ЗАДАЧА ИОСИФА ФЛАВИЯ (JOSEPHUS PROBLEM)

М.А.Алексеев

Рассмотрим задачу, носящую имя известного историка первого века Иосифа Флавия. Ее формулировка связана с такой легендой [1]. Во время иудейской войны отряд Иосифа, состоящий из 41 человека, был окружен римлянами. Не желая попасть в плен, воины решили выстроиться в круг и убивать каждого третьего из живых до тех пор, пока не останется ни одного человека. Иосиф счел подобный конец бессмысленным и быстро вычислил для себя спасительное "последнее" место.

В более общей формулировке задача выглядит так: n человек выстраиваются по кругу и начинают счет по часовой стрелке, при котором каждый q-ый человек выбывает из круга. Необходимо определить, кто же останется последним.

Для упрощения дальнейшего повествования занумеруем людей в круге по часовой стрелке числами от 0 до $n-1$, причем номер 0 дадим человеку, с которого начинается счет. Номер искомого "последнего" человека обозначим через $J_q(n)$.

Эта задача не так проста, как кажется на первый взгляд, и в полном объеме не решена до сих пор. Под решением здесь понимается либо нахождение простой замкнутой формулы для $J_q(n)$, либо указание достаточно быстрого алгоритма для вычисления $J_q(n)$ на компьютере. Удовлетворительные результаты получены только в случае $n \gg q$. Как будет показано далее, в этом случае существует алгоритм для вычисления $J_q(n)$ требующий $O((q-1)\ln n)$ действий.

Сначала попробуем подсчитать $J_q(n)$ для малых значений n.

Случай $n = 1$ тривиален: у нас всего одно место — оно и является "последним". Поэтому $J_q(1) = 0$.

В случае $n = 2$ все решает четность числа q: если q четно, то выбывает человек по номером 1; если нечетно — по номером 0. Поэтому можно утверждать, что номер оставшегося $J_q(2) = q \bmod 2$.

Случай $n = 3$ сложнее. Первым из круга выбывает человек под номером $(q-1) \bmod 3$. В кругу останутся 2 человека — ситуация предыдущего случая с единственным отличием: счет начинается с человека под номером $q \bmod 3$. Но это расхождение легко устранить: "повернем" известный нам ответ $J_q(2)$ на $q \bmod 3$ номеров по часовой стрелке. Численно это выглядит так

$$J_q(3) = (J_q(2) + (q \bmod 3)) \bmod 3 = (J_q(2) + q) \bmod 3.$$

Аналогичные рассуждения позволяют установить общую рекуррентную формулу.

Лемма 1. *Справедлива рекуррентная формула*

$$J_q(n+1) = (J_q(n) + q) \bmod (n+1). \tag{1}$$

Заметим, что если $J_q(n) + q < n + 1$, то операция взятия по модулю в формуле (1) никак не влияет на результат, а потому $J_q(n+1) = J_q(n) + q$. Попробуем двинуться далее: если $J_q(n+1) + q < n+2$, то $J_q(n+2) = J_q(n+1) + q = J_q(n) + 2q$.

Возникает вопрос: до каких пор мы можем получать такие относительно простые выражения? Ответ дает неравенство $J_q(n) + sq < n + s$. Пусть $s = s_0$ его максимальное решение, тогда для всех $t \leqslant s_0$ справедлива формула $J_q(n+t) = J_q(n) + tq$. Можно также сделать один шаг "за s_0" и получить для $t = s_0 + 1$ формулу $J_q(n+t) = (J_q(n) + tq) \bmod (n+t)$.

Лемма 2. *Для* $t = 0, 1, \ldots, \left\lceil \frac{n - J_q(n)}{q-1} \right\rceil$ *справедлива формула*

$$J_q(n+t) = (J_q(n) + tq) \bmod (n+t). \tag{2}$$

При $n < q$ эта формула не позволяет двигаться с шагом большим 1 и по сути ничем не отличается от (1).

