

Manipulations par le calcul formel de représentations implicites de suites et fonctions spéciales

Frédéric Chyzak

INRIA-Rocquencourt, B.P. 105, F-78153 Le Chesnay Cedex, France

Frederic.Chyzak@inria.fr

Résumé

Une grande classe de fonctions spéciales et de suites combinatoires d'entiers qui sont représentées sous forme implicite par des systèmes d'équations fonctionnelles linéaires est sujette à un traitement par des méthodes de calcul formel. Les applications en sont la simplification d'expressions en termes de fonctions et suites spéciales, l'évaluation d'intégrales et de sommes paramétrées, les développements en série et asymptotiques, et la preuve automatique d'identités. La classe considérée jouit de nombreuses propriétés de clôture qui ont été étudiée depuis le début des années 1990 et qui ont récemment été transcrites en algorithmes. L'approche est la suivante. Pour prendre en compte un type d'opérateurs linéaires généraux, une classe d'algèbres de polynômes multivariés non commutatifs est introduite, à savoir les algèbres de Ore. Dans ce cadre, les fonctions spéciales et les suites combinatoires sont vues comme les zéros d'idéaux à gauche particuliers des algèbres de Ore. Des algorithmes pour la manipulation des fonctions et suites spéciales font alors appel à de l'élimination polynomiale dans ces algèbres d'opérateurs linéaires, pour lesquels des méthodes de bases de Gröbner non commutatives ont été développées.

Abstract

A large class of special functions and integer combinatorial sequences that are implicitly represented by systems of linear functional equations is amenable to computer algebra methods. Applications are the simplification of expressions in special functions and sequences, the evaluation of parametrized integrals and sums, series and asymptotic expansions, and the automatic proof of identities. The class under consideration enjoys numerous closure properties that have been studied since the beginning of the 1990's and recently been turned into algorithms. The approach is as follows In order to accomodate linear operators of a general type, like linear differential and linear finite difference operators, a class of algebras of multivariate skew polynomials is introduced, namely Ore algebras. In this framework, special functions and combinatorial sequences are viewed as the zeroes of special left ideals in Ore algebras. Algorithms to manipulate special functions and sequences then appeal to polynomial elimination in those algebras of linear operators, for which methods of non-commutative Gröbner bases have been developed.

Notations

	$P_n(z)$	polynômes orthogonaux de Legendre	
$Ci(z)$	cosinus intégral $\int_0^z \frac{\cos t}{t} dt$	$P_n^{(\alpha,\beta)}(z)$	polynômes orthogonaux de Jacobi
F_n	nombres de Fibonacci	$T_n(z)$	polynômes orthogonaux de Tchebychev
H_n	nombres harmoniques $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$	$J_n(z)$	fonctions de Bessel de première espèce
$H_n(z)$	polynômes orthogonaux de Hermite	$Y_n(z)$	fonctions de Bessel de seconde espèce

$I_n(z)$	fonctions de Bessel modifiée de première espèce
$K_n(z)$	fonctions de Bessel modifiée de seconde espèce
$(x; q)_n$	symbole de Pochhammer $\prod_{k=0}^{n-1} (1 - q^k x)$
$r_n(a, b; q)$	polynômes q -orthogonaux de Rogers-Szegő
$E(k)$	intégrale elliptique complète de première espèce
$K(k)$	intégrale elliptique complète de seconde espèce
$\zeta(s)$	fonction zêta de Riemann $\sum_{n \geq 1} n^{-s}$

Introduction

Un grand nombre de suites et de fonctions intervenant dans des domaines variés des mathématiques, de la physique mathématique et des sciences de l'ingénieur sont régies par des *équations fonctionnelles linéaires*. Au début des années 1990, Zeilberger a introduit un cadre mathématique adapté à l'étude d'une large classe d'objets de ce type, les *fonctions holonomes* [1]. Il s'agit là de fonctions d'une ou de plusieurs variables qui sont solutions de systèmes d'équations différentielles ou de récurrence linéaires à coefficients polynomiaux et qui vérifient une *propriété d'élimination* donnant lieu entre autres applications à des algorithmes symboliques pour le calcul de sommes et d'intégrales paramétrés.

Par ailleurs, nous avons avec Salvy introduit un cadre dual et complémentaire de fonctions solutions de systèmes fonctionnels linéaires et qui vérifient une *propriété de finitude*, les *fonctions ∂ -finies* [2, 3]. De par cette propriété, les fonctions ∂ -finies se trouvent complètement déterminées par un nombre fini d'équations et par un nombre fini de conditions initiales. Les calculs sur ces objets sont encore effectifs et leurs propriétés essentielles décidables. En particulier, des propriétés de clôtures des fonctions ∂ -finies par addition, multiplication et quelques types de substitutions rendent possible la construction d'équations vérifiées par une fonction à partir des systèmes d'équations connues pour des fonctions plus simples, tous les calculs ayant lieu dans des espaces vectoriels de dimension finie. Ce procédé permet la simplification algorithmique par le calcul formel d'expressions en termes de suites et fonctions spéciales, ainsi que leur

test d'équivalence (test à zéro). L'emploi conjugué des deux types de méthodes — la méthode holonome et la méthode ∂ -finie — permet *la preuve et le calcul automatique d'identités sommatoires et intégrales*.

Les sources de problèmes qui, dans leur modélisation, font intervenir des identités entre suites ou fonctions holonomes ou ∂ -finies sont multiples: la combinatoire, qui fournit des problèmes de nature récursive et avec des contraintes d'ordre; de nombreux problèmes physiques, notamment ceux à symétrie cylindrique ou sphérique; la physique statistique, ainsi que les problèmes de q -calcul et l'analyse d'algorithmes du type « diviser pour régner ». L'étude des fonctions holonomes et des fonctions ∂ -finies est d'autant plus motivée par la fréquence élevée de leur intervention en combinatoire et en théorie des fonctions spéciales. À ce titre, plus de 70% des suites et fonctions du formulaire édité par Abramovitz and Stegun [4], plus d'un quart des suites de l'*Encyclopedia of Integer Sequences* par Sloane et Plouffe [5, 6], ou encore la moitié des suites et fonctions traitées dans le *Bateman Project* d'Erdélyi [7] sont à la fois holonomes et ∂ -finies.

Un cas particulier est celui d'une seule variable, où les concepts d'holonomie et de ∂ -finitude coïncident. Les équations linéaires obtenues par les opérations de clôture peuvent alors être exploitées par de nombreux algorithmes. Par exemple, on obtient un calcul efficace de développements en série de fonctions holonomes univariées ou d'estimateurs asymptotiques pour des objets en liaison avec des fonctions ou suites holonomes. Pour les fonctions algébriques, la recherche d'un opérateur différentiel annulateur est le meilleur algorithme connu de calcul de développement en série à ordre élevé. Dans ce cadre univarié, la bibliothèque *Gfun* [8] pour le logiciel de calcul formel *Maple* fournit des procédures pour la construction d'opérateurs différentiels ou de récurrence vérifiés par des suites ou fonctions holonomes. Il permet la preuve d'identités mathématiques, telle par exemple l'identité de Cassini sur les nombres de Fibonacci

$$F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2 = (-1)^n.$$

Pour la preuve automatique, on calcule une équation de récurrence satisfaite par le membre gauche à partir de l'équation

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

vérifiée par les nombres de Fibonacci. Le type de preuve pour lequel *Gfun* fournit des outils consiste :

Opérateur ∂	$\sigma(a)$	$\delta(a)$	Commutation	Action de ∂	
dérivation	$a(x)$	$a'(x)$	$\partial x = x\partial + 1$	$f(x) \mapsto f'(x)$	
décalage	$a(x+1)$	0	$\partial x = (x+1)\partial$	$f(x) \mapsto f(x+1)$	
différence finie	$a(x+1)$	$a(x+1) - a(x)$	$\partial x = (x+1)\partial + 1$	$f(x) \mapsto f(x+1) - f(x)$	
q -dilatation	$a(qx)$	0	$\partial x = qx\partial$	$f(x) \mapsto f(qx)$	
q -différence continue	$a(qx)$	$a(qx) - a(x)$	$\partial x = qx\partial + (q-1)x$	$f(x) \mapsto f(qx) - f(x)$	
q -dérivation	$a(qx)$	$\frac{a(qx)-a(x)}{(q-1)x}$	$\partial x = qx\partial + 1$	$f(x) \mapsto \frac{f(qx)-f(x)}{(q-1)x}$	
q -décalage	$a(qx)$	0	$\partial x = qx\partial$	$f(n) \mapsto f(n+1)$	$x = q^n$
q -différence discrète	$a(qx)$	$a(qx) - q(x)$	$\partial x = qx\partial + (q-1)x$	$f(n) \mapsto f(n+1) - f(n)$	$x = q^n$
opérateur d'Euler	$a(x)$	$xa'(x)$	$\partial x = x\partial + x$	$f(x) \mapsto xf'(x)$	
e^t -dérivation	$a(x)$	$xa'(x)$	$\partial x = x\partial + x$	$f(t) \mapsto f'(t)$	$x = e^t$
opérateur de Mahler	$a(x^p)$	0	$\partial x = x^p\partial$	$f(x) \mapsto f(x^p)$	$p \geq 2$
opérateur de Frobenius	$a(x^p)$	0	$\partial x = x^p\partial$	$f(x) \mapsto f(x)^p$	$p \geq 2$
différence divisée	$a(\xi)$	$\frac{a(x)-a(\xi)}{x-\xi}$	$\partial x = \xi\partial + 1$	$f(x) \mapsto \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$	$\xi \in \mathbb{K}$

Tableau 1: Exemples de polynômes tordus

- à récrire les décalées successives du membre gauche h_n en fonction d'un nombre *fini* de fonctions de base, ici F_n et F_{n+1} :

$$\begin{aligned}
h_n &= F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2 \\
&= F_n^2 + F_nF_{n+1} - F_{n+1}^2, \\
h_{n+1} &= F_{n+1}^2 + F_{n+1}F_{n+2} - F_{n+2}^2 \\
&= F_{n+1}^2 - F_{n+1}F_n - F_n^2,
\end{aligned}$$

- à chercher des combinaisons linéaires entre ces formes réduites. Ici, on obtient $h_{n+1} = -h_n$.

