} = Z_{F_w} + Z_{G_v}$ ;
2.  $Z_{(F_w \cdot G_v)} = Z_{F_w} \cdot Z_{G_v}$ ;
3.  $Z_{F_w'} = \frac{\partial}{\partial x_1} Z_{F_w}$ ;
4.  $Z_{F_w \circ G_v} = Z_{F_w} \circ Z_{G_v}$ .

Pour les preuves des 4 dernières égalités, nous référons le lecteur à (Bergeron, Labelle et Leroux, 1994).

En explicitant la dernière égalité, on obtient

$$\begin{aligned} Z_{F_w \circ G_v}(x_1, x_2, \dots) &= Z_{F_w} \circ Z_{G_v}(x_1, x_2, \dots) \\ &= Z_{F_w}(Z_{G_v}(x_1, x_2, \dots), Z_{G_v,2}(x_2, x_4, \dots), Z_{G_v,3}(x_3, x_6, \dots), \dots). \end{aligned}$$

### 2.3 Espèces pondérées à plusieurs sortes

Dans cette dernière section du chapitre 2, nous étendons le concept de pondération aux espèces à plusieurs sortes, afin d'obtenir des espèces plus générales: les espèces pondérées à plusieurs sortes, que l'on appelle aussi espèces multisortes pondérées.

**Définition 2.3.1** *On appelle espèce multisorte pondérée à  $k$  sortes une règle  $F = F_w$  qui associe*

(i) *à chaque multiensemble  $U = (U_1, U_2, U_3, \dots, U_k)$ , un ensemble pondéré sommable  $(F[U], w_U)$ ;*

(ii) *à chaque multifonction bijective  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_k)$ , une fonction bijective  $F[\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k]$  qui préserve les poids, et définie de façon à ce que les propriétés de functorialité d'une espèce sur  $k$  sortes soient respectées (voir section 2.1).*

Les opérations pour les espèces multisortes pondérées ressemblent beaucoup à celles sur une seule sorte. Ainsi, on a les définitions suivantes.

**Définition 2.3.2** *Soit  $F$  et  $G$ , deux espèces pondérées à  $k$  sortes, et  $U = (U_1, U_2, \dots, U_k)$ , un multiensemble à  $k$  sortes. Alors,*

$$(F + G)[U] = F[U] + G[U]. \quad (2.4)$$

*De plus, on a*

$$(F \cdot G)[U] = \sum_{(V,W) \in \Delta[U]} F[V] \times G[W], \quad (2.5)$$

*où  $\Delta[U]$  désigne l'ensemble des dissections de  $U$ , c'est-à-dire l'ensemble des couples de multiensembles à  $k$  sortes  $(V, W)$  tel que pour  $i = 1, \dots, k$ , on a  $U_i = V_i \cup W_i$  et  $V_i \cap W_i = \emptyset$ .*

Notons que dans les deux égalités, les opérations d'addition et de multiplication ensemblistes sont effectuées dans le contexte des ensembles pondérés.

**Remarque 2.3.1** *Il est possible d'effectuer d'autres opérations sur des espèces multisortes pondérées, mais nous nous limitons ici à la somme et au produit, puisque ce sera suffisant dans le cadre de ce travail.*

Afin de définir les séries génératrices d'espèces multisortes pondérées, nous devons introduire autant de variables formelles qu'il y a de sortes. Ainsi, si nous avons les

sortes  $X, Y, Z, \dots$ , nous aurons les variables formelles  $x, y, z, \dots$ . De plus, pour définir les séries indicatrices, il faudra introduire une infinité de variables formelles. Si nous avons les sortes énumérées précédemment, nous aurons les variables formelles  $x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots, z_1, z_2, \dots$

Voici donc les définitions des différentes séries pour les espèces pondérées à deux sortes.

**Définition 2.3.3** *Soit  $F = F_w(X, Y)$ , une espèce pondérée sur deux sortes d'éléments,  $X$  et  $Y$ . La série génératrice est définie par*

$$F_w(x, y) = \sum_{n, k \geq 0} |F[n, k]|_w \frac{x^n}{n!} \frac{y^k}{k!}, \quad (2.6)$$

où  $|F[n, k]|_w$  est le poids total des  $F$ -structures sur  $([n], [k])$ .

La série génératrice des types d'isomorphie est donnée par

$$\widetilde{F}_w(x, y) = \sum_{n, k \geq 0} |F[n, k]|/ \sim |_w x^n y^k, \quad (2.7)$$

où  $|F[n, k]|/ \sim |_w$  est le poids total des types d'isomorphie de  $F$ -structures sur  $([n], [k])$ .

Enfin, la série indicatrice des cycles de  $F$  est définie par

$$Z_{F_w}(x_1, x_2, \dots; y_1, y_2, \dots) = \sum_{n, k \geq 0} \frac{1}{n!k!} \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \tau \in S_k}} |\text{Fix}F[\sigma, \tau]|_w x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3} \dots y_1^{\tau_1} y_2^{\tau_2} y_3^{\tau_3} \dots, \quad (2.8)$$

où  $|\text{Fix}F[\sigma, \tau]|_w$  est le poids total des  $F$ -structures sur  $([n], [k])$  laissées fixes sous le transport le long de  $(\sigma, \tau)$ .

Tout comme pour les espèces non pondérées à une sorte, il est possible de relier ces différentes séries comme l'énonce la proposition suivante.

**Proposition 2.3.1** *Soit  $F = F_w(X, Y)$ , une espèce pondérée sur deux sortes d'éléments,  $X$  et  $Y$ . On a les formules*

$$F_w(x, y) = Z_{F_w}(x, 0, 0, \dots; y, 0, 0, \dots), \quad (2.9)$$

$$\widetilde{F}_w(x, y) = Z_{F_w}(x, x^2, x^3, \dots; y, y^2, y^3, \dots). \quad (2.10)$$

Nous allons maintenant introduire une opération sur les espèces multisortes qui est appelée *le passage aux types d'isomorphie selon l'une des sortes*. Nous nous limiterons à définir cette espèce que dans le cas d'espèces sur deux sortes même si une généralisation est aussi possible sur plusieurs sortes.

**Définition 2.3.4** Soit  $F = F_v(X, Y)$ , une espèce  $\mathbb{A}$ -pondérée à deux sortes. Considérons deux  $F$ -structures:  $s \in F[U, V]$  et  $t \in F[U', V']$ . On dit que  $s$  et  $t$  ont le même type d'isomorphie selon la sorte  $Y$  si

1.  $U = U'$ ,
2.  $t$  s'obtient de  $s$  par transport de structures le long d'une bijection de la forme

$$\sigma = Id + \theta : U + V \rightarrow U + V'$$

où  $\theta : V \rightarrow V'$  est une bijection,

et on le note  $s \sim_Y t$ .

De plus, on appelle *type de  $s$  selon  $Y$* , la classe de  $s$  selon la relation d'équivalence  $\sim_Y$  et on la note  $T_Y s$ . On dit que  $U$  est l'ensemble sous-jacent à  $T_Y s$ .

Autrement dit, on a  $s \sim_Y t$  si et seulement si  $s$  et  $t$  deviennent égales lorsque les éléments de sorte  $Y$  dans leurs ensembles sous-jacents sont indistinguables.

Pour tout ensemble fini  $U$ , on a que l'ensemble des types selon  $Y$  est

$$T_Y F[U] = \{T_Y s \mid \exists V, s \in F[U, V]\},$$

dont  $U$  est l'ensemble sous-jacent.

On définit le poids d'un type  $T_Y s$ , pour  $s \in F_v[U, V]$  en posant

$$w(T_Y s) = v(s)y^{|V|}.$$



Notons que la variable  $y$  a été introduite pour que l'ensemble  $T_Y F[U]$  soit sommable dans  $\mathbb{A}[[y]]$ . Cette variable agit comme compteur des points de sorte  $Y$ .

Les structures de la forme  $T_Y s$  forment une espèce pondérée notée  $T_Y F$ , ou plus précisément,  $(T_{Y;y} F_v)(X)$ , dont les structures sur  $U$  sont données par l'ensemble  $(T_Y F)[U] = \{T_Y s | s \in F_v[U, V]\}$  dont le poids total est  $|T_Y F[U]|_w$ . On appelle cette espèce *l'espèce des types de  $F(X, Y)$ -structures selon la sorte  $Y$*  et on la note  $T_{Y;y} F_v$ .

On peut généraliser ce concept en disant que le type d'une espèce  $F_w(X_1, X_2, \dots, X_k)$  selon la sorte  $X_i$  est

$$T_{X_i;x_i} F_w = T_{X_i;x_i} F_w(X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_k).$$

Voici finalement quelques égalités concernant cette nouvelle opération.

**Proposition 2.3.2** *Soit  $F = F_v(X, Y)$ , une espèce pondérée à deux sortes. On a alors que*

1.  $Z_{T_{Y;y} F}(x_1, x_2, x_3, \dots) = Z_F(x_1, x_2, x_3, \dots; y, y^2, y^3, \dots);$
2.  $(T_{Y;y} F)^\sim(x) = Z_F(x, x^2, x^3, \dots; y, y^2, y^3, \dots);$
3.  $T_{Y;y} F(x) = Z_F(x, 0, 0, \dots; y, y^2, y^3, \dots).$

## CHAPITRE III

### ESPÈCES DE MULTIGRAPHES ENRICHIS

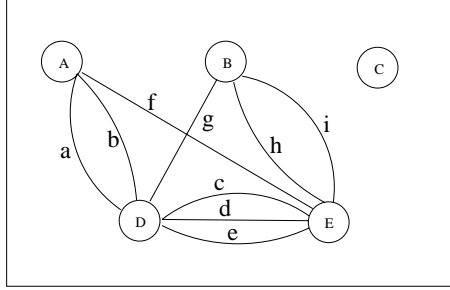
Dans ce troisième chapitre, nous introduisons d'abord la notion de multigraphe simple, puis nous définissons l'espèce des multigraphes simples. Puis, nous ajoutons des enrichissements aux multigraphes simples et nous obtenons ainsi des multigraphes simples enrichis. Par la suite, nous généralisons le concept de multigraphe enrichi en permettant d'avoir des arcs (arêtes orientées) et des boucles. Ensuite, nous définissons la notion de poids d'un multigraphe enrichi. Finalement, nous présentons le problème central de ce travail: déterminer le poids de tous les multigraphes enrichis avec sommets non étiquetés et  $k$  liens (arêtes, arcs ou boucles) étiquetés.

#### 3.1 Multigraphes

Dans cette section, nous définissons d'abord informellement ce qu'est un multigraphe simple, puis nous présentons une nouvelle espèce à deux sortes: l'espèce des multigraphes simples, que l'on notera  $\mathcal{M}$ . Cette espèce sera la base de tous les calculs des chapitres suivants.

**Définition 3.1.1** *On définit un multigraphe simple sur un ensemble d'arêtes  $A$  et un ensemble de sommets  $S$ , comme une fonction  $\mu : A \rightarrow \mathcal{P}_2[S]$ , où  $\mathcal{P}_2[S]$  désigne l'ensemble des paires non ordonnées d'éléments distincts de l'ensemble  $S$  des sommets.*

On dira que pour toute paire  $\{s_1, s_2\} \in \mathcal{P}_2[S]$ , la *fibre*  $\mu^{-1}(\{s_1, s_2\})$ , est l'ensemble des arêtes joignant les sommets  $s_1$  et  $s_2$ . Notons que la fibre peut être un ensemble vide d'arêtes. De plus, on a que  $\mu^{-1}(\{s_1, s_2\}) = \mu^{-1}(\{s_2, s_1\})$ , car  $\{s_1, s_2\}$  est un ensemble et non un couple ordonné.



**Figure 3.1** Exemple de multigraphe simple.

Dans la figure 3.1, le multigraphe est constitué de l'ensemble des arêtes  $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$  et de l'ensemble des sommets  $S = \{A, B, C, D, E\}$ .

Ainsi, on a que

$$\begin{aligned} \mu^{-1}(\{A, B\}) &= \mu^{-1}(\{A, C\}) = \mu^{-1}(\{B, C\}) = \mu^{-1}(\{C, D\}) = \mu^{-1}(\{C, E\}) = \{\}, \\ \mu^{-1}(\{A, D\}) &= \{a, b\}, \quad \mu^{-1}(\{A, E\}) = \{f\}, \quad \mu^{-1}(\{B, D\}) = \{g\}, \\ \mu^{-1}(\{B, E\}) &= \{h, i\}, \quad \mu^{-1}(\{D, E\}) = \{c, d, e\}. \end{aligned}$$

**Définition 3.1.2** On appelle *espèce des multigraphes simples* l'espèce à deux sortes  $\mathcal{M} = \mathcal{M}(X, Y)$ , définie pour tout couple d'ensembles finis  $(S, A)$  par

$$\mathcal{M}[S, A] = \{\mu \mid \mu : A \rightarrow \mathcal{P}_2[S]\},$$

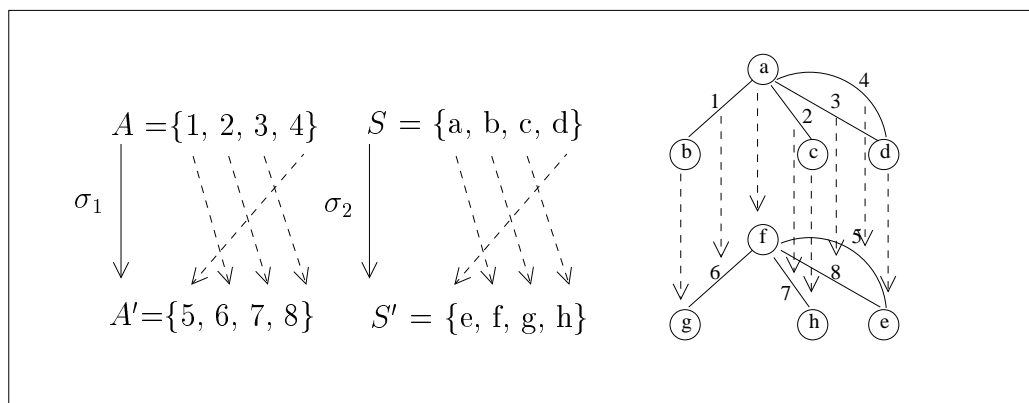
l'ensemble des multigraphes dont  $A$  est l'ensemble des arêtes et  $S$  est l'ensemble des sommets. Ici, les arêtes sont considérées de sorte  $Y$  et les sommets de sorte  $X$ .

Voyons que l'espèce  $\mathcal{M}$  est bien une espèce à deux sortes, en vérifiant qu'elle respecte les 4 propriétés que les espèces à deux sortes doivent satisfaire.

(i) À chaque multienemble fini  $U = (S, A)$ , on peut associer l'ensemble  $\mathcal{M}[S, A]$ , qui est fini. En effet, on a que  $|\mathcal{M}[S, A]| = \binom{|S|}{2}^{|A|}$ , puisque chaque arête peut être placée à exactement  $\binom{|S|}{2}$  endroits, et ce, indépendamment de l'emplacement des autres arêtes.

(ii) À chaque multifonction bijective  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) : (S, A) \rightarrow (S', A')$ , on peut associer une fonction  $\mathcal{M}[\sigma] : \mathcal{M}[S, A] \rightarrow \mathcal{M}[S', A']$ . En effet, cette fonction  $\mathcal{M}[\sigma]$  correspond au transport des multigraphes le long de  $\sigma$ . La figure 3.2 illustre bien cette propriété. Plus précisément, pour toute fonction bijective  $\sigma : (S, A) \rightarrow (S', A')$ , le diagramme ci-dessous permet de définir le transport comme suit:

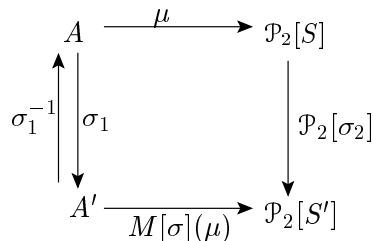
pour  $\mu : A \rightarrow \mathcal{P}_2[S]$  (dans  $\mathcal{M}[S, A]$ ), on définit  $\mathcal{M}[\sigma](\mu) = \mathcal{P}_2[\sigma_2] \circ \mu \circ \sigma_1^{-1}$ .



**Figure 3.2** Illustration du transport des multigraphes le long de  $\sigma$ .

En juxtaposant deux diagrammes du type ci-dessous, on vérifie facilement que

$$\mathcal{M}[\sigma \circ \sigma'] = \mathcal{M}[\sigma] \circ \mathcal{M}[\sigma'].$$



(iii) Pour la multifonction identité  $Id_{(S,A)} : (S, A) \rightarrow (S, A)$ , on a

$$\mathcal{M}[Id_{(S,A)}] = Id_{\mathcal{M}[(S,A)]}.$$

Informellement, ces deux propriétés de functorialité découlent du fait que le transport des multigraphes simples le long de  $\sigma$  n'est qu'un simple réétiquetage des sommets et des arêtes.

Ainsi, on a bien que cette nouvelle espèce  $\mathcal{M} = \mathcal{M}(X, Y)$  respecte toutes les propriétés d'espèce de structures à deux sortes. ■

### 3.2 Multigraphes simples enrichis

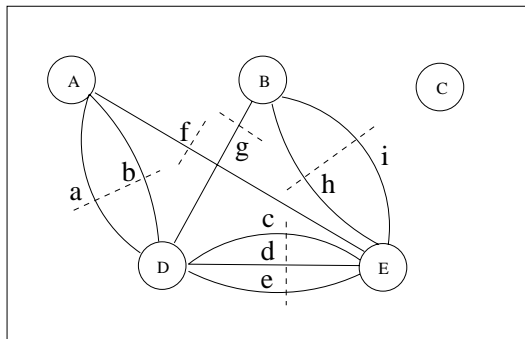
Afin de définir la notion de multigraphe simple enrichi, nous devons d'abord définir ce qu'est une fonction  $R$ -enrichie.

Soit  $R$  une espèce de structures. Une fonction  $\mu$  telle que définie plus tôt est dite  $R$ -enrichie si sur chacune de ses fibres, il y a une  $R$ -structure. Par hypothèse, on ne peut mettre qu'une seule  $R$ -structure sur l'ensemble vide, c'est-à-dire que  $R[0] = 1$ .

**Définition 3.2.1** *Un multigraphe  $R$ -enrichi sur  $A$ , l'ensemble des arêtes, et sur  $S$ , l'ensemble des sommets, est une fonction  $R$ -enrichie  $\mu : A \rightarrow \mathcal{P}_2[S]$ . Ainsi, pour chaque couple  $\{s_1, s_2\}$  de sommets de  $S$ , une  $R$ -structure a été ajoutée sur l'ensemble des arêtes joignant  $s_1$  et  $s_2$  (fibre de  $\{s_1, s_2\}$ ).*

Dans le multigraphe  $R$ -enrichi de la figure 3.3, on a l'ensemble des arêtes

$A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ , l'ensemble des sommets  $S = \{A, B, C, D, E\}$  et - - - représente la  $R$ -structure ajoutée à la fibre concernée. Notons qu'afin d'alléger le multigraphe, on ne mettra pas de  $R$ -structure sur une fibre vide. Rappelons que nous avons admis qu'il n'y a qu'une seule  $R$ -structure sur l'ensemble vide. Par exemple, dans la figure 3.3, on a que  $\mu^{-1}(\{B, C\}) = \emptyset$ .



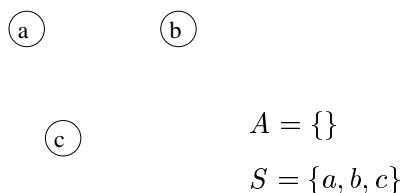
**Figure 3.3** Exemple de multigraphe  $R$ -enrichi.

Selon le choix de l'espèce  $R$ , on obtient différentes sortes de multigraphes. Par exemple, en prenant l'espèce  $R = X + 1$ , des singletons incluant l'ensemble vide, on obtient les graphes simples. Le choix de l'espèce  $R = E$ , des ensembles, donne les multigraphes ordinaires. Le choix de l'espèce  $R = C + 1$ , des permutations cycliques incluant l'ensemble vide, donne les multigraphes ayant des fibres cycliquement structurées. Le choix de l'espèce  $R = L$ , des ordres linéaires donne les multigraphes ayant des fibres ordonnées linéairement. L'exemple le plus trivial est celui où l'espèce enrichissante,  $R$ , est l'espèce caractéristique de l'ensemble vide, que l'on note 1. On obtient ainsi un multigraphe où il n'y a aucune arête, c'est-à-dire, un ensemble de sommets.

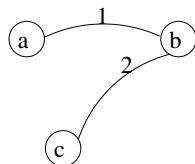
Dans les prochains exemples, nous illustrons les multigraphes enrichis avec les espèces nommés précédemment. Notons qu'il est aussi possible d'enrichir les arêtes par des espèces plus complexes tel que des arbres, des arborescences, des partitions, des dérangements, etc. Des exemples avec des enrichissements moins triviaux sont faits dans le chapitre 4.

### Exemples

1.  $R=1$ :



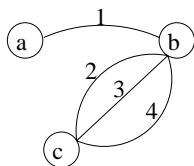
2.  $R=X + 1$ :



$$A = \{1, 2\}$$

$$S = \{a, b, c\}$$

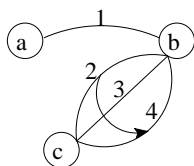
3.  $R=E$ :



$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$S = \{a, b, c\}$$

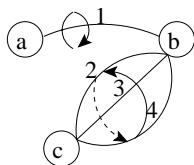
4.  $R=L$ :



$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$S = \{a, b, c\}$$

5.  $R=C + 1$ :



$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$S = \{a, b, c\}$$

Notons que la classe des multigraphes simples enrichis avec leurs transports forment une espèce. En effet, de façon similaire au cas des multigraphes simples vus à la section 3.1, nous pouvons facilement vérifier les deux propriétés des espèces ainsi que les deux propriétés de functorialité. Ainsi, la classe des multigraphes simples enrichis, que nous noterons  $\mathcal{M}_R = \mathcal{M}_R(X, Y)$ , est une espèce.

Dans ce qui suit, nous définirons la notion d'isomorphie de multigraphes  $R$ -enrichis, pour ensuite introduire le concept de désétiquetage complet et de désétiquetage partiel.

**Définition 3.2.2** Soient  $\mu_1$  et  $\mu_2$ , les deux multigraphes  $R$ -enrichis définis par

$$\mu_1 : A_1 \rightarrow P_2[S_1] \text{ et } \mu_2 : A_2 \rightarrow P_2[S_2].$$

Un isomorphisme,  $\theta : \mu_1 \rightarrow \mu_2$ , est défini comme un couple ordonné,  $\theta = (\sigma, \tau)$ , de bijections  $\sigma : A_1 \rightarrow A_2$  et  $\tau : S_1 \rightarrow S_2$  telles que

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{\mu_1} & P_2[S_1] \\ \tau \downarrow & & \downarrow P_2[\sigma] \\ A_2 & \xrightarrow{\mu_2} & P_2[S_2] \end{array}$$

commute et induit des isomorphismes de  $R$ -structures en restreignant  $\tau$  à chaque  $\mu_1$ -fibre et à la  $\mu_2$ -fibre correspondante.

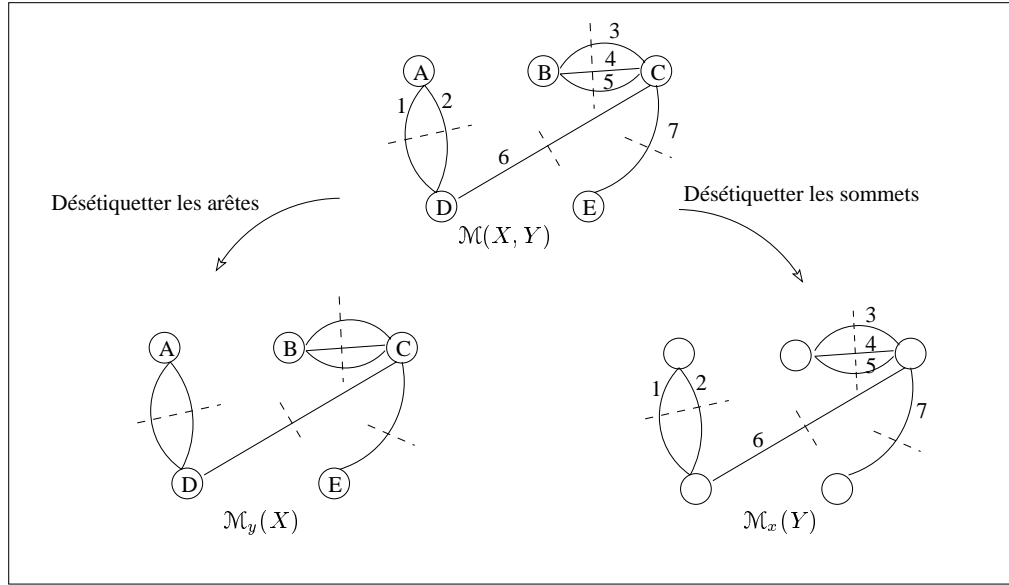
On peut former les types d'isomorphie des multigraphes enrichis en désétiquettant à la fois les arêtes et les sommets. Il suffit de prendre les classes d'équivalence correspondant aux isomorphismes  $\theta = (\sigma, \tau)$ .

Il est aussi possible d'effectuer un *désétiquettage partiel* en n'enlevant que les étiquettes des arêtes, ou encore, en n'enlevant que les étiquettes des sommets. Dans le premier cas, on doit prendre la classe d'équivalence correspondant aux isomorphismes de forme  $\theta = (id, \tau)$  et dans le deuxième cas, on doit plutôt prendre la classe d'équivalence correspondant aux isomorphismes de forme  $\theta = (\sigma, id)$ . La figure 3.4 en est un exemple.

### 3.3 Ajout d'arcs et de boucles

Nous allons maintenant généraliser le concept de multigraphe enrichi à des multigraphes permettant aussi d'avoir des arcs (arêtes orientées) ou des boucles. Ainsi, le concept de multigraphe enrichi orienté sera un cas particulier de cette nouvelle notion généralisée de multigraphe enrichi. Nous appellerons *liens* l'ensemble des boucles, arcs et arêtes. Pour





**Figure 3.4** Exemple de désétiquettage.

faire cette généralisation, nous devons remplacer l'ensemble  $\mathcal{P}_2[S]$  dans la définition de multigraphe enrichi vue dans la section précédente, par un ensemble approprié, soit  $\Omega[S]$ , qui dépendra des sortes de liens permis (ou non). Il y a quatre cas principaux à considérer:

- CAS 1.  $\Omega[S] = \mathcal{P}_2[S]$  : les multigraphes enrichis simples;
- CAS 2.  $\Omega[S] = S \cup \mathcal{P}_2[S]$  : les multigraphes enrichis boucles;
- CAS 3.  $\Omega[S] = S \times S$  : les multigraphes enrichis orientés avec boucles;
- CAS 4.  $\Omega[S] = S \times S \setminus \text{diag}(S)$  : les multigraphes enrichis orientés.

Ainsi, dans le premier cas, les seuls liens permis sont les arêtes, dans le cas 2, les liens permis sont les arêtes et les boucles, dans le cas 3, seulement les arcs et les boucles, alors que dans le dernier cas, les liens doivent être des arcs reliant des points distincts.

