

Young-Tablåer och mönsterundvikande

Sverker Lundin

September 2001

Young–Tablåer och mönsterundvikande

Examensarbete i matematik

Sverker Lundin

Examinator: Einar Steingrímsson

Matematik
Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet

Göteborg september 2001

Sammanfattning

Vi undersöker ett antal kopplingar mellan Young-Tablåer, Ballot-tal och mönsterundvikande permutationer. Vi visar också att för vissa mönster p kan antalet involutioner som undviker p förklaras med hjälp av p 's cykelstruktur. För att göra det lättare att se cykelstrukturen hos ett mönster, tar vi fram ett sätt att visualisera permutationer med längd ≤ 4 .

Abstract

In this paper, we study some connections between Young-Tableau, Ballot-numbers and pattern avoiding permutations. We also show that, for some patterns p , the number of involutions avoiding p can be explained in terms of the cycle-structure of p . To facilitate the interpretation of patterns in terms of their cycle-structures, we propose a technique for visualisation of permutations of length ≤ 4 .

Innehåll

1	Inledning	1
2	Young-Tablåer med två rader	1
2.1	Försök till bijektivt bevis	5
2.2	Ballot-tal	10
2.3	Genererande funktioner	11
2.4	Bevis med hjälp av Ballot-talen	13
2.5	Ballot-talens ursprung	15
2.6	Dyckvägar	15
3	Rekapitulation	16
4	Young-Tablåer	17
4.1	Algoritm I	19
4.2	Algoritm D	19
4.3	Young-Tablåer och involutioner	20
5	Young-Tablåer med fixerad form	22
5.1	Young-Tablåer och generaliserade Ballot-tal	23
6	Young-Tablåer med högst n rader	25
7	Mönsterundvikande	26
7.1	Motzkintal	27
7.2	Mönsterundvikande och cykelstrukturer	28
A	Tabeller och Bilder	39

1 Inledning

En Young-Tablå¹ är en tabell med talen $1, \dots, n$ ordnade enligt följande regler:

- Om talen a och b är på samma rad och a står till vänster om b , så måste $a < b$ och
- om c och d är i samma kolumn och c är över d så måste $c < d$.

Raderna i tabellen måste inte vara lika långa, men rader högre upp måste vara längre än eller lika långa som rader längre ner.

1	3	5	8
2	4		
6	7		
9			

är ett exempel på en Young-Tablå med talen $1, \dots, 9$. Två andra exempel är

<table border="1"><tr><td>1</td></tr><tr><td>2</td></tr><tr><td>3</td></tr></table>	1	2	3	och	<table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>5</td></tr><tr><td>4</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	1	2	3	5	4			
1													
2													
3													
1	2	3	5										
4													

2 Young-Tablåer med två rader

En erfaren kombinatoriker föreslog mig att jag skulle förklara varför antalet Young-Tablåer (som i fortsättning helt enkelt benämns "tablåer") av storlek $n + 1$ med exakt två rader är

$$C(n) = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}. \quad (1)$$

Talföljden som genereras av (1), och vars inledande termer är

$$1, 1, 2, 5, 14, 42 \dots \quad (2)$$

¹Efter den engelske gruppteoretikern Alfred Young (1873–1940).

kallas Catalanantal², och dyker upp i en mängd kombinatoriska problem (i Richard Stanleys bok “Enumerative Combinatorics” [17] finns en övningsuppgift som innehåller över 40 olika problem där lösningarna involverar Catalanantal).