Il ne reste plus alors qu'à s'assurer que $(-1)^n$ vérifie aussi cette récurrence en montrant qu'un nombre (*fini*) de conditions initiales coïncident (ici 1).

Ce type de calculs s'étend aux suites et fonctions ∂ -finies de plusieurs variables et constitue un premier volet de notre étude. Mais le cas des fonctions holonomes de plusieurs variables permet des opérations plus intéressantes. En effet, le caractère holonome se préserve par spécialisation, par sommation et intégration définie et indéfinie, par calcul de séries génératrices et prise de coefficients, par diagonalisation de séries. La théorie et l'algorithmique correspondantes sont cependant plus difficiles. Wilf and Zeilberger [9] ont donné des algorithmes efficaces pour certaines de ces opérations dans les cas *hypergéométrique*, *hyperexponentiel* et *q -hypergéométrique*, aujourd'hui bien décrits dans le livre [10]. Les suites et fonctions manipulées sont alors annulés par des équations linéaires d'ordre 1, de récurrence, différentielles ou de q -récurrence. Takayama [11, 12] a em-

ployé des calculs de bases de Gröbner d'idéaux d'opérateurs différentiels, de différence et de q -différence pour l'algorithmisation du cas holonome général. Il a, au moins partiellement, implanté la méthode dans ses programmes *Kan* et *Macaulay for D-modules*.

Comme l'a démontré la bibliothèque *Gfun* dans le cas d'une seule variable, la manipulation d'équations linéaires fonctionnelles, différentielles ou de récurrences, a grandement profité de la similitude de forme entre les divers algorithmes ainsi que de l'utilisation du cadre algébrique des *polynômes tordus* [13]. Ces derniers sont une représentation polynomiale des opérateurs linéaires par des polynômes non commutatifs en une indéterminée ∂ et à coefficients dans une algèbre \mathbb{A} sur un corps \mathbb{K} — le plus souvent, un anneau de polynômes $\mathbb{K}[x]$ ou un corps de fractions rationnelles $\mathbb{K}(x)$ — et régis par une règle de commutation du type

$$\partial a = \sigma(a)\partial + \delta(a)$$

pour a dans \mathbb{A} . Pour la définition d'une algèbre associative, on impose ici que σ soit un endomorphisme de l'anneau \mathbb{A} et que δ soit une σ -dérivation, c'est-à-dire un endomorphisme de l'espace vectoriel \mathbb{A} sur \mathbb{K} agissant sur les produits par la règle de Leibniz tordue

$$\delta(ab) = \sigma(a)\delta(b) + \delta(a)b.$$

Cette règle étend le cas des dérivations, obtenues quand σ est l'identité, celui des opérateurs à différences, obtenus lorsque $\delta = \sigma - 1$ (où 1 désigne l'identité), et celui des polynômes commutatifs usuels, lorsque

$\sigma = 1$ et $\delta = 0$. La Table 1 donne une liste d'exemples importants pour lesquels ∂ s'interprète comme un opérateur classique. Dans tous ces exemples, l'algèbre en question peut être vue comme l'algèbre associative $\mathbb{K}\langle x, \partial; \partial x - \sigma(x)\partial - \delta(x) \rangle$ donnée par générateurs et relations. L'objet q de certaines commutations de la table est un élément fixé de l'anneau de coefficients \mathbb{K} ; il est supposé non nul et autre qu'une racine de l'unité. L'action correspondante sur une fonction ou suite f est aussi indiquée dans la table. Dans les applications, nous considérerons souvent aussi l'algèbre

$$\mathbb{K}(x) \otimes_{\mathbb{K}[x]} \mathbb{K}\langle x, \partial; \partial x - \sigma(x)\partial - \delta(x) \rangle$$

obtenue par extension des coefficients au corps des fractions rationnelles.

Le but essentiel de ce travail est de fournir des algorithmes pour l'holonomie multivariée. En particulier, nos algorithmes [14] visent au calcul automatique, *et sans indication préalable*, des membres droits d'identités telles que celles données en appendice. Plus précisément, il s'agit dans le cas de sommations ou intégrations *indéfinies* d'algorithmes de représentation du membre droit comme combinaison linéaire des dérivées ou décalées du sommante ou intégrant au membre gauche, alors que dans le cas *défini* des algorithmes nouveaux produisent un opérateur linéaire ou un système d'opérateurs linéaires annulant le membre droit. À partir de cette description implicite, la solution est identifiée par l'algorithme de Petkovšek [15] dans le cas de récurrences, par sa variante du q -calcul [16, 17] dans le cas de q -récurrences, ou par des algorithmes propre au cas différentiel [18, 19]. Ce type de calculs permet en particulier la preuve automatique d'identités comme l'identité en sommes multiples (iii) reliée à la preuve d'Apéry de l'irrationalité de $\zeta(3)$, ou comme l'intégrale double (xiii) (voir l'appendice).

Le point fort des méthodes holonome et ∂ -finie est de renoncer à un calcul sur les « formes closes », c'est-à-dire explicites, et de s'appuyer fondamentalement sur les formes implicites que sont les systèmes linéaires. En effet, c'est bien la limitation des systèmes de calcul formels actuels aux formes closes qui explique leur échec en général dans la manipulation des suites et fonctions spéciales et dans la sommation et l'intégration paramétrées. Dans notre cas, bien plus que la recherche de formes closes, l'objectif est de pouvoir continuer à calculer avec la représentation implicite des objets ∂ -finis et holonomes même en l'absence de formes explicites.

L'angle d'attaque est celui des *algèbres de Ore*, une généralisation multivariée adéquate des polynômes tordus permettant une *élimination polynomiale non commutative* par bases de Gröbner ou par une version tordue de l'algorithme d'Euclide [2]. Tout ceci est implanté dans la bibliothèque *Mgfun* de l'auteur, disponible à l'adresse réticulaire

<http://algo.inria.fr/chyzak/mgfun.html>,

et écrit pour le système *Maple*. Grâce à cette implantation, la démonstration de chacune des identités mentionnées plus haut ne requiert pas plus de quelques minutes de calcul sur machine. La méthode holonome a ainsi permis de donner la première preuve automatique d'identités jusqu'à présent inaccessibles par le calcul formel et parfois de retrouver des résultats de recherches récentes. Elle a aussi ouvert la voie à la recherche de nouvelles identités, par exemple en proposant de démontrer une identité tout d'abord conjecturée.

1 Algèbres de Ore et fonctions ∂ -finies

Les *algèbres de Ore* sont une représentation polynomiale *unifiée* des algèbres d'opérateurs linéaires qui généralisent les algèbres d'opérateurs différentiels et de différence finie. Le caractère polynomial de cette représentation sera à la base des méthodes de bases de Gröbner dans les sections suivantes. Nous en rappelons la définition tirée de [2, 3]. Soient \mathbb{K} un corps *commutatif* et \mathbb{A} une algèbre sur \mathbb{K} . Nous appelons l'anneau de polynômes tordus

$$\mathbb{A}[\partial_1; \sigma_1, \delta_1] \cdots [\partial_r; \sigma_r, \delta_r]$$

une *algèbre de Ore* sur \mathbb{K} , notée $\mathbb{A}[\partial; \sigma, \delta]$, lorsque les σ_i et δ_j commutent pour $1 \leq i, j \leq r$ avec $i \neq j$, et vérifient $\sigma_i(\partial_j) = \partial_j$, $\delta_i(\partial_j) = 0$ pour $i > j$. De plus, nous convenons de dire que l'algèbre de Ore est *polynomiale* et de la noter $\mathbb{K}[\mathbf{x}][\partial; \sigma, \delta]$ lorsque \mathbb{A} est un anneau de polynômes commutatifs $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_s]$. De même, le cas d'une algèbre de Ore $\mathbb{Q}(\mathbf{x})[\partial; \sigma, \delta]$ est pris en compte par $\mathbb{A} = \mathbb{Q}(\mathbf{x})$ et $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$.

Remarquons que cette définition n'exige ni que \mathbb{A} soit commutative, ni que les éléments de \mathbb{A} commutent avec les ∂_i . Pour des raisons de commodité, nous désignerons très souvent dans les applications une algèbre de Ore $\mathbb{A}[\partial; \sigma, \delta]$ par la notation itérée d'un anneau de polynômes tordus $\mathbb{A}[\partial_1; \sigma_1, \delta_1] \cdots [\partial_r; \sigma_r, \delta_r]$

sans plus préciser les conditions qui permettent la commutation entre les ∂_i .

Les exemples d'opérateurs donnés en Table 1 peuvent maintenant être combinés dans des algèbres dans lesquelles chaque opérateur agit sur des variables différentes ou non. Par exemple, les polynômes de Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ peuvent être décrits dans l'algèbre

$$\mathbb{A}[S_\alpha; S_\alpha, 0][S_\beta; S_\beta, 0][S_n; S_n, 0][D_x; 1, D_x]$$

sur le corps $\mathbb{A} = \mathbb{Q}(\alpha, \beta, n, x)$ par un système d'équations linéaires différentielles en x et de récurrence en α, β et n .