Remarquons que dans chaque cas,  $\Omega$  peut être interprété comme une espèce  $\Omega = \Omega(X)$ , sur la sorte  $X$  de sommets, de la forme  $\Omega = \Lambda \cdot E$ , où  $E$  est l'espèce des ensembles et  $\Lambda$  est une espèce sur un ensemble ayant au plus deux éléments.

Pour les quatre définitions de  $\Omega$  données précédemment, on trouve respectivement les valeurs suivantes pour  $\Lambda$ :

$$1) \quad \Lambda = E_2; \quad 2) \quad \Lambda = X + E_2; \quad 3) \quad \Lambda = X + X^2; \quad 4) \quad \Lambda = X^2.$$

Remarquons que  $E_2$ , l'espèce des ensembles non ordonnés de deux sommets, représente les extrémités des arêtes, l'espèce  $X$  des singletons représente les points d'attache des boucles, et l'espèce  $X^2$  résultant du produit de l'espèce des singletons par lui-même représente les couples ordonnés de singletons, donc les extrémités des arcs.

Les 4 cas présentés sont les principaux. Il existe d'autres cas possibles. Ainsi, il est possible qu'un multigraphe ait à la fois des arêtes et des arcs. En posant  $\Lambda = \lambda X + \alpha X^2 + \varepsilon E_2$ , où  $\lambda, \alpha, \varepsilon \in \mathbb{N}$ , on généralise l'espèce  $\Lambda$  en permettant aux liens d'avoir différentes couleurs. Ainsi, on a un multigraphe avec  $\lambda$  couleurs de boucles,  $\alpha$  couleurs d'arcs et  $\varepsilon$  couleurs d'arêtes. Cette espèce plus générale introduit une définition élargissant le concept de multigraphes  $R$ -enrichis. Ainsi, on retrouve la définition qui suit.

**Définition 3.3.1** *Soient  $\Lambda$ , une espèce de structures vivant sur les ensembles à au plus deux éléments, et  $R$ , une espèce telle que  $R(0) = 1$ . Un multigraphe  $R$ -enrichi avec des liens de sorte  $\Lambda$ , ou plus simplement, un  $(R, \Lambda)$ -multigraphe, sur un ensemble  $S$  de sommets et un ensemble  $A$  de liens, est une fonction  $R$ -enrichie  $\mu : A \rightarrow \Omega[S]$ , où  $\Omega$  est l'espèce définie par  $\Omega = \Lambda \cdot E$ .*

### Exemples

1. Soit  $R(Y) = 1 + Y$  et  $\Lambda(X) = \varepsilon E_2(X)$ . Un  $(R, \Lambda)$ -multigraphe est alors un graphe simple dans lequel les arêtes sont colorés par  $\varepsilon$  couleurs différentes.
2. Soit  $R(Y) = E(Y)$  et  $\Lambda(X) = \varepsilon E_2(X) + \alpha X^2$ . Un  $(R, \Lambda)$ -multigraphe est alors un multigraphe sans boucle avec arêtes et arcs où les arêtes sont colorées par  $\varepsilon$  couleurs différentes et les arcs sont colorés par  $\alpha$  couleurs différentes.

3. Soit  $R(Y) = 1$  et  $\Lambda(X) = \lambda X$ . Un  $(R, \Lambda)$ -multigraphe est alors un multigraphe simple avec boucles, mais sans arête ni arc, et les boucles sont colorées par  $\lambda$  couleurs différentes.

**Remarque 3.3.1** *La classe de tous les  $(R, \Lambda)$ -multigraphes forme une espèce combinatoire dépendante de  $R$  et  $\Lambda$  que l'on note  $\mathcal{M}_{R, \Lambda}(X, Y)$  ou, plus simplement  $\mathcal{M}(X, Y)$ . Le désétiquetage partiel donne lieu aux deux espèces pondérées que l'on verra dans la section suivante,  $\mathcal{M}_x(Y)$  et  $\mathcal{M}_y(X)$ .*

### 3.4 Présentation du problème

Dans cette dernière section, nous introduisons le concept de poids pour les multigraphes  $R$ -enrichis désétiquetés partiellement. Par la suite, nous définissons trois espèces pondérées, chacune dépendant de l'enrichissement  $R$  choisi. Nous étudions les séries génératrices exponentielles qui sont associées à chacune des trois nouvelles espèces. Ceci nous amène ensuite au problème central de ce travail: comment déterminer le poids de l'ensemble des multigraphes  $R$ -enrichis, l'espèce  $R$  étant bien déterminée, ayant des sommets non étiquetés et  $k$  arêtes étiquetées?

**Définition 3.4.1** *Soient  $x$  et  $y$ , des variables formelles. On définit le poids d'un multigraphe  $R$ -enrichi avec  $k$  sommets non étiquetés par  $x^k$ , et le poids d'un multigraphe  $R$ -enrichi avec  $n$  arêtes non étiquetées par  $y^n$ .*

Ainsi, dans l'exemple de la figure 3.4 vu au début de ce chapitre, le multigraphe enrichi de gauche a un poids de  $y^7$ , puisqu'il y a 7 arêtes non étiquetées, et celui de droite un poids de  $x^5$ , puisqu'il y a 5 sommets non étiquetés. Remarquons que la variable  $x$  agit comme un compteur de sommets non étiquetés, alors que  $y$  agit comme un compteur d'arêtes non étiquetées.

Cette nouvelle notion de poids nous amène à définir trois espèces de structures pondérées, selon l'espèce  $R$  choisie comme enrichissement.

**Définition 3.4.2** Soit  $R$ , une espèce satisfaisant  $R(0) = 1$ .

1) On note  $\mathcal{M}(X, Y)$ , l'espèce des multigraphes  $R$ -enrichis sur deux sortes d'éléments:  $X$ , la sorte des sommets, et  $Y$ , la sorte des arêtes. Dans cette espèce, les sommets et les arêtes sont étiquetés.

2) On note  $\mathcal{M}_x(Y)$ , l'espèce des multigraphes  $R$ -enrichis avec des sommets non étiquetés, pondérée par  $x$ , le compteur de sommets, sur des ensembles d'arêtes de sorte  $Y$ .

3) On note  $\mathcal{M}_y(X)$ , l'espèce des multigraphes  $R$ -enrichis avec des arêtes non étiquetées, pondérée par  $y$ , le compteur d'arêtes, sur des ensembles de sommets de sorte  $X$ .

Il est facile d'étendre la définition précédente au contexte de l'espèce  $\mathcal{M}_{R, \Lambda}$  des  $(R, \Lambda)$ -multigraphes.

En utilisant la notation de la théorie des espèces vue dans le chapitre précédent, on peut écrire

$$\mathcal{M}_y(X) = T_{Y;y}\mathcal{M}(X, Y), \quad (3.1)$$

$$\mathcal{M}_x(Y) = T_{X;x}\mathcal{M}(X, Y), \quad (3.2)$$

où l'opérateur  $T_{Z;z}$  appliqué à une espèce de structure  $F(X, Y, Z, T, \dots)$  a l'effet de remplacer les éléments de sorte  $Z$  dans la  $F$ -structure par les éléments de poids  $z$  non étiquetés correspondants. Ce qui entraîne que l'espèce  $T_{Z;z}F(X, Y, Z, T, \dots)$  ne dépend que de  $X, Y, T, \dots$

Maintenant que nous avons défini les trois différentes espèces de multigraphes  $R$ -enrichis, ou  $(R, \Lambda)$ -enrichis, voyons comment sont définies les séries génératrices exponentielles qui leur sont associées. On a

$$\mathcal{M}(x, y) = \sum_{n, k \geq 0} m_{n, k} \frac{x^n y^k}{n! k!}, \quad (3.3)$$

$$\mathcal{M}_x(y) = \sum_{k \geq 0} w_k(x) \frac{y^k}{k!}, \quad (3.4)$$

$$\mathcal{M}_y(x) = \sum_{n \geq 0} v_n(y) \frac{x^n}{n!}, \quad (3.5)$$

où  $m_{n,k}$  désigne le nombre de multigraphes  $R$ -enrichis sur  $n$  sommets étiquetés et  $k$  arêtes étiquetées,  $w_k(x)$  désigne le poids total, selon le compteur de sommets  $x$ , de tous les multigraphes ayant des sommets non étiquetés et  $k$  arêtes étiquetées, et  $v_n(y)$  désigne le poids total, selon le compteur d'arêtes  $y$ , de tous les multigraphes ayant des arêtes non étiquetées et  $n$  sommets étiquetés.

Les trois équations précédentes découlent de la définition de la série génératrice d'une espèce  $F = F(X, Y)$  à deux sortes. En effet, comme on a vu au deuxième chapitre, on a que

$$F(x, y) = \sum_{n, k \geq 0} |F[n, k]| \frac{x^n y^k}{n! k!},$$

où  $|F[n, k]|$  est le nombre de  $F$ -structures sur un ensemble à  $n$  éléments et un autre à  $k$  éléments. Ainsi,

$$F(x, y) = \mathcal{M}(x, y) = \sum_{n, k \geq 0} m_{n,k} \frac{x^n y^k}{n! k!}.$$

Ces formules viennent soulever une question importante: existe-t-il des formules simples pour exprimer les valeurs de  $m_{n,k}$ ,  $w_k(x)$  et  $v_n(y)$ ? Cette question est à l'origine de ce travail. On s'aperçoit rapidement que le calcul des valeurs  $m_{n,k}$  et  $v_n(y)$  sont très faciles à effectuer.

On doit d'abord établir la série génératrice exponentielle et la série génératrice des types de l'espèce  $R(Y)$ . Tout d'abord, on a que la série génératrice exponentielle de l'espèce  $R(Y)$  est

$$R(y) = \sum_{k \geq 0} r_k \frac{y^k}{k!}, \quad (3.6)$$

où  $r_k$  désigne le nombre de  $R$ -structures sur  $k$  éléments étiquetés.

De plus, on a que la série génératrice des types de l'espèce  $R(Y)$  est donnée par

$$\tilde{R}(y) = \sum_{k \geq 0} \tilde{r}_k y^k, \quad (3.7)$$

où  $\tilde{r}_k$  désigne le nombre de  $R$ -structure sur  $k$  éléments non étiquetés.

Puisque  $r_k$  compte le nombre de façons de mettre des  $R$ -structures sur  $k$  arêtes étiquetées, on a que pour  $n$  sommets, le poids total des  $\mathcal{M}$ -structures sur  $n$  sommets de sorte  $X$  est  $R(y)^{\binom{n}{2}}$ . Donc

$$\mathcal{M}(x, y) = \sum_{n \geq 0} R(y)^{\binom{n}{2}} \frac{x^n}{n!}. \quad (3.8)$$

Ainsi, on trouve que

$$m_{n,k} = k! [y^k] R(y)^{\binom{n}{2}}, \quad (3.9)$$

où  $[y^k]$  désigne le coefficient de  $y^k$  dans l'expression  $R(y)^{\binom{n}{2}}$ .

Maintenant, voyons de quelle façon l'on peut exprimer  $v_n(y)$ , le poids total de tous les multigraphes enrichis avec arêtes non étiquetées, sur  $n$  sommets étiquetés. Rappelons que  $\tilde{R}(y)$  désigne le nombre de  $R$ -structures sur  $k$  arêtes non étiquetées, c'est-à-dire une fibre. Puisqu'il y a  $\binom{n}{2}$  fibres possibles, on a directement que

$$v_n(y) = \tilde{R}(y)^{\binom{n}{2}}. \quad (3.10)$$

Ainsi, on a bien que  $v_n(y)$  et  $m_{n,k}$  sont faciles à calculer. Par contre, le calcul de  $w_k(x)$  s'avère beaucoup plus difficile à effectuer. Jusqu'à maintenant, aucune formule simple pour exprimer  $w_k(x)$  n'est connue. Dans le chapitre suivant, nous utiliserons des opérateurs différentiels et des suites de polynômes de type binomial afin d'évaluer  $w_k(x)$  pour certaines espèces  $R$  et une valeur de  $k$  donnée.

Donc avant de conclure ce chapitre, définissons ce qu'est une suite de polynômes de type binomial associée à une espèce (Labelle G., 1981; Rota, Kahaner, et Odlyzko, 1973).

**Définition 3.4.3** Une suite de polynômes  $(r_k(t))_{k \geq 0}$  est dite de type binomial si  $r_0(t) = 1$  et, pour tout  $k \geq 0$ ,  $\deg r_k(t) \leq k$ , et l'identité binomiale suivante est satisfaite:

$$r_k(s+t) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} r_i(s) r_{k-i}(t). \quad (3.11)$$

De plus, la suite de polynômes de type binomial est dite associée à l'espèce  $R$  si  $R(0) = 1$  et

$$(R(y))^t = \left( \sum_{k \geq 0} r_k \frac{y^k}{k!} \right)^t = \sum_{k \geq 0} r_k(t) \frac{y^k}{k!}. \quad (3.12)$$

## CHAPITRE IV

### FORMULES ÉNUMÉRATIVES

Dans ce chapitre, nous faisons l'étude du poids, selon le compteur de sommets  $x$ , de tous les  $(R, \Lambda)$ -multigraphes sur un ensemble de  $k$  liens étiquetés, et ayant des sommets non étiquetés. Rappelons que *liens* désigne l'ensemble des arêtes, arcs et boucles. Nous introduisons d'abord un lemme combinatoire très important, qui nous sert par la suite à établir une formule exprimant le poids total de tous les  $(R, \Lambda)$ -multigraphes avec sommets non isolés et non étiquetés, et  $k$  liens étiquetés. Ensuite, nous présentons une version récursive de la formule. Nous montrons qu'à partir de ces deux formules, il est possible d'obtenir la valeur recherchée, soit le poids total de tous les  $(R, \Lambda)$ -multigraphes avec sommets non étiquetés et  $k$  liens étiquetés.

#### 4.1 Lemme préliminaire

Le lemme qui suit fait appel à des pointages de sommets et à des déplacements d'arêtes. L'utilisation de telles opérations n'est pas nouvelle en théorie des graphes (Hanlon et Robinson, 1982). Ce lemme nous sera très utile dans la section suivante, lors de la démonstration de la formule énumérative explicite du poids total de tous les  $(R, \Lambda)$ -multigraphes ayant  $k$  liens étiquetés et ayant des sommets non étiquetés et non isolés. Il a été introduit dans (Bergeron, Labelle et Leroux, 1994; Labelle G., 2000).

**Lemme 4.1.1** *L'espèce  $\mathcal{M}(X, Y)$  des  $(R, \Lambda)$ -multigraphes satisfait l'équation*

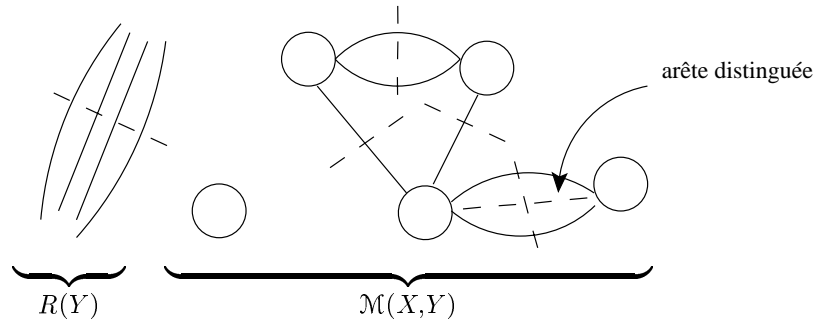
différentielle combinatoire suivante

$$R(Y) \frac{\partial}{\partial Y} \mathcal{M}(X, Y) = R'(Y) \Lambda \ll X \frac{\partial}{\partial X} \gg \mathcal{M}(X, Y), \quad (4.1)$$

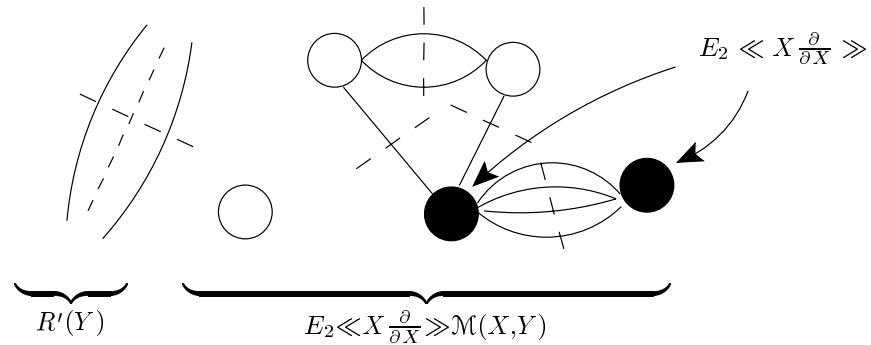
qui est un isomorphisme naturel.

**Preuve** Voici une preuve graphique, pour  $\Lambda = E_2$ .

D'un côté, on a  $R(Y) \frac{\partial}{\partial Y} \mathcal{M}(X, Y)$ :



et d'un autre côté, on a  $R'(Y) E_2 \ll X \frac{\partial}{\partial X} \gg \mathcal{M}(X, Y)$ :



Pour passer du multigraphe du haut à celui du bas, il suffit d'interchanger la  $R(Y)$ -structure flottante avec celle contenant l'arête distinguée (- - -), puis de marquer les deux sommets pour différencier les sommets auxquels la  $R$ -structure était accrochée. De façon inverse, on peut passer du multigraphe du bas à celui du haut. ■

**Remarque 4.1.1** Notons que pour que cette construction fonctionne, il est absolument nécessaire que  $\Lambda$  soit définie comme une espèce de structures vivant sur des ensembles à au plus deux éléments, comme le mentionne la définition 3.1.1.



Le lemme suivant montre la relation qui unit le poids total de tous les  $(R, \Lambda)$ -multigraphes avec sommets non étiquetés et  $k$  liens étiquetés, au poids total de tous les  $(R, \Lambda)$ -multigraphes sans sommets isolés, avec sommets non étiquetés et  $k$  liens étiquetés.

**Lemme 4.1.2** *Pour tout  $k \geq 0$ , le poids total,  $w_k(x)$ , exprimé en fonction du compteur de sommets  $x$ , de tous les  $(R, \Lambda)$ -multigraphes avec sommets non étiquetés et avec  $k$  liens étiquetés est une fonction rationnelle de la forme*

$$w_k(x) = \frac{w_k^*(x)}{1-x}, \quad (4.2)$$

où  $w_k^*(x)$ , un polynôme en  $x$  de degré  $\leq 2k$ , est le poids total de tous les  $(R, \Lambda)$ -multigraphes avec sommets non étiquetés et non isolés et avec  $k$  liens étiquetés.

**Preuve** Soit  $w_k^*(x)$ , le poids total de tous les  $(R, \Lambda)$ -multigraphes sans sommet isolé, et où les sommets sont tous non étiquetés et les  $k$  liens le sont.

Pour tout entier  $i \geq 0$ , le poids total de tous les  $(R, \Lambda)$ -multigraphes avec sommets non étiquetés et avec  $k$  liens étiquetés, ayant exactement  $i$  sommets isolés est alors  $x^i w_k^*(x)$ .

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} w_k(x) &= \sum_{i \geq 0} x^i w_k^*(x) \\ &= w_k^*(x) \sum_{i \geq 0} x^i \\ &= w_k^*(x) \frac{1}{1-x} \\ &= \frac{w_k^*(x)}{1-x}. \end{aligned}$$

De plus, puisque chacun des  $k$  liens a au maximum deux sommets adjacents, on a que  $w_k^*(x)$  est un polynôme en  $x$  de degré  $\leq 2k$ . ■

Ainsi, à partir d'une valeur de  $w_k^*(x)$ , on peut obtenir rapidement la valeur pour  $w_k(x)$ . Puisqu'il est plus facile de déterminer  $w_k^*(x)$  que  $w_k(x)$ , nous présenterons dans les deux sections suivantes, des formules permettant d'évaluer  $w_k^*(x)$  et non pas  $w_k(x)$ .

## 4.2 Formule énumérative explicite

Avant d'énoncer et de prouver l'important théorème de cette section, nous devons d'abord introduire certaines notions.

**Lemme 4.2.1** *Le nombre de permutations de  $[p]$  n'ayant que des cycles de longueur  $\geq 3$ , noté  $c_p$ , peut être exprimé par*

$$c_p = (p-1)c_{p-1} + (p-1)(p-2)c_{p-3}, \quad (4.3)$$

où les conditions initiales sont  $c_{-1} = 0$ ,  $c_0 = 1$ ,  $c_1 = c_2 = 0$ .

**Preuve** Nous présentons ici deux différentes preuves du lemme 4.2.1. La première sera combinatoire, la deuxième analytique.

Notons que les conditions initiales de la récurrence sont triviales. En effet, par définition, il n'existe aucune permutation sur  $[-1]$ , et il n'existe que la permutation vide sur l'ensemble vide. De plus, il est évident qu'il n'y a aucune permutation n'ayant que des cycles de longueur  $\geq 3$  sur  $[1]$  et sur  $[2]$ . Dans les preuves qui suivent, nous supposons vraies ces conditions de base.

*Preuve combinatoire:*

D'abord, notons que l'ensemble des permutations de  $[p]$  n'ayant que des cycles de longueur  $\geq 3$  peut être divisé en deux sous-ensembles: le sous-ensemble des permutations ayant le  $p$ -ième sommet sur un cycle de longueur 3, et le sous-ensemble des permutations pour lesquelles le  $p$ -ième sommet n'est pas sur un cycle de longueur 3. La valeur de  $c_p$  est donc la somme des cardinalités de ces deux sous-ensembles, puisque leur intersection est vide et que leur union donne l'ensemble pour lequel nous cherchons la cardinalité. La preuve combinatoire est basée sur cette observation.

Comptons le nombre de permutations sur  $p$  sommets, parmi les  $c_p$ , qui ont le  $p$ -ième sommet sur un cycle de longueur 3. Comme le  $p$ -ième sommet est sur un cycle de longueur 3, il reste 2 sommets à choisir afin de former le cycle. On a  $(p-1)$  choix pour

le premier sommet et  $(p - 2)$  choix pour le deuxième sommet. Les  $(p - 3)$  sommets restant peuvent être décomposés en cycles de longueur  $\geq 3$  de  $c_{p-3}$  façons. Ainsi, on trouve que le nombre de permutations sur  $p$  sommets qui ont le  $p$ -ième sommet sur un cycle de longueur 3 parmi les  $c_p$  est donné par  $(p - 1)(p - 2)c_{p-3}$ .

Il nous reste à compter le nombre de permutations sur  $p$  sommets, parmi les  $c_p$ , qui n'ont pas le  $p$ -ième sommet sur un cycle de longueur 3. Ceci revient à compter le nombre de permutations de  $p$  sommets n'ayant que des cycles de longueur  $\geq 3$  et pour lesquelles le  $p$ -ième sommet est sur un cycle de longueur  $\geq 4$ .

Remarquons que les permutations qui nous intéressent ont autant de sommets que d'arcs. En effet, puisque les cycles des permutations sont de longueur  $\geq 3$ , tous les sommets des permutations sont de degré 2. Ainsi, par le lemme des poignées de mains bien connu en théorie des graphes, on obtient que toute permutation de  $[p]$  n'ayant que des cycles de longueur  $\geq 3$  a autant de sommets que d'arcs.

L'ensemble des permutations de  $[p]$  parmi les  $c_p$  qui n'ont pas le  $p$ -ième sommet sur un cycle de longueur 3, peut être obtenu en prenant l'ensemble des permutations sur  $[p - 1]$  n'ayant que des cycles de longueur  $\geq 3$  et en ajoutant le  $p$ -ième sommet sur l'une des  $(p - 1)$  arêtes et ainsi transformer une arête en un sommet et deux arêtes. De cette façon, on est assuré que le  $p$ -ième sommet est sur un cycle de longueur  $\geq 4$  puisqu'avant d'ajouter le  $p$ -ième sommet, tous les cycles de la permutation étaient de longueur  $\geq 3$ . Cet ensemble est donc de cardinalité  $(p - 1)c_{p-1}$ , puisqu'il y a  $(p - 1)$  choix d'arêtes pour mettre le  $p$ -ième sommet dans chacune des  $c_{p-1}$  permutations.

Ainsi, en combinant les deux résultats précédents, on obtient

$$c_p = (p - 1)c_{p-1} + (p - 1)(p - 2)c_{p-3}. \quad (4.4)$$

■

*Preuve analytique:*

Posons  $f(x)$ , la série génératrice exponentielle de  $c_p$ . Ainsi, on a

$$f(x) = \sum_{p \geq 0} c_p \frac{x^p}{p!}. \quad (4.5)$$

Sachant que la série génératrice exponentielle des permutations est  $\frac{1}{1-x} = e^{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots}$ , on a que

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{p \geq 0} c_p \frac{x^p}{p!} \\ &= e^{\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots} \\ &= e^{x-x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \dots} \\ &= e^{-x - \frac{x^2}{2}} e^{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \dots} \\ &= e^{-x - \frac{x^2}{2}} \frac{1}{1-x}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

En utilisant (4.6), on obtient

$$\frac{xf'(x)}{f(x)} = \frac{x \sum_{p \geq 0} c_p p \frac{x^{p-1}}{p!}}{\sum_{q \geq 0} c_q \frac{x^q}{q!}} = \frac{\sum_{p \geq 1} p c_p \frac{x^p}{p!}}{\sum_{q \geq 0} c_q \frac{x^q}{q!}}. \quad (4.7)$$

En développant le membre de gauche de (4.7), on a

$$\begin{aligned} \frac{xf'(x)}{f(x)} &= \frac{x \left( e^{-x - \frac{x^2}{2}} \frac{1}{1-x} \right)'}{e^{-x - \frac{x^2}{2}} \frac{1}{1-x}} \\ &= \frac{x \left[ (-1-x) e^{-x - \frac{x^2}{2}} \frac{1}{1-x} + e^{-x - \frac{x^2}{2}} \frac{1}{(1-x)^2} \right]}{e^{-x - \frac{x^2}{2}} \frac{1}{1-x}} \\ &= -(x + x^2) + \frac{x}{1-x} \\ &= \frac{x^3}{1-x}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Puis, par (4.7) et (4.8), on obtient

$$\frac{x^3}{1-x} = \frac{\sum_{p \geq 1} p c_p \frac{x^p}{p!}}{\sum_{q \geq 0} c_q \frac{x^q}{q!}}. \quad (4.9)$$

En chassant les dénominateurs de l'égalité (4.9), on obtient

$$(1-x) \sum_{p \geq 1} p c_p \frac{x^p}{p!} = \sum_{q \geq 0} c_q \frac{x^{q+3}}{q!}. \quad (4.10)$$

En développant le membre de gauche de (4.10), on a la suite d'égalités

$$\begin{aligned} (1-x) \sum_{p \geq 1} p c_p \frac{x^p}{p!} &= \sum_{p \geq 1} p c_p \frac{x^p}{p!} - \sum_{p \geq 1} p c_p \frac{x^{p+1}}{p!} \\ &= \left( 1c_1 \frac{x}{1!} + 2c_2 \frac{x^2}{2!} + 3c_3 \frac{x^3}{3!} + \dots \right) - \left( 1c_1 \frac{x^2}{1!} + 2c_2 \frac{x^3}{2!} + 3c_3 \frac{x^4}{3!} + \dots \right) \\ &= 1c_1 \frac{x}{1!} + (2c_2 - 2c_1) \frac{x^2}{2!} + (3c_3 - 3 \cdot 2) \frac{x^3}{3!} + \dots \\ &= \sum_{p \geq 1} (p c_p - p(p-1)c_{p-1}) \frac{x^p}{p!}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Puis, des équations (4.10) et (4.11) découle l'équation

$$\sum_{p \geq 1} (p c_p - p(p-1)c_{p-1}) \frac{x^p}{p!} = \sum_{q \geq 0} c_q \frac{x^{q+3}}{q!} = \sum_{p \geq 3} c_{p-3} \frac{x^p}{(p-3)!}. \quad (4.12)$$

Finalement, en comparant les coefficients de  $x^p$  de part et d'autre de l'équation (4.12), on trouve

$$\frac{p c_p - p(p-1)c_{p-1}}{p!} = \frac{c_{p-3}}{(p-3)!}, \quad (4.13)$$

$$c_p - (p-1)c_{p-1} = (p-1)(p-2)c_{p-3}, \quad (4.14)$$

$$c_p = (p-1)c_{p-1} + (p-1)(p-2)c_{p-3}. \quad (4.15)$$

On passe de (4.13) à (4.14) en multipliant de part et d'autre par  $(p-1)!$ . Puis, en isolant  $c_p$  dans (4.14), on obtient l'égalité désirée. ■

Le tableau 4.1 donne les premières valeurs de  $c_p$ .