För att testa hypotesen konstruerar vi för hand alla möjliga tablåer som har 2, 3, 4 och 5 rutor:

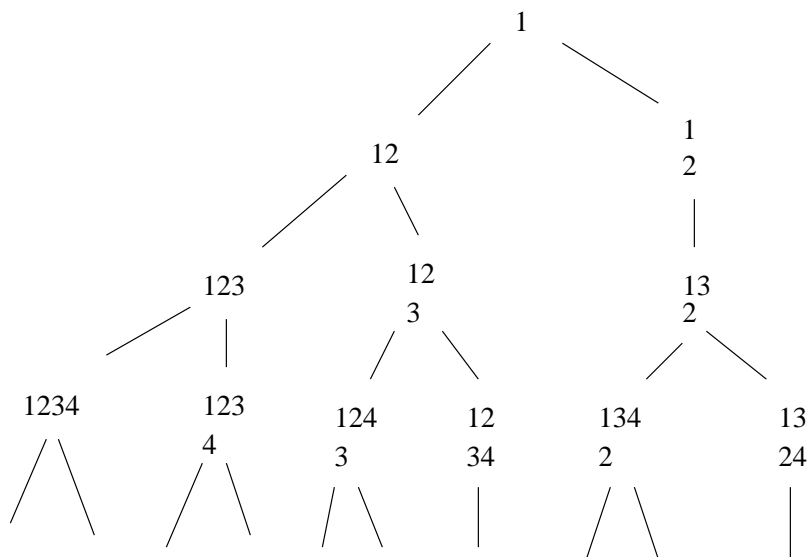
2	1	2									
3	1	2	1	3							
4	1	2	3	1	2	4					
	4			3							
	1	2	3	1	3						
	3	4			2	4					
5	1	2	3	4	1	2	3	4	5		
	5				4			3			
	1	3	4	5	1	2	3				
	2				4	5			1	3	4
	1	2	4			1	2	5			
	3	5			3	4			2	4	5

Räknar vi antalet tablåer av varje storlek får vi följande tabell, där vi kallar antalet tvåradiga tablåer med n rutor för $T'(n)$:

n	$C(n)$	$T'(n + 1)$
1	1	1
2	2	2
3	5	5
4	14	9

Tydligt är lösningen *inte* Catalanalen, ty $T'(4 + 1) \neq C(4)$.

²Efter den franske matematikern Eugène Charles Catalan (1814–1894). Catalan arbetade med talteori och kedjebråk på École Polytechnique i Paris. Hans matematiska karriär försvårades för övrigt av hans starka sympatier för den politiska vänstern [13].



Figur 1: Konstruktions-algoritm för tvåradiga tablåer.

Hur gör man för att ta fram en formel för $T'(n)$?

De tal som ingår i dessa tablåer står antingen i den övre eller i den undre raden. Man kan bygga upp en tablå genom att placera ut talen $1, \dots, n$ i nummerordning. Placera varje nytt tal längst till höger i antingen den övre eller den undre raden.

Det är dock inte alltid som man kan välja fritt om man vill placera ut talet i den övre eller den undre raden på grund av:

- 1 villkoret att den övre raden inte får vara kortare än den undre och
- 2 storleksvillkoret, som säger att varje tal i den undre raden måste ha ett mindre tal rakt ovanför sig.

Man kan visualisera konstruktionsprocessen med hjälp av ett träd, som i figur (1). Vi märker att trädet även innehåller tablåer med enbart en rad, och det verkar lättare att generellt beskriva antalet tablåer med en eller två rader, snarare än tablåer med exakt två rader. Vi kallar antalet tablåer med en eller två rader för $T(n)$.

De noder på trädet i figur (1) som representerar tablåer där båda raderna är lika långa skiljer sig från de övriga noderna, i det att de bara har ett "barn". När vi skall beskriva konstruktionsalgoritmen matematiskt måste vi därför ha en modell av tablåerna som beskriver tablåernas form. Inför vi beteckningen $B(a, b)$ för att beskriva antalet tablåer med a rutor i den övre raden och b rutor i den undre, kan vi teckna följande *rekursion*:

$$B(a, b) = B(a, b - 1) \quad (a = b) \quad (3)$$

$$B(a, b) = B(a, b - 1) + B(a - 1, b) \quad (a > b) \quad (4)$$

Ekvation (3) säger att antalet tablåer med formen (n, n) det vill säga tablåer med två lika långa rader är lika stort som antalet tablåer med formen $(n, n - 1)$. Orsaken är att tablåerna med formen (n, n) bara kan skapas på ett sätt, nämligen genom att lägga till en ruta i den undre raden på en tablå med formen $(n, n - 1)$.