Des exemples plus compliqués interviennent quand un des ∂_i suit une règle de commutation avec plusieurs des variables x_i . Par exemple dans l'algèbre $\mathbb{Q}(n, q, q^n)[S_n^{(q)}; S_n^{(q)}, 0]$, l'opérateur de q -décalage vérifie la commutation

$$S_n^{(q)} n^i (q^n)^j = q^j (n+1)^i (q^n)^j S_n^{(q)}.$$

Considérons maintenant une algèbre de Ore à coefficients dans un corps de fractions rationnelles,

$$\mathbb{O} = \mathbb{K}(x_1, \dots, x_p)[\partial; \sigma, \delta].$$

Une fonction est ∂ -finie par rapport à \mathbb{O} quand ses « dérivées généralisées »

$$\partial^\alpha \cdot f = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_r^{\alpha_r} \cdot f$$

avec $\alpha_i \in \mathbb{N}$ pour $i = 1, \dots, r$ engendrent un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}(x_1, \dots, x_p)$. Notons que dans cette définition, le symbole « ∂ » n'a aucune relation avec les ∂_i qui engendrent effectivement l'algèbre. Des exemples de fonctions ∂ -finies dans le cas univarié comprennent les séries et suites hypergéométriques ainsi que les solutions de récurrences et équations différentielles linéaires. En plusieurs variables, il devient nécessaire de préciser les opérateurs par rapport auxquels on considère la ∂ -finitude; par exemple, toutes les suites de polynômes orthogonaux sont ∂ -finies par rapport au décalage en leur indice et à la dérivation en leur argument. Comme on le verra plus loin, toutes les suites et fonctions holonomes sont ∂ -finies. Les propriétés de clôture par somme, produit et action des ∂_i se généralisent à ce contexte [2, 3].

2 Idéaux annulateurs et élimination polynomiale

La définition d'une fonction ∂ -finie f exprime que le module $\mathfrak{m} = \mathbb{O} \cdot f$ est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}(x_1, \dots, x_p)$; il admet donc une

base finie. Dans la suite, nous utiliserons souvent la décomposition

$$\mathfrak{m} = \bigoplus_{\alpha \in A} \mathbb{K}(\mathbf{x}) \partial^\alpha \cdot f$$

pour un ensemble fini A de multi-indices; celle-ci est bien adaptée aux calculs envisagés. Désignons par $\text{Ann } f$ l'idéal à gauche constitué des éléments de \mathbb{O} qui annulent f , et appelé *idéal annulateur* de f ; alors le quotient $\mathbb{O}/\text{Ann } f$ est isomorphe à \mathfrak{m} , ce qui fournit une définition purement algébrique de la ∂ -finitude ne faisant pas appel aux fonctions. Un idéal \mathfrak{a} de \mathbb{O} est ainsi appelé ∂ -fini quand \mathbb{O}/\mathfrak{a} est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}(\mathbf{x})$.

La plupart des algorithmes manipulant les fonctions ∂ -finies peuvent être vus comme réalisant une *élimination polynomiale* dans l'idéal annulateur des fonctions à caractériser. L'exemple suivant des polynômes orthogonaux de Legendre $P_n(x)$ illustre une utilisation simple de l'élimination. Vus comme fonction P de (n, x) , ces polynômes sont annulés par le système d'opérateurs linéaires différentiels et de récurrence classiques suivant [7], où D_x représente une dérivation et S_n un décalage :

$$(1-x^2)D_x^2 - 2xD_x + n(n+1), \quad (1a)$$

$$(n+2)S_n^2 - (2n+3)xS_n + (n+1), \quad (1b)$$

$$(1-x^2)D_x S_n + (n+1)xS_n - (n+1). \quad (1c)$$

Ce système est redondant: chacune de ces relations peut être déduite des deux autres. Nous montrons comment *Mgfun* est aisément utilisé pour prouver (1b) à partir de (1a) et (1c). Le calcul consiste à définir l'algèbre de Ore appropriée, un ordre de termes approprié sur les variables, et, comme on le ferait dans le case commutatif, à calculer ensuite une base de Gröbner par rapport à cet ordre.

```
with(Ore_algebra):
A:=skew_algebra(diff=[Dx,x],
  shift=[Sn,n]):
with(Groebner):
T:=termorder(A,plex(Dx,Sn)):
DE:=(1-x^2)*Dx^2-2*x*Dx+n*(n+1):
RDE:=(1-x^2)*Dx*Sn+(n+1)*x*Sn-(n+1):
map(collect,gbasis([DE,RDE],T),
  Sn,factor);
```

$$\begin{aligned} &[(n+2)S_n^2 - x(2n+3)S_n + n+1, \\ &(-n-1)S_n + xn - D_x + x^2 D_x + x] \end{aligned}$$

L'opérateur (1b) à calculer apparaît comme premier élément de cette base. Le même résultat s'obtient par application à (1a) et (1c) de l'algorithme d'Euclide tordu, soit en syntaxe *Mgfun*:

```
RE:=skew_elim(DE,RDE,Dx,A);
```

3 Propriétés de clôtures des fonctions ∂ -finies

Ce qui rend les fonctions ∂ -finies si agréables est qu'il est possible de les manipuler sans référence à aucune « forme close », c'est-à-dire sans en connaître aucune expression explicite. La plupart des calculs peuvent en effet se réaliser directement sur des systèmes de générateurs de leurs idéaux annulateurs. En particulier, des descriptions pour la somme et le produit de fonctions ∂ peuvent être obtenues de cette façon.

En une variable, l'anneau $\mathbb{K}(x)[\partial; \sigma, \delta]$ est euclidien, donc principal [13]. Il est ainsi possible de manipuler les fonctions ∂ -finies univariées tout comme on manipule les nombres algébriques, en utilisant l'algorithme d'Euclide pour calculer des formes normales dans l'espace vectoriel engendré par $1, \partial, \partial^2, \dots, \partial^{d-1}$ où d est le degré d'un opérateur jouant le rôle de polynôme minimal. À leur tour, ces formes normales sont utilisées pour calculer des opérateurs annulateurs pour la somme ou le produit, en calculant dans un espace vectoriel de dimension finie adéquat et en y recherchant des dépendances linéaires par élimination gaussienne. En plusieurs variables, les algèbres de Ore sont noetherienne [20] et une procédure de mise sous forme normale est fournie par une extension de l'algorithme de Buchberger pour le calcul de bases de Gröbner [2, 3]. La stratégie de calcul du cas univarié s'applique encore mais requiert un nouvel ingrédient technique, l'algorithme FGLM [21].

3.1 L'algorithme FGLM

Les bases de Gröbner déjà mentionnées ne sont définies avec unicité qu'après choix d'un *ordre de termes*, c'est-à-dire d'un ordre sur les produits de puissances des indéterminées engendrant l'algèbre. Dans le cas d'anneaux de polynômes commutatifs $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$, le besoin s'est fait sentir de pouvoir calculer efficacement une base de Gröbner pour ordre donné \preceq lorsqu'une base est déjà connue pour un autre ordre. Une solution algorithmique a été donnée par l'algorithme FGLM [21] dans le cas de systèmes algébriques *de dimension*

zéro, c'est-à-dire pour des idéaux $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{K}[\mathbf{x}]$ tels que le quotient $\mathbb{K}[\mathbf{x}]/\mathfrak{a}$ soit un espace vectoriel de dimension finie. Ce cas correspond à une variété algébrique constituée d'un nombre fini de points isolés.

Une adaptation de l'algorithme FGLM a été donnée dans [2, 3] pour permettre le calcul de la description d'une fonction ∂ -finie h par rapport à une algèbre de Ore $\mathbb{O} = \mathbb{K}(\mathbf{x})[\partial; \sigma, \delta]$. De manière informelle, la méthode consiste à considérer tous les multi-indices α dans l'ordre \preceq , à déterminer des dépendances linéaires entre les formes normalisées des $\partial^\alpha \cdot h$ et à s'arrêter lorsque toutes les relations possibles ont été obtenues. Plus précisément, l'algorithme maintient un ensemble F de termes ∂^α restant à considérer, la base en construction L de $\text{Ann } h$ et la base R de $\mathbb{O}/\text{Ann } h$. Le premier est initialisé à $\{1\}$, les deux derniers à $\{\}$. À chaque étape, le plus petit élément t de F pour l'ordre \preceq est extrait de cet ensemble, puis réduit par une procédure de mise sous forme normale N qui sera précisée plus bas dans chaque cadre d'application. Une élimination gaussienne est alors réalisée pour détecter une éventuelle dépendance entre $N(t)$ et les éléments de R . Si aucune dépendance linéaire n'est trouvée, $N(t)$ est adjoint à R et tout les produits $\partial_i t$ à F . Dans le cas contraire, la relation obtenue est adjointe à L . L'algorithme s'arrête lorsque F est vide; il renvoie alors L , qui est une base de Gröbner.

3.2 Somme

Pour deux fonctions ∂ -finies f et g , l'inclusion

$$\partial^\alpha \cdot (f + g) \in \mathbb{O} \cdot f + \mathbb{O} \cdot g$$

découle de la linéarité des opérateurs. L'espace vectoriel $\mathbb{O} \cdot (f + g)$ est donc inclus dans un espace vectoriel de dimension finie et la somme $f + g$ est encore ∂ -finie.

Étant donnés des bases de Gröbner pour les deux idéaux annulateurs $\text{Ann } f$ et $\text{Ann } g$, une base d'un idéal ∂ -fini annihilant la somme est obtenu par l'adaptation de l'algorithme FGLM en employant la mise sous forme normale suivante. Les réductions par chacune des deux bases de Gröbner mentionnées fournissent une procédure N_f de mise sous forme normale dans $\mathbb{O}/\text{Ann } f$ et une procédure N_g de mise sous forme normale dans $\mathbb{O}/\text{Ann } g$. Pour chaque ∂^α , on forme ainsi la somme formelle $N_f(\partial^\alpha) + N_g(\partial^\alpha)$ dans la somme directe $(\mathbb{O}/\text{Ann } f) \oplus (\mathbb{O}/\text{Ann } g)$, qui est la forme normale utilisée.