Remarquons que l'on peut vérifier facilement les premières valeurs de  $c_p$ . Le tableau 4.2 donne l'ensemble des permutations pour les premières valeurs de  $p$ .

**Tableau 4.1** Premières valeurs de  $c_p$ 

$c_{-1}$	$c_0$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$	$c_5$	$c_6$	$c_7$	$c_8$	$c_9$	$c_{10}$	$c_{11}$
0	1	0	0	2	6	24	160	1140	8988	80864	809856	8907480

**Tableau 4.2** Permutations de  $[p]$  n'ayant que des cycles de longueur  $\geq 3$ 

$c_p$	Énumération des permutations
$c_3 = 2$	$\{(123), (132)\}$
$c_4 = 6$	$\{(1234), (1243), (1324), (1342), (1423), (1432)\}$
$c_5 = 24$	$\{(12345), (12354), (12435), (12453), (12534), (12543), (13245), (13254), (13425), (13452), (13524), (13542), (14235), (14253), (14325), (14352), (14523), (14532), (15234), (15243), (15324), (15342), (15423), (15432)\}$

**Théorème 4.2.1** Soit  $\Lambda(X)$  une espèce de la forme  $\lambda X + \alpha X^2 + \varepsilon E_2$ , où  $\lambda$ ,  $\alpha$  et  $\varepsilon$  sont des entiers non négatifs, et soit  $(r_k(t))_{k \geq 0}$ , la suite polynomiale de type binomial associée à l'espèce  $R(Y)$ . Alors, le polynôme  $w_k^*(x)$  donnant le poids total de tous les  $(R, \Lambda)$ -multigraphes avec sommets non étiquetés et non isolés et  $k$  liens étiquetés est donné par

$$w_k^*(x) = \sum_{n=0}^{2k} \left[ \begin{matrix} k \\ n \end{matrix} \right]_R x^n, \quad (4.16)$$

où

$$\left[ \begin{matrix} k \\ n \end{matrix} \right]_R = \sum_{i+2j+p=n} \frac{r_k(\omega_{i,j})}{i!2^j j!} \left( \frac{c_p}{p!} - \frac{c_{p-1}}{(p-1)!} \right), \quad (4.17)$$

$\omega_{i,j} = \lambda i + (2\alpha + \varepsilon) \binom{i}{2} + \varepsilon j$  et  $c_p$  est le nombre de permutations de  $[p]$  n'ayant que des cycles de longueur  $\geq 3$ .

De plus, la série génératrice exponentielle des polynômes  $w_k^*(x)$  est donnée explicitement

par

$$\sum_{k \geq 0} w_k^*(x) \frac{y^k}{k!} = e^{-x + \frac{x^2}{2}(R^\varepsilon(y)-1)} \sum_{i \geq 0} R(y)^{\lambda i + (\alpha + \frac{1}{2}\varepsilon)i(i-1)} \frac{x^i}{i!} \quad (4.18)$$

$$= e^{\frac{x^2}{2}(R^\varepsilon(y)-1)} R(y)^{a(x) + b(x)\frac{d}{dx} + c(x)\frac{d^2}{dx^2}} \mathbf{1}, \quad (4.19)$$

où  $a(x)$ ,  $b(x)$  et  $c(x)$  sont les polynômes

$$a(x) = \lambda x + (\alpha + \frac{1}{2}\varepsilon)x^2, \quad b(x) = \lambda x + (2\alpha + \varepsilon)x^2, \quad c(x) = (\alpha + \frac{1}{2}\varepsilon)x^2.$$

**Remarque 4.2.1** Notons que dans ce qui précède, pour un opérateur différentiel  $\theta$  indépendant de  $y$ , on a

$$\begin{aligned} R(y)^\theta &= e^{(\ln R(y))\theta} \\ &= \sum_{k \geq 0} (\ln R(y))^k \frac{\theta^k}{k!}. \end{aligned}$$

**Remarque 4.2.2** On trouvera en annexe des tables contenant les premières valeurs de  $c_p$  et de  $\omega_{i,j}$ .

Avant de débiter la preuve de cet important théorème, nous devons d'abord introduire les quatre lemmes suivant.

**Lemme 4.2.2** L'opération de  $\Lambda$ -pointage satisfait l'égalité combinatoire

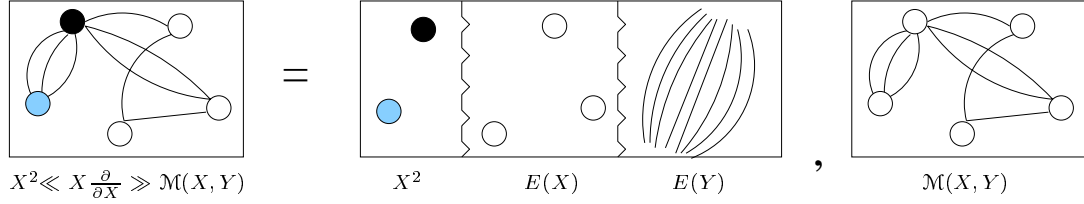
$$\Lambda \ll X \frac{\partial}{\partial X} \gg M(X, Y) = (\Lambda(X) \cdot E(X) \cdot E(Y)) \times M(X, Y), \quad (4.20)$$

où  $\times$  est le produit cartésien d'espèces.

**Preuve** Cette égalité découle directement de la définition du  $\Lambda$ -pointage. ■

Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à (Bergeron, Labelle et Leroux, 1994; Labelle G., 2000).

**Exemple** Voici un exemple de cette égalité pour  $\Lambda = X^2$ .



Dans cette figure, on voit clairement que la  $X^2 \ll X \frac{\partial}{\partial X} \gg \mathcal{M}(X, Y)$ -structure de gauche est constituée d'une  $X^2$ -structure représentée dans le graphe par le couple de sommets colorés (le premier étant gris, le deuxième étant noir), d'un ensemble disjoint de sommets  $E(X)$  et d'un ensemble d'arêtes  $E(Y)$ , à partir desquels on a fait une  $\mathcal{M}(X, Y)$ -structure. L'égalité (4.20) est une égalité naturelle combinatoire. En effet, la bijection décrite par la figure est indépendante de la nature des sommets et des arêtes.

L'égalité (4.20) nous conduit au lemme suivant.

**Lemme 4.2.3** *L'opérateur combinatoire de pointage  $\Lambda \ll X \frac{\partial}{\partial X} \gg$  correspond, dans le contexte des séries indicatrices de cycles, à l'opérateur différentiel partiel de deuxième ordre*

$$\mathcal{D} = (\lambda - \alpha - \frac{1}{2}\varepsilon)x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + (\alpha + \frac{1}{2}\varepsilon)(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1})^2 + \varepsilon x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}. \quad (4.21)$$

**Preuve** Soit

$$Z_{\mathcal{M}(X, Y)} = \sum m_{i_1, i_2, \dots; j_1, j_2, \dots} \frac{x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots y_1^{j_1} y_2^{j_2} \dots}{1^{i_1} i_1! 2^{i_2} i_2! \dots 1^{j_1} j_1! 2^{j_2} j_2! \dots}. \quad (4.22)$$

On veut connaître  $Z_{\Lambda \ll X \frac{\partial}{\partial X} \gg \mathcal{M}(X, Y)}$ .

On sait, par (4.20), que

$$\begin{aligned} Z_{\Lambda \ll X \frac{\partial}{\partial X} \gg \mathcal{M}(X, Y)} &= Z_{(\Lambda(X) \cdot E(X) \cdot E(Y)) \times \mathcal{M}(X, Y)} \\ &= Z_{\Lambda(X) \cdot E(X) \cdot E(Y)} \times Z_{\mathcal{M}(X, Y)}. \end{aligned} \quad (4.23)$$



Or, on sait aussi que

$$Z_{E(X) \cdot E(Y)} = \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots \\ j_1, j_2, \dots}} 1 \frac{x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots y_1^{j_1} y_2^{j_2} \dots}{1^{i_1} i_1! 2^{i_2} i_2! \dots 1^{j_1} j_1! 2^{j_2} j_2! \dots}, \quad (4.24)$$

et que

$$\begin{aligned} Z_{\Lambda(X)} &= Z_{\lambda X + \alpha X^2 + \varepsilon E_2} \\ &= Z_{\lambda X} + Z_{\alpha X^2} + Z_{\varepsilon E_2} \\ &= \lambda Z_X + \alpha Z_{X^2} + \varepsilon Z_{E_2} \\ &= \lambda x_1 + \alpha x_1^2 + \varepsilon \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2) \\ &= \lambda x_1 + \left( \alpha + \frac{\varepsilon}{2} \right) x_1^2 + \frac{\varepsilon}{2} x_2. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Notons que le 1 de l'équation (4.24) provient du fait qu'il n'existe qu'une seule façon de placer une  $E(X)$  et une  $E(Y)$  structure.

Ainsi, en utilisant les égalités précédentes, on obtient

$$\begin{aligned} Z_{\Lambda \ll X \frac{\partial}{\partial X} \gg \mathcal{M}(X, Y)} &= Z_{\Lambda(X) \cdot E(X) \cdot E(Y)} \times Z_{\mathcal{M}(X, Y)} \\ &= \left( \lambda x_1 + \left( \alpha + \frac{\varepsilon}{2} \right) x_1^2 + \frac{\varepsilon}{2} x_2 \right) \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots \\ j_1, j_2, \dots}} \frac{x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots y_1^{j_1} y_2^{j_2} \dots}{1^{i_1} i_1! 2^{i_2} i_2! \dots 1^{j_1} j_1! 2^{j_2} j_2! \dots} \times Z_{\mathcal{M}(X, Y)} \\ &= \left( \underbrace{\sum_{\substack{i_1, i_2, \dots \\ j_1, j_2, \dots}} \frac{\lambda x_1^{i_1+1} x_2^{i_2} \dots y_1^{j_1} y_2^{j_2} \dots}{1^{i_1} i_1! 2^{i_2} i_2! \dots 1^{j_1} j_1! 2^{j_2} j_2! \dots}}_{(*)} \right. \\ &\quad + \underbrace{\sum_{\substack{i_1, i_2, \dots \\ j_1, j_2, \dots}} \left( \alpha + \frac{\varepsilon}{2} \right) \frac{x_1^{i_1+2} x_2^{i_2} \dots y_1^{j_1} y_2^{j_2} \dots}{1^{i_1} i_1! 2^{i_2} i_2! \dots 1^{j_1} j_1! 2^{j_2} j_2! \dots}}_{(**)} \\ &\quad \left. + \underbrace{\sum_{\substack{i_1, i_2, \dots \\ j_1, j_2, \dots}} \frac{\varepsilon}{2} \frac{x_1^{i_1} x_2^{i_2+1} \dots y_1^{j_1} y_2^{j_2} \dots}{1^{i_1} i_1! 2^{i_2} i_2! \dots 1^{j_1} j_1! 2^{j_2} j_2! \dots}}_{(***)} \right) \times Z_{\mathcal{M}(X, Y)}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

En multipliant le terme (\*) par  $\frac{i_1+1}{i_1+1}$ , puis en effectuant un changement d'indice en posant  $i_1 := i_1 - 1$ , on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{i_1, i_2, \dots \\ j_1, j_2, \dots}} \frac{\lambda x_1^{i_1+1} x_2^{i_2} \dots y_1^{j_1} y_2^{j_2} \dots}{1^{i_1} i_1! 2^{i_2} i_2! \dots 1^{j_1} j_1! 2^{j_2} j_2! \dots} &= \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots \\ j_1, j_2, \dots}} \frac{\lambda(i_1+1) x_1^{i_1+1} x_2^{i_2} \dots y_1^{j_1} y_2^{j_2} \dots}{(i_1+1) 1^{i_1} i_1! 2^{i_2} i_2! \dots 1^{j_1} j_1! 2^{j_2} j_2! \dots} \\
&= \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots \\ j_1, j_2, \dots}} \frac{\lambda(i_1+1) x_1^{i_1+1} x_2^{i_2} \dots y_1^{j_1} y_2^{j_2} \dots}{1^{i_1+1} (i_1+1)! 2^{i_2} i_2! \dots 1^{j_1} j_1! 2^{j_2} j_2! \dots} \\
&= \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots \\ j_1, j_2, \dots}} \frac{\lambda i_1 x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots y_1^{j_1} y_2^{j_2} \dots}{1^{i_1} i_1! 2^{i_2} i_2! \dots 1^{j_1} j_1! 2^{j_2} j_2! \dots}. \tag{4.27}
\end{aligned}$$

De la même façon, on peut écrire autrement le terme (\*\*\*) en le multipliant par  $\frac{(i_1+1)(i_1+2)}{(i_1+1)(i_1+2)}$ , puis en effectuant le changement d'indice  $i_1 := i_1 - 2$ .

On obtient ainsi

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{i_1, i_2, \dots \\ j_1, j_2, \dots}} \left(\alpha + \frac{\varepsilon}{2}\right) \frac{x_1^{i_1+2} x_2^{i_2} \dots y_1^{j_1} y_2^{j_2} \dots}{1^{i_1} i_1! 2^{i_2} i_2! \dots 1^{j_1} j_1! 2^{j_2} j_2! \dots} &= \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots \\ j_1, j_2, \dots}} \left(\alpha + \frac{\varepsilon}{2}\right) \frac{(i_1+1)(i_1+2) x_1^{i_1+2} x_2^{i_2} \dots y_1^{j_1} y_2^{j_2} \dots}{(i_1+1)(i_1+2) 1^{i_1} i_1! 2^{i_2} i_2! \dots 1^{j_1} j_1! 2^{j_2} j_2! \dots} \\
&= \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots \\ j_1, j_2, \dots}} \left(\alpha + \frac{\varepsilon}{2}\right) \frac{(i_1+1)(i_1+2) x_1^{i_1+2} x_2^{i_2} \dots y_1^{j_1} y_2^{j_2} \dots}{1^{i_1+2} (i_1+2)! 2^{i_2} i_2! \dots 1^{j_1} j_1! 2^{j_2} j_2! \dots} \\
&= \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots \\ j_1, j_2, \dots}} \left(\alpha + \frac{\varepsilon}{2}\right) \frac{(i_1-1) i_1 x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots y_1^{j_1} y_2^{j_2} \dots}{1^{i_1} (i_1)! 2^{i_2} i_2! \dots 1^{j_1} j_1! 2^{j_2} j_2! \dots}. \tag{4.28}
\end{aligned}$$

Finalement, le terme (\*\*\*) peut être réécrit suite à une multiplication par  $\frac{i_2+1}{i_2+1}$  et au changement d'indice  $i_2 := i_2 - 1$ . Les égalités suivantes sont ainsi obtenues:

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{i_1, i_2, \dots \\ j_1, j_2, \dots}} \frac{\varepsilon}{2} \frac{x_1^{i_1} x_2^{i_2+1} \dots y_1^{j_1} y_2^{j_2} \dots}{1^{i_1} i_1! 2^{i_2} i_2! \dots 1^{j_1} j_1! 2^{j_2} j_2! \dots} &= \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots \\ j_1, j_2, \dots}} \frac{\varepsilon}{2} \frac{(i_2+1) x_1^{i_1} x_2^{i_2+1} \dots y_1^{j_1} y_2^{j_2} \dots}{(i_2+1) 1^{i_1} i_1! 2^{i_2} i_2! \dots 1^{j_1} j_1! 2^{j_2} j_2! \dots} \\
&= \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots \\ j_1, j_2, \dots}} \frac{\varepsilon (i_2+1) x_1^{i_1} x_2^{i_2+1} \dots y_1^{j_1} y_2^{j_2} \dots}{1^{i_1} i_1! 2^{i_2+1} (i_2+1)! \dots 1^{j_1} j_1! 2^{j_2} j_2! \dots} \\
&= \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots \\ j_1, j_2, \dots}} \varepsilon \frac{i_2 x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots y_1^{j_1} y_2^{j_2} \dots}{1^{i_1} i_1! 2^{i_2} i_2! \dots 1^{j_1} j_1! 2^{j_2} j_2! \dots}. \tag{4.29}
\end{aligned}$$

Ainsi, en remplaçant les termes (\*), (\*\*) et (\*\*\*) dans l'équation (4.26) en utilisant les égalités (4.27), (4.28) et (4.29), on peut écrire  $Z_{\Lambda \ll X \frac{\partial}{\partial X} \gg \mathcal{M}(X,Y)}$  sous la forme

$$\begin{aligned}
& Z_{\Lambda \ll X \frac{\partial}{\partial X} \gg \mathcal{M}(X,Y)} \\
&= \left( \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots \\ j_1, j_2, \dots}} \frac{\lambda i_1 x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots y_1^{j_1} y_2^{j_2} \dots}{1^{i_1} i_1! 2^{i_2} i_2! \dots 1^{j_1} j_1! 2^{j_2} j_2! \dots} \right. \\
&\quad + \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots \\ j_1, j_2, \dots}} \left( \alpha + \frac{\varepsilon}{2} \right) \frac{(i_1 - 1) i_1 x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots y_1^{j_1} y_2^{j_2} \dots}{1^{i_1} (i_1)! 2^{i_2} i_2! \dots 1^{j_1} j_1! 2^{j_2} j_2! \dots} \\
&\quad \left. + \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots \\ j_1, j_2, \dots}} \varepsilon \frac{i_2 x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots y_1^{j_1} y_2^{j_2} \dots}{1^{i_1} i_1! 2^{i_2} i_2! \dots 1^{j_1} j_1! 2^{j_2} j_2! \dots} \right) \times Z_{\mathcal{M}(X,Y)} \\
&= \sum \left( \lambda i_1 + i_1 (i_1 - 1) \left( \alpha + \frac{\varepsilon}{2} \right) + \varepsilon i_2 \right) \frac{m_{i_1, i_2, \dots, j_1, j_2, \dots} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots y_1^{j_1} y_2^{j_2} \dots}{1^{i_1} i_1! 2^{i_2} i_2! \dots 1^{j_1} j_1! 2^{j_2} j_2! \dots}.
\end{aligned} \tag{4.30}$$

L'égalité (4.30) s'obtient en appliquant l'opération  $\times Z_{\mathcal{M}(X,Y)}$ . Maintenant, en utilisant

$$\left( x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \sum a_{i,j} x_1^i y_1^j = \sum i a_{i,j} x_1^i y_1^j, \tag{4.31}$$

et

$$\left( x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^2 \sum a_{i,j} x_1^i y_1^j = \sum i^2 a_{i,j} x_1^i y_1^j, \tag{4.32}$$

l'équation (4.30) devient

$$\begin{aligned}
& Z_{\Lambda \ll X \frac{\partial}{\partial X} \gg \mathcal{M}(X,Y)} \\
&= \left( \lambda x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \left( \alpha + \frac{\varepsilon}{2} \right) \left( \left( x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^2 - \left( x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \right) + \varepsilon x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \sum \frac{m_{i_1, i_2, \dots, j_1, j_2, \dots} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots y_1^{j_1} y_2^{j_2} \dots}{1^{i_1} i_1! 2^{i_2} i_2! \dots 1^{j_1} j_1! 2^{j_2} j_2! \dots} \\
&= \left( \lambda x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \left( \alpha + \frac{\varepsilon}{2} \right) \left( \left( x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^2 - \left( x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \right) + \varepsilon x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) Z_{\mathcal{M}(X,Y)} \\
&= \left( \left( \lambda - \alpha - \frac{\varepsilon}{2} \right) x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \left( \alpha + \frac{\varepsilon}{2} \right) \left( x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^2 + \varepsilon x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) Z_{\mathcal{M}(X,Y)}.
\end{aligned}$$

Ainsi, l'opérateur  $\Lambda \ll X \frac{\partial}{\partial X} \gg$  a le même effet que l'application de  $\mathcal{D}$  à la série indicatrice de cycles  $Z_{\mathcal{M}(X,Y)}$ , où

$$\mathcal{D} = \left( \lambda - \alpha - \frac{\varepsilon}{2} \right) x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \left( \alpha + \frac{\varepsilon}{2} \right) \left( x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^2 + \varepsilon x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}. \tag{4.33}$$

■

L'introduction du lemme suivant est nécessaire puisqu'il sera utilisé dans la preuve d'un autre lemme.

**Lemme 4.2.4** *Pour  $v = 0, 1, 2, \dots$ , l'égalité suivante est respectée:*

$$e^{-x} \left( x \frac{d}{dx} \right)^v e^x g(x) = \left( x + x \frac{d}{dx} \right)^v g(x). \quad (4.34)$$

**Preuve** Nous ferons cette preuve par récurrence.

Pour  $v = 1$ :

$$e^{-x} \left( x \frac{d}{dx} \right) e^x g(x) = e^{-x} \left( x e^x g(x) + x e^x \frac{dg(x)}{dx} \right) \quad (4.35)$$

$$= xg(x) + x \frac{d}{dx} g(x) \quad (4.36)$$

$$= \left( x + x \frac{d}{dx} \right) g(x). \quad (4.37)$$

Ainsi, l'équation (4.34) est vraie pour  $v = 1$ .

Supposons que (4.34) soit vraie pour  $v$  et vérifions qu'elle est alors aussi vraie pour  $v + 1$ :

$$e^{-x} \left( x \frac{d}{dx} \right)^{v+1} e^x g(x) = \left( e^{-x} \left( x \frac{d}{dx} \right) e^x \right) \left( e^{-x} \left( x \frac{d}{dx} \right)^v e^x \right) g(x) \quad (4.38)$$

$$= e^{-x} \left( x \frac{d}{dx} \right) e^x \left( x + x \frac{d}{dx} \right)^v g(x) \quad (4.39)$$

$$= \left( x + x \frac{d}{dx} \right)^{v+1} g(x). \quad (4.40)$$

Le passage de (4.39) à (4.40) découle de (4.37). Ainsi, on a démontré que (4.34) est vraie pour tout  $v$ . ■

**Lemme 4.2.5** *Pour les polynômes  $a(x)$ ,  $b(x)$  et  $c(x)$  définis dans le théorème 4.2.1, l'égalité suivante est vérifiée:*

$$e^{-x} R(y)^{\lambda x \frac{d}{dx} + (\alpha + \frac{\varepsilon}{2}) x \frac{d}{dx} (x \frac{d}{dx} - 1)} e^x = R(y)^{a(x) + b(x) \frac{d}{dx} + c(x) \frac{d^2}{dx^2}} 1. \quad (4.41)$$

**Preuve** On sait que

$$e^{-x} R(y)^{\lambda x \frac{d}{dx} + (\alpha + \frac{\varepsilon}{2}) x \frac{d}{dx} (x \frac{d}{dx} - 1)} e^x = e^{-x} R(y)^{(\lambda - \alpha - \frac{\varepsilon}{2}) x \frac{d}{dx}} R(y)^{(\alpha + \frac{\varepsilon}{2}) (x \frac{d}{dx})^2} e^x \mathbf{1}.$$

Puis en utilisant (4.34), on a

$$e^{-x} R(y)^{\lambda x \frac{d}{dx} + (\alpha + \frac{\varepsilon}{2}) x \frac{d}{dx} (x \frac{d}{dx} - 1)} e^x = R(y)^{(\lambda - \alpha - \frac{\varepsilon}{2}) (x + x \frac{d}{dx}) + (\alpha + \frac{\varepsilon}{2}) (x + x \frac{d}{dx})^2} \mathbf{1}.$$

D'autre part, en évaluant  $(x + x \frac{d}{dx})^2 h$ , on obtient

$$\begin{aligned} (x + x \frac{d}{dx})^2 h &= (x + x \frac{d}{dx})(x + x \frac{d}{dx})h \\ &= (x + x \frac{d}{dx})(xh + x(\frac{d}{dx}h)) \\ &= x^2 h + x^2(\frac{d}{dx}h) + x(h + x(\frac{d}{dx}h)) + x(\frac{d}{dx}h) + x^2(\frac{d^2}{dx^2}h) \\ &= ((x^2 + x) + (2x^2 + x)\frac{d}{dx} + x^2(\frac{d^2}{dx^2}))h. \end{aligned}$$

Ainsi, en combinant ces résultats, on a

$$\begin{aligned} R(y)^{(\lambda - \alpha - \frac{\varepsilon}{2}) (x + x \frac{d}{dx}) + (\alpha + \frac{\varepsilon}{2}) (x + x \frac{d}{dx})^2} \mathbf{1} \\ &= R(y)^{((\lambda - \alpha - \frac{\varepsilon}{2})x + (\alpha + \frac{\varepsilon}{2})(x^2 + x)) + ((\lambda - \alpha - \frac{\varepsilon}{2})x + (2x^2 + x)(\alpha + \frac{\varepsilon}{2}))\frac{d}{dx} + (\alpha + \frac{\varepsilon}{2})x^2\frac{d^2}{dx^2}} \mathbf{1} \\ &= R(y)^{a(x) + b(x)\frac{d}{dx} + c(x)\frac{d^2}{dx^2}} \mathbf{1}. \end{aligned}$$

■

Nous avons maintenant les outils nécessaires pour démontrer le théorème 4.2.1.

**Preuve** Cette preuve est divisée en trois parties: une pour chacune des trois équations énoncées dans le théorème.

*Preuve de l'équation (4.16):*

$$w_k^*(x) = \sum_{n=0}^{2k} \left[ \begin{matrix} k \\ n \end{matrix} \right]_R x^n.$$

Par la proposition 2.3.2, on peut dire que

$$\mathcal{M}_x(y) = \sum_{k \geq 0} w_k(x) \frac{y^k}{k!} = Z_{\mathcal{M}}(x, x^2, x^3, \dots; y, 0, 0, \dots), \quad (4.44)$$

où  $Z_{\mathcal{M}} = Z_{\mathcal{M}}(x_1, x_2, x_3, \dots; y_1, y_2, y_3, \dots)$  est la série indicatrice de cycles de l'espèce  $\mathcal{M}(X, Y)$ . Le lecteur est référé à (Bergeron, Labelle et Leroux, 1994; Pólya et Read, 1987) pour plus de détails.