Зато при $n \geqslant q$ формула (2) позволяет быстро вычислять $J_q(n)$ по заранее вычисленному значению $J_q(q-1) = J_q(q)$. В частности поэтому особый интерес представляет вычисление "стартового" значения $J_q(q)$. На данный момент не известно алгоритма, позволяющего вычислять значение $J_q(q)$ быстрее чем за $O(q)$ операций, или, другими словами, не найдено формулы существенно лучшей формулы (1). Последовательность $\{J_q(q)\}_{q=1}^{\infty}$ достаточно известна и указана, например, в [2].

Идея упомянутого ускорения вычислений состоит в том, что с помощью формулы (2) из очередного вычисленного значения $J_q(m)$ мы сразу переходим к $J_q(m + \left\lceil \frac{m - J_q(m)}{q-1} \right\rceil)$, и такими "семимильными" шагами двигаемся от значения $J_q(q-1)$ к $J_q(n)$. Но прежде чем переходить к деталям данного процесса, давайте упростим формулу (2) при $t = \left\lceil \frac{n - J_q(n)}{q-1} \right\rceil$.

Теорема 3. *При* $n \geqslant q$ *и* $t = \left\lceil \frac{n - J_q(n)}{q-1} \right\rceil$ *справедлива формула*

$$J_q(n+t) = (J_q(n) - n) + t(q-1).$$

Построим последовательность "опорных" значений

$$m_{k+1} = m_k + \left\lceil \frac{m_k - J_q(m_k)}{q-1} \right\rceil = \left\lceil \frac{q m_k - J_q(m_k)}{q-1} \right\rceil, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{3}$$

Здесь у нас есть свобода в выборе начального значения m_0. Можно, например, считать $m_0 = q - 1$.

Формула (3) неудобна тем, что в нее входит неизвестное значение $J_q(m_k)$. Нашей ближайшей целью будет избавиться в рекуррентной формуле для m_k от зависимости от $J_q(m_k)$.

Теорема 3 позволяет получить рекуррентное соотношение для $J_q(m_k)$

$$J_q(m_{k+1}) = J_q(m_k) - m_k + (m_{k+1} - m_k)(q-1) = J_q(m_k) + (q-1)m_{k+1} - qm_k.$$

Просуммировав это равенство по k от 0 до $k-1$, получим

$$J_q(m_k) = J_q(m_0) + (q-1)m_k - \sum_{j=0}^{k-1} m_j - (q-1)m_0. \tag{4}$$

Подставляя это выражение в (3), мы получаем формулу

$$m_{k+1} = \left\lceil \frac{\sum_{j=0}^{k} m_j - J_q(m_0)}{q-1} \right\rceil + m_0,$$

Теперь последовательность $m_0 < m_1 < \ldots$ легко построить отталкиваясь только от $J_q(m_0)$. Значения J_q в точках этой последовательности также легко определяются по формуле (4).

Понятно, что для любого $n \geqslant m_0$ мы можем найти такое k, что $m_{k-1} \leqslant n < m_k$. Теорема 3 вкупе с формулой (3) позволяет утверждать

Следствие 4. *Пусть $m_{k-1} \leqslant n < m_k$. Тогда*

$$J_q(n) = J_q(m_0) + qn - \sum_{j=0}^{k-1} m_j - (q-1)m_0 = qn - (q-1)m_k + J_q(m_k). \tag{5}$$

Наша цель достигнута: по значению $J_q(m_0)$ мы научились быстро находить значение $J_q(n)$ для $n \geqslant m_0$. А вот, чтобы оценить быстроту описанного способа вычислений, лучше взглянуть на формулы немного с другой стороны.