3.3 Produit

Le cas du produit est similaire, mais rend nécessaire une restriction sur les algèbres considérées : nous supposons que pour chaque $i \in \{1, \dots, r\}$ il existe deux polynômes $A_i(u)$ et $B_i(u)$ à coefficients dans \mathbb{K} tels que $\sigma_i = A_i(\partial_i)$ et $\delta_i = B_i(\partial_i)$, où les produits représentent des compositions, et

$$((A_i - 1) \cdot w)B_i = (B_i \cdot w)(A_i - 1)$$

pour tout $w \in \mathbb{K}(\mathbf{x})$. Ces contraintes ne sont aucune restriction sévère en pratique. Par le même type d'arguments que pour la somme, le produit de deux fonctions ∂ -finies f et g est encore ∂ -fini. En effet, chaque $\partial^\alpha \cdot (fg)$ est dans l'espace vectoriel engendré par les produits d'un élément de $\mathbb{O} \cdot f$ par un élément de $\mathbb{O} \cdot g$. Celui-ci est de dimension finie, comme image surjective du produit tensoriel $(\mathbb{O} \cdot f) \otimes (\mathbb{O} \cdot g)$ qui est de dimension finie. Le produit fg est donc ∂ -fini.

Algorithmiquement, on utilise encore l'adaptation de l'algorithme FGLM indiquée plus haut, en faisant appel à la forme normale $N_f(\partial^\alpha) \otimes N_g(\partial^\alpha)$ dans le produit tensoriel $(\mathbb{O}/\text{Ann } f) \otimes (\mathbb{O}/\text{Ann } g)$. Les contraintes énoncées plus haut sur les algèbres autorisées ne sont là que pour assurer la correction des calculs dans le produit tensoriel.

3.4 Généralisation

La même adaptation de l'algorithme FGLM s'étend en réalité au calcul *direct* d'un système annulateur de toute expression polynomiale en des $\partial^\alpha \cdot f_i$ lorsque sont donnés des système définissant les f_i . En plus d'une efficacité accrue, cette approche directe a le mérite de renvoyer des opérateurs d'ordre inférieur, facilitant encore la poursuite des calculs.

4 Creative telescoping

La principale raison du succès de la théorie des fonctions holonomes de Zeilberger est la possibilité de leur appliquer la méthode du *creative telescoping* : étant donné un sommant à sommer ou un intégrant à intégrer, la connaissance de polynômes annulateurs vérifiant une certaine propriété d'élimination suffit à déterminer une équation fonctionnelle linéaire, le cas échéant un système de telles équations, décrivant la somme ou l'intégrale.

Soit l'algèbre de Ore

$$\mathbb{O} = \mathbb{K}(\mathbf{x})[\mathbf{y}][\boldsymbol{\delta}; \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\delta}][\partial_0; \sigma_0, \delta_0]$$

où \mathbf{x} et \mathbf{y} sont respectivement les indéterminées qui commutent et qui ne commutent pas avec ∂_0 , et supposons que \mathbb{O} agisse sur un espace donné de fonctions des variables (\mathbf{x}, \mathbf{y}) . Nous nous intéressons à calculer un « inverse défini $\partial_{0,\Omega}^{-1}$ » sur le domaine Ω et un « inverse indéfini ∂_0^{-1} ». La notation $\partial_{0,\Omega}^{-1}$ doit ici être vue comme un symbole unique, où Ω ne fait référence à aucun objet mathématique particulier et n'est présent que pour rappeler la notation \int_Ω utilisée pour indiquer une intégration sur un domaine Ω . Pour une fonction f , le « terme de bord » $\partial_{0,\Omega}^{-1} \partial_0 \cdot f$ est aussi noté $[f]_{\partial\Omega}$. Encore une fois, la notation entre crochets et la référence à $\partial_0 \Omega$ n'ont pas de signification formelle précise et ne font que rappeler la notation analogue dans le cas de l'intégration, où $\partial_0 \Omega$ est le bord du domaine Ω . Dans les applications, l'évaluation de $[f]_{\partial\Omega}$ correspondra le plus souvent à calculer récursivement un $\partial_{\Omega'}^{-1}$ plus simple pour un autre opérateur et un autre domaine, ou bien encore une combinaison linéaire de spécialisations « aux bords » de Ω .

Pour permettre une interprétation de l'inverse défini et de l'inverse indéfini de ∂_0 qui comprennent celle des intégrale et sommation définies et indéfinies, nous faisons les hypothèses suivantes :

1. l'inverse indéfini ∂_0^{-1} est un inverse à gauche défini à constante près : $\partial_0^{-1} \partial_0 \cdot f = f + \ker \partial_0$;
2. l'inverse défini $\partial_{0,\Omega}^{-1}$ est à valeur dans les constantes : $\partial_0 \partial_{0,\Omega}^{-1} \cdot f = 0$;
3. l'application $\partial_{0,\Omega}^{-1} \partial_0$ est linéaire à valeur dans les constantes : $\partial_{0,\Omega}^{-1} \partial_0 \cdot f = [f]_{\partial\Omega} \in \ker \partial_0$;
4. l'inverse indéfini ∂_0^{-1} et l'inverse défini $\partial_{0,\Omega}^{-1}$ commutent avec les éléments de $\mathbb{K}(\mathbf{x})[\boldsymbol{\delta}; \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\delta}]$.

Considérons une fonction f ; la méthode du *creative telescoping* repose sur l'existence d'un opérateur annulateur de f de la forme

$$P(\mathbf{x}, \boldsymbol{\delta}) + \partial_0 Q(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\delta}, \partial_0). \quad (2)$$

Le point clé est que la variable \mathbf{y} n'apparaît pas dans les coefficients de P . En évaluant en f et en appliquant le $\partial_{0,\Omega}^{-1}$, on tire alors :

$$P(\mathbf{x}, \boldsymbol{\delta}) \cdot (\partial_{0,\Omega}^{-1} \cdot f)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + [Q(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\delta}, \partial_0) \cdot f]_{\partial_0 \Omega}(\mathbf{x}) = 0. \quad (3)$$

De façon similaire, en évaluant (2) en f et appliquant le ∂_0^{-1} , on obtient

$$P(\mathbf{x}, \boldsymbol{\delta}) \cdot (\partial_0^{-1} \cdot f)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (Q(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\delta}, \partial_0) \cdot f)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0.$$

L'équation (3) est en général inhomogène, au sens où le terme entre crochets n'est en général pas nul. Cependant dans les applications, le modèle du calcul et l'algorithmique utilisée diffèrent sensiblement selon que l'équation correspondante est effectivement homogène ou non. Un cas particulier important est celui où l'on peut prédire la nullité de $[Q \cdot f]_{\partial_0 \Omega}$ et donc prévoir l'homogénéité. Plusieurs algorithmes spécialisés existent pour ce cas dit « à bornes naturelles ».

4.1 Méthode d'élimination naïve

Le développement précédent reste valable si l'on restreint la forme de (2) en imposant que \mathbf{y} n'apparaisse plus non plus dans Q . Cette forme, étant plus contrainte, a tendance à fournir des équations (3) d'ordre plus élevé. Les calculs ont aussi tendance à être moins rapides, mais l'algorithmique qui en découle est plus élémentaire, ce pourquoi nous commençons par elle.

Soit en effet un idéal \mathfrak{a} de l'algèbre de Ore \mathbb{O} , par exemple l'idéal annulateur d'une fonction f . Tout élément de \mathfrak{a} qui ne fait pas intervenir \mathbf{y} fournit une paire (P, Q) telle que $P + \partial_0 Q$ soit la forme restreinte recherchée. Il s'agit donc de déterminer l'idéal

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cap \mathbb{K}[\mathbf{x}][\partial; \sigma, \delta][\partial_0; \sigma_0, \delta_0],$$

résultat de l'élimination polynomiale de \mathbf{y} . Algorithmiquement, il suffit de calculer une base de Gröbner pour un ordre de termes éliminant les \mathbf{y} : sous des conditions peu restrictives sur les σ_i et δ_i , les algèbres de Ore sont noetheriennes et une extension de l'algorithme de Buchberger peut être employée pour le calcul (d'une généralisation non commutative) de bases de Gröbner.

L'idée précédente fournit un premier algorithme naïf pour le creative telescoping, qui peut ainsi se réaliser automatiquement par de l'élimination polynomiale non commutative. Nous développons maintenant deux exemples de tels calculs.

4.2 Calcul automatique de sommes et intégrales paramétrées

L'approche par opérateurs s'applique sans problème à des systèmes linéaires mixtes différentiels et aux différences. À titre d'exemple, nous calculons par creative telescoping un système d'équations différentielles linéaires vérifiées par la fonction génératrice des polynômes orthogonaux de Legendre

$$F(x, y) = \sum_{n \geq 0} P_n(x) y^n.$$

Vus comme fonction P de (n, x) , ces polynômes sont annulés par le système (1). Les étapes à réaliser sont les suivantes :

1. création de l'algèbre de Ore. Ici, $\mathbf{x} = (x, y)$ et $\mathbf{y} = n$:

$$\mathbb{O} = \mathbb{Q}[n, x, y][S_n; S_n, 0][D_x; 1, D_x][D_y; 1, D_y] ;$$

2. détermination d'opérateurs annulant le produit $P_n(x)y^n$ dans \mathbb{O} ;
3. élimination de $\mathbf{y} = n$ de l'idéal engendré par les polynômes (1) ;
4. division à gauche par $S_n - 1$, qui joue le rôle de ∂_0 .

Pour ce dernier point, notons que cet exemple tombe dans le cas homogène où seul est à calculer le polynôme P de (2).