Ainsi, il n'est donc pas nécessaire de connaître complètement l'expression de  $Z_{\mathcal{M}}$  pour calculer la série  $\mathcal{M}_x(y)$ . Nous allons montrer que le lemme 4.1.1 suffit pour le calcul de la série  $\mathcal{M}_x(y)$ .

En utilisant le lemme 4.2.3, en prenant la série indicatrice des cycles de (4.1), et en y faisant la substitution  $y_1 := y$ ,  $y_i := 0$  pour  $i \geq 2$ , on obtient l'équation différentielle partielle

$$R(y) \frac{\partial}{\partial y} Z_{\mathcal{M}}(x_1, x_2, \dots; y, 0, 0, \dots) = R'(y) \mathcal{D} Z_{\mathcal{M}}(x_1, x_2, \dots; y, 0, 0, \dots). \quad (4.45)$$

Cette dernière équation peut être réécrite comme

$$\frac{\partial}{\partial y} Z_{\mathcal{M}}(x_1, x_2, \dots; y, 0, 0, \dots) = \frac{R'(y)}{R(y)} \mathcal{D} Z_{\mathcal{M}}(x_1, x_2, \dots; y, 0, 0, \dots). \quad (4.46)$$

Soient  $h(y)$ , une fonction de  $y$ ,  $f(x_1, x_2, \dots, y)$ , une fonction de  $x_1, x_2, \dots$  et  $y$ , et  $\theta$  un opérateur différentiel indépendant de  $y$ , c'est-à-dire agissant seulement sur les variables  $x_1, x_2, \dots$ . L'équation différentielle

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x_1, x_2, \dots, y) = h(y) \theta f(x_1, x_2, \dots, y), \quad (4.47)$$

se résoud comme suit pour l'inconnue  $f(x_1, x_2, \dots, y)$ :

$$f(x_1, x_2, \dots, y) = e^{\int_0^y h(y) dy} \theta f(x_1, x_2, \dots, 0). \quad (4.48)$$

En posant  $f(y) = Z_{\mathcal{M}}(x_1, x_2, \dots; y, 0, \dots)$ ,  $h(y) = \frac{R'(y)}{R(y)}$  et  $\theta = \mathcal{D}$ , on obtient

$$Z_{\mathcal{M}}(x_1, x_2, \dots; y, 0, \dots) = e^{\ln(R(y)) \cdot \mathcal{D}} Z_{\mathcal{M}}(x_1, x_2, \dots; 0, 0, \dots) \quad (4.49)$$

$$= R(y)^{\mathcal{D}} Z_{\mathcal{M}}(x_1, x_2, \dots; 0, 0, \dots). \quad (4.50)$$

Puisque pour un  $(R, \Lambda)$ -multigraphe sans lien, on n'a que des sommets isolés, on a

$$Z_{\mathcal{M}}(x_1, x_2, \dots; 0, 0, \dots) = Z_E(x_1, x_2, \dots), \quad (4.51)$$

et on obtient

$$Z_{\mathcal{M}}(x_1, x_2, \dots; y, 0, 0, \dots) = R(y)^{\mathcal{D}} e^{x_1 + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} + \dots}. \quad (4.52)$$

À partir de l'équation précédente et de (4.44), et en y faisant la substitution  $x_i := x^i$  pour  $i \geq 1$ , on obtient

$$\sum_{k \geq 0} w_k(x) \frac{y^k}{k!} = R(y)^{\mathcal{D}} e^{x_1 + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} + \dots} \Big|_{x_i := x^i, i \geq 1} \quad (4.53)$$

$$= \left( R(y)^{\mathcal{D}} Z_E \right) (x, x^2, x^3, \dots). \quad (4.54)$$

De plus, à partir de l'équation précédente et en utilisant l'égalité générale

$$g\left(x \frac{d}{dx}\right) \sum f_n x^n = \sum g(n) f_n x^n, \quad (4.55)$$

on obtient

$$\sum_{k \geq 0} w_k(x) \frac{y^k}{k!} = \sum R(y)^{(\lambda - \alpha - \frac{\varepsilon}{2})v_1 + (\alpha + \frac{\varepsilon}{2})v_1^2 + \varepsilon v_2} \frac{x_1^{v_1} x_2^{v_2} \dots}{1^{v_1} v_1! 2^{v_2} v_2! \dots} \Big|_{x_i := x^i} \quad (4.56)$$

$$= \sum R(y)^{\lambda v_1 + \alpha v_1(v_1 - 1) + (\frac{\varepsilon}{2} v_1(v_1 - 1) + \varepsilon v_2)} \frac{x^{v_1 + 2v_2 + 3v_3 + \dots}}{1^{v_1} v_1! 2^{v_2} v_2! \dots} \quad (4.57)$$

$$= \sum R(y)^{\lambda v_1 + 2\alpha \binom{v_1}{2} + \varepsilon \binom{v_1}{2} + \varepsilon v_2} \frac{x^{v_1 + 2v_2 + 3v_3 + \dots}}{1^{v_1} v_1! 2^{v_2} v_2! \dots} \quad (4.58)$$

$$= \sum R(y)^{\omega_{v_1, v_2}} \frac{x^{v_1 + 2v_2 + 3v_3 + \dots}}{1^{v_1} v_1! 2^{v_2} v_2! \dots}. \quad (4.59)$$

Il reste à prouver à partir de cette égalité que (4.16) est vraie. Pour ce faire, rappelons d'abord les formules suivantes:

$$w_k(x) = \frac{w_k^*(x)}{1 - x}, \quad (4.60)$$

$$(R(y))^{\omega} = \sum_{k \geq 0} \frac{y^k}{k!} r_k(\omega), \quad (4.61)$$

$$\frac{c_p}{p!} = \sum_{\sum_{i \geq 3} i v_i = p} \frac{1}{3^{v_3} v_3! 4^{v_4} v_4! \dots}. \quad (4.62)$$

Par (4.59) et (4.61), on a

$$\sum_{k \geq 0} w_k(x) \frac{y^k}{k!} = \sum_{v_1, v_2, \dots} \frac{x^{v_1+2v_2+\dots}}{1^{v_1} v_1! 2^{v_2} v_2! \dots} \cdot \sum_{k \geq 0} \frac{y^k}{k!} r_k(\omega_{v_1, v_2}) \quad (4.63)$$

$$= \sum_{i+2j+p=n} \frac{x^{i+2j+p}}{i! 2^j j! p!} \frac{c_p}{p!} \sum_{k \geq 0} \frac{y^k}{k!} r_k(\omega_{i, j}) \quad (4.64)$$

$$= \sum_{i+2j+p=n} \frac{x^n}{i! 2^j j! p!} \frac{c_p}{p!} \sum_{k \geq 0} \frac{y^k}{k!} r_k(\omega_{i, j}) \quad (4.65)$$

$$= \sum_{k \geq 0} \frac{y^k}{k!} r_k(\omega_{i, j}) \sum_{i+2j+p=n} \frac{x^n}{i! 2^j j! p!} \frac{c_p}{p!}. \quad (4.66)$$

Notons que l'équation (4.64) est obtenue de (4.63) en utilisant l'équation (4.62).

En comparant les coefficients de  $\frac{y^k}{k!}$  dans la sommation de part et d'autre de l'équation (4.66), on obtient

$$w_k(x) = \sum_{n=0}^{2k} \sum_{i+2j+p=n} r_k(\omega_{i, j}) \frac{x^n}{i! 2^j j! p!} \frac{c_p}{p!}. \quad (4.67)$$

Finalement, en utilisant la formule (4.60), on a

$$w_k^*(x) = (1-x) \sum_{n=0}^{2k} \sum_{i+2j+p=n} r_k(\omega_{i, j}) \frac{x^n}{i! 2^j j! p!} \frac{c_p}{p!} \quad (4.68)$$

$$= \sum_{n=0}^{2k} \sum_{i+2j+p=n} \frac{r_k(\omega_{i, j})}{i! 2^j j! p!} \left( \frac{c_p}{p!} - \frac{c_{p-1}}{(p-1)!} \right) x^n. \quad (4.69)$$

■

*Preuve de l'équation (4.18):*

$$\sum_{k \geq 0} w_k^*(x) \frac{y^k}{k!} = e^{-x + \frac{x^2}{2}(R^\varepsilon(y)-1)} \sum_{i \geq 0} R(y)^{\lambda i + (\alpha + \frac{1}{2}\varepsilon)i(i-1)} \frac{x^i}{i!}.$$

On sait par l'équation (4.53) que

$$\sum_{k \geq 0} w_k(x) \frac{y^k}{k!} = R(y)^{\mathcal{D}} e^{x_1 + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} + \dots} \Big|_{x_i := x^i, i \geq 1}. \quad (4.70)$$



Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
& \sum_{k \geq 0} w_k(x) \frac{y^k}{k!} \\
&= R(y)^{\mathcal{D}} \sum_{v_1, v_2, \dots} \frac{x_1^{v_1} x_2^{v_2} x_3^{v_3} \dots}{1^{v_1} v_1! 2^{v_2} v_2! 3^{v_3} v_3! \dots} \\
&= R(y)^{(\lambda - \alpha - \frac{\varepsilon}{2})x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + (\alpha + \frac{\varepsilon}{2})(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1})^2 + \varepsilon x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}} \sum_{v_1, v_2, \dots} \frac{x_1^{v_1} x_2^{v_2} \dots}{1^{v_1} v_1! 2^{v_2} v_2! \dots} \\
&= \sum_{v_1, v_2, \dots} R(y)^{(\lambda - \alpha - \frac{\varepsilon}{2})v_1 + (\alpha + \frac{\varepsilon}{2})v_1^2 + \varepsilon v_2} \frac{x_1^{v_1} x_2^{v_2} \dots}{1^{v_1} v_1! 2^{v_2} v_2! \dots} \\
&= \sum_{v_1, v_2, \dots} R(y)^{\varepsilon v_2} R(y)^{\lambda v_1 + (\alpha + \frac{\varepsilon}{2})v_1(v_1 - 1)} \frac{x_1^{v_1} x_2^{v_2} \dots}{1^{v_1} v_1! 2^{v_2} v_2! \dots} \\
&= \left( \sum_{v_1, v_2} R(y)^{\varepsilon v_2} R(y)^{\lambda v_1 + (\alpha + \frac{\varepsilon}{2})v_1(v_1 - 1)} \frac{x_1^{v_1} x_2^{v_2}}{1^{v_1} v_1! 2^{v_2} v_2!} \right) \sum_{v_3, v_4, \dots} \frac{x_3^{v_3} x_4^{v_4} \dots}{3^{v_3} v_3! 4^{v_4} v_4! \dots} \\
&= \left( \sum_{v_1, v_2} \frac{x_1^{v_1} x_2^{v_2}}{1^{v_1} v_1! 2^{v_2} v_2!} \right)^{-1} \left( \sum_{v_1, v_2} R(y)^{\varepsilon v_2} R(y)^{\lambda v_1 + (\alpha + \frac{\varepsilon}{2})v_1(v_1 - 1)} \frac{x_1^{v_1} x_2^{v_2}}{1^{v_1} v_1! 2^{v_2} v_2!} \right) \sum_{v_1, v_2, \dots} \frac{x_1^{v_1} x_2^{v_2} \dots}{1^{v_1} v_1! 2^{v_2} v_2! \dots} \\
&= e^{\frac{-x_1}{1}} e^{\frac{-x_2}{2}} \sum_{v_2 \geq 0} R(y)^{\varepsilon v_2} \frac{x_2^{v_2}}{2^{v_2} v_2!} \left( \sum_{v_1 \geq 0} R(y)^{\lambda v_1 + (\alpha + \frac{\varepsilon}{2})v_1(v_1 - 1)} \frac{x_1^{v_1}}{1^{v_1} v_1!} \right) e^{x_1} e^{\frac{x_2}{2}} e^{\frac{x_3}{3}} \dots
\end{aligned}$$

Puis en utilisant l'égalité

$$e^{ax_i} = \sum a^{v_i} \frac{x_i^{v_i}}{v_i!}, \quad (4.71)$$

on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{k \geq 0} w_k(x) \frac{y^k}{k!} &= e^{-x_1} e^{\frac{-x_2}{2}} e^{\frac{1}{2}x_2 R^\varepsilon(y)} \left( \sum_{i \geq 0} R(y)^{\lambda i + (\alpha + \frac{\varepsilon}{2})i(i-1)} \frac{x_1^i}{i!} \right) e^{x_1} e^{\frac{x_2}{2}} e^{\frac{x_3}{3}} \dots \\
&= e^{\frac{x_2}{2}(R^\varepsilon(y)-1)} e^{-x} e^{-\ln(1-x)} \left( \sum_{i \geq 0} R(y)^{\lambda i + (\alpha + \frac{\varepsilon}{2})i(i-1)} \frac{x_1^i}{i!} \right) \\
&= \frac{1}{1-x} e^{\frac{x_2}{2}(R^\varepsilon(y)-1)} e^{-x} \left( \sum_{i \geq 0} R(y)^{\lambda i + (\alpha + \frac{\varepsilon}{2})i(i-1)} \frac{x_1^i}{i!} \right). \quad (4.72)
\end{aligned}$$

En utilisant l'équation (4.2), le résultat désiré est obtenu:

$$\sum_{k \geq 0} w_k^*(x) \frac{y^k}{k!} = e^{-x + \frac{x_2}{2}(R^\varepsilon(y)-1)} \sum_{i \geq 0} R(y)^{\lambda i + (\alpha + \frac{\varepsilon}{2})i(i-1)} \frac{x_1^i}{i!}. \quad (4.73)$$

■

*Preuve de l'équation (4.19):*

$$\sum_{k \geq 0} w_k^*(x) \frac{y^k}{k!} = e^{\frac{x^2}{2}(R^\varepsilon(y)-1)} R(y)^{a(x)+b(x)\frac{d}{dx}+c(x)\frac{d^2}{dx^2}} \mathbf{1}.$$

Ce résultat découle de l'équation (4.18). En éliminant la sommation dans (4.18), on a

$$\sum_{k \geq 0} w_k^* \frac{y^k}{k!} = e^{\frac{x^2}{2}(R^\varepsilon(y)-1)} \cdot e^{-x} R(y)^{\lambda x + (\alpha + \frac{\varepsilon}{2})x \frac{d}{dx} + c(x) \frac{d^2}{dx^2}} e^x. \quad (4.74)$$

Puis, en utilisant le résultat du lemme 4.2.5, le résultat souhaité est obtenu:

$$\sum_{k \geq 0} w_k^* \frac{y^k}{k!} = e^{\frac{x^2}{2}(R^\varepsilon(y)-1)} R(y)^{a(x)+b(x)\frac{d}{dx}+c(x)\frac{d^2}{dx^2}} \mathbf{1}. \quad (4.75)$$

■

**Exemple** Voici un exemple simple de l'application de la formule du théorème précédent pour  $R = 1 + Y$ ,  $\Lambda = E_2$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $\alpha = \lambda = 0$  et  $k = 2$ . Il s'agit donc de calculer  $w_2^*(x)$  pour les graphes simples.

Par le théorème précédent, on a

$$w_2^*(x) = \sum_{n=0}^4 \left[ \begin{matrix} 2 \\ n \end{matrix} \right]_R x^n \quad (4.76)$$

$$= \left[ \begin{matrix} 2 \\ 0 \end{matrix} \right]_R + \left[ \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right]_R x + \left[ \begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \right]_R x^2 + \left[ \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \right]_R x^3 + \left[ \begin{matrix} 2 \\ 4 \end{matrix} \right]_R x^4. \quad (4.77)$$

Évaluons chacun des  $\left[ \begin{matrix} k \\ n \end{matrix} \right]_R$ :

$$\begin{aligned} \left[ \begin{matrix} 2 \\ 0 \end{matrix} \right]_R &= \sum_{i+2j+p=0} \frac{r_2(\omega_{i,j})}{i!2^j j!} \left( \frac{c_p}{p!} - \frac{c_{p-1}}{(p-1)!} \right) \\ &= \frac{r_2(\omega_{0,0})}{0!2^0 0!} \left( \frac{c_0}{0!} - \frac{c_{-1}}{(-1)!} \right) \\ &= r_2(\omega_{0,0})(c_0 - c_{-1}) \\ &= r_2(0)(1 - 0) \\ &= 0 \cdot 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left[ \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right]_R &= \sum_{i+2j+p=1} \frac{r_2(\omega_{i,j})}{i!2^j j!} \left( \frac{c_p}{p!} - \frac{c_{p-1}}{(p-1)!} \right) \\
&= \frac{r_2(\omega_{1,0})}{1!2^0 0!} \left( \frac{c_0}{0!} - \frac{c_{-1}}{(-1)!} \right) + \frac{r_2(\omega_{0,0})}{0!2^0 0!} \left( \frac{c_1}{1!} - \frac{c_0}{0!} \right) \\
&= r_2(\omega_{1,0})(c_0 - c_{-1}) + r_2(\omega_{0,1})(c_1 - c_0) \\
&= r_2(0)(1 - 0) + r_2(1)(0 - 1) \\
&= 0 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left[ \begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \right]_R &= \sum_{i+2j+p=2} \frac{r_2(\omega_{i,j})}{i!2^j j!} \left( \frac{c_p}{p!} - \frac{c_{p-1}}{(p-1)!} \right) \\
&= \frac{r_2(\omega_{2,0})}{2!2^0 0!} \left( \frac{c_0}{0!} - \frac{c_{-1}}{(-1)!} \right) + \frac{r_2(\omega_{1,0})}{1!2^0 0!} \left( \frac{c_1}{1!} - \frac{c_0}{0!} \right) + \frac{r_2(\omega_{0,1})}{0!2^1 1!} \left( \frac{c_0}{0!} - \frac{c_{-1}}{(-1)!} \right) \\
&\quad + \frac{r_2(\omega_{0,0})}{0!2^0 0!} \left( \frac{c_2}{2!} - \frac{c_1}{1!} \right) \\
&= \frac{r_2(\omega_{2,0})}{2} (c_0 - c_{-1}) + r_2(\omega_{1,0})(c_1 - c_0) + \frac{r_2(\omega_{0,1})}{2} (c_0 - c_{-1}) \\
&\quad + r_2(\omega_{0,0}) \left( \frac{c_2}{2} - c_1 \right) \\
&= \frac{r_2(1)}{2} (1 - 0) + r_2(0)(0 - 1) + \frac{r_2(1)}{2} (1 - 0) + r_2(0)(0 - 0) \\
&= \frac{r_2(1)}{2} \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + \frac{r_2(1)}{2} \cdot 1 + 0 \cdot 0 = r_2(1) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left[ \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \right]_R &= \sum_{i+2j+p=3} \frac{r_2(\omega_{i,j})}{i!2^j j!} \left( \frac{c_p}{p!} - \frac{c_{p-1}}{(p-1)!} \right) \\
&= \frac{r_2(\omega_{3,0})}{3!2^0 0!} \left( \frac{c_0}{0!} - \frac{c_{-1}}{(-1)!} \right) + \frac{r_2(\omega_{2,0})}{2!2^0 0!} \left( \frac{c_1}{1!} - \frac{c_0}{0!} \right) + \frac{r_2(\omega_{1,1})}{1!2^1 1!} \left( \frac{c_0}{0!} - \frac{c_{-1}}{(-1)!} \right) \\
&\quad + \frac{r_2(\omega_{1,0})}{1!2^0 0!} \left( \frac{c_2}{2!} - \frac{c_1}{1!} \right) + \frac{r_2(\omega_{0,1})}{0!2^1 1!} \left( \frac{c_1}{1!} - \frac{c_0}{0!} \right) + \frac{r_2(\omega_{0,0})}{0!2^0 0!} \left( \frac{c_3}{3!} - \frac{c_2}{2!} \right) \\
&= \frac{r_2(\omega_{3,0})}{3!} (c_0 - c_{-1}) + \frac{r_2(\omega_{2,0})}{2} (c_1 - c_0) + \frac{r_2(\omega_{1,1})}{2} (c_0 - c_{-1}) \\
&\quad + r_2(\omega_{1,0}) \left( \frac{c_2}{2} - c_1 \right) + \frac{r_2(\omega_{0,1})}{2} (c_1 - c_0) + r_2(\omega_{0,0}) \left( \frac{c_3}{6} - \frac{c_2}{2} \right) \\
&= \frac{r_2(3)}{6} (1 - 0) + \frac{r_2(1)}{2} (0 - 1) + \frac{r_2(1)}{2} (1 - 0) + r_2(0)(0 - 0) + \frac{r_2(1)}{2} (0 - 1) \\
&\quad + r_2(0)(0 - 0) \\
&= \frac{r_2(3)}{6} = \frac{1}{6} \cdot 6 = 1
\end{aligned}$$

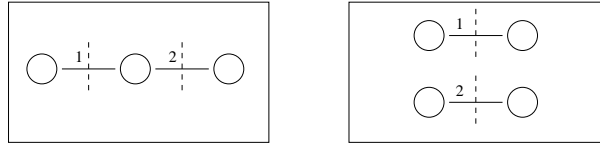
$$\begin{aligned}
\left[ \begin{matrix} 2 \\ 4 \end{matrix} \right]_R &= \sum_{i+2j+p=4} \frac{r_2(\omega_{i,j})}{i!2^j j!} \left( \frac{c_p}{p!} - \frac{c_{p-1}}{(p-1)!} \right) \\
&= \frac{r_2(\omega_{4,0})}{4!2^0 0!} \left( \frac{c_0}{0!} - \frac{c_{-1}}{(-1)!} \right) + \frac{r_2(\omega_{3,0})}{3!2^0 0!} \left( \frac{c_1}{1!} - \frac{c_0}{0!} \right) + \frac{r_2(\omega_{2,1})}{2!2^1 1!} \left( \frac{c_0}{0!} - \frac{c_{-1}}{(-1)!} \right) \\
&\quad + \frac{r_2(\omega_{2,0})}{2!2^0 0!} \left( \frac{c_2}{2!} - \frac{c_1}{1!} \right) + \frac{r_2(\omega_{1,1})}{1!2^1 1!} \left( \frac{c_1}{1!} - \frac{c_0}{0!} \right) + \frac{r_2(\omega_{1,0})}{1!2^0 0!} \left( \frac{c_3}{3!} - \frac{c_2}{2!} \right) \\
&\quad + \frac{r_2(\omega_{0,2})}{0!2^2 2!} \left( \frac{c_0}{0!} - \frac{c_{-1}}{(-1)!} \right) + \frac{r_2(\omega_{0,1})}{0!2^1 1!} \left( \frac{c_2}{2!} - \frac{c_1}{1!} \right) + \frac{r_2(\omega_{0,0})}{0!2^0 0!} \left( \frac{c_4}{4!} - \frac{c_3}{3!} \right) \\
&= \frac{r_2(\omega_{4,0})}{4!} (1-0) + \frac{r_2(\omega_{3,0})}{3!} (0-1) + \frac{r_2(\omega_{2,1})}{2 \cdot 2} (1-0) \\
&\quad + \frac{r_2(\omega_{2,0})}{2} (0-0) + \frac{r_2(\omega_{1,1})}{2} (0-1) + r_2(\omega_{1,0}) \left( \frac{2}{6} - 0 \right) \\
&\quad + \frac{r_2(\omega_{0,2})}{4 \cdot 2} (1-0) + \frac{r_2(\omega_{0,1})}{2} (0-0) + r_2(\omega_{0,0}) \left( \frac{6}{24} - \frac{2}{6} \right) \\
&= \frac{r_2(6)}{24} + \frac{r_2(3)}{6} (-1) + \frac{r_2(2)}{4} + 0 + \frac{r_2(1)}{2} (-1) + r_2(0) \frac{2}{6} + \frac{r_2(2)}{8} \\
&\quad + 0 + r_2(0) \left( \frac{6}{24} - \frac{2}{6} \right) \\
&= \frac{30}{24} - \frac{6}{6} + \frac{2}{4} + 0 + 0 + \frac{2}{8} + 0 \\
&= \frac{30}{24} - \frac{24}{24} + \frac{12}{24} + \frac{6}{24} = 1
\end{aligned}$$

Ainsi, en mettant les valeurs que nous venons de calculer dans la formule (4.77), on obtient

$$\begin{aligned}
w_2^*(x) &= 0 + 0x + 0x^2 + 1x^3 + 1x^4 \\
&= x^3 + x^4.
\end{aligned}$$

Cela correspond au fait qu'avec 2 arêtes, il est possible de faire qu'un seul graphe simple sur 3 sommets, et un seul sur 4 sommets, avec la condition qu'aucun sommet n'est isolé. La figure 4.1 illustre ces deux multigraphes.

De la formule générale donnée dans le théorème 4.2.1, on peut en déduire le corollaire suivant qui donne une expression simple pour le nombre de  $(R, \Lambda)$ -multigraphes avec sommets non isolés et non étiquetés et ayant  $k$  liens étiquetés.