Тождество (4) можно переписать в виде

$$(q-1)m_k - J_q(m_k) = ((q-1)m_0 - J_q(m_0)) + \sum_{j=0}^{k-1} m_j. \tag{6}$$

Введем обозначение $D_k^{(q)} \stackrel{\text{def}}{=} (q-1)m_k - J_q(m_k)$ соответствующее аналогичному (с точностью до сдвига индексов) в [1]. Тогда формулу (5) можно записать как

$$J_q(n) = nq - D_k^{(q)}. \tag{7}$$

При этом формулы (3) и (6) можно соответственно привести к виду

$$m_k = \left\lceil \frac{D_k^{(q)}}{q-1} \right\rceil \tag{8}$$

и

$$D_k^{(q)} = D_0^{(q)} + \sum_{j=0}^{k-1} m_j.$$

Преобразуем последнюю формулу

$$D_k^{(q)} = D_0^{(q)} + \sum_{j=0}^{k-1} m_j = D_{k-1}^{(q)} + m_{k-1} = D_{k-1}^{(q)} + \left\lceil \frac{D_{k-1}^{(q)}}{q-1} \right\rceil = \left\lceil \frac{q}{q-1} D_{k-1}^{(q)} \right\rceil. \qquad (9)$$

Из формулы (8) следует, что неравенство $m_{k-1} \leqslant n < m_k$ равносильно тому, что значение $D_k^{(q)}$ является минимальным большим чем $n(q-1)$. Отсюда и формулы (9) заключаем, что число шагов

$$k \quad \leqslant \quad \log_{\frac{q}{q-1}} \frac{n(q-1)}{D_0^{(q)}} \quad \overset{n \gg q}{\sim} \quad (q-1)\ln n.$$

В заключение докажем один интересный результат, по-видимому, впервые полученный в работе [3].

Теорема 5.

$$D_n^{(3)} = \left\lfloor \left(\frac{3}{2}\right)^n C \right\rfloor,$$

где C — конструктивно определяемая константа (зависящая от $D_0^{(3)}$).

Докажем его, используя технику, описанную в [4] (с.34).

Доказательство. Перепишем формулу (9) при $q = 3$ в виде

$$D_k^{(3)} = \frac{3}{2} D_{k-1}^{(3)} + \alpha_k, \qquad (10)$$

где α_k принимает значения 0 или $\frac{1}{2}$ в зависимости от того, является ли число $\frac{3}{2}D_{k-1}^{(3)}$ целым или нет.

"Развернем" рекуррентную формулу (10)

$$D_n^{(3)} = \tfrac{3}{2}D_{n-1}^{(3)} + \alpha_n = \tfrac{3}{2}\left(\tfrac{3}{2}D_{n-2}^{(3)} + \alpha_{n-1}\right) + \alpha_n = \left(\tfrac{3}{2}\right)^2 D_{n-2}^{(3)} + \tfrac{3}{2}\alpha_{n-1} + \alpha_n = \ldots =$$
$$= \left(\tfrac{3}{2}\right)^n D_0^{(3)} + \left(\tfrac{3}{2}\right)^{n-1}\alpha_1 + \left(\tfrac{3}{2}\right)^{n-2}\alpha_2 + \ldots + \alpha_n = \left(\tfrac{3}{2}\right)^n \left(D_0^{(3)} + \sum_{k=1}^{n} \left(\tfrac{2}{3}\right)^k \alpha_k\right).$$

Определим константу C формулой

$$C \overset{\mathrm{def}}{=} D_0^{(3)} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k \alpha_k = D_0^{(3)} + \frac{2}{3}\alpha_1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \alpha_2 + \ldots \qquad (11)$$

Рассмотрим разность

$$\left(\tfrac{3}{2}\right)^n C - D_n^{(3)} = \left(\tfrac{3}{2}\right)^n \left(D_0^{(3)} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\tfrac{2}{3}\right)^k \alpha_k\right) - \left(\tfrac{3}{2}\right)^n \left(D_0^{(3)} + \sum_{k=1}^{n} \left(\tfrac{3}{2}\right)^k \alpha_k\right) = \\ = \left(\tfrac{3}{2}\right)^n \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\tfrac{2}{3}\right)^k \alpha_k = \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\tfrac{2}{3}\right)^{k-n} \alpha_k \tag{12}$$

Для доказательства утверждения теоремы достаточно показать, что

$$0 \leqslant \left(\frac{3}{2}\right)^n C - D_n^{(3)} < 1. \tag{13}$$

Левая часть этого неравенства тривиальна ввиду формулы (12) и неравенства $\alpha_k \geqslant 0$.