La session *Mgfun* correspondante est la suivante :

```
with(Ore_algebra):
A_rat:=skew_algebra(diff=[Dx,x],
diff=[Dy,y],shift=[Sn,n]):
```

Ceci exprime une algèbre de dérivations par rapports aux deux variables x et y et un opérateur de décalage par rapport à n . En introduisant les trois opérateurs (1a), (1b) et (1c), les fonctions $P_n(x)$ et y^n sont maintenant décrites par :

```
DE:=(1-x^2)*Dx^2-2*x*Dx+n*(n+1):
RDE:=(1-x^2)*Dx*Sn+(n+1)*x*Sn-(n+1):
RE:=(n+2)*Sn^2-x*(2*n+3)*Sn+n+1:
Legendre:=[DE,RDE,RE,Dy]:
y_to_the_n:=[Dx,y*Dy-n,Sn-y]:
```

Les algorithmes pour les clôtures ∂ -finies nécessitent des bases de Gröbner en entrée.

```
with(Groebner):
T_rat:=termorder(A_rat,tdeg(Dx,Dy,Sn)):
Legendre:=gbasis(Legendre,T_rat):
y_to_the_n:=gbasis(y_to_the_n,T_rat):
```

Le calcul du produit est :

```
with(Holonomy):
L_times_yn:=collect(dfinite_mul([
Legendre,T_rat],[y_to_the_n,T_rat]
],T_rat),[Sn,Dx,Dy],distributed,factor):
```


ce qui renvoie :

$$\begin{aligned} \text{L_times_yn} := & [yD_y - n, \\ & (-n-1)S_n + (x-1)(x+1)yD_x + (n+1)xy, \\ & (n+2)S_n^2 - (2n+3)xyS_n + (n+1)y^2] \end{aligned}$$

L'élimination de n envisagée a lieu dans une autre algèbre et pour un autre ordre de termes qu'il convient maintenant de créer.

```
A_elim:=skew_algebra(shift=[Sn,n],
diff=[Dx,x],diff=[Dy,y],
polynom=n):
T_elim:=termorder(A_elim,
lexdeg([n],[Sn,Dx,Dy])):
GB:=gbasis(L_times_yn,T_elim);
```

$$\begin{aligned} \text{GB} := & [-x + D_x - x^2D_x + S_nD_y - xyD_y, \\ & 2xD_x - D_x^2 + x^2D_x^2 - 2yD_y - y^2D_y^2, \\ & -xyD_x - y^2D_y - y + S_nD_x, -yD_y + n] \end{aligned}$$

Pour finir nous sélectionnons ceux des opérateurs de la base qui ne font pas intervenir n ; puis nous sommes sur n , ce qui est équivalent à prendre le reste de la division euclidienne à droite par $S_n - 1$.

```
map(collect,subs(Sn=1,[GB[1],GB[2]]),
[Dx,Dy]);
```

$$\begin{aligned} & [(1-x^2)D_x + (1-xy)D_y - x, \\ & 2xD_x + (-1+x^2)D_x^2 - 2yD_y - y^2D_y^2] \end{aligned}$$

Remarquons qu'un calcul similaire au précédent fonctionne aussi bien pour toute autre famille de polynômes orthogonaux classiques, bien que les résultats intermédiaires deviennent suffisamment gros pour ne pouvoir être reproduits ici. C'est le cas pour les polynômes de Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, annulés par le système linéaire classique suivant [7] :

$$\begin{aligned} & (1-x^2)D_x^2 + (\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x)D_x \\ & \quad + n(n+\alpha+\beta+1), \\ & \lambda_{2n}(1-x^2)S_nD_x - (n+1)(\alpha-\beta-\lambda_{2n}x)S_n \\ & \quad - 2(n+\alpha+1)(n+\beta+1), \\ & 2(n+2)(n+\alpha+\beta+2)\lambda_{2n}S_n^2 \\ & \quad - \lambda_{2n+1}(\lambda_{2n}\lambda_{2n+2}x + (\alpha^2 - \beta^2))S_n \\ & \quad + 2(n+\alpha+1)(n+\beta+1)\lambda_{2n+2}, \end{aligned}$$

pour $\lambda_m = m + \alpha + \beta + 2$. Dans le cas particulier $\alpha = \beta = 0$, ces opérateurs se spécialisent à ceux (1) déjà données pour les polynômes de Legendre $P_n(x) =$

$P_n^{(0,0)}(x)$. Le calcul d'un système annulateur de la série génératrice puis sa résolution symbolique prend alors 17 secondes (sur Dec Alpha DS 3000/400). On retrouve la forme close

$$F(x, y) = \frac{1}{R(1-y+R)^\alpha(1+y+R)^\beta},$$

où $R = \sqrt{1-2xy+y^2}$.

4.3 Preuve automatique d'identités holonomes

Dans [22], V. Strehl a donné plusieurs preuves de l'identité (iii) donnée en appendice. Chacun de ses deux membres exprime donc la même famille de nombres, appelés *nombres d'Apéry*. Ceux interviennent de façon cruciale dans la preuve d'Apéry de l'irrationalité de $\zeta(3)$.

Une preuve automatique de l'identité est la suivante. Le système

$$\begin{cases} (k+1-j)^3S_k - (k+1)^3, \\ (k-j)^3S_j - (j+1)^3, \end{cases}$$

annulateur du cube $\binom{k}{j}^3$, découle aisément de la nature hypergéométrique de celui-ci. Ensuite, par creative telescoping on obtient une équation de récurrence pour la somme sur j :

$$(k+2)^2S_k^2 - (7k^2 + 21k + 16)S_k - 8(k+1)^2.$$

De même, un système annulateur est aisément obtenu pour $\binom{n}{k}\binom{n+k}{k}$, qui est hypergéométrique :

$$\begin{cases} (n+1-k)S_n - (n+1+k), \\ (k+1)^2S_k - (n(n+1) - k(k+1)). \end{cases}$$

Le produit de celui-ci avec l'équation précédemment obtenue fournit un système pour le sommant au membre droit de l'identité (iii) à démontrer. Ce système est constitué de la première équation du système ci-dessus et de l'équation

$$\begin{aligned} & (k+2)^4S_k^2 + (n-k-1)S_k \\ & + (n+k+2)(-15k^2 - 29k + 2(2n+3)(2n-1)). \end{aligned}$$

Ensuite, un nouveau calcul de creative telescoping fournit une équation annulant tout le membre droit de (iii) :

$$(n+2)^3S_n^2 - (2n+3)(17n^2 + 51n + 39)S_n + (n+1)^3. \quad (4)$$

Le même procédé est appliqué au membre gauche. Tout d'abord, $\binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2$ est hypergéométrique et vérifie

$$\begin{cases} (n+1-k)^2 S_n - (n+1+k)^2, \\ (k+1)^4 S_k - (n(n+1) - k(k+1))^2. \end{cases}$$

Ensuite, le creative telescoping fournit (4), la même équation que précédemment. L'identité est ensuite prouvée en s'assurant que deux conditions initiales coïncident. L'ensemble de ces calculs demande moins de 60 secondes (sur Dec Alpha DS 3000/400).

5 Holonomie

Les algorithmes qui s'appuient sur le creative telescoping dépendent de l'existence dans l'idéal manipulé d'un polynôme non nul qui ne fasse pas intervenir une ou plusieurs indéterminées correspondant aux indices de sommation et aux variables d'intégration (voir la forme (2) dans la section précédente). Il est donc très important de travailler dans l'idéal approprié et d'être capable de déterminer quand de tels polynômes existent. Dans les cas des algèbres de Weyl

$$\mathbb{K}\langle x_1, \dots, x_r, \partial_1, \dots, \partial_r; \partial_i x_j = x_j \partial_i + \delta_{i,j} \rangle \quad (5)$$

(où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker), que nous notons $W_r(\mathbb{K})$, et des algèbres du q -calcul

$$\mathbb{K}\langle x_1, \dots, x_r, \tau_1, \dots, \tau_r; \tau_i x_j = q^{\delta_{i,j}} x_j \tau_i \rangle \quad (6)$$

(pour un $q \in \mathbb{K}$ fixé non nul et autre qu'une racine de l'unité), la théorie de l'holonomie fournit une telle garantie. Nous décrivons les éléments de cette théorie et renvoyons à [23, 24, 25] pour une introduction pédagogique plus complète.

5.1 Dimension de Hilbert

Pour une algèbre de Ore polynomiale

$$\mathbb{O} = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_s][\partial_1; \sigma_1, \delta_1] \cdots [\partial_r; \sigma_r, \delta_r],$$

notons $\deg P$ de degré total d'un polynôme $P \in \mathbb{O}$ par rapport à $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\partial})$. Considérons la filtration de \mathbb{O} par ce degré total, c'est-à-dire la famille d'espaces vectoriels \mathcal{F}_n donnés par les éléments de \mathbb{O} de degré au plus n , et, pour une fonction f , le module $\mathcal{F}_n \cdot f$ sur l'algèbre \mathbb{O} . Posons $h_n = \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{F}_n \cdot f)$.

Par exemple, pour la fonction constante $f = 1$ par rapport à l'algèbre \mathbb{O} ci-dessus lorsque chacun des ∂_i annule f , h_n vaut $\binom{n+s}{s}$, soit asymptotiquement $n^s/s!$. Pour $f = \exp x^2$ par rapport

à $\mathbb{K}\langle x, \partial; \partial x = x \partial x + 1 \rangle$ et l'action pour laquelle ∂ est la dérivation par rapport à x , il est facile de calculer les premières valeurs de h_n et de se convaincre que $h_n = n + 1$. Pour $f = (y^3 - y^2 + xy)^{-1/2}$ et

$$\mathbb{K}\langle x, y, \partial_x, \partial_y; \partial_x x = x \partial_x x + 1, \partial_y y = y \partial_y y + 1 \rangle$$

où ∂_x et ∂_y agissent comme les dérivations usuelles par rapports à x et y , les premières valeurs de h_n indiquent que $h_n = 3n^2 + 2$. Pour $f = \exp \sin x$ par rapport à $\mathbb{K}\langle x, \partial; \partial x = x \partial x + 1 \rangle$, on obtient $h_n = n^2/2 + 3n/2 + 1$. Finalement, pour $f = \binom{n}{k}$ et

$$\mathbb{K}\langle n, k, S_n, S_k; S_n n = (n+1)S_n, S_k k = (k+1)S_k \rangle$$

où S_n et S_k représentent les décalages par rapport à n et k , $h_n = 2n + 1$.