**Figure 4.1** Graphes simples avec 2 arêtes étiquetées.

**Corollaire 4.2.1** *Le nombre total de  $(R, \Lambda)$ -multigraphes avec des sommets non étiquetés et non isolés et ayant  $k$  liens étiquetés est donné par*

$$w_k^*(1) = \sum_{i+2j+p=2k} \frac{r_k(\omega_{i,j})}{i!2^j j! p!} c_p. \quad (4.78)$$

**Preuve** Le théorème 4.2.1 dit que

$$w_k^*(x) = \sum_{n=0}^{2k} \left[ \begin{matrix} k \\ n \end{matrix} \right]_R x^n. \quad (4.79)$$

En posant  $x = 1$ , on obtient

$$\begin{aligned} w_k^*(1) &= \sum_{n=0}^{2k} \left[ \begin{matrix} k \\ n \end{matrix} \right]_R 1^n \\ &= \sum_{n=0}^{2k} \left[ \begin{matrix} k \\ n \end{matrix} \right]_R \\ &= \sum_{n=0}^{2k} \left( \sum_{i+2j+p=n} \frac{r_k(\omega_{i,j})}{i!2^j j!} \left( \frac{c_p}{p!} - \frac{c_{p-1}}{(p-1)!} \right) \right) \\ &= \sum_{i+2j+p=0}^{2k} \frac{r_k(\omega_{i,j})}{i!2^j j!} \left( \frac{c_p}{p!} - \frac{c_{p-1}}{(p-1)!} \right) \\ &= \sum_{p=0}^{2k} \sum_{i+2j=0}^{2k-p} \frac{r_k(\omega_{i,j})}{i!2^j j!} \left( \frac{c_p}{p!} - \frac{c_{p-1}}{(p-1)!} \right) \\ &= \sum_{p=0}^{2k} \left( \frac{c_p}{p!} - \frac{c_{p-1}}{(p-1)!} \right) \sum_{i+2j=0}^{2k-p} \frac{r_k(\omega_{i,j})}{i!2^j j!}. \end{aligned} \quad (4.80)$$

En développant la première sommation, on obtient

$$\begin{aligned}
w_k^*(1) &= \left( \frac{c_0}{0!} - \frac{c_{-1}}{(-1)!} \right) \sum_{i+2j=0}^{2k} \frac{r_k(\omega_{i,j})}{i!2^j j!} + \left( \frac{c_1}{1!} - \frac{c_0}{0!} \right) \sum_{i+2j=0}^{2k-1} \frac{r_k(\omega_{i,j})}{i!2^j j!} \\
&\quad + \left( \frac{c_2}{2!} - \frac{c_1}{1!} \right) \sum_{i+2j=0}^{2k-2} \frac{r_k(\omega_{i,j})}{i!2^j j!} + \dots + \left( \frac{c_{2k}}{(2k)!} - \frac{c_{2k-1}}{(2k-1)!} \right) \sum_{i+2j=0}^{2k-2k} \frac{r_k(\omega_{i,j})}{i!2^j j!} \\
&= \frac{c_0}{0!} \left( \sum_{i+2j=0}^{2k} \frac{r_k(\omega_{i,j})}{i!2^j j!} - \sum_{i+2j=0}^{2k-1} \frac{r_k(\omega_{i,j})}{i!2^j j!} \right) + \frac{c_1}{1!} \left( \sum_{i+2j=0}^{2k-1} \frac{r_k(\omega_{i,j})}{i!2^j j!} - \sum_{i+2j=0}^{2k-2} \frac{r_k(\omega_{i,j})}{i!2^j j!} \right) \\
&\quad + \dots + \frac{c_{2k}}{(2k)!} \sum_{i+2j=0} \frac{r_k(\omega_{i,j})}{i!2^j j!} \\
&= \frac{c_0}{0!} \left( \sum_{i+2j=2k} \frac{r_k(\omega_{i,j})}{i!2^j j!} \right) + \frac{c_1}{1!} \left( \sum_{i+2j=2k-1} \frac{r_k(\omega_{i,j})}{i!2^j j!} \right) \\
&\quad + \dots + \frac{c_{2k}}{(2k)!} \sum_{i+2j=0} \frac{r_k(\omega_{i,j})}{i!2^j j!} \\
&= \sum_{i+2j+p=2k} \frac{r_k(\omega_{i,j}) c_p}{i!2^j j! p!}.
\end{aligned}$$

■

**Exemple** Soit  $R = 1 + Y$ ,  $k = 2$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $\lambda = \alpha = 0$ .

Dans l'exemple du théorème 4.2.1, on a trouvé que pour ces mêmes paramètres,

$$w_2^*(x) = x^3 + x^4.$$

On s'attend donc à trouver la valeur 2, puisque  $1^3 + 1^4 = 2$ . Par le corollaire 4.2.1, on a

$$w_2^*(1) = \sum_{i+2j+p=4} \frac{r_2(\omega_{i,j})}{i!2^j j! p!} c_p \quad (4.81)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{r_2(\omega_{4,0})}{4!2^0 0!0!} c_0 + \frac{r_2(\omega_{3,0})}{3!2^0 0!1!} c_1 + \frac{r_2(\omega_{2,1})}{2!2^1 1!0!} c_0 + \frac{r_2(\omega_{2,0})}{2!2^0 0!2!} c_2 + \frac{r_2(\omega_{1,1})}{1!2^1 1!1!} c_1 \\
&\quad + \frac{r_2(\omega_{1,0})}{1!2^0 0!3!} c_3 + \frac{r_2(\omega_{0,2})}{0!2^2 2!0!} c_0 + \frac{r_2(\omega_{0,1})}{0!2^1 1!2!} c_2 + \frac{r_2(\omega_{0,0})}{0!2^0 0!4!} c_4 \quad (4.82)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{r_2(\omega_{4,0})}{4!}c_0 + \frac{r_2(\omega_{3,0})}{3!}c_1 + \frac{r_2(\omega_{2,1})}{2!2}c_0 + \frac{r_2(\omega_{2,0})}{2!2!}c_2 + \frac{r_2(\omega_{1,1})}{2}c_1 \\
&\quad + \frac{r_2(\omega_{1,0})}{3!}c_3 + \frac{r_2(\omega_{0,2})}{2^22!}c_0 + \frac{r_2(\omega_{0,1})}{2 \cdot 2!}c_2 + \frac{r_2(\omega_{0,0})}{4!}c_4
\end{aligned} \tag{4.83}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{r_2(6)}{4!}1 + \frac{r_2(3)}{3!}0 + \frac{r_2(2)}{2!2}1 + \frac{r_2(1)}{2!2!}0 + \frac{r_2(1)}{2}0 \\
&\quad + \frac{r_2(0)}{3!}2 + \frac{r_2(2)}{2^22!}1 + \frac{r_2(1)}{2 \cdot 2!}0 + \frac{r_2(0)}{4!}6
\end{aligned} \tag{4.84}$$

$$= \frac{r_2(6)}{4!} + 0 + \frac{r_2(2)}{2!2} + 0 + 0 + 0 + \frac{r_2(2)}{2^22!} + 0 + 0 \tag{4.85}$$

$$= \frac{r_2(6)}{24} + \frac{r_2(2)}{4} + \frac{r_2(2)}{8} \tag{4.86}$$

$$= \frac{30}{24} + \frac{2}{4} + \frac{2}{8} = \frac{48}{24} = 2 \tag{4.87}$$

Ces deux multigraphes sont ceux de la figure 4.1.

Le chapitre 5 contient plusieurs dénombrements explicites selon divers choix de  $R$ ,  $\lambda$ ,  $\alpha$  et  $\varepsilon$ .

### 4.3 Formule énumérative récursive

Dans cette section, nous présentons un corollaire découlant du théorème 4.2.1. Ce corollaire nous donne une autre façon de calculer  $w_k^*(x)$ , mais cette fois, de manière récursive.

**Corollaire 4.3.1** *Les polynômes  $w_k^*(x)$ , de degré  $\leq 2k$  en  $x$ , donnant le poids total de tous les  $(R, \Lambda)$ -multigraphes avec sommets non isolés non étiquetés et  $k$  liens étiquetés, peuvent être générés comme suit. Posons  $(\rho_i)_{i \geq 0}$  et  $(\sigma_i(x))_{i \geq 0}$  tels que*

$$\frac{R(y)}{R'(y)} = \sum_{i \geq 0} \rho_i \frac{y^i}{i!}, \tag{4.88}$$

$$e^{\frac{x}{2}(R^\varepsilon(y)-1)} = \sum_{i \geq 0} \sigma_i(x) \frac{y^i}{i!}. \tag{4.89}$$

Alors,

$$w_k^*(x) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \sigma_i(x) h_{k-i}(x), \tag{4.90}$$

où  $h_0(x) = 1$  et, pour  $k \geq 0$ ,

$$\rho_0 h_{k+1}(x) = a(x)h_k(x) + b(x)h'_k(x) + c(x)h''_k(x) - \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} \rho_i h_{k+1-i}(x). \quad (4.91)$$

**Preuve** Par (4.19), on sait que:

$$\sum_{k \geq 0} w_k^*(x) \frac{y^k}{k!} = e^{\frac{x^2}{2}} (R^\varepsilon(y)-1) R(y)^{a(x)+b(x)\frac{d}{dx}+c(x)\frac{d^2}{dx^2}} \mathbf{1}.$$

Posons l'égalité

$$R(y)^{a(x)+b(x)\frac{d}{dx}+c(x)\frac{d^2}{dx^2}} \mathbf{1} = \sum_{j \geq 0} h_j(x) \frac{y^j}{j!}. \quad (4.92)$$

En utilisant l'équation (4.89), on obtient

$$\sum_{k \geq 0} w_k^*(x) \frac{y^k}{k!} = \left( \sum_{i \geq 0} \sigma_i(x) \frac{y^i}{i!} \right) \left( R(y)^{a(x)+b(x)\frac{d}{dx}+c(x)\frac{d^2}{dx^2}} \mathbf{1} \right), \quad (4.93)$$

$$(4.94)$$

et par (4.92),

$$\sum_{k \geq 0} w_k^*(x) \frac{y^k}{k!} = \left( \sum_{i \geq 0} \sigma_i(x) \frac{y^i}{i!} \right) \left( \sum_{j \geq 0} h_j(x) \frac{y^j}{j!} \right).$$

Ainsi,

$$\sum_{k \geq 0} w_k^*(x) \frac{y^k}{k!} = \sum_{k \geq 0} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \sigma_i(x) h_{k-i}(x) \frac{y^k}{k!}. \quad (4.95)$$

Puis, en comparant les coefficients de  $\frac{y^k}{k!}$  dans les sommations de chaque côté de l'égalité, on trouve

$$w_k^*(x) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \sigma_i(x) h_{k-i}(x). \quad (4.96)$$

On a bien l'équation (4.90) énoncée dans le corollaire. Cherchons maintenant une formule récursive pour les  $h_i(x)$ .



Précédemment, on a posé dans l'équation (4.92) que

$$R(y)^{a(x)+b(x)\frac{d}{dx}+c(x)\frac{d^2}{dx^2}} 1 = \sum_{j \geq 0} h_j(x) \frac{y^j}{j!}. \quad (4.97)$$

En appliquant  $\frac{\partial}{\partial y}$  de part et d'autre de l'équation précédente et puisque l'opérateur  $a(x) + b(x)\frac{d}{dx} + c(x)\frac{d^2}{dx^2}$  est indépendant de  $y$  et de 1, on trouve

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} h_{k+1}(x) \frac{y^k}{k!} &= (a(x) + b(x)\frac{d}{dx} + c(x)\frac{d^2}{dx^2}) R(y)^{a(x)+b(x)\frac{d}{dx}+c(x)\frac{d^2}{dx^2}-1} R'(y) 1 \\ &= R'(y) (a(x) + b(x)\frac{d}{dx} + c(x)\frac{d^2}{dx^2}) R(y)^{a(x)+b(x)\frac{d}{dx}+c(x)\frac{d^2}{dx^2}} R^{-1}(y) 1 \\ &= \frac{R'(y)}{R(y)} (a(x) + b(x)\frac{d}{dx} + c(x)\frac{d^2}{dx^2}) R(y)^{a(x)+b(x)\frac{d}{dx}+c(x)\frac{d^2}{dx^2}} 1. \end{aligned}$$

Notons qu'ici, le changement d'indice  $j := k$  n'affecte en rien l'égalité. En multipliant chaque côté de l'égalité précédente par  $\frac{R(y)}{R'(y)}$ , on obtient

$$\frac{R(y)}{R'(y)} \sum_{k \geq 0} h_{k+1}(x) \frac{y^k}{k!} = (a(x) + b(x)\frac{d}{dx} + c(x)\frac{d^2}{dx^2}) R(y)^{a(x)+b(x)\frac{d}{dx}+c(x)\frac{d^2}{dx^2}} 1. \quad (4.98)$$

Puis, on utilise l'égalité (4.88) pour obtenir

$$\left( \sum_{i \geq 0} \rho_i \frac{y^i}{i!} \right) \left( \sum_{k \geq 0} h_{k+1}(x) \frac{y^k}{k!} \right) = (a(x) + b(x)\frac{d}{dx} + c(x)\frac{d^2}{dx^2}) R(y)^{a(x)+b(x)\frac{d}{dx}+c(x)\frac{d^2}{dx^2}} 1. \quad (4.99)$$

Et de l'égalité (4.92) découle

$$\left( \sum_{i \geq 0} \rho_i \frac{y^i}{i!} \right) \left( \sum_{k \geq 0} h_{k+1}(x) \frac{y^k}{k!} \right) = (a(x) + b(x)\frac{d}{dx} + c(x)\frac{d^2}{dx^2}) \sum_{k \geq 0} h_k(x) \frac{y^k}{k!}, \quad (4.100)$$

et donc

$$\sum_{k \geq 0} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \rho_i h_{k-i+1}(x) \frac{y^k}{k!} = \sum_{k \geq 0} \left( a(x) h_k(x) + b(x) h'_k(x) + c(x) h''_k(x) \right) \frac{y^k}{k!}. \quad (4.101)$$

En comparant les coefficients de  $\frac{y^k}{k!}$  dans les sommations de l'équation (4.101), on obtient l'égalité

$$\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \rho_i h_{k-i+1}(x) = a(x)h_k(x) + b(x)h'_k(x) + c(x)h''_k(x). \quad (4.102)$$

La récurrence (4.91) du corollaire 4.3.1 en découle directement. Il suffit de sortir le premier terme de la sommation dans (4.102), puis de l'isoler. ■

## CHAPITRE V

### RÉSULTATS OBTENUS

Dans ce chapitre, nous appliquons les formules énumératives trouvées dans le chapitre précédent pour des multigraphes enrichis par diverses espèces et pour des valeurs de  $\lambda$ ,  $\varepsilon$  et  $\alpha$  données. Les différents résultats sont présentés sous forme de tableaux. Puis, pour terminer, nous portons une attention plus particulière aux suites déjà connues dans la littérature.

#### 5.1 Exemples spécifiques

Dans cette première section, nous présentons d'abord les premiers polynômes  $w_k^*(x)$ , donnant le poids total de tous les  $(R, \Lambda)$ -multigraphes avec sommets non isolés et non étiquetés et  $k$  liens étiquetés, pour différentes espèces  $R$  et différents types de liens  $\Lambda$ . Puis, nous présentons les suites  $(w_k^*(1))_{k \geq 0}$  dénombrant les multigraphes enrichis.

##### 5.1.1 Polynômes $w_k^*(x)$

Comme nous avons vu précédemment, les arêtes, boucles et arcs peuvent être colorés par respectivement  $\varepsilon$ ,  $\lambda$  et  $\alpha$  couleurs. Dans les tableaux 5.1 à 5.5, nous présentons les polynômes déjà connus par Labelle, pour les multigraphes enrichis par l'espèce des ensembles sans arc ni boucle (multigraphes ordinaires), pour les multigraphes enrichis par l'espèce des singletons sans arc ni boucle (graphes simples), pour les multigraphes enrichis par l'espèce des singletons avec arcs et boucles (graphes orientés avec boucles),

pour les multigraphes enrichis par l'espèce des cycles sans arc ni boucle (multigraphes cycliquement enrichis), puis pour les multigraphes enrichis par l'espèce des ordres linéaires avec arcs, boucles et arêtes. Pour chaque type de lien admis dans les multigraphes, nous supposons qu'il n'y a qu'une seule couleur possible, donc que  $\varepsilon = \lambda = \alpha = 1$ .

**Tableau 5.1**  $w_k^*(x)$  pour  $R = E$ ,  $\Lambda = E_2$

<b>Multigraphes ordinaires</b>	
<b>k</b>	$w_k^*(x)$
0	1
1	$x^2$
2	$x^2 + x^3 + x^4$
3	$x^2 + 4x^3 + 7x^4 + 3x^5 + x^6$
4	$x^2 + 13x^3 + 46x^4 + 47x^5 + 25x^6 + 6x^7 + x^8$
5	$x^2 + 40x^3 + 295x^4 + 587x^5 + 516x^6 + 235x^7 + 65x^8 + 10x^9 + x^{10}$
6	$x^2 + 121x^3 + 1846x^4 + 6715x^5 + 9690x^6 + 7053x^7 + 3006x^8 + 800x^9 + 140x^{10}$ $+15x^{11} + x^{12}$
7	$x^2 + 364x^3 + 11347x^4 + 73003x^5 + 170051x^6 + 189458x^7 + 119211x^8$ $+46795x^9 + 12201x^{10} + 2170x^{11} + 266x^{12} + 21x^{13} + x^{14}$
8	$x^2 + 1093x^3 + 68986x^4 + 768747x^5 + 2841755x^6 + 4749024x^7 + 4308682x^8$ $+2384575x^9 + 869065x^{10} + 218988x^{11} + 39277x^{12} + 5054x^{13} + 462x^{14}$ $+28x^{15} + x^{16}$
9	$x^2 + 3280x^3 + 416815x^4 + 7935147x^5 + 45881746x^6 + 113364993x^7$ $+146075601x^8 + 111625840x^9 + 55189624x^{10} + 18742023x^{11} + 4552633x^{12}$ $+811440x^{13} + 107457x^{14} + 10542x^{15} + 750x^{16} + 36x^{17} + x^{18}$

Le tableau 5.6 présente les polynômes généraux pour les multigraphes enrichis par l'espèce des partitions, et pour lesquels les liens sont limités aux arêtes. Nous supposons que les arêtes peuvent être colorées par  $\varepsilon$  couleurs différentes.

**Tableau 5.2**  $w_k^*(x)$  pour  $R = 1 + Y$ ,  $\Lambda = E_2$ 

<b>Graphes simples</b>	
<b>k</b>	$w_k^*(x)$
0	1
1	$x^2$
2	$x^3 + x^4$
3	$x^3 + 4x^4 + 3x^5 + x^6$
4	$15x^4 + 29x^5 + 19x^6 + 6x^7 + x^8$
5	$30x^4 + 222x^5 + 301x^6 + 175x^7 + 55x^8 + 10x^9 + x^{10}$
6	$30x^4 + 1230x^5 + 3850x^6 + 4038x^7 + 2116x^8 + 650x^9 + 125x^{10} + 15x^{11} + x^{12}$
7	$5040x^5 + 40110x^6 + 78060x^7 + 66725x^8 + 31745x^9 + 9436x^{10}$ $+1855x^{11} + 245x^{12} + 21x^{13} + x^{14}$
8	$15120x^5 + 345240x^6 + 1295280x^7 + 1818075x^8 + 1312315x^9 + 570557x^{10}$ $+163058x^{11} + 32151x^{12} + 4466x^{13} + 434x^{14} + 28x^{15} + x^{16}$
9	$30240x^5 + 2492280x^6 + 18723600x^7 + 43808940x^8 + 47926900x^9$ $+29952439x^{10} + 11975235x^{11} + 3279361x^{12} + 640962x^{13} + 91371x^{14}$ $+9534x^{15} + 714x^{16} + 36x^{17} + x^{18}$
10	$30240x^5 + 15104880x^6 + 238986720x^7 + 947148300x^8 + 1578693060x^9$ $+1412323884x^{10} + 778462070x^{11} + 287844736x^{12} + 75419010x^{13} + 14504155x^{14}$ $+2090319x^{15} + 227577x^{16} + 18600x^{17} + 1110x^{18} + 45x^{19} + x^{20}$
11	$75675600x^6 + 2718001440x^7 + 18586842120x^8 + 47527298280x^9$ $+60910306380x^{10} + 46039502250x^{11} + 22702012345x^{12} + 7803345517x^{13}$ $+1955527816x^{14} + 368276425x^{15} + 53137645x^{16} + 59322311x^{17} + 512457x^{18}$ $+33825x^{19} + 1650x^{20} + 55x^{21} + x^{22}$

**Tableau 5.3**  $w_k^*(x)$  pour  $R = 1 + Y$ ,  $\Lambda = X + X^2$ 

<b>Graphes orientés avec boucles</b>	
<b>k</b>	$w_k^*(x)$
0	1
1	$x + x^2$
2	$6x^2 + 6x^3 + x^4$
3	$12x^2 + 72x^3 + 62x^4 + 15x^5 + x^6$
4	$12x^2 + 492x^3 + 1322x^4 + 960x^5 + 260x^6 + 28x^7 + x^8$
5	$2520x^3 + 19320x^4 + 32550x^5 + 20202x^6 + 5600x^7 + 740x^8 + 45x^9 + x^{10}$
6	$10080x^3 + 230160x^4 + 827400x^5 + 1003632x^6 + 541576x^7 + 147862x^8$ $+21600x^9 + 1690x^{10} + 66x^{11} + x^{12}$
7	$30240x^3 + 2372160x^4 + 17802120x^5 + 39440520x^6 + 37162384x^7 + 17703268x^8$ $+4675230x^9 + 717122x^{10} + 64680x^{11} + 3346x^{12} + 91x^{13} + x^{14}$
8	$60480x^3 + 21561120x^4 + 341817840x^5 + 1341970560x^6 + 2091349008x^7$ $+1605962556x^8 + 684084960x^9 + 173224984x^{10} + 27108312x^{11}$ $+2663164x^{12} + 163072x^{13} + 5992x^{14} + 120x^{15} + x^{16}$
9	$60480x^3 + 172912320x^4 + 6005013840x^5 + 41356733040x^6 + 103532744448x^7$ $+122646108816x^8 + 79330914540x^9 + 30540275324x^{10} + 7385048880x^{11}$ $+1158906464x^{12} + 119942004x^{13} + 8192604x^{14} + 362880x^{15} + 9960x^{16}$ $+153x^{17} + x^{18}$
10	$1210809600x^4 + 97636492800x^5 + 1182859856640x^6 + 4684952321280x^7$ $+8339883884640x^8 + 7900342441200x^9 + 4409098539560x^{10} + 1547802170904x^{11}$ $+356848772204x^{12} + 55548431120x^{13} + 5929357520x^{14} + 435909600x^{15}$ $+21902004x^{16} + 734400x^{17} + 15630x^{18} + 190x^{19} + x^{20}$

**Tableau 5.4**  $w_k^*(x)$  pour  $R = 1 + C$ ,  $\Lambda = E_2$

<b>Multigraphes cycliquement enrichis</b>	
<b>k</b>	$w_k^*(x)$
0	1
1	$x^2$
2	$x^2 + x^3 + x^4$
3	$2x^2 + 4x^3 + 7x^4 + 3x^5 + x^6$
4	$6x^2 + 17x^3 + 50x^4 + 47x^5 + 25x^6 + 6x^7 + x^8$
5	$24x^2 + 85x^3 + 370x^4 + 617x^5 + 526x^6 + 235x^7 + 65x^8 + 10x^9 + x^{10}$
6	$120x^2 + 499x^3 + 2929x^4 + 7700x^5 + 10205x^6 + 7173x^7 + 3026x^8$ $+800x^9 + 140x^{10} + 15x^{11} + x^{12}$
7	$720x^2 + 3388x^3 + 25165x^4 + 95907x^5 + 189224x^6 + 197893x^7 + 121521x^8$ $+47145x^9 + 12236x^{10} + 2170x^{11} + 266x^{12} + 21x^{13} + x^{14}$
8	$5040x^2 + 26200x^3 + 235591x^4 + 1223117x^5 + 3439723x^6 + 5164810x^7$ $+4482296x^8 + 2430075x^9 + 876975x^{10} + 219828x^{11}$ $+39333x^{12} + 5054x^{13} + 462x^{14} + 28x^{15} + x^{16}$
9	$40320x^2 + 227708x^3 + 2400890x^4 + 16194966x^5 + 62438249x^6 + 130623087x^7$ $+156591645x^8 + 115675900x^9 + 56233996x^{10} + 18926193x^{11} + 4575103x^{12}$ $+813204x^{13} + 107541x^{14} + 10542x^{15} + 750x^{16} + 36x^{17} + x^{18}$
10	$362880x^2 + 2199276x^3 + 26550516x^4 + 224294200x^5 + 1146246275x^6$ $+3253079649x^7 + 5280249323x^8 + 5220928560x^9 + 3353916879x^{10}$ $+1477686950x^{11} + 465765874x^{12} + 108346170x^{13} + 19002880x^{14} + 2543709x^{15}$ $+260577x^{16} + 20220x^{17} + 1155x^{18} + 45x^{19} + x^{20}$
11	$3628800x^2 + 23382216x^3 + 317354994x^4 + 3261406258x^5 + 21464576386x^6$ $+80693433260x^7 + 174138353125x^8 + 227066450765x^9 + 190085868863x^{10}$ $+107927928740x^{11} + 43485326435x^{12} + 12881832040x^{13} + 2881900934x^{14}$ $+496337050x^{15} + 66615010x^{16} + 7002831x^{17} + 574827x^{18} + 36300x^{19}$ $+1705x^{20} + 55x^{21} + x^{22}$

**Tableau 5.5**  $w_k^*(x)$  pour  $R = L$ ,  $\Lambda = E_2 + X + X^2$ 

<b>Multigraphes enrichis par des ordres linéaires</b>	
<b>k</b>	$w_k^*(x)$
0	1
1	$x + 2x^2$
2	$2x + 14x^2 + 13x^3 + 4x^4$
3	$6x + 102x^2 + 268x^3 + 219x^4 + 66x^5 + 8x^6$
4	$24x + 828x^2 + 4668x^3 + 7909x^4 + 5309x^5 + 1659x^6 + 248x^7 + 16x^8$
5	$120x + 7500x^2 + 80100x^3 + 248870x^4 + 303932x^5 + 175783x^6 + 53465x^7$ $+8950x^8 + 800x^9 + 32x^{10}$
6	$720x + 75240x^2 + 1411680x^3 + 7476690x^4 + 15207810x^5 + 14504410x^6$ $+7361796x^7 + 2150541x^8 + 376375x^9 + 39540x^{10} + 2352x^{11} + 64x^{12}$
7	$5040x + 829080x^2 + 25918200x^3 + 222900720x^4 + 716053380x^5$ $+1058547630x^6 + 826705582x^7 + 374081669x^8 + 104178333x^9 + 18494287x^{10}$ $+2115974x^{11} + 153048x^{12} + 6496x^{13} + 128x^{14}$
8	$40320x + 9959040x^2 + 498093120x^3 + 6715742880x^4 + 32861136000x^5$ $+72351612480x^6 + 82969472936x^7 + 54813705323x^8 + 22380407263x^9$ $+5925688257x^{10} + 1048749674x^{11} + 125812393x^{12} + 10184496x^{13}$ $+539168x^{14} + 17152x^{15} + 256x^{16}$
9	$362880x + 129548160x^2 + 10030124160x^3 + 206346268800x^4$ $+1497728141280x^5 + 4774807195200x^6 + 7791611781744x^7 + 7245425007756x^8$ $+4145412926998x^9 + 1542165622371x^{10} + 387964494333x^{11} + 67755700500x^{12}$ $+8334405765x^{13} + 723571506x^{14} + 43733568x^{15} + 1770048x^{16}$ $+43776x^{17} + 512x^{18}$



**Tableau 5.6**  $w_k^*(x)$  pour  $R = \text{Par}$ ,  $\Lambda = \varepsilon E_2$ 

<b>Multigraphes enrichis par l'espèce des partitions</b>	
<b>k</b>	$w_k^*(x)$
0	1
1	$\varepsilon x^2$
2	$(\varepsilon + \varepsilon^2)x^2 + \varepsilon^2 x^3 + \varepsilon^2 x^4$
3	$(\varepsilon + 3\varepsilon^2 + \varepsilon^3)x^2 + (3\varepsilon^2 + 4\varepsilon^3)x^3 + (3\varepsilon^2 + 7\varepsilon^3)x^4 + 3\varepsilon^3 x^5 + \varepsilon^3 x^6$
4	$(\varepsilon + 7\varepsilon^2 + 6\varepsilon^3 + \varepsilon^4)x^2 + (7\varepsilon^2 + 24\varepsilon^3 + 13\varepsilon^4)x^3 + (7\varepsilon^2 + 42\varepsilon^3 + 46\varepsilon^4)x^4$ $+ (18\varepsilon^3 + 47\varepsilon^4)x^5 + (6\varepsilon^3 + 25\varepsilon^4)x^6 + 6\varepsilon^4 x^7 + \varepsilon^4 x^8$
5	$(\varepsilon + 15\varepsilon^2 + 25\varepsilon^3 + 10\varepsilon^4 + \varepsilon^5)x^2 + (15\varepsilon^2 + 100\varepsilon^3 + 130\varepsilon^4 + 40\varepsilon^5)x^3$ $+ (15\varepsilon^2 + 175\varepsilon^3 + 460\varepsilon^4 + 295\varepsilon^5)x^4 + (75\varepsilon^3 + 470\varepsilon^4 + 587\varepsilon^5)x^5$ $+ (25\varepsilon^3 + 250\varepsilon^4 + 516\varepsilon^5)x^6 + (60\varepsilon^4 + 235\varepsilon^5)x^7$ $+ (10\varepsilon^4 + 65\varepsilon^5)x^8 + 10\varepsilon^5 x^9 + \varepsilon^5 x^{10}$
6	$(\varepsilon + 31\varepsilon^2 + 90\varepsilon^3 + 65\varepsilon^4 + 15\varepsilon^5 + \varepsilon^6)x^2 + (31\varepsilon^2 + 360\varepsilon^3 + 845\varepsilon^4 + 600\varepsilon^5$ $+ 121\varepsilon^6)x^3 + (31\varepsilon^2 + 630\varepsilon^3 + 2990\varepsilon^4 + 4425\varepsilon^5 + 1846\varepsilon^6)x^4 + (270\varepsilon^3$ $+ 3055\varepsilon^4 + 8805\varepsilon^5 + 6715\varepsilon^6)x^5 + (90\varepsilon^3 + 1625\varepsilon^4 + 7740\varepsilon^5 + 9690\varepsilon^6)x^6$ $+ (390\varepsilon^4 + 3525\varepsilon^5 + 7053\varepsilon^6)x^7 + (65\varepsilon^4 + 975\varepsilon^5 + 30006\varepsilon^6)x^8$ $+ (150\varepsilon^5 + 800\varepsilon^6)x^9 + (15\varepsilon^5 + 140\varepsilon^6)x^{10} + 15\varepsilon^6 x^{11} + \varepsilon^6 x^{12}$

En posant  $\varepsilon = 1$ , on obtient les polynômes dénombrant les multigraphes enrichis par l'espèce des partitions, où les liens sont des arêtes étiquetées et sont d'une seule couleur, avec sommets non isolés et non étiquetés. On obtient ainsi les résultats présentés dans le tableau 5.7. Le tableau 5.8 est obtenu en posant cette fois  $\varepsilon = 5$ .