Для доказательства правой части воспользуемся (12), неравенством $\alpha_k \leqslant \frac{1}{2}$ и формулой для суммы геометрической прогрессии

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n C - D_n^{(3)} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-n} \alpha_k \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-n} \frac{1}{2} = 1. \tag{14}$$

Мы почти у цели: осталось только показать, что разность $\left(\frac{3}{2}\right)^n C - D_n^{(3)}$ не может равняться 1 ни при каком n. Предположим противное, т.е. что $\left(\frac{3}{2}\right)^n C - D_n^{(3)} = 1$ при некотором n, но тогда из (14) получим, что $\alpha_k = \frac{1}{2}$ при всех $k > n$. Последнее равносильно тому, что при $k \geqslant n$ все числа $D_k^{(3)}$ нечетны. Пусть 2^t максимальная степень 2-ки, которая делит число $D_n^{(3)} + 1$. Из формулы

$$D_{n+1}^{(3)} + 1 = \left(\frac{3}{2} D_n^{(3)} + \frac{1}{2}\right) + 1 = 3\frac{D_n^{(3)} + 1}{2}$$

следует, что максимальной степенью 2-ки, которая делит $D_{n+1}^{(3)}+1$, будет 2^{t-1}. Аналогично $D_{n+2}^{(3)} + 1$ будет делиться максимум на 2^{t-2} и т.д., $D_{n+t}^{(3)} + 1$ будет делиться максимум на $2^0 = 1$, что означает, что число $D_{n+t}^{(3)} + 1$ нечетное, а число $D_{n+t}^{(3)}$ соответственно четное. Полученное противоречие завершает доказательство неравенства (13). $\square$

Пример 6. *Если, следуя [1], считать* $D_0^{(3)} = 1$, *то численные значения для* α_k *при* $k = 1, 2, \ldots, 40$ *будут следующими:*

$\alpha_1 = \frac{1}{2}$	$\alpha_{11} = \frac{1}{2}$	$\alpha_{21} = 0$	$\alpha_{31} = 0$
$\alpha_2 = 0$	$\alpha_{12} = 0$	$\alpha_{22} = \frac{1}{2}$	$\alpha_{32} = 0$
$\alpha_3 = \frac{1}{2}$	$\alpha_{13} = 0$	$\alpha_{23} = \frac{1}{2}$	$\alpha_{33} = 0$
$\alpha_4 = \frac{1}{2}$	$\alpha_{14} = \frac{1}{2}$	$\alpha_{24} = 0$	$\alpha_{34} = 0$
$\alpha_5 = 0$	$\alpha_{15} = \frac{1}{2}$	$\alpha_{25} = \frac{1}{2}$	$\alpha_{35} = 0$
$\alpha_6 = 0$	$\alpha_{16} = 0$	$\alpha_{26} = 0$	$\alpha_{36} = \frac{1}{2}$
$\alpha_7 = 0$	$\alpha_{17} = \frac{1}{2}$	$\alpha_{27} = 0$	$\alpha_{37} = \frac{1}{2}$
$\alpha_8 = \frac{1}{2}$	$\alpha_{18} = 0$	$\alpha_{28} = \frac{1}{2}$	$\alpha_{38} = 0$
$\alpha_9 = \frac{1}{2}$	$\alpha_{19} = \frac{1}{2}$	$\alpha_{29} = 0$	$\alpha_{39} = \frac{1}{2}$
$\alpha_{10} = 0$	$\alpha_{20} = 0$	$\alpha_{30} = \frac{1}{2}$	$\alpha_{40} = 0$

Они позволяют вычислить $C = 1.622270503\ldots$ *с точностью* 10^{-7}.

Литература

[1] Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Основание информатики: Пер. с англ. — М.: Мир, 1998.

[2] On-Line Encyclopedia of Integer Sequences `http://www.research.att.com/~njas/sequences`

[3] A.M.Odlyzko, H.S.Wilf “Functional iteration and the Josephus problem”, Glasgow Mathematical Journal 33 (1991), 235–240.

[4] Грин Д., Кнут Д. Математические методы анализа алгоритмов. — М.: Мир, 1987.