Pour une faible restriction de la classe d'algèbres considérées, un théorème général de Hilbert implique la relation asymptotique $h_n \sim cn^d$ pour des entiers c et d . Cette propriété est vérifiée par exemple pour toutes les combinaisons des algèbres du Tableau 1. L'entier d est appelé *dimension de Hilbert* du module $\mathbb{O} \cdot f$. La pertinence de cette notion pour le creative telescoping est de nature combinatoire: si la sous-algèbre \mathbb{S} est obtenue en formant tous les monômes en un nombre q des générateurs $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\partial})$ de \mathbb{O} , alors $\mathcal{F}_n \cap \mathbb{S}$ comprend $\binom{n+q}{q}$ monômes. Dès que ce nombre croît plus rapidement que n^d où d est la dimension de Hilbert du module $\mathbb{O} \cdot f \sim \mathbb{O}/\text{Ann } f$ pour une fonction f donné, alors il doit exister une combinaison linéaire non triviale d'éléments de \mathbb{S} qui s'annule sur f , ce qui signifie que l'idéal $\text{Ann } f$ contient des éléments de \mathbb{S} .

5.2 Cas des opérateurs différentiels

Les algèbres de Weyl données par (5) sont un cas particulier d'algèbres de Ore polynomiales qui représentent le cas où ∂_i est l'opérateur de dérivation par rapport au x_i correspondant. Un théorème fondamental de Bernstein affirme que dans ce cas, la dimension de Hilbert d'un module non nul, en particulier des modules $\mathbb{O} \cdot f$ pour les fonctions f non nulles, est forcément supérieure ou égale au nombre r de dérivations. Les modules de dimension exactement r ainsi que le module nul sont dits *holonomes*. Par extension, tout élément d'un module holonome, par exemple la fonction f engendrant le module $\mathbb{O} \cdot f$, est aussi dit holonome quand le module l'est. Dans les exemples ci-dessus, les fonctions $\exp x^2$ et $(y^3 - y^2 + xy)^{-1/2}$ sont holonomes, alors que $\exp \sin x$ ne l'est pas.

De même que les fonctions ∂ -finies, les fonctions holonomes jouissent d'un certain nombre de clôtures:

l'holonomie des fonctions se conserve par addition et produit ; les fonctions algébriques sont holonomes et un algorithme dû à Comtet permet d'obtenir leurs équations de définition [26] ; la substitution algébrique préserve l'holonomie ; la diagonale $\sum_{n \geq 0} c_{n,n} x^n$ d'une série holonome $\sum_{m,n \geq 0} c_{m,n} x^m y^n$ est holonome [27, 28]. De plus, un résultat dû à Kashiwara relie les notions de ∂ -finitude et d'holonomie : pour tout idéal \mathfrak{a} ∂ -fini par rapport à une algèbre de Ore $\mathbb{K}(\mathbf{x}) \otimes_{\mathbb{K}[\mathbf{x}]} W_r(\mathbb{K})$, le module quotient de l'algèbre de Weyl $W_r(\mathbb{K})$ par la partie $\mathfrak{a} \cap W_r(\mathbb{K})$ de l'idéal ∂ -fini dans cet algèbre est holonome. Cela signifie que, *dans le cas différentiel*, toute fonction ∂ -finie est aussi holonome. Enfin, le creative telescoping est toujours possible pour les fonctions holonomes, au sens où l'existence d'un opérateur éliminé de la forme (2) est garantie.

5.3 Cas des récurrences classiques

La théorie de l'holonomie s'étend au cas des opérateurs de récurrence à l'aide d'un isomorphisme d'algèbres adéquat entre l'algèbre obtenue à partir de l'algèbre de Weyl $W_r(\mathbb{K})$ par extension des coefficients aux polynômes de Laurent de $\mathbb{K}[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]$, et l'algèbre d'opérateurs de récurrence linéaires à coefficients polynomiaux autorisant les décalages directs S_i et inverses S_i^{-1} [23]. Cet isomorphisme échange $x_i \partial_i$ et n_i ainsi que x_i et S_i^{-1} . On obtient ainsi une action des algèbres de Weyl sur les suites, d'où la définition naturelle qu'une suite (u_{n_1, \dots, n_r}) est holonome si et seulement si sa série génératrice multivariée

$$\sum_{n_1, \dots, n_r \geq 0} u_{n_1, \dots, n_r} z_1^{n_1} \cdots z_r^{n_r}$$

est holonome en tant que fonction de (z_1, \dots, z_r) — ceci n'est en fait qu'une traduction de la définition précédente des fonctions holonomes pour le cas différentiel. Ainsi, il n'y a pas dans le cas des récurrences identité entre les suites ∂ -finies et les suites holonomes, un contre-exemple simple ∂ -fini mais non holonome étant la suite donnée par $u_{n,m} = 1/(n^2 + m^2)$.

5.4 Cas des q -récurrences

Bien qu'une théorie de l'holonomie existe encore dans le cas des algèbres (6) du q -calcul, son développement est bien plus technique [29] que dans les cadres différentiel et de récurrence classique. Ici encore il n'y a pas dans identité entre les fonctions ∂ -finies

du q -calcul et ses fonctions holonomes, un contre-exemple étant $f(x, y) = 1/(1 - x^2 - y^2)$ pour les opérateurs de q -dilatation $(H_x \cdot f)(x, y) = f(qx, y)$ et $(H_y \cdot f)(x, y) = f(x, qy)$.

5.5 Holonomie et ∂ -finitude

Les algorithmes que nous donnons dans cet article fonctionnent dans un cadre très général d'algèbres de Ore. Cependant, la possibilité du creative telescoping n'est pas garantie *a priori* dans le cas général non holonome. Un avantage de cette approche est de pouvoir renvoyer des résultats dans des cas non holonomes.

Une difficulté importante est que même dans le cas différentiel, les idéaux annulateurs avec lesquels nous travaillons ont une description naturelle dans des algèbres de Ore $\mathbb{K}(\mathbf{x})[\partial; \sigma, \delta]$. Il s'agit donc d'idéaux annulateurs \mathfrak{a} que l'on pourrait qualifier de « rationnels ». Par opposition, il est nécessaire pour le creative telescoping dans sa forme par élimination naïve d'avoir une base de l'idéal annulateur « polynomial » correspondant, c'est-à-dire de l'intersection $\mathfrak{a} \cap \mathbb{K}[\mathbf{x}][\partial; \sigma, \delta]$. À ce jour, il n'y a pas d'algorithme efficace pour produire cette base à partir de l'idéal annulateur rationnel.

Ce problème est bien illustré par le calcul de la diagonale

$$\frac{1}{\sqrt{1-4x}} = \sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} x^n,$$

ici algébrique, de la fraction rationnelle

$$\frac{1}{1-x-y} = \sum_{n \geq k \geq 0} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Celle-ci peut être obtenue par un calcul de résidu en tant qu'intégrale définie sur s de la fonction holonome $f = 1/(s^2 - s + x)$. Ainsi, le creative telescoping s'applique et il existe un opérateur annulateur de f qui ne fait pas intervenir s . L'idéal annulateur $\text{Ann} \cdot f$ dans $\mathbb{K}(s, x)[D_s; 1, D_s][D_x; 1, D_x]$ est engendré par

$$G = \{(s^2 - s + x)D_s + 2s - 1, (s^2 - s + x)D_x + 1\}.$$

Cependant, l'idéal engendré par G dans l'algèbre de Weyl $\mathbb{O} = \mathbb{K}[s, x][D_s; 1, D_s][D_x; 1, D_x]$ est plus petit que $\text{Ann} f \cap \mathbb{O}$ et ne contient aucun polynôme indépendant de s . En effet, pour obtenir un tel polynôme, il est nécessaire d'augmenter G — en même temps que l'idéal engendré par G —, par exemple par $(s^2 - s + x)D_s D_x + 2D_s$.

6 Algorithme de Takayama

Lorsque certaines conditions analytiques sont remplies, le calcul de P et de Q dans (2) est plus que ce qui est strictement nécessaire. En effet, il n'est pas utile de calculer Q . Ainsi, dans l'exemple de la série génératrice des polynômes de Legendre, nous avons calculé $P + \partial_0 Q$ avant de se débarrasser de Q en faisant $\partial_0 = 0$. Takayama a donné un algorithme pour le calcul restreint à P dans le cas différentiel des algèbres de Weyl [30], et cet algorithme se généralise aux algèbres de Ore [2, 3].

L'idée est de faire disparaître du calcul toute occurrence de l'indéterminée ∂_0 en s'interdisant par la suite toute multiplication par un polynôme qui ne commute pas avec ∂_0 . On calcule ainsi modulo les multiples à droite de ∂_0 .

On obtient de la sorte un algorithme qui est en général plus rapide que l'algorithme général et qui aboutit souvent à des opérateurs d'ordre plus petit, mais qui n'est garanti de terminer que lorsqu'un élément libre des indéterminées indésirables est présent dans l'idéal.

7 Extension ∂ -finie de l'algorithme rapide de Zeilberger

Les algorithmes de Zeilberger pour la sommation et l'intégration définies s'appuient sur le creative telescoping. Par simplicité, nous décrivons cette méthode dans le cas de la sommation, c'est-à-dire que nous considérons un terme ∂ -fini t_n lorsque $\partial_0 = S_n - 1$ est relié un décalage par rapport à une variable n , et dans le but de déterminer la somme définie $\sum_{n=a}^b t_n$, ou plus précisément un de ses opérateurs annulateurs.