Nous avons aussi généré les polynômes généraux pour les multigraphes enrichis par l'espèce des partitions, et pour lesquels les liens sont limités aux arcs. Nous supposons que les arcs peuvent être colorées par  $\alpha$  couleurs différentes. Ces polynômes sont présentés dans le tableau 5.9. Puis, en posant  $\alpha = 7$ , les polynômes du tableau 5.10 sont obtenus.

**Tableau 5.7**  $w_k^*(x)$  pour  $R = \text{Par}$ ,  $\Lambda = E_2$

<b>Multigraphes enrichis par l'espèce des partitions</b>	
<b>k</b>	$w_k^*(x)$
0	1
1	$x^2$
2	$2x^2 + x^3 + x^4$
3	$5x^2 + 7x^3 + 10x^4 + 3x^5 + x^6$
4	$15x^2 + 44x^3 + 95x^4 + 65x^5 + 31x^6 + 6x^7 + x^8$
5	$52x^2 + 285x^3 + 945x^4 + 1132x^5 + 791x^6 + 295x^7 + 75x^8 + 10x^9 + x^{10}$
6	$203x^2 + 1957x^3 + 9922x^4 + 18845x^5 + 19145x^6 + 10968x^7 + 4046x^8 + 950x^9$ $+155x^{10} + 15x^{11}$

**Tableau 5.8**  $w_k^*(x)$  pour  $R = \text{Par}$ ,  $\Lambda = 5E_2$

<b>Multigraphes enrichis par l'espèce des partitions</b>	
<b>k</b>	$w_k^*(x)$
0	1
1	$5x^2$
2	$30x^2 + 25x^3 + 25x^4$
3	$205x^2 + 575x^3 + 950x^4 + 375x^5 + 125x^6$
4	$1555x^2 + 11300x^3 + 34175x^4 + 31625x^5 + 16375x^6 + 3750x^7 + 625x^8$
5	$12880x^2 + 219125x^3 + 1231625x^4 + 2137500x^5 + 1771875x^6$ $+771875x^7 + 209375x^8 + 31250x^9 + 3125x^{10}$
6	$115155x^2 + 4339525x^3 + 44620150x^4 + 134380625x^5 + 176620625x^6$ $+121462500x^7 + 50056250x^8 + 12968750x^9 + 2234375x^{10}$ $+234375x^{11} + 15625x^{12}$

**Tableau 5.9**  $w_k^*(x)$  pour  $R = \text{Par}$ ,  $\Lambda = \alpha X^2$ 

<b>Multigraphes enrichis par l'espèce des partitions</b>	
<b>k</b>	$w_k^*(x)$
0	1
1	$\alpha x^2$
2	$(\alpha + 2\alpha^2)x^2 + 4\alpha^2 x^3 + \alpha^2 x^4$
3	$(\alpha + 6\alpha^2 + 4\alpha^3)x^2 + (12\alpha^2 + 32\alpha^3)x^3 + (3\alpha^2 + 38\alpha^3)x^4 + 12\alpha^3 x^5 + \alpha^3 x^6$
4	$(\alpha + 14\alpha^2 + 24\alpha^3 + 8\alpha^4)x^2 + (28\alpha^2 + 192\alpha^3 + 208\alpha^4)x^3$ $+ (7\alpha^2 + 228\alpha^3 + 652\alpha^4)x^4 + (72\alpha^3 + 576\alpha^4)x^5 + (6\alpha^3 + 188\alpha^4)x^6$ $+ 24\alpha^4 x^7 + \alpha^4 x^8$
5	$(\alpha + 30\alpha^2 + 100\alpha^3 + 80\alpha^4 + 16\alpha^5)x^2 + (60\alpha^2 + 800\alpha^3 + 2080\alpha^4 + 1280\alpha^5)x^3$ $+ (15\alpha^2 + 950\alpha^3 + 6520\alpha^4 + 9080\alpha^5)x^4 + (300\alpha^3 + 5760\alpha^4 + 16944\alpha^5)x^5$ $+ (25\alpha^3 + 1880\alpha^4 + 12052\alpha^5)x^6 + (240\alpha^4 + 3840\alpha^5)x^7 + (10\alpha^4 + 580\alpha^5)x^8$ $+ 40\alpha^5 x^9 + \alpha^5 x^{10}$

**Tableau 5.10**  $w_k^*(x)$  pour  $R = \text{Par}$ ,  $\Lambda = 7X^2$ 

<b>Multigraphes enrichis par l'espèce des partitions</b>	
<b>k</b>	$w_k^*(x)$
0	1
1	$7x^2$
2	$105x^2 + 196x^3 + 49x^4$
3	$1673x^2 + 11564x^3 + 13181x^4 + 4116x^5 + 343x^6$
4	$28133x^2 + 566636x^3 + 1643999x^4 + 1407672x^5 + 453446x^6 + 57624x^7 + 2401x^8$
5	$496769x^2 + 26784380x^3 + 168588665x^4 + 298710468x^5 + 207080419x^6$ $+ 65115120x^7 + 9772070x^8 + 672280x^9 + 16807x^{10}$

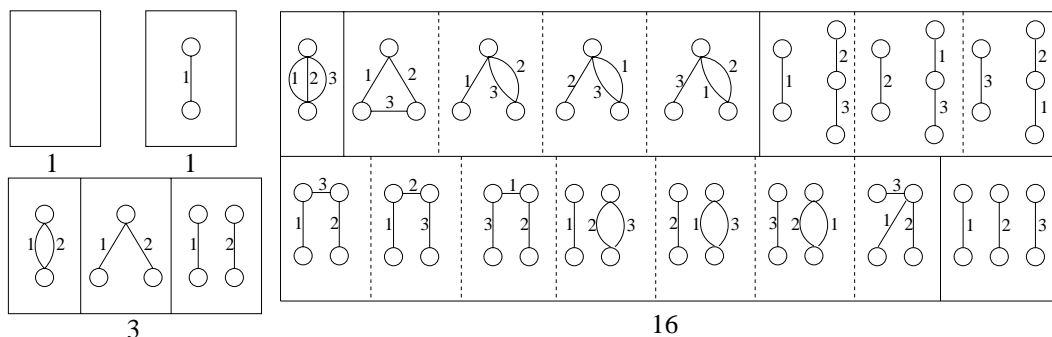
**5.1.2 Suites d'entiers  $(w_k^*(1))_{k \geq 0}$**

Nous avons vu dans le corollaire 4.2.1 que  $w_k^*(1) = w_k^*(x)|_{x:=1}$  représente le nombre total de  $(R, \Lambda)$ -multigraphes avec sommets non étiquetés et non isolés et avec  $k$  liens étiquetés. Pour terminer cette section, nous présentons les suites  $(w_k^*(1))_{k \geq 0}$  obtenues pour différentes valeurs de  $R$  et de  $\Lambda$ .

**Tableau 5.11**  $w_k^*(1)$  pour  $R(Y) = E(Y)$ ,  $R(y) = e^y$

Multigraphes ordinaires			
$\lambda$	$\alpha$	$\varepsilon$	$(w_k^*(1))_{k \geq 0}$
0	0	1	1, 1, 3, 16, 139, 1750, 29388, 624889, 16255738, 504717929, 18353177160, 769917601384, ...
1	0	1	1, 2, 9, 66, 712, 10457, 198091, 4659138, 132315780, 4441561814, 173290498279, 7751828612725, ...
1	1	0	1, 2, 15, 203, 4140, 115975, 4213597, 190899322, 10480142147, 682076806159, 51724158235372, 4506715738447323, ...
0	1	0	1, 1, 7, 87, 1657, 43833, 1515903, 65766991, 3473600465, 218310229201, 16035686850327, 1356791248984295, ...

Voici les premiers multigraphes associés à la première suite du tableau 5.11.



**Figure 5.1** Énumération des multigraphes ordinaires pour  $k = 0, 1, 2, 3$ .

**Tableau 5.12**  $w_k^*(1)$  pour  $R(Y) = 1 + Y$ ,  $R(y) = 1 + y$ 

Graphes ordinaires			
$\lambda$	$\alpha$	$\varepsilon$	$(w_k^*(1))_{k \geq 0}$
0	0	1	1,1,2,9,70,794,12055,233238,5556725,158931613,5350854707, 208746406117,...
1	0	1	1,2,7,43,403,5245,89132,1898630,49209846,1517275859,54669946851, 2269075206395,...
1	1	0	1,2,13,162,3075,80978,2784067,119971162,6289972169,392257225754, 28582571639293,2398695602082442,...
0	1	0	1,1,6,68,1206,29982,981476,40515568,2044492988,123175320988, 8697475219688,709097832452880,...

**Tableau 5.13**  $w_k^*(1)$  pour  $R(Y) = L(Y)$ ,  $R(y) = \frac{1}{1-y}$ 

Multigraphes $L$ -enrichis			
$\lambda$	$\alpha$	$\varepsilon$	$(w_k^*(1))_{k \geq 0}$
0	0	1	1,1,4,27,274,3874,71995,1682448,47840813,1615315141,63566760077, 2873099980637,...
1	0	1	1,2,11,97,1219,20385,433022,11296844,352866598,12938878499, 548257129281,26503637228615,...
1	1	0	1,2,17,252,5535,165278,6355147,303080956,17440307953,1185613611362, 93640428880873,8476453909912332,...
0	1	0	1,1,8,110,2262,63822,2335856,106643980,5901564892,387251339836, 29612207398688,2601877956513640,...

**Tableau 5.14**  $w_k^*(1)$  pour  $R(Y) = 1 + C(Y)$ ,  $R(y) = 1 - \log(1 - y)$ 

Multigraphes cycliquement enrichis			
$\lambda$	$\alpha$	$\varepsilon$	$(w_k^*(1))_{k \geq 0}$
0	0	1	1,1,3,17,152,1933,32608,695657,18148533,564860131,20581455139, 864802010595,...
1	0	1	1,2,9,68,750,11178,213895,5068102,144746329,4880572564,191104219619, 8573780527428,...
1	1	0	1,2,15,205,4202,118096,4300364,195155304,10727473182,698874420944, 53040545101942,4624423933685370,...
0	1	0	1,1,7,88,1686,44746,1550780,67381560,3562868722,224113484498, 16473080538422, 1394549071911392,...

**Tableau 5.15**  $w_k^*(1)$  pour  $R(Y) = \beta(Y)$ ,  $R(y) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4y}}{2y}$ 

Multigraphes enrichis par des arborescences binaires			
$\lambda$	$\alpha$	$\varepsilon$	$(w_k^*(1))_{k \geq 0}$
0	0	1	1,1,6,63,958,19254,484735,14759358,530271461,22073719357, 1049789517047,56406216212727,...
1	0	1	1,2,15,187,3283,74825,2109272,71217488,2815154006,128079232835, 6618682431711, 384397221347345,...
1	1	0	1,2,21,378,9819,338978,14802427,790660090,50405704473,3763429394138, 324142520562853,31809195929392082,...
0	1	0	1,1,10,170,4182,137262,5721356,292803772,17946811644,1292298341980, 107643364177688,10240855765623320,...

**Tableau 5.16**  $w_k^*(1)$  pour  $R(Y) = \text{Par}(Y)$ ,  $R(y) = e^{e^y - 1}$

Multigraphes enrichis par des partitions			
$\lambda$	$\alpha$	$\varepsilon$	$(w_k^*(1))_{k \geq 0}$
0	0	1	1,1,4,26,257,3586,66207,1540693,43659615,1469677309,57681784820, 2601121752854,...
1	0	1	1,2,11,95,1173,19364,407447,10552664,327719713,119600021230, 504784756672,24321086122048,...
1	1	0	1,2,17,250,5465,162677,6241059,297132409,17075153860,1159545515804, 91501467848088,8276847825732141,...
0	1	0	1,1,8,109,2229,62684,2289151,104344153,5767234550,378073098155, 28888082263581,2536660090249102,...

**Tableau 5.17**  $w_k^*(1)$  pour  $R(Y) = \text{Der}(Y)$ ,  $R(y) = \frac{e^{-y}}{1-y}$

Multigraphes enrichis par des dérangements			
$\lambda$	$\alpha$	$\varepsilon$	$(w_k^*(1))_{k \geq 0}$
0	0	1	1,0,1,2,15,84,750,6852,79639,1006184,14875218,241078100, 4392257716,87279581232,...
1	0	1	1,0,2,4,39,228,2400,23616,307692,4197408,67658769,1174316570, 22916090131, 482946085932,...
1	1	0	1,0,2,4,57,348,5235,57930,1037540,16842496,363889755,7792175070, 201054289293, 5345844537876,...
0	1	0	1,0,1,2,27,164,2335,25458,437241,6965112,145640817,3057675290, 76814951587, 2003471245164,...



**Tableau 5.18**  $w_k^*(1)$  pour  $R(Y) = \mathcal{P}(Y)$ ,  $R(y) = e^{2y}$ 

Multigraphes enrichis par l'espèce des parties			
$\lambda$	$\alpha$	$\varepsilon$	$(w_k^*(1))_{k \geq 0}$
0	0	1	1,2,12,128,2224,56000,1880832,79985792,4161468928,258415579648, 18793653411840,...
1	0	1	1,4,36,528,11392,334624,12677824,596369664,33872839680,2274079648768, 177449470237696,...
1	1	0	1,4,60,1624,66240,3711200,269670208,24435113216,2682916389632, 349223324753408,52965538033020928,...
0	1	0	1,2,28,696,26512,1402656,97017792,8418174848,889241719040, 111774837350912,16420543334734848,...

**Tableau 5.19**  $w_k^*(1)$  pour  $R(Y) = E_{\text{pair}}$ ,  $R(y) = \cosh(y)$ 

Multigraphes enrichis par l'espèce des ensembles pairs			
$\lambda$	$\alpha$	$\varepsilon$	$(w_k^*(1))_{k \geq 0}$
0	0	1	1,0,1,0,7,0,166,0,9367,0,991186,0,171380452,0,44509993711,0, 16385216984962,0,...
1	0	1	1,0,2,0,23,0,752,0,51788,0,6322577,0,1226582843,0,351300803492,0, 140872938680588,0,...
1	1	0	1,0,2,0,41,0,2627,0,357716,0,86570987,0,33355085381,0,19002804068432,0, 15177169622020811,0,...
0	1	0	1,0,1,0,19,0,1111,0,141289,0,32283361,0,11841596779,0,6461678187511,0, 4966364015391889,0,...

**Tableau 5.20**  $w_k^*(1)$  pour  $R(Y) = E_{\text{impair}}$ ,  $R(y) = 1 + \sinh(y)$ 

Multigraphes enrichis par l'espèce des ensembles impairs			
$\lambda$	$\alpha$	$\varepsilon$	$(w_k^*(1))_{k \geq 0}$
0	0	1	1,1,2,10,78,885,13487,261848,6255453,179297990,6046396379, 236175330388,...
1	0	1	1,2,7,45,431,5677,97304,2086120,54337094,1681862711,60786960947, 2529205845825,...
1	1	0	1,2,13,164,3127,82600,2845775,122820136,6446913953,402413160952, 29343933156485,235446319553848087,...
0	1	0	1,1,6,69,1230,30663,1005692,41571127,2099861244,126607647073, 8945129371976, 729628409684925,...

**Tableau 5.21**  $w_k^*(1)$  pour  $R(Y) = E_{\text{mod}3}(Y)$ ,  $R(y) = \frac{1}{3}e^y + \frac{2}{3}e^{-\frac{y}{2}} \cos(\frac{\sqrt{3}y}{2})$ 

Multigraphes enrichis par l'espèce des ensembles mod 3			
$\lambda$	$\alpha$	$\varepsilon$	$(w_k^*(1))_{k \geq 0}$
0	0	1	1,0,0,1,0,0,21,0,0,2689,0,0,1162525,0,0,1213162861,0,0, 2531581232565,0,0,...
1	0	1	1,0,0,2,0,0,72,0,0,12630,0,0,6608296,0,0,7926336602,0,0, 18527530189240,0,0,...
1	1	0	1,0,0,2,0,0,132,0,0,46454,0,0,48860748,0,0,117834107302,0,0, 554073633956884,0,0,...
0	1	0	1,0,0,1,0,0,61,0,0,19545,0,0,19204813,0,0,43724593641,0,0, 195751661906589,0,0,...

**Tableau 5.22**  $w_k^*(1)$  pour  $R(Y) = E_{\text{mod}4}(Y)$ ,  $R(y) = \frac{1}{4}e^y + \frac{1}{2}\cos(y) + \frac{1}{4}e^{-y}$

Multigraphes enrichis par l'espèce des ensembles mod 4			
$\lambda$	$\alpha$	$\varepsilon$	$(w_k^*(1))_{k \geq 0}$
0	0	1	1,0,0,0,1,0,0,0,71,0,0,0,52966,0,0,0,188004311,0,0,0, 2072901801106,0,0,0,...
1	0	1	1,0,0,0,2,0,0,0,247,0,0,0,251792,0,0,0,1078360012,0,0,0, 13649358704657,0,0,0,...
1	1	0	1,0,0,0,2,0,0,0,457,0,0,0,941987,0,0,0,8153027092,0,0,0, 208426400639147,0,0,0,...
0	1	0	1,0,0,0,1,0,0,0,211,0,0,0,395671,0,0,0,3199595881,0,0,0, 7721895343841,0,0,0,...

**Tableau 5.23**  $w_k^*(1)$  pour  $R(Y) = E_{\text{mod}6}(Y)$ ,  $R(y) = \frac{1}{6}e^y + \frac{1}{3}e^{\frac{y}{2}} \cos(\frac{\sqrt{3}y}{2}) + \frac{1}{3}e^{-\frac{y}{2}} \cos(\frac{\sqrt{3}y}{2}) + \frac{1}{6}e^{-y}$

Multigraphes enrichis par l'espèce des ensembles mod 6			
$\lambda$	$\alpha$	$\varepsilon$	$(w_k^*(1))_{k \geq 0}$
0	0	1	1,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,925,0,0,0,0,0,25766833,0,0,0,0,0,...
1	0	1	1,0,0,0,0,0,2,0,0,0,0,0,3236,0,0,0,0,0,123060758,0,0,0,0,0,...
1	1	0	1,0,0,0,0,0,2,0,0,0,0,0,6008,0,0,0,0,0,463376006,0,0,0,0,0,...
0	1	0	1,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,2773,0,0,0,0,0,194513593,0,0,0,0,0,...

**Tableau 5.24**  $w_k^*(1)$  pour  $R(Y) = E^\pm$ ,  $R(y) = 2e^y - (1 + y)$ 

Multigraphes enrichis par l'espèce des ensembles orientés			
$\lambda$	$\alpha$	$\varepsilon$	$(w_k^*(1))_{k \geq 0}$
0	0	1	1,1,4,23,220,3016,55011,1265824,35496711,1183686987,46072834777,...
1	0	1	1,2,11,89,1063,17099,352700,8987170,275303298,9930027149, 414883314611,...
1	1	0	1,2,17,244,5283,156092,5954547,282221828,16159327961,1094056231572, 86116276633357,...
0	1	0	1,1,8,106,2144,59844,2173450,98648246,5433864078,355229741266, 27080154837658,...

**Tableau 5.25**  $w_k^*(1)$  pour  $R(Y) = \text{Inv}$ ,  $R(y) = e^{y + \frac{y^2}{2}}$ 

Multigraphes enrichis par l'espèce des involutions			
$\lambda$	$\alpha$	$\varepsilon$	$(w_k^*(1))_{k \geq 0}$
0	0	1	1,1,4,25,244,3380,62133,1440382,40673705,1364815169,53415511305,...
1	0	1	1,2,11,93,1135,18567,387976,9991794,308837454,11225560583, 472141867849,...
1	1	0	1,2,17,248,5403,160420,6142567,291996934,16759322733,1136940595762, 89641455771637,...
0	1	0	1,1,8,108,2200,61708,2249268,102377404,5651999688,370171228504, 28262385542832,...

**Tableau 5.26**  $w_k^*(1)$  pour  $R(Y) = \mathcal{G}$ ,  $R(y) = \sum_{n \geq 0} 2^{\binom{n}{2}} \frac{y^n}{n!}$

Multigraphes enrichis par l'espèce des graphes simples			
$\lambda$	$\alpha$	$\varepsilon$	$(w_k^*(1))_{k \geq 0}$
0	0	1	1, 1, 4, 29, 330, 5438, 128211, 4808964, 378829853, 77137284917, 36854103598061, 36864364745783295, ...
1	0	1	1, 2, 11, 101, 1355, 24733, 597686, 19975138, 1157593462, 177427216131, 76854836746273, 75062022205128613, ...
1	1	0	1, 2, 17, 256, 5719, 173446, 6768075, 328288840, 19468007553, 1458080017522, 183476204746761, 87209577493989776, ...
0	1	0	1, 1, 8, 112, 2350, 67526, 2514688, 117239888, 6756599164, 509020241244, 72817721736544, 41583904069469312, ...

**Tableau 5.27**  $w_k^*(1)$  pour  $R(Y) = \mathcal{G}_o$ ,  $R(y) = \sum_{n \geq 0} 2^{n^2} \frac{y^n}{n!}$

Multigraphes enrichis par l'espèce des graphes orientés			
$\lambda$	$\alpha$	$\varepsilon$	$(w_k^*(1))_{k \geq 0}$
0	0	1	1, 2, 24, 776, 79840, 35397440, 69619053504, 564929183555840, 18464894708236907776, 2418517115222622481308160, ...
1	0	1	1, 4, 60, 2040, 188080, 74164384, 140677401088, 1132868741554944, 36957109369822385664, 4838033391155896811513344, ...
1	1	0	1, 4, 84, 3568, 305712, 87782720, 144600947392, 1139235294403328, 37012349010095737088, 4840037457225169875031040, ...
0	1	0	1, 2, 40, 1632, 140128, 42396096, 71916221184, 569069398642688, 18501543711357418496, 2419851465592233142433792, ...

**Tableau 5.28**  $w_k^*(1)$  pour  $R(Y) = \text{End}(Y)$ ,  $R(y) = \sum_{n \geq 0} n^n \frac{y^n}{n!}$

Multigraphes enrichis par l'espèce des endofonctions			
$\lambda$	$\alpha$	$\varepsilon$	$(w_k^*(1))_{k \geq 0}$
0	0	1	1,1,6,60,854,16029,378871,10926690,375538541,15097900582, 699359781567, 36859422340308,...
1	0	1	1,2,15,181,3039,66065,1779764,57667098,2198654278,96987734231, 4883685562991,277612787114231,...
1	1	0	1,2,21,372,9503,323528,13976119,740471952,46918236113,3486842393336, 299252510858253,29285226572514608...
0	1	0	1,1,10,167,4030,130187,5362052,272062457,16573460092,1188168923929, 98653699675128,9363400084014583,...

**Tableau 5.29**  $w_k^*(1)$  pour  $R(Y) = \mathcal{A}(Y)$ ,  $R(y) = \sum_{n \geq 1} n^{n-1} \frac{y^n}{n!}$

Multigraphes enrichis par l'espèce des arborescences			
$\lambda$	$\alpha$	$\varepsilon$	$(w_k^*(1))_{k \geq 0}$
0	0	1	1,1,4,30,338,5169,101251,2446806,71043973,2429762734,96364601877, 4375603494478,...
1	0	1	1,2,11,103,1383,24505,545354,14751666,473719878,17740486031, 763890459761,37384489903461,...
1	1	0	1,2,17,258,5771,174528,6770119,324895980,18781627193,1281239711000, 101465766593553,9204346831406488,...
0	1	0	1,1,8,113,2374,67927,2508632,115219211,6402538044,42137859873, 32293353537408,2842256451820073,...

**Tableau 5.30**  $w_k^*(1)$  pour  $R(Y) = \mathfrak{a}(Y)$ ,  $R(y) = \sum_{n \geq 1} n^{n-2} \frac{y^n}{n!}$ 

<b>Multigraphes enrichis par l'espèce des arbres</b>			
$\lambda$	$\alpha$	$\varepsilon$	$(w_k^*(1))_{k \geq 0}$
0	0	1	1, 1, 3, 18, 170, 2244, 38686, 834594, 21874433, 681399298, 24797467947, 1039645748808, ...
1	0	1	1, 2, 9, 70, 798, 12230, 238979, 5746740, 165778237, 5626476014, 221330040771, 9950747684006, ...
1	1	0	1, 2, 15, 207, 4274, 120698, 4408714, 200482089, 11035845002, 719691942986, 54661283926338, 4768412660292713, ...
0	1	0	1, 1, 7, 89, 1720, 45887, 1595192, 69438623, 3675895762, 231400961167, 17017734251838, 1441193215057543, ...

## 5.2 Suites particulières

Dans la section précédente, plusieurs suites ont été obtenues. Il est intéressant de se demander si ces suites sont nouvelles, et si elles existent déjà, il est pertinent de voir le lien entre notre structure et l'autre structure décrite par la même suite.