Si nous pouvons trouver deux polynômes P et Q de l'algèbre tels que P commute avec \sum_n et que

$$P \cdot t_n = (S_n - 1)Q \cdot t_n, \quad (7)$$

alors, en interchangeant P et \sum , nous obtenons

$$P \cdot \sum_{n=1}^b t_n = [Q \cdot t_n]_a^b.$$

Si de plus les bornes a et b sont telles que t et tous les termes $\partial^\alpha \cdot t$ sont nuls en ces bornes — cas dit « à bornes naturelles » —, alors le membre telescopique de droite est nul, d'où le nom de la méthode.

Dans le cas hypergéométrique, l'algorithme rapide de Zeilberger [31] trouve P et Q en s'appuyant

sur l'observation que (7) est équivalent à ce que $P \cdot t_n$ soit sommable par l'algorithme de Gosper [32]. Zeilberger étend alors l'algorithme de Gosper pour savoir tenir compte de coefficients indéterminés dans P et trouver des conditions sur ces coefficients pour que la somme (indéfinie) soit hypergéométrique. L'algorithme incrémente alors l'ordre de P (et conséquemment le nombre de coefficients indéterminés) jusqu'à ce que la version étendue de l'algorithme de Gosper trouve une somme. La terminaison est garantie par la théorie de l'holonomie de Bernstein.

Le résultat de cette section est l'extension de l'algorithme de Zeilberger au cas ∂ -fini général [14]. De même que Zeilberger dans son algorithme, nous opérons en deux temps : tout d'abord, nous étendons l'algorithme de Gosper de sommation indéfinie au cadre ∂ -fini ; ensuite nous appliquons notre généralisation à la sommation et à l'intégration définies ∂ -finies.

7.1 Sommation et intégration indéfinies ∂ -finies

Étant donné un terme ∂ -fini t par rapport à une algèbre de Ore $\mathbb{O} = \mathbb{F}[\partial; \sigma, \delta]$ sur un corps de coefficients \mathbb{F} et une base (b_1, \dots, b_N) de l'espace vectoriel $\mathbb{O} \cdot t$, l'algorithme développé en [14] trouve toutes les solutions dans cet espace vectoriel des équations de la forme

$$P(\partial_1, \dots, \partial_r) \cdot X = B,$$

où P est un polynôme de \mathbb{O} , X est l'inconnue et B est un élément donné de l'espace vectoriel. La première étape de l'algorithme consiste à poser sous la forme indéterminée

$$X = \phi_1 b_1 + \dots + \phi_N b_N,$$

pour des coefficients ϕ_i indéterminés de \mathbb{F} . Le membre gauche de cette égalité est alors exprimé sur la base des b_i . Par identification à zéro des coefficients, on déduit alors un système d'équations linéaires vérifiées par les ϕ_i . Il suffit ensuite d'obtenir toutes les solutions *rationnelles* de ce système, c'est-à-dire les solutions dans \mathbb{F} . À cette fin, plusieurs algorithmes développés par S. Abramov *et al.* sont disponibles, selon le type de l'opérateur ∂_i [33, 34, 35, 36].

Un cas particulier important de cet algorithme s'obtient pour $P = S_n - 1$, cas correspondant à la sommation indéfinie. Dans ce cadre, le problème résolu par l'algorithme de Gosper correspond aux espaces vectoriels de dimension 1, et où un unique coefficient rationnel doit être trouvé.

Comme exemple d'application de notre algorithme, considérons le calcul d'une primitive pour le cosinus intégral $\text{Ci}(z)$. À partir de l'équation différentielle linéaire vérifiée par le cosinus, on calcule aisément l'équation différentielle linéaire

$$(zD_z^3 + 2D_z^2 + zD_z) \cdot f = 0$$

du troisième ordre vérifiée par le cosinus intégral Ci . Dans l'algèbre $\mathbb{O} = \mathbb{Q}(z)[D_z; 1, D_z]$, nous travaillons ensuite dans l'espace vectoriel sur $\mathbb{Q}(z)$ engendré par Ci , Ci' et Ci'' . Nous recherchons donc un T sous la forme $T = \phi_0 \text{Ci} + \phi_1 \text{Ci}' + \phi_2 \text{Ci}''$ et tel que $D_z \cdot T = \text{Ci}$. Ceci conduit à un système simple dont la seule solution rationnelle est

$$\phi_0(z) = z, \quad \phi_1(z) = 1, \quad \phi_2(z) = z,$$

ou en d'autres termes

$$\int \text{Ci}(z) dz = z \text{Ci}(z) - \sin(z).$$

7.2 Sommation et intégration définies ∂ -finies

Notre algorithme pour le cas défini est une extension de l'algorithme rapide de Zeilberger pour la sommation hypergéométrique définie au cadre plus général des termes ∂ -finis. L'algorithme de Gosper est remplacé par une légère modification de l'algorithme de la section précédente. Cette modification permet de tenir compte de nouveaux coefficients indéterminés et de trouver des conditions sur ces coefficients pour l'existence d'un ∂^{-1} indéfini dans l'espace vectoriel en question. La termination n'est garantie que lorsqu'une des versions de la théorie de l'holonomie — dans le cas différentiel, de récurrence ou de q -récurrence — peut être invoquée.

Considérons pour finir l'exemple du théorème d'addition de Neumann pour les fonctions de Bessel, identité (ii) de l'appendice. Dans l'algèbre $\mathbb{O} = \mathbb{Q}(z, k)[D_z; 1, D_z][S_k; S_k, 0]$, la suite de fonctions $J_k(z)^2$ est annulée par le système

$$\begin{cases} zD_z^2 + (-2k+1)D_z - 2S_k z + 2z, \\ zD_z S_k + zD_z + (2k+2)S_k - 2k, \\ z^2 S_k^2 - 4(k+1)^2 S_k - 2z(k+1)D_z \\ \quad \quad \quad + 4k(k+1) - z^2, \end{cases}$$

duquel on déduit que $J_k(z)^2$ est ∂ -fini et engendre un espace vectoriel de dimension 3 et de base

$(J_k(z)^2, S_k \cdot J_k(z)^2, D_z \cdot J_k(z)^2)$. La sortie de l'algorithme est

$$P = D_z, \quad Q = \frac{k}{z} + \frac{1}{2}D_z,$$

ce qui signifie que

$$D_z \cdot \sum_{k=0}^{\infty} J_k(z)^2 + [Q \cdot J_k(z)^2]_{k=0}^{\infty} = 0.$$

La dernière égalité est en fait équivalente à (ii) après quelques réécritures et considération des conditions initiales.

Remerciements

Ce travail est le fruit d'une thèse [3] financée par le contrat n° 91815-43 passé avec la DRET (Direction de la recherche et de la technologie), direction scientifique, section soutien à la recherche; il a aussi été partiellement financé par le Long Term Research Project ALCOM-IT n° 20244 de l'Union européenne.

Références

- [1] ZEILBERGER, D. A holonomic systems approach to special functions identities. *J. Comput. Appl. Math.* 32 (1990), 321–368.
- [2] CHYZAK, F., AND SALVY, B. Non-commutative elimination in Ore algebras proves multivariate holonomic identities. *J. Symbolic Comput.* 26, 2 (Aug. 1998), 187–227.
- [3] CHYZAK, F. *Fonctions holonomes en calcul formel*. Thèse universitaire, École polytechnique, 1998. Publication INRIA, TU 0531. 227 pages.
- [4] ABRAMOWITZ, M., AND STEGUN, I. A. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover, 1973. A reprint of the 10th National Bureau of Standards edition, 1964.
- [5] SLOANE, N. J. A. *A handbook of integer sequences*. Academic Press, 1973.
- [6] SLOANE, N. J. A., AND PLOUFFE, S. *The encyclopedia of integer sequences*. Academic Press, 1995.
- [7] ERDÉLYI, A. *Higher Transcendental Functions*, second ed., vol. 1–2–3. Krieger, Malabar, Florida, 1981.
- [8] SALVY, B., AND ZIMMERMANN, P. Gfun: a Maple package for the manipulation of generating and holonomic functions in one variable. *ACM Trans. Math. Softw.* 20, 2 (1994), 163–177.