Suite à des vérifications dans la version électronique de l'encyclopédie des suites d'entiers de Sloane et Plouffe (Sloane et Plouffe, 2004), nous avons trouvé que parmi toutes les suites  $(w_k^*(1))_{k \geq 0}$  obtenues pour les différentes valeurs de  $R$  et  $\Lambda$  trouvées dans la section précédente, seulement 5 étaient déjà connues. La présente section est consacrée à l'étude des liens unissant les multigraphes correspondant aux suites déjà répertoriées aux autres structures décrites par les mêmes suites d'entiers.

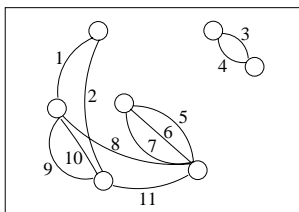
### 5.2.1 Multigraphes ordinaires sans arcs ni boucles et revêtements

La première suite déjà connue est celle dénombrant les multigraphes ordinaires, pour  $\lambda = \alpha = 0$  et  $\varepsilon = 1$  (sans arc ni boucle):

$$1, 1, 3, 16, 139, 1750, 29388, 624889, 16255738, \dots$$

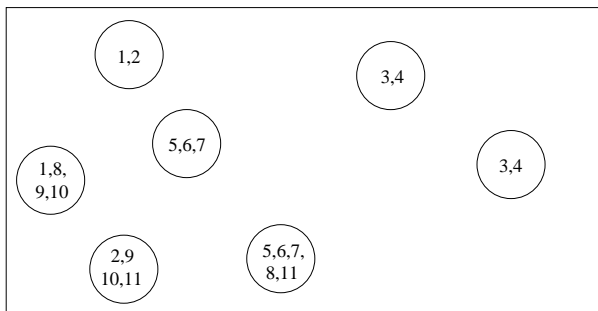
Cette suite correspond à la suite A020554 de la base de données de l'encyclopédie des suites d'entiers. Elle dénombre aussi les birevêtements d'un ensemble à  $n$  sommets. Cette suite a été introduite pour la première fois par Comtet en 1968 (Comtet, 1968). Un *birevêtement d'un ensemble  $U$*  est défini comme un multiensemble de sous-ensembles non vides (qui peuvent donc se répéter), tel que tout élément de  $U$  appartient à exactement deux sous-ensembles du multiensemble. On peut faire une bijection entre les birevêtements de  $U$  et les multigraphes ordinaires sans sommet isolé et sans arc ni boucle où les arêtes sont étiquetées par les éléments de l'ensemble  $U$ . L'exemple qui suit illustre clairement cette bijection.

**Exemple** Soit le multigraphe ordinaire suivant, où les arêtes sont étiquetées sur l'ensemble  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ .



On obtient directement le birevêtement correspondant en supprimant les arêtes du multigraphe et en associant à chaque sommet, l'ensemble contenant toutes les étiquettes des arêtes qui lui sont incidentes. Ainsi, on obtient le multiensemble qui est représenté graphiquement à la page suivante.





Récemment, cette suite a soulevé quelques questions lorsque Deutsch (Deutsch, mai 2004) a remarqué que cette suite était différente de celle trouvée par Comtet (Comtet, 1968) en 1968 que d'une seule valeur. Labelle a ensuite trouvée la bijection que nous venons tout juste de voir entre les birevêtements de Comtet et les multigraphes ordinaires. Ainsi, Deutsch et Labelle ont pu constater qu'une erreur s'était glissée dans une publication datant de plus de trente ans.

### 5.2.2 Multigraphes orientés avec boucles et $B(2n)$

La deuxième suite déjà connue est celle dénombrant les multigraphes orientés pour  $\lambda = \alpha = 1$  et  $\varepsilon = 0$  (avec boucles, sans arête):

$$1, 2, 15, 203, 4140, 115975, 4213597, 190899322, 1040142147, \dots$$

Cette suite correspond à la suite A020557 de la base de données de l'encyclopédie des suites d'entiers. On a que  $w_k^*(1) = B(2k)$ , où  $B(2k)$  est le  $2k$ -ième nombre de Bell. La bijection entre les nombres de Bell de la forme  $B(2k)$  et les multigraphes orientés avec boucles est assez simple.

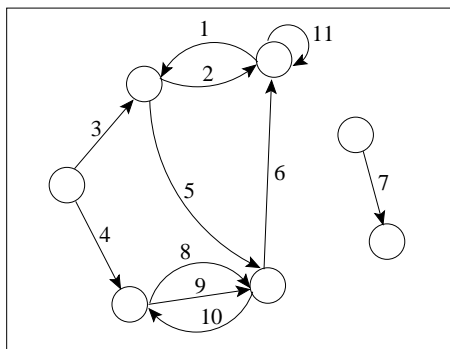
D'abord, rappelons que le  $n$ -ième nombre de Bell est défini comme étant le nombre de partitions de  $[n]$ . On peut aussi voir le  $n$ -ième nombre de Bell comme étant le nombre de façons de placer  $n$  boules distinctes dans  $n$  boîtes identiques potentiellement vides.

Afin de voir la bijection entre les nombres de Bell  $B(2k)$  et les multigraphes orientés avec boucles ayant exactement  $k$  arcs, on doit considérer les  $n$  sommets non étiquetés du

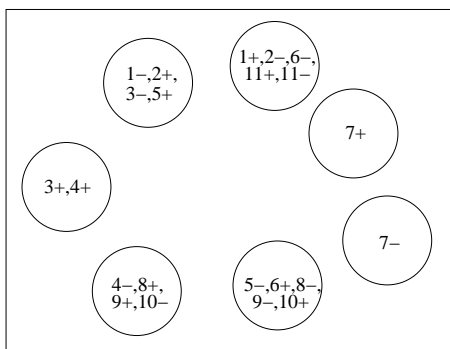
multigraphe comme étant  $n$  des  $2k$  boîtes indifférentiables. Puisqu'aucun sommet n'est isolé, on a nécessairement que  $n \leq 2k$ . Les  $(2k - n + 1)$  autres boîtes seront considérées comme étant vides. De plus, les  $k$  arcs étiquetés peuvent être vus comme  $2k$  objets distincts: en effet, les étiquettes distinguent les différents arcs, et en plus, chaque arc peut être vu comme 2 objets, en considérant l'orientation de l'arc.

Voici un exemple qui illustre bien comment on passe d'un multigraphe orienté avec boucles à  $k$  liens à une partition de  $[2k]$ .

**Exemple** Soit le multigraphe orienté avec boucles suivant.



Voici la partition de 22 obtenue à partir de ce multigraphe à 11 arcs.



Notons qu'ici, nous adoptons comme convention d'écrire  $m+$  si l'arc d'étiquette  $m$  est sortant et  $m-$  si l'arc est entrant.

### 5.2.3 Multigraphes orientés sans boucle et nombres de Bell généralisés

La troisième suite déjà connue est celle dénombrant les multigraphes orientés pour  $\lambda = \varepsilon = 0$  et  $\alpha = 1$  (avec arcs seulement):

$$1, 1, 7, 87, 1657, 43833, 1515903, 65766991, 3473600465, \dots$$

Cette suite correspond à la suite A020556 de la base de données de l'encyclopédie des suites d'entiers. Elle correspond à la suite d'entiers des nombres de Bell généralisés (Blasiak, Penson et Solomon, 2003).

Les nombres de Bell généralisés, notés  $B_{r,s}(n)$ , sont définis par

$$B_{r,s}(n) = \sum_{k=s}^{ns} S_{r,s}(n, k),$$

où  $S_{r,s}(n, k)$  désigne les nombres de Stirling de deuxième sorte généralisés. La suite qui nous intéresse dans cette sous-section correspond aux nombres de Bell généralisés, où  $r = 2$  et  $s = 2$ . Le tableau 5.31 présente le triangle des nombres de Stirling généralisés pour  $r = 2$  et  $s = 2$ .

**Tableau 5.31** Nombres de Bell et nombres de Stirling généralisés

$n \setminus k$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$B_{2,2}(n)$
1	1									1
2	2	4	1							7
3	4	32	38	12	1					87
4	8	208	625	576	188	24	1			1657
5	16	1280	9080	16944	12052	3840	580	40	1	43833

On peut interpréter combinatoirement  $S_{2,2}(n, k)$  comme étant le nombre de façons de placer dans  $k$  boîtes identiques les  $n$  paires distinctes de boules  $\{\alpha_1, \beta_1\}, \dots, \{\alpha_n, \beta_n\}$  de façon à ce qu'aucune boîte ne soit vide et que pour tout  $i$ , les boules  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  ne soient dans la même boîte. Ainsi, le nombre de Bell généralisé  $B_{2,2}(n)$  peut s'interpréter

combinatoirement comme le nombre de façons de placer dans au plus  $2n$  boîtes distinctes potentiellement vides les  $n$  paires distinctes de boules  $\{\alpha_1, \beta_1\}, \dots, \{\alpha_n, \beta_n\}$  de façon à ce que pour tout  $i$ , les boules  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  ne soient dans la même boîte.

Cette interprétation combinatoire permet de faire une bijection entre les nombres de Bell généralisés et les multigraphes orientés, sans boucle, ni arête. En effet, de façon semblable à la bijection vue dans la section précédente, on peut voir les sommets du multigraphe orienté comme étant des boîtes indistinguables, et chacun des arcs comme étant un couple de deux objets différentiables. La seule différence avec la bijection vue précédemment réside au niveau de l'absence de boucle dans le multigraphe. Cette absence implique la contrainte de ne pas placer deux objets du même couple dans la même boîte.

Nous ne ferons pas d'exemple de cette bijection puisqu'elle est similaire à la précédente.

### 5.2.4 Graphes simples et groupe de permutations oligomorphiques

Une autre suite déjà connue est celle dénombrant les graphes simples, pour  $\lambda = \alpha = 0$  et  $\varepsilon = 1$  (sans arc ni boucle):

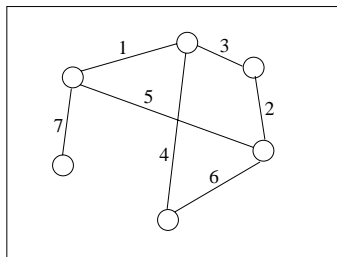
$$1, 1, 2, 9, 70, 794, 12055, 233238, 5556725, 158931613, \dots$$

Cette suite correspond à la suite A014500 de la base de données de l'encyclopédie des suites d'entiers. Elle décrit le nombre de groupes de permutations oligomorphiques (Cameron, 2000). Un groupe de permutations sur un ensemble infini est dit *oligomorphe* si son extension aux  $n$ -tuplets ordonnés possède un nombre fini d'orbites pour tout entier positif  $n$ .”

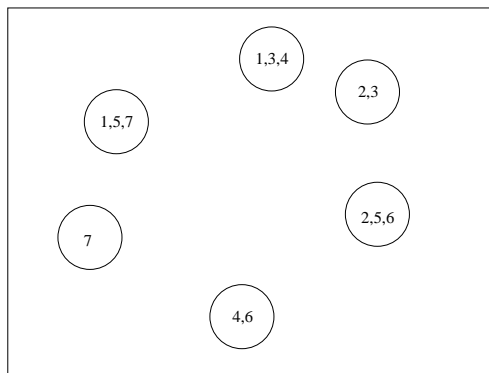
Nous n'avons pas trouvé de bijection reliant les permutations oligomorphiques d'un groupe aux graphes simples. Par contre, on peut voir une bijection entre le nombre de graphes simples sur  $k$  arêtes étiquetées et le nombre de façons de placer  $2k$  objets  $\{\alpha_1, \alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha_k\}$  dans au plus  $2k$  boîtes de façon à ce que chaque objet et son double ne

soit pas dans la même boîte et que deux boîtes n'aient pas plus d'un objet en commun.

Par exemple, soit le graphe simple suivant à 7 arêtes.



Au graphe simple ci-haut, on peut associer les sous-ensembles de  $\{1, 1, 2, 2, \dots, 7, 7\}$  représentés graphiquement ci-bas.



### 5.2.5 Multigraphes ordinaires avec boucles et factorisation de $(p_n)^2$

La dernière suite connue parmi toutes celles présentées dans la section précédente est celle dénombrant les multigraphes ordinaires, pour  $\lambda = \varepsilon = 1$  et  $\alpha = 0$  (sans arc, mais avec boucles):

$$1, 2, 9, 66, 712, 10457, 198091, 4659138, 132315780, \dots$$

Cette suite correspond à la suite A020555 de la base de données de l'encyclopédie des suites d'entiers. Selon cette encyclopédie, cette suite correspondrait au nombre d'états

génétiqnement distincts parmi  $n$  individus, ou encore, elle correspondrait au nombre de factorisations de  $(p_n)^2$ . Malheureusement, les références étaient manquantes à ce sujet et nous n'avons pas pu faire la bijection avec les multigraphes avec arêtes et boucles.

Par contre, tout comme pour la sous-section précédente, nous pouvons donner une interprétation combinatoire à cette suite de nombres et faire une bijection avec les multigraphes sur  $k$  arêtes et boucles étiquetées. En effet, le nombre de multigraphes sur  $k$  arêtes et boucles étiquetées peut être vu comme le nombre de façons de placer  $2k$  objets  $\{\alpha_1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \alpha_k\}$  dans au plus  $2k$  boîtes. Remarquons que la permission d'avoir des boucles dans ces multigraphes enlève la restriction que les deux objets identiques ne soient pas dans la même boîte et la permission d'avoir plus d'une arête entre le même couple de sommets nous permet que deux boîtes aient plus d'un objet en commun.

Puisque cette bijection ressemble à celle présentée dans la sous-section précédente, nous ne ferons pas d'exemple.

## CONCLUSION

Le but de ce travail était de trouver une façon d'effectuer le dénombrement des multigraphes enrichis par différentes espèces de structures. Pour ce faire, nous devions préalablement définir plusieurs notions. Ainsi, le premier chapitre était consacré à l'introduction à la théorie des espèces. Le deuxième chapitre introduisait les définitions d'espèce multisorte, d'espèce pondérée, et finalement, la définition d'espèce multisorte pondérée. Les espèces multisortes pondérées ont ensuite été utilisées dans le troisième chapitre, puisque nous y avons défini les multigraphes enrichis sur deux sortes, la sorte des sommets et la sorte des arêtes, où l'on associait à chaque arête non étiquetée un poids, et à chaque sommet non étiqueté un autre poids. Nous avons ensuite constaté que le dénombrement de multigraphes enrichis où seules les arêtes sont étiquetées est très difficile. Nous avons explicité les deux formules effectuant ce dénombrement que Labelle avait présentées dans son article publié en 2000. Puis, pour la bonne compréhension du lecteur, nous avons donné quelques exemples d'application de ces formules.

En utilisant le logiciel de calcul formel *Maple*, nous avons terminé ce travail en présentant divers résultats obtenus sous forme de tableaux. Ainsi, nous avons obtenu différentes suites d'entiers qui, pour la plupart, n'étaient pas répertoriées dans la base de données des suites d'entiers de *Sloane-Plouffe Encyclopedia of Integer Sequences*. Nous avons pu aussi constater l'utilisation potentielle de nos résultats avec l'exemple de la suite de Comtet.

Dans ce mémoire, nous avons trouvé une expression récursive pour exprimer le nombre de permutations de  $[p]$  sans cycle de longueur inférieure à 3 et nous en avons fait la preuve de façon combinatoire et analytique. Par contre, nous n'avons pas réussi à trouver une interprétation combinatoire pour la formule de  $\left[ \begin{matrix} k \\ n \end{matrix} \right]_R$ . Cette expression nous indique le nombre de multigraphes enrichis sans sommets isolés, où il y a exactement  $n$

sommets non étiquetés et  $k$  arêtes, arcs et boucles étiquetés. Si nous avons trouvé une interprétation combinatoire pour cette formule, nous aurions ainsi pu avoir une belle preuve combinatoire peut-être beaucoup plus simple que la preuve analytique que nous avons faite. De plus, nous avons noté  $\omega_{i,j}$  une expression qui revenait souvent dans les calculs.

Soulignons qu'il serait aussi intéressant d'étudier les multigraphes enrichis où différents types de poids seraient ajoutés aux sommets. Par exemple, un sommet  $u$  ayant  $s$  arêtes sortantes,  $e$  arêtes entrantes et  $n$  arêtes neutres, pourrait avoir le poids  $w(u) = t_+^s t_-^e t^n$ , et le poids d'un multigraphe enrichi  $M$  pourrait être  $w(M) = \prod_{u \in V} w(u)$ . Le poids d'un multigraphe enrichi nous donnerait alors directement le nombre d'arcs entrant, le nombre d'arcs sortants, ainsi que le nombre d'arêtes. Nous aurions ainsi beaucoup plus d'informations au sujet de la structure des multigraphes.

Pour terminer, mentionnons qu'il serait pertinent de connaître le coût en temps des deux formules énumératives. Nous pourrions ainsi comparer l'efficacité des deux formules.



## APPENDICE A

### TABLES DES PREMIÈRES VALEURS DE $c_p$ ET DE $\omega_{i,j}$

**Tableau A.1**  $c_p$  pour  $0 \leq p \leq 24$

$c_{-1} =$	0
$c_0 =$	1
$c_1 =$	0
$c_2 =$	0
$c_3 =$	2
$c_4 =$	6
$c_5 =$	24
$c_6 =$	160
$c_7 =$	1140
$c_8 =$	8988
$c_9 =$	80864
$c_{10} =$	809856
$c_{11} =$	8907480
$c_{12} =$	106877320
$c_{13} =$	1389428832
$c_{14} =$	19452141696
$c_{15} =$	291781655984
$c_{16} =$	4668504894480
$c_{17} =$	79364592318720
$c_{18} =$	1428562679845888
$c_{19} =$	27142690734936864
$c_{20} =$	542853814536802656
$c_{21} =$	11399930109077490560
$c_{22} =$	250798462399300784640
$c_{23} =$	5768364635100620089152
$c_{24} =$	138440751242507472273856

Tableau A.2  $c_p$  pour  $25 \leq p \leq 55$ 

$c_{25} =$	3461018781064593367693824
$c_{26} =$	89986488307675206245836800
$c_{27} =$	2429635184307185219369763200
$c_{28} =$	68029785160601345467104670848
$c_{29} =$	1972863769657440129000783404544
$c_{30} =$	59185913089723198139150966450176
$c_{31} =$	1834763305781419114730910057143040
$c_{32} =$	58712425785005411876628940337660160
$c_{33} =$	1937510050905178592606163849523699712
$c_{34} =$	65875341730776072141159248054625140736
$c_{35} =$	2305636960577162524924992104916109484544
$c_{36} =$	83002930580777850897576058652997034616320
$c_{37} =$	3071108431488780483210598764056720923514880
$c_{38} =$	116702120396573658361992243753846932003463168
$c_{39} =$	4551382695466372676117697201112297246802146304
$c_{40} =$	182055307818654907044708298211711653033932758016
$c_{41} =$	7464267620564851188833039828724467335282712862720
$c_{42} =$	313499240063723749930987656387527328231346747310080
$c_{43} =$	13480467322740121247032469257796715252240995596326912
$c_{44} =$	593140562200565334869428648015935143853883390072129536
$c_{45} =$	26691325299025440069124289158586348034584577209084370944
$c_{46} =$	1227800963755170243179717301266823157755743145689523978240
$c_{47} =$	57706645296493001429446713159666851004541723319167411138560
$c_{48} =$	2769918974231664068613442231665205681664232851926908733493248
$c_{49} =$	135726029737351539362058669351587825763780133429167185302585344
$c_{50} =$	6786301486867576968102933467579339895987908671275873830824574976
$c_{51} =$	346101375830246425373249606846546748719472804051014617938287206400
$c_{52} =$	17997271543172814119408979556020433140390752346846121837374240153600
$c_{53} =$	953855391788159148328675916469082932704479055832221952942807260823552
$c_{54} =$	51508191156560594009748499489330478272808257007072359793006704364486656
$c_{55} =$	2832950513610832670536167471913176306379444211598581029520927111001882624

**Tableau A.3**  $c_p$  pour  $56 \leq p \leq 79$

$c_{56} =$	158645228762206629550025378427137873161001734433743655823891128669749493760
$c_{57} =$	90427780394457778843514465703468587700963346559871427594300363854948590551040
$c_{58} =$	524481126287855117292383901080117808665454939836094043521351539070387670745088
$c_{59} =$	30944386450983451920250650163726950711266658244531411050392173337464676729585664
$c_{60} =$	1856663187059007115215039009823617042676002534355233277200834072022050003911213056
$c_{61} =$	113256454410599434028117379599240639603235862548333769546115628769632172589110394880
$c_{62} =$	7021900173457164909743277535152919655400623584623344906757488709362683244766017617920
$c_{63} =$	442379710927801389313826484714633938290239303831578876473337854440873754290285300088832
$c_{64} =$	28312301499379288916084895021736572050575315420503260921667412475749229786421039107997696
$c_{65} =$	1840299597459653779545518176412877183287395501205410025650760592924101045173843085947305984
$c_{66} =$	121459773432337149450004199643249894096968103082291019793428524014540602754147387434944430080
$c_{67} =$	8137804819966589013150281376097742904496862906585166295720235784480643977557473828479642501120
$c_{68} =$	55337072775728052894219133574646517505786677647536464946683460902113521318109480634195034636288
$c_{69} =$	38182580215283235649701120216650609707899280757675397502553335696753966435779340180278869178712064
$c_{70} =$	2672780615069826495479078415165542679552949653037300027935699509376806865611474139642468455946387456
$c_{71} =$	189767423669957681179014567476753530248259425365648603081191446772533688900769658566435953933540392960
$c_{72} =$	13663254504236953044889048858326254177874678626326697544352282799262759125140469078912938709099566858240
$c_{73} =$	997417578809297572276900566657816554984851539721848900936171657438852893707119629483583885801966746468352
$c_{74} =$	73808900831888020348490641932678425068879013939416818826135273237272698309482178277726811037418260797587456
$c_{75} =$	5535667562391601526136798144950881880165926045456261413268601251239797099695690006516071711675507159189684224
$c_{76} =$	4207107347417617159863966590162670228926103794546758673953408465417704160337251264432339268941863952382125670400
$c_{77} =$	32394726575115652130952542744252560762730999218010041789354875394627005999195144513040827262494944467587799449600
$c_{78} =$	252678867285902086621429833405169973949301793900478325957077325990853475456545305422275750868835791899838589698048
$c_{79} =$	199616305155862648430929568390084279419948417181377877506096731397195583974824464917118138217034026666194456772870144

Tableau A.4  $\omega_{i,j}$  pour  $0 \leq i \leq 20$  et  $0 \leq j \leq 6$

$i \setminus j$	0	1	2	3	4	5	6
0	$\epsilon$	$2\epsilon$	$3\epsilon$	$4\epsilon$	$5\epsilon$	$6\epsilon$	
1	$\lambda + \epsilon$	$\lambda + 2\epsilon$	$\lambda + 3\epsilon$	$\lambda + 4\epsilon$	$\lambda + 5\epsilon$	$\lambda + 6\epsilon$	
2	$2\lambda + 2\alpha + \epsilon$	$2\lambda + 2\alpha + 2\epsilon$	$2\lambda + 2\alpha + 3\epsilon$	$2\lambda + 2\alpha + 4\epsilon$	$2\lambda + 2\alpha + 5\epsilon$	$2\lambda + 2\alpha + 6\epsilon$	$2\lambda + 2\alpha + 7\epsilon$
3	$3\lambda + 6\alpha + 3\epsilon$	$3\lambda + 6\alpha + 4\epsilon$	$3\lambda + 6\alpha + 5\epsilon$	$3\lambda + 6\alpha + 6\epsilon$	$3\lambda + 6\alpha + 7\epsilon$	$3\lambda + 6\alpha + 8\epsilon$	$3\lambda + 6\alpha + 9\epsilon$
4	$4\lambda + 12\alpha + 6\epsilon$	$4\lambda + 12\alpha + 7\epsilon$	$4\lambda + 12\alpha + 8\epsilon$	$4\lambda + 12\alpha + 9\epsilon$	$4\lambda + 12\alpha + 10\epsilon$	$4\lambda + 12\alpha + 11\epsilon$	$4\lambda + 12\alpha + 12\epsilon$
5	$5\lambda + 20\alpha + 10\epsilon$	$5\lambda + 20\alpha + 11\epsilon$	$5\lambda + 20\alpha + 12\epsilon$	$5\lambda + 20\alpha + 13\epsilon$	$5\lambda + 20\alpha + 14\epsilon$	$5\lambda + 20\alpha + 15\epsilon$	$5\lambda + 20\alpha + 16\epsilon$
6	$6\lambda + 30\alpha + 15\epsilon$	$6\lambda + 30\alpha + 16\epsilon$	$6\lambda + 30\alpha + 17\epsilon$	$6\lambda + 30\alpha + 18\epsilon$	$6\lambda + 30\alpha + 19\epsilon$	$6\lambda + 30\alpha + 20\epsilon$	$6\lambda + 30\alpha + 21\epsilon$
7	$7\lambda + 42\alpha + 21\epsilon$	$7\lambda + 42\alpha + 22\epsilon$	$7\lambda + 42\alpha + 23\epsilon$	$7\lambda + 42\alpha + 24\epsilon$	$7\lambda + 42\alpha + 25\epsilon$	$7\lambda + 42\alpha + 26\epsilon$	$7\lambda + 42\alpha + 27\epsilon$
8	$8\lambda + 56\alpha + 28\epsilon$	$8\lambda + 56\alpha + 29\epsilon$	$8\lambda + 56\alpha + 30\epsilon$	$8\lambda + 56\alpha + 31\epsilon$	$8\lambda + 56\alpha + 32\epsilon$	$8\lambda + 56\alpha + 33\epsilon$	$8\lambda + 56\alpha + 34\epsilon$
9	$9\lambda + 72\alpha + 36\epsilon$	$9\lambda + 72\alpha + 37\epsilon$	$9\lambda + 72\alpha + 38\epsilon$	$9\lambda + 72\alpha + 39\epsilon$	$9\lambda + 72\alpha + 40\epsilon$	$9\lambda + 72\alpha + 41\epsilon$	$9\lambda + 72\alpha + 42\epsilon$
10	$10\lambda + 90\alpha + 45\epsilon$	$10\lambda + 90\alpha + 46\epsilon$	$10\lambda + 90\alpha + 47\epsilon$	$10\lambda + 90\alpha + 48\epsilon$	$10\lambda + 90\alpha + 49\epsilon$	$10\lambda + 90\alpha + 50\epsilon$	$10\lambda + 90\alpha + 51\epsilon$
11	$11\lambda + 110\alpha + 55\epsilon$	$11\lambda + 110\alpha + 56\epsilon$	$11\lambda + 110\alpha + 57\epsilon$	$11\lambda + 110\alpha + 58\epsilon$	$11\lambda + 110\alpha + 59\epsilon$	$11\lambda + 110\alpha + 60\epsilon$	$11\lambda + 110\alpha + 61\epsilon$
12	$12\lambda + 132\alpha + 66\epsilon$	$12\lambda + 132\alpha + 67\epsilon$	$12\lambda + 132\alpha + 68\epsilon$	$12\lambda + 132\alpha + 69\epsilon$	$12\lambda + 132\alpha + 70\epsilon$	$12\lambda + 132\alpha + 71\epsilon$	$12\lambda + 132\alpha + 72\epsilon$
13	$13\lambda + 156\alpha + 78\epsilon$	$13\lambda + 156\alpha + 79\epsilon$	$13\lambda + 156\alpha + 80\epsilon$	$13\lambda + 156\alpha + 81\epsilon$	$13\lambda + 156\alpha + 82\epsilon$	$13\lambda + 156\alpha + 83\epsilon$	$13\lambda + 156\alpha + 84\epsilon$
14	$14\lambda + 182\alpha + 91\epsilon$	$14\lambda + 182\alpha + 92\epsilon$	$14\lambda + 182\alpha + 93\epsilon$	$14\lambda + 182\alpha + 94\epsilon$	$14\lambda + 182\alpha + 95\epsilon$	$14\lambda + 182\alpha + 96\epsilon$	$14\lambda + 182\alpha + 97\epsilon$
15	$15\lambda + 210\alpha + 105\epsilon$	$15\lambda + 210\alpha + 106\epsilon$	$15\lambda + 210\alpha + 107\epsilon$	$15\lambda + 210\alpha + 108\epsilon$	$15\lambda + 210\alpha + 109\epsilon$	$15\lambda + 210\alpha + 110\epsilon$	$15\lambda + 210\alpha + 111\epsilon$
16	$16\lambda + 240\alpha + 120\epsilon$	$16\lambda + 240\alpha + 121\epsilon$	$16\lambda + 240\alpha + 122\epsilon$	$16\lambda + 240\alpha + 123\epsilon$	$16\lambda + 240\alpha + 124\epsilon$	$16\lambda + 240\alpha + 125\epsilon$	$16\lambda + 240\alpha + 126\epsilon$
17	$17\lambda + 272\alpha + 136\epsilon$	$17\lambda + 272\alpha + 137\epsilon$	$17\lambda + 272\alpha + 138\epsilon$	$17\lambda + 272\alpha + 139\epsilon$	$17\lambda + 272\alpha + 140\epsilon$	$17\lambda + 272\alpha + 141\epsilon$	$17\lambda + 272\alpha + 142\epsilon$
18	$18\lambda + 306\alpha + 153\epsilon$	$18\lambda + 306\alpha + 154\epsilon$	$18\lambda + 306\alpha + 155\epsilon$	$18\lambda + 306\alpha + 156\epsilon$	$18\lambda + 306\alpha + 157\epsilon$	$18\lambda + 306\alpha + 158\epsilon$	$18\lambda + 306\alpha + 159\epsilon$
19	$19\lambda + 342\alpha + 171\epsilon$	$19\lambda + 342\alpha + 172\epsilon$	$19\lambda + 342\alpha + 173\epsilon$	$19\lambda + 342\alpha + 174\epsilon$	$19\lambda + 342\alpha + 175\epsilon$	$19\lambda + 342\alpha + 176\epsilon$	$19\lambda + 342\alpha + 177\epsilon$
20	$20\lambda + 380\alpha + 190\epsilon$	$20\lambda + 380\alpha + 191\epsilon$	$20\lambda + 380\alpha + 192\epsilon$	$20\lambda + 380\alpha + 193\epsilon$	$20\lambda + 380\alpha + 194\epsilon$	$20\lambda + 380\alpha + 195\epsilon$	$20\lambda + 380\alpha + 196\epsilon$

Tableau A.5  $\omega_{i,j}$  pour  $0 \leq i \leq 20$  et  $7 \leq j \leq 13$

$i \setminus j$	7	8	9	10	11	12	13
0	$7\epsilon$	$8\epsilon$	$9\epsilon$	$10\epsilon$	$11\epsilon$	$12\epsilon$	$13\epsilon$
1	$\lambda + 7\epsilon$	$\lambda + 8\epsilon$	$\lambda + 9\epsilon$	$\lambda + 10\epsilon$	$\lambda + 11\epsilon$	$\lambda + 12\epsilon$	$\lambda + 13\epsilon$
2	$2\lambda + 2\alpha + 8\epsilon$	$2\lambda + 2\alpha + 9\epsilon$	$2\lambda + 2\alpha + 10\epsilon$	$2\lambda + 2\alpha + 11\epsilon$	$2\lambda + 2\alpha + 12\epsilon$	$2\lambda + 2\alpha + 13\epsilon$	$2\lambda + 2\alpha + 14\epsilon$
3	$3\lambda + 6\alpha + 10\epsilon$	$3\lambda + 6\alpha + 11\epsilon$	$3\lambda + 6\alpha + 12\epsilon$	$3\lambda + 6\alpha + 13\epsilon$	$3\lambda + 6\alpha + 14\epsilon$	$3\lambda + 6\alpha + 15\epsilon$	$3\lambda + 6\alpha + 16\epsilon$
4	$4\lambda + 12\alpha + 13\epsilon$	$4\lambda + 12\alpha + 14\epsilon$	$4\lambda + 12\alpha + 15\epsilon$	$4\lambda + 12\alpha + 16\epsilon$	$4\lambda + 12\alpha + 17\epsilon$	$4\lambda + 12\alpha + 18\epsilon$	$4\lambda + 12\alpha + 19\epsilon$
5	$5\lambda + 20\alpha + 17\epsilon$	$5\lambda + 20\alpha + 18\epsilon$	$5\lambda + 20\alpha + 19\epsilon$	$5\lambda + 20\alpha + 20\epsilon$	$5\lambda + 20\alpha + 21\epsilon$	$5\lambda + 20\alpha + 22\epsilon$	$5\lambda + 20\alpha + 23\epsilon$
6	$6\lambda + 30\alpha + 22\epsilon$	$6\lambda + 30\alpha + 23\epsilon$	$6\lambda + 30\alpha + 24\epsilon$	$6\lambda + 30\alpha + 25\epsilon$	$6\lambda + 30\alpha + 26\epsilon$	$6\lambda + 30\alpha + 27\epsilon$	$6\lambda + 30\alpha + 28\epsilon$
7	$7\lambda + 42\alpha + 28\epsilon$	$7\lambda + 42\alpha + 29\epsilon$	$7\lambda + 42\alpha + 30\epsilon$	$7\lambda + 42\alpha + 31\epsilon$	$7\lambda + 42\alpha + 32\epsilon$	$7\lambda + 42\alpha + 33\epsilon$	$7\lambda + 42\alpha + 34\epsilon$
8	$8\lambda + 56\alpha + 35\epsilon$	$8\lambda + 56\alpha + 36\epsilon$	$8\lambda + 56\alpha + 37\epsilon$	$8\lambda + 56\alpha + 38\epsilon$	$8\lambda + 56\alpha + 39\epsilon$	$8\lambda + 56\alpha + 40\epsilon$	$8\lambda + 56\alpha + 41\epsilon$
9	$9\lambda + 72\alpha + 43\epsilon$	$9\lambda + 72\alpha + 44\epsilon$	$9\lambda + 72\alpha + 45\epsilon$	$9\lambda + 72\alpha + 46\epsilon$	$9\lambda + 72\alpha + 47\epsilon$	$9\lambda + 72\alpha + 48\epsilon$	$9\lambda + 72\alpha + 49\epsilon$
10	$10\lambda + 90\alpha + 52\epsilon$	$10\lambda + 90\alpha + 53\epsilon$	$10\lambda + 90\alpha + 54\epsilon$	$10\lambda + 90\alpha + 55\epsilon$	$10\lambda + 90\alpha + 56\epsilon$	$10\lambda + 90\alpha + 57\epsilon$	$10\lambda + 90\alpha + 58\epsilon$
11	$11\lambda + 110\alpha + 62\epsilon$	$11\lambda + 110\alpha + 63\epsilon$	$11\lambda + 110\alpha + 64\epsilon$	$11\lambda + 110\alpha + 65\epsilon$	$11\lambda + 110\alpha + 66\epsilon$	$11\lambda + 110\alpha + 67\epsilon$	$11\lambda + 110\alpha + 68\epsilon$
12	$12\lambda + 132\alpha + 73\epsilon$	$12\lambda + 132\alpha + 74\epsilon$	$12\lambda + 132\alpha + 75\epsilon$	$12\lambda + 132\alpha + 76\epsilon$	$12\lambda + 132\alpha + 77\epsilon$	$12\lambda + 132\alpha + 78\epsilon$	$12\lambda + 132\alpha + 79\epsilon$
13	$13\lambda + 156\alpha + 85\epsilon$	$13\lambda + 156\alpha + 86\epsilon$	$13\lambda + 156\alpha + 87\epsilon$	$13\lambda + 156\alpha + 88\epsilon$	$13\lambda + 156\alpha + 89\epsilon$	$13\lambda + 156\alpha + 90\epsilon$	$13\lambda + 156\alpha + 91\epsilon$
14	$14\lambda + 182\alpha + 98\epsilon$	$14\lambda + 182\alpha + 99\epsilon$	$14\lambda + 182\alpha + 100\epsilon$	$14\lambda + 182\alpha + 101\epsilon$	$14\lambda + 182\alpha + 102\epsilon$	$14\lambda + 182\alpha + 103\epsilon$	$14\lambda + 182\alpha + 104\epsilon$
15	$15\lambda + 210\alpha + 112\epsilon$	$15\lambda + 210\alpha + 113\epsilon$	$15\lambda + 210\alpha + 114\epsilon$	$15\lambda + 210\alpha + 115\epsilon$	$15\lambda + 210\alpha + 116\epsilon$	$15\lambda + 210\alpha + 117\epsilon$	$15\lambda + 210\alpha + 118\epsilon$
16	$16\lambda + 240\alpha + 127\epsilon$	$16\lambda + 240\alpha + 128\epsilon$	$16\lambda + 240\alpha + 129\epsilon$	$16\lambda + 240\alpha + 130\epsilon$	$16\lambda + 240\alpha + 131\epsilon$	$16\lambda + 240\alpha + 132\epsilon$	$16\lambda + 240\alpha + 133\epsilon$
17	$17\lambda + 272\alpha + 143\epsilon$	$17\lambda + 272\alpha + 144\epsilon$	$17\lambda + 272\alpha + 145\epsilon$	$17\lambda + 272\alpha + 146\epsilon$	$17\lambda + 272\alpha + 147\epsilon$	$17\lambda + 272\alpha + 148\epsilon$	$17\lambda + 272\alpha + 149\epsilon$
18	$18\lambda + 306\alpha + 160\epsilon$	$18\lambda + 306\alpha + 161\epsilon$	$18\lambda + 306\alpha + 162\epsilon$	$18\lambda + 306\alpha + 163\epsilon$	$18\lambda + 306\alpha + 164\epsilon$	$18\lambda + 306\alpha + 165\epsilon$	$18\lambda + 306\alpha + 166\epsilon$
19	$19\lambda + 342\alpha + 178\epsilon$	$19\lambda + 342\alpha + 179\epsilon$	$19\lambda + 342\alpha + 180\epsilon$	$19\lambda + 342\alpha + 181\epsilon$	$19\lambda + 342\alpha + 182\epsilon$	$19\lambda + 342\alpha + 183\epsilon$	$19\lambda + 342\alpha + 184\epsilon$
20	$20\lambda + 380\alpha + 197\epsilon$	$20\lambda + 380\alpha + 198\epsilon$	$20\lambda + 380\alpha + 199\epsilon$	$20\lambda + 380\alpha + 200\epsilon$	$20\lambda + 380\alpha + 201\epsilon$	$20\lambda + 380\alpha + 202\epsilon$	$20\lambda + 380\alpha + 203\epsilon$

Tableau A.6  $\omega_{i,j}$  pour  $0 \leq i \leq 20$  et  $14 \leq j \leq 20$

$i \setminus j$	14	15	16	17	18	19	20
0	$14\epsilon$	$15\epsilon$	$16\epsilon$	$17\epsilon$	$18\epsilon$	$19\epsilon$	$20\epsilon$
1	$\lambda + 14\epsilon$	$\lambda + 15\epsilon$	$\lambda + 16\epsilon$	$\lambda + 17\epsilon$	$\lambda + 18\epsilon$	$\lambda + 19\epsilon$	$\lambda + 20\epsilon$
2	$2\lambda + 2\alpha + 15\epsilon$	$2\lambda + 2\alpha + 16\epsilon$	$2\lambda + 2\alpha + 17\epsilon$	$2\lambda + 2\alpha + 18\epsilon$	$2\lambda + 2\alpha + 19\epsilon$	$2\lambda + 2\alpha + 20\epsilon$	$2\lambda + 2\alpha + 21\epsilon$
3	$3\lambda + 6\alpha + 17\epsilon$	$3\lambda + 6\alpha + 18\epsilon$	$3\lambda + 6\alpha + 19\epsilon$	$3\lambda + 6\alpha + 20\epsilon$	$3\lambda + 6\alpha + 21\epsilon$	$3\lambda + 6\alpha + 22\epsilon$	$3\lambda + 6\alpha + 23\epsilon$
4	$4\lambda + 12\alpha + 20\epsilon$	$4\lambda + 12\alpha + 21\epsilon$	$4\lambda + 12\alpha + 22\epsilon$	$4\lambda + 12\alpha + 23\epsilon$	$4\lambda + 12\alpha + 24\epsilon$	$4\lambda + 12\alpha + 25\epsilon$	$4\lambda + 12\alpha + 26\epsilon$
5	$5\lambda + 20\alpha + 24\epsilon$	$5\lambda + 20\alpha + 25\epsilon$	$5\lambda + 20\alpha + 26\epsilon$	$5\lambda + 20\alpha + 27\epsilon$	$5\lambda + 20\alpha + 28\epsilon$	$5\lambda + 20\alpha + 29\epsilon$	$5\lambda + 20\alpha + 30\epsilon$
6	$6\lambda + 30\alpha + 29\epsilon$	$6\lambda + 30\alpha + 30\epsilon$	$6\lambda + 30\alpha + 31\epsilon$	$6\lambda + 30\alpha + 32\epsilon$	$6\lambda + 30\alpha + 33\epsilon$	$6\lambda + 30\alpha + 34\epsilon$	$6\lambda + 30\alpha + 35\epsilon$
7	$7\lambda + 42\alpha + 35\epsilon$	$7\lambda + 42\alpha + 36\epsilon$	$7\lambda + 42\alpha + 37\epsilon$	$7\lambda + 42\alpha + 38\epsilon$	$7\lambda + 42\alpha + 39\epsilon$	$7\lambda + 42\alpha + 40\epsilon$	$7\lambda + 42\alpha + 41\epsilon$
8	$8\lambda + 56\alpha + 42\epsilon$	$8\lambda + 56\alpha + 43\epsilon$	$8\lambda + 56\alpha + 44\epsilon$	$8\lambda + 56\alpha + 45\epsilon$	$8\lambda + 56\alpha + 46\epsilon$	$8\lambda + 56\alpha + 47\epsilon$	$8\lambda + 56\alpha + 48\epsilon$
9	$9\lambda + 72\alpha + 50\epsilon$	$9\lambda + 72\alpha + 51\epsilon$	$9\lambda + 72\alpha + 52\epsilon$	$9\lambda + 72\alpha + 53\epsilon$	$9\lambda + 72\alpha + 54\epsilon$	$9\lambda + 72\alpha + 55\epsilon$	$9\lambda + 72\alpha + 56\epsilon$
10	$10\lambda + 90\alpha + 59\epsilon$	$10\lambda + 90\alpha + 60\epsilon$	$10\lambda + 90\alpha + 61\epsilon$	$10\lambda + 90\alpha + 62\epsilon$	$10\lambda + 90\alpha + 63\epsilon$	$10\lambda + 90\alpha + 64\epsilon$	$10\lambda + 90\alpha + 65\epsilon$
11	$11\lambda + 110\alpha + 69\epsilon$	$11\lambda + 110\alpha + 70\epsilon$	$11\lambda + 110\alpha + 71\epsilon$	$11\lambda + 110\alpha + 72\epsilon$	$11\lambda + 110\alpha + 73\epsilon$	$11\lambda + 110\alpha + 74\epsilon$	$11\lambda + 110\alpha + 75\epsilon$
12	$12\lambda + 132\alpha + 80\epsilon$	$12\lambda + 132\alpha + 81\epsilon$	$12\lambda + 132\alpha + 82\epsilon$	$12\lambda + 132\alpha + 83\epsilon$	$12\lambda + 132\alpha + 84\epsilon$	$12\lambda + 132\alpha + 85\epsilon$	$12\lambda + 132\alpha + 86\epsilon$
13	$13\lambda + 156\alpha + 92\epsilon$	$13\lambda + 156\alpha + 93\epsilon$	$13\lambda + 156\alpha + 94\epsilon$	$13\lambda + 156\alpha + 95\epsilon$	$13\lambda + 156\alpha + 96\epsilon$	$13\lambda + 156\alpha + 97\epsilon$	$13\lambda + 156\alpha + 98\epsilon$
14	$14\lambda + 182\alpha + 105\epsilon$	$14\lambda + 182\alpha + 106\epsilon$	$14\lambda + 182\alpha + 107\epsilon$	$14\lambda + 182\alpha + 108\epsilon$	$14\lambda + 182\alpha + 109\epsilon$	$14\lambda + 182\alpha + 110\epsilon$	$14\lambda + 182\alpha + 111\epsilon$
15	$15\lambda + 210\alpha + 119\epsilon$	$15\lambda + 210\alpha + 120\epsilon$	$15\lambda + 210\alpha + 121\epsilon$	$15\lambda + 210\alpha + 122\epsilon$	$15\lambda + 210\alpha + 123\epsilon$	$15\lambda + 210\alpha + 124\epsilon$	$15\lambda + 210\alpha + 125\epsilon$
16	$16\lambda + 240\alpha + 134\epsilon$	$16\lambda + 240\alpha + 135\epsilon$	$16\lambda + 240\alpha + 136\epsilon$	$16\lambda + 240\alpha + 137\epsilon$	$16\lambda + 240\alpha + 138\epsilon$	$16\lambda + 240\alpha + 139\epsilon$	$16\lambda + 240\alpha + 140\epsilon$
17	$17\lambda + 272\alpha + 150\epsilon$	$17\lambda + 272\alpha + 151\epsilon$	$17\lambda + 272\alpha + 152\epsilon$	$17\lambda + 272\alpha + 153\epsilon$	$17\lambda + 272\alpha + 154\epsilon$	$17\lambda + 272\alpha + 155\epsilon$	$17\lambda + 272\alpha + 156\epsilon$
18	$18\lambda + 306\alpha + 167\epsilon$	$18\lambda + 306\alpha + 168\epsilon$	$18\lambda + 306\alpha + 169\epsilon$	$18\lambda + 306\alpha + 170\epsilon$	$18\lambda + 306\alpha + 171\epsilon$	$18\lambda + 306\alpha + 172\epsilon$	$18\lambda + 306\alpha + 173\epsilon$
19	$19\lambda + 342\alpha + 185\epsilon$	$19\lambda + 342\alpha + 186\epsilon$	$19\lambda + 342\alpha + 187\epsilon$	$19\lambda + 342\alpha + 188\epsilon$	$19\lambda + 342\alpha + 189\epsilon$	$19\lambda + 342\alpha + 190\epsilon$	$19\lambda + 342\alpha + 191\epsilon$
20	$20\lambda + 380\alpha + 204\epsilon$	$20\lambda + 380\alpha + 205\epsilon$	$20\lambda + 380\alpha + 206\epsilon$	$20\lambda + 380\alpha + 207\epsilon$	$20\lambda + 380\alpha + 208\epsilon$	$20\lambda + 380\alpha + 209\epsilon$	$20\lambda + 380\alpha + 300\epsilon$

## APPENDICE B

### QUELQUES PROGRAMMES *MAPLE*

**Programme 1: Calcul non récursif de  $c_p$**

```
> cp:= proc(p)
>   local expr, co:
>   if p=-1 then 0:
>   else p!*coeff(series(exp(-(x+x**2/2))/(1-x),x=0,p+1),x,p);
>   fi:
> end:
```

**Programme 2: Calcul récursif de  $c_p$**

```
> cp:= proc(p)
>   local c,i:
>   c[0]:= 1: c[1]:= 0: c[2]:= 0:
>   for i from 1 to p do
>     c[i]:= (i-1)*c[i-1]+(i-1)*(i-2)*c[i-3];
>   od:
>   c[p];
> end:
```

**Programme 3: Calcul de  $\begin{bmatrix} k \\ n \end{bmatrix}_R$**

```

> kn:= proc(k,n,r,alpha,epsilon,lambda)
>   local i, j, p, val,expr:
>   val:=0:
>   for i from 0 to n do
>     for j from 0 to n do
>       for p from 0 to n do
>         if (i+2*j+p=n) then
>           if p>0 then
>             val:= val + rk(k,omega(i,j,alpha,epsilon,lambda),r)*
(cp(p)/p!-cp(p-1)/(p-1)!)/(i!*2**j*j!);
>           elif p=0 then
>             val:= val + rk(k,omega(i,j,alpha,epsilon,lambda),r)*(cp(p)/p!)/(i!*2**j*j!);
>           fi:
>         fi:
>       od:
>     od:
>   od:
>   od:
>   val;
> end:

```

**Programme 4: Calcul de  $\omega_{i,j}$**

```

> omega:= proc(i,j,alpha,epsilon,lambda)
>   lambda*i +(2*alpha+epsilon)*i*(i-1)/2 + epsilon*j:
> end:

```



**Programmes 5: Calcul de  $r_k(t)$** 

```

> rk:= proc (k,t,r)
>   coeff(series(r**t,y,2*k),y,k):
> end:

```

**Programme 6: Calcul non récursif de  $w_k^*(x)$** 

```

> wstar:= proc(k,r,alpha,epsilon, lambda)
>   sum(kn(k,n,r,alpha,epsilon,lambda)*x**n, n=0..2*k):
> end:

```

**Programme 7: Calcul des suites  $(w_k^*(1))_{k \geq 0}$** 

```

> suite:= proc(kmax,r,alpha,epsilon,lambda)
>   local val, i:
>   val:= []:
>   for i from 0 to kmax do
>     val:= [op(val),subs(x=1,wstar(i,r,alpha,epsilon,lambda))]:
>   od:
>   val;
> end:

```

**Programme 8: Calcul de la série génératrice de l'espèce des ensembles mod  $k$** 

```

>serieGen:= proc(k)
>   evalc(sum(exp(1)** (( exp(1)**(2*Pi*I/k) ) **j *y ),j=0..k-1))/k;
> end:

```

**Programme 9: Calcul récursif de  $w_k^*(x)$** 

```

> calcule := proc(orienté, boucles)
>   local a, b, c, sR, eR, rho, sigma, k;
>   global R, kmax, x, y, qStar, h ;
>   sR := expand(series(R/diff(R,y), y, kmax+1));
>   eR := expand(series(exp(x**2*(R-1)/2), y, kmax+1));
>   for k from 0 to kmax do
>     rho[k] := k!*coeff(sR, y, k);
>     sigma[k] := k!*coeff(eR, y, k)
>   od:
>   if not orienté and not boucles then a := x**2/2: b := x**2: c := x**2/2
>   elif not orienté and boucles then a := (x**2+2*x)/2: b := x**2+x: c := x**2/2
>   elif orienté and not boucles then a := x**2: b := 2*x**2: c := x**2
>   elif orienté and boucles then a := x**2+x: b := 2*x**2+x: c := x**2
>   fi;
>   h[0] := 1;
>   for k from 0 to kmax-1 do
>     h[k+1] := expand((a*h[k]+b*diff(h[k],x)+c*diff(h[k],x,x) -
sum('binomial(k,i)*rho[i]*h[k+1-i]', 'i'=1..k))/rho[0])
>   od;
>   if not orienté then
>     for k from 0 to kmax do
>       qStar[k] := expand(sum('binomial(k,i)*sigma[i]*h[k-i]', 'i'=0..k))
>     od
>   else;
>     for k from 0 to kmax do
>       qStar[k] := h[k]
>     od;
>   fi;

```

> end:

**Programme 10: Affichage des polynômes  $w_k^*$  obtenus par la procédure *Calculer***

```
> poids := proc(orienté, boucles)
>   local k;
>   global x;
>   calculer(orienté, boucles);
>   for k from 0 to kmax do
>     print(series(qStar[k], x, 2*kmax+1))
>   od;
> end:
```

**Programme 11: Affichage des suites de nombres  $(w_k^*(1))_{k \geq 0}$  obtenues par la procédure *Calculer***

```
> nombres :=proc(orienté, boucles)
>   local k;
>   global x;
>   calculer(orienté, boucles);
>   seq(subs(x=1, qStar[k]), k=0..kmax)
> end:
```

## RÉFÉRENCES

- Bergeron, François, Gilbert Labelle et Pierre Leroux. 1994. *Théorie des espèces et combinatoire des structures arborescentes*. Coll. «Publications du LACIM», vol. 19, Montréal: LACIM.
- Blasiak, Pawel, Karol A. Penson et Allan I. Solomon. 2003. «The boson normal ordering problem and generalized bell numbers». *Annals of Combinatorics*, no 7, p.127-139.
- Cameron, Peter J. 2000. «Sequences realized by oligomorphic permutation groups». *Journal of Integer Sequences*, vol. 3, art. 00.1.5.
- Char, Bruce W., Keith O. Geddes, Gaston H. Gonnet, Benton L. Leong, Michael B. Monagan et Stephen M. Watt. 1991. *MAPLE V Language Reference Manual*. New-York: Springer-Verlag.
- Comtet, Louis. 1968. «Birecouvremets et birevêtements d'un ensemble fini». *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*, 3, p. 137-152.
- Deutsch, Emeric. Mai 2004. Communication électronique à Gilbert Labelle.
- Harary, Frank et Edgar M. Palmer. 1973. *Graphical enumeration*. New-York: Academic Press.
- Hanlon, P. et Robert W. Robinson. 1982. «Counting bridgeless graphs». *Journal of combinatorial theory*, Series B33, p. 276-305.
- Joyal, André. 1981. «Une théorie combinatoire des séries formelles». *Advances in Mathematics*, vol. 42, no 1, p. 1-82.
- Labelle, Gilbert. 1981. «Une nouvelle démonstration combinatoire des formules d'inversion de Lagrange». *Advances in Mathematics*, vol. 42, no 3, p. 217-247.
- Labelle, Gilbert. 1993. «Sur la symétrie et l'asymétrie des structures combinatoires». *Theoretical Computer Science*, 117, p. 3-22.
- Labelle, Gilbert. 2000. «Counting enriched multigraphs according to the number of their edges (or arcs)». *Discrete mathematics*, 217, p. 237-248.
- Labelle, Jacques. 1983. «Applications diverses de la théorie combinatoire des espèces de structures». *Annales des sciences mathématiques du Québec* vol. 7, no 1, p. 59-94.

- Pólya, George et Ronald C. Read. 1987. *Combinatorial enumeration of groups, graphs and chemical compounds*. New-York: Springer-Verlag.
- Rota, Gian-Carlo, D. Kahaner et Andrew M. Odlyzko. 1973. «On the foundations of combinatorial theory: VIII. Finite operator calculus.» *Journal mathematical analysis and applications*, Academic Press 42 (3), p. 684-760.
- Sloane, Neil J. A. et Simon Plouffe. 1995. *The encyclopedia of integer sequences*. New-York: Academic Press.
- Sloane, Neil J. A. et Simon Plouffe. 2004. *The encyclopedia of integer sequences*. Sur le site internet: <http://www.research.att.com/~njas/sequences/index.html>.