- [9] WILF, H. S., AND ZEILBERGER, D. An algorithmic proof theory for hypergeometric (ordinary and “ q ”) multisum/integral identities. *Invent. Math.* 108 (1992), 575–633.
- [10] PETKOVŠEK, M., WILF, H., AND ZEILBERGER, D. $A=B$. Peters, Wellesley, Massachusetts, 1996.
- [11] TAKAYAMA, N. Gröbner basis, integration and transcendental functions. In *Symbolic and algebraic computation* (1990), S. Watanabe and M. Nagata, Eds., ACM and Addison-Wesley, pp. 152–156. Proc. ISSAC’90, Kyoto.
- [12] TAKAYAMA, N. An approach to the zero recognition problem by Buchberger algorithm. *J. Symbolic Comput.* 14 (1992), 265–282.
- [13] ORE, O. Theory of non-commutative polynomials. *Ann. of Math.* 34 (1933), 480–508.
- [14] CHYZAK, F. An extension of Zeilberger’s fast algorithm to general holonomic functions. In *Formal Power Series and Algebraic Combinatorics, 9th Conference* (1997), vol. 1, Universität Wien, pp. 172–183. Conference Proceedings.
- [15] PETKOVŠEK, M. Hypergeometric solutions of linear recurrences with polynomial coefficients. *J. Symbolic Comput.* 14 (1992), 243–264.
- [16] ABRAMOV, S. A., AND PETKOVŠEK, M. Finding all q -hypergeometric solutions of q -difference equations. In *Formal power series and algebraic combinatorics* (1995), B. Leclerc and J. Y. Thibon, Eds., Université de Marne-la-Vallée, pp. 1–10. Proc. SFCA’95.
- [17] ABRAMOV, S. A., PAULE, P., AND PETKOVŠEK, M. q -hypergeometric solutions of q -difference equations. *Discrete Math.* 180, 1-3 (1998), 3–22.
- [18] SINGER, M. F. Formal solutions of differential equations. *J. Symbolic Comput.* 10 (1990), 59–94.
- [19] PETKOVŠEK, M., AND SALVY, B. Finding all hypergeometric solutions of linear differential equations. In *ISSAC’93* (New York, July 1993), M. Bronstein, Ed., ACM Press, pp. 27–33.
- [20] COHN, P. M. *Free Rings and Their Relations*. No. 2 in London Mathematical Society Monographs. Academic Press, 1971.
- [21] FAUGÈRE, J.-C., GIANNI, P., LAZARD, D., AND MORA, T. Efficient computation of zero-dimensional Gröbner bases by change of ordering. *J. Symbolic Comput.* 16 (Oct. 1993), 329–344.
- [22] STREHL, V. Binomial identities — combinatorial and algorithmic aspects. *Discrete Math.* 136 (1994), 309–346.
- [23] CARTIER, P. Démonstration “automatique” d’identités et fonctions hypergéométriques. *Astérisque* 206 (1992), 41–91. Séminaire Bourbaki.
- [24] COUTINHO, S. C. *A Primer of Algebraic D-modules*. No. 33 in London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, 1995.
- [25] SABBAH, C. Des fonctions très spéciales. *Le journal de maths des élèves de l’École normale supérieure de Lyon* 1, 4 (1998), 182–189. <http://www.ens-lyon.fr/JME/>.
- [26] COMTET, L. Calcul pratique des coefficients de Taylor d’une fonction algébrique. *Enseign. Math.* 10 (1964), 267–270.
- [27] LIPSHITZ, L. The diagonal of a D -finite power series is D -finite. *Journal of Algebra* 113 (1988), 373–378.
- [28] LIPSHITZ, L. D -finite power series. *J. Algebra* 122 (1989), 353–373.
- [29] SABBAH, C. Systèmes holonomes d’équations aux q -différences. In *D-Modules and Microlocal Geometry* (Berlin, 1993), M. Kashiwara, T. Monteiro-Fernandes, and P. Schapira, Eds., Walter de Gruyter & Co., pp. 125–147. Proceedings of the Conference D -Modules and Microlocal Geometry, Lisbon, 1990.
- [30] TAKAYAMA, N. An algorithm of constructing the integral of a module—an infinite dimensional analog of Gröbner basis. In *Symbolic and algebraic computation* (1990), S. Watanabe and M. Nagata, Eds., ACM and Addison-Wesley, pp. 206–211. Proc. ISSAC’90, Kyoto.
- [31] ZEILBERGER, D. The method of creative telescoping. *J. Symbolic Comput.* 11 (1991), 195–204.
- [32] GOSPER, R. W. Decision procedure for indefinite hypergeometric summation. *Proceedings of the National Academy of Sciences USA* 75, 1 (Jan. 1978), 40–42.
- [33] ABRAMOV, S. A. Rational solutions of linear differential and difference equations with polynomial coefficients. *Comput. Math. Math. Phys.* 29, 11 (1989), 1611–1620. Transl. from Zh. vychisl. Mat. i mat. Fiz.
- [34] ABRAMOV, S. A., AND KVASHENKO, K. Y. Fast algorithms for the search of the rational solutions of linear differential equations with polynomial coefficients. In *Symbolic and algebraic computation* (New York, 1991), S. M. Watt, Ed., ACM Press, pp. 267–270. Proc. ISSAC’91, Bonn, Germany.
- [35] ABRAMOV, S. A. Rational solutions of linear difference and q -difference equations with polynomial coefficients. In *Symbolic and algebraic computation* (New York, 1995), A. Levelt, Ed., ACM Press, pp. 285–289. Proc. ISSAC’95, Montreal, Canada.
- [36] ABRAMOV, S. A., AND ZIMA, E. V. A universal program to uncouple linear systems. In *Proceedings of CMCP’96 (International Conference on Computational Modeling and Computing in Physics, Dubna, Russia, Sept. 16–21, 1996)* (1996), vol. 7, pp. 16–26.

Description	N°	Durée
Somme harmonique indéfinie	i	≤ 5 sec.
Théorème d'addition de Neumann pour les fonctions de Bessel	ii	≤ 5 sec.
Identité entre nombres d'Apéry et nombres de Franel	iii	60 sec.
Identité curieuse de Calkin	iv	195 sec.
Somme double de [10]	v	390 sec.
Série génératrice des polynômes orthogonaux de Legendre	vi	≤ 5 sec.
Formule de Mehler pour les polynômes de Hermite	vii	30 sec.
Transformée de Laplace pour une variation des polynômes de Tchebychev	ix	≤ 5 sec.
Intégrale d'un produit des quatres types de fonctions de Bessel	xi	75 sec.
Intégrale double d'un produit de fonctions de Bessel	xiii	50 sec.
Forme finie d'une des identités de Rogers-Ramanujan	xvii	80 sec.
Identité de Gordon	xviii	120 sec.

Tableau 2: Timings (sur Dec Alpha DS 3000/400)

Appendice : exemples d'identités automatiques

La liste suivante fournit quelques identités typiques qui ont pu être retrouvées automatiquement à l'aide de la bibliothèque *Mgfun*. Une description de certaines d'entre elles ainsi que le temps machine nécessaire à leur preuve par l'algorithme de la section précédente sont donnés en Table 2.

$$\sum_{k=1}^n \binom{k}{m} H_k = \binom{n+1}{m+1} \left(H_{n+1} - \frac{1}{m+1} \right), \quad (\text{i})$$

$$J_0(z)^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_k(z)^2 = 1, \quad (\text{ii})$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n+k}{k} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j}^3, \quad (\text{iii})$$

$$\sum_{k=0}^n \left(\sum_{j=0}^k \binom{n}{j} \right)^3 = n2^{3n-1} + 2^{3n} - 3n2^{n-2} \binom{2n}{n}, \quad (\text{iv})$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^{n+r+s} \binom{n}{r} \binom{n}{s} \binom{n+r}{r} \binom{n+s}{s} \times \binom{2n-(r+s)}{n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k}^4, \quad (\text{v})$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x)y^n = \frac{1}{\sqrt{1-2xy+y^2}}, \quad (\text{vi})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)H_n(y) \frac{u^n}{n!} = \frac{\exp\left(\frac{4u(xy-u(x^2+y^2))}{1-4u^2}\right)}{\sqrt{1-u^2}}, \quad (\text{vii})$$

$$\frac{\pi}{2} J_0(z) = \int_0^1 \frac{\cos(zu)}{\sqrt{1-u^2}} du = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(zu)}{\sqrt{u^2-1}} du, \quad (\text{viii})$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{e^{-px} \Gamma_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = (-1)^n \pi I_n(p), \quad (\text{ix})$$

$$\int_0^{+\infty} x e^{-px^2} J_n(bx) I_n(cx) dx = \frac{1}{2p} \exp\left(\frac{c^2-b^2}{4p}\right) J_n\left(\frac{bc}{2p}\right), \quad (\text{x})$$

$$\int_0^{+\infty} x J_1(ax) I_1(ax) Y_0(x) K_0(x) dx = -\frac{\ln(1-a^4)}{2\pi a^2}, \quad (\text{xi})$$

$$\oint \frac{(1+2xy+4y^2) \exp\left(\frac{4x^2y^2}{1+4y^2}\right)}{y^{n+1}(1+4y^2)^{\frac{3}{2}}} dy = \frac{n! H_n(x)}{[n/2]!}, \quad (\text{xii})$$

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-x} e^{-y} J_1(x) J_1(y) J_2(c\sqrt{xy}) dx dy = \frac{1}{2\pi ck} ((2-k^2)\mathbf{K}(k) - 2\mathbf{E}(k)) \quad (\text{xiii})$$

où $k = 4c/(c^2+8)$,

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(a; q)_n x^n}{(b; q)_n} = \frac{(ax; q)_{\infty} \left(\frac{q}{ax}; q\right)_{\infty} (q; q)_{\infty} \left(\frac{b}{a}; q\right)_{\infty}}{(x; q)_{\infty} \left(\frac{b}{ax}; q\right)_{\infty} (b; q)_{\infty} \left(\frac{q}{a}; q\right)_{\infty}}, \quad (\text{xiv})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_n(a, b; q) z^n}{(q; q)_n} = \frac{1}{(az; q)_{\infty} (bz; q)_{\infty}}, \quad (\text{xv})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_n(a, b; q) r_n(c, d; q) z^n}{(q; q)_n} = \frac{(acz; q)_{\infty} (adz; q)_{\infty} (bcz; q)_{\infty} (bdz; q)_{\infty}}{(abcdz^2; q)_{\infty}}, \quad (\text{xvi})$$

$$\sum_{k=0}^n \frac{q^{k^2}}{(q; q)_k (q; q)_{n-k}} = \sum_{k=-n}^n \frac{(-1)^k q^{(5k^2-k)/2}}{(q; q)_{n-k} (q; q)_{n+k}} \quad (\text{xvii})$$

$$\sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{n-j} \frac{q^{(i+j)^2+j^2}}{(q; q)_{n-i-j} (q; q)_i (q; q)_j} = \sum_{k=-n}^n \frac{(-1)^k q^{7/2k^2+1/2k}}{(q; q)_{n+k} (q; q)_{n-k}}. \quad (\text{xviii})$$

Notons que les intégrales elliptiques \mathbf{E} et \mathbf{K} ne sont pas holonomes, mais seulement fonctions réciproques de fonctions holonomes.