Ekvation (4) beskriver det faktum att övriga tablåer, dvs där $a > b$, kan skapas på två sätt; antingen genom att lägga till ett tal i den undre raden på en tablå med formen $(a, b - 1)$ eller genom att lägga till ett tal i den övre raden på en tablå med formen $(a - 1, b)$. Det totala antalet tablåer måste därför vara summan av antalet tablåer med dessa respektive former.

Ett steg mot att hitta en formel för $T(n)$ är att skapa en tabell med värden för $B(a, b)$. Detta kan vi göra med hjälp av ekvationerna (3) och (4) tillsammans med de värden vi fått genom att konstruera tablåer för hand. Vi börjar med att fylla i dessa värden:

$a \setminus b$	0	1	2	3	4	5	6
0	?	?	?	?	?	?	?
1	1	1	?	?	?	?	?
2	1	2	2	?	?	?	?
3	1	3	5	?	?	?	?
4	1	?	?	?	?	?	?
5	?	?	?	?	?	?	?
6	?	?	?	?	?	?	?

Eftersom vi inte tillåter tablåer där $a < b$, dvs där den undre raden har fler rutor, vet vi att $B(a, b) = 0$ för alla $a < b$:

$a \setminus b$	0	1	2	3	4	5	6
0	?	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0
2	1	2	2	0	0	0	0
3	1	3	5	?	0	0	0
4	1	?	?	?	?	0	0
5	?	?	?	?	?	?	0
6	?	?	?	?	?	?	?

Nu är det enkelt att fylla i resten av tabellen med hjälp av ekvationerna (3) och (4) eftersom de betyder att varje tal i tabellen är summan av talet till vänster och talet ovanför. Vi bestämmer oss också för att låta $B(0,0) = 1$:

$a \setminus b$	0	1	2	3	4	5	6
0	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0
2	1	2	2	0	0	0	0
3	1	3	5	5	0	0	0
4	1	4	9	14	14	0	0
5	1	5	14	28	42	42	0
6	1	6	20	48	90	132	132

Antalet tablåer med exakt två rader $T'(n)$, som vi sökte inledningsvis, kan vi nu få fram genom att summera $B(a,b)$ över alla former för vilka $a+b = n$

$$\sum_{a+b=n} B(a,b) - 1$$

(eftersom vi inte är intresserade av tablåerna med bara en rad) vilket ger talföljden:

$$1, 2, 5, 9, 19, 34 \dots \quad (5)$$

detta är, kan man säga, en lösning till problemet eftersom vi, om det skulle behövas, kan göra tabellen större.

2.1 Försök till bijektivt bevis

Vi vill dock hitta ett enklare sätt att beskriva talföljden. En praktiskt metod för att komma vidare från detta läge är att skicka de tal man fått fram till

den stora databasen “Sloane’s On-Line Encyclopedia of Integer Sequences” på Internet³. Vi får då reda på att vår talföljd heter **A014495** och beskrivs av $\binom{n}{\lceil n/2 \rceil} - 1$. Om vi struntar i att dra bort ett, och räknar tablåer en eller två rader får vi alltså att

$$T(n) = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil}.$$

Ett sätt att visa, eller förklara, varför mängden av alla en- och tvåradiga tablåer är lika stor som mängden av alla uppdelningar av n element i två lika stora delmängder, är att skapa en bijektion. Detta innebär att vi skapar par; i vårt fall par av tablåer och uppdelningar av $[n]$ i två lika stora delmängder. Vi kallar mängden av alla uppdelningar av talen $1, \dots, n$ för X och mängden av alla tablåer med en eller två rader för Y . Vi vill hitta på en algoritm – vi kallar den A – som tar ett element $x \in X$ och ger ett element $y \in Y$. Använder vi $n = 5$ som exempel vill vi alltså i följande tabell:

<table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>4</td><td>5</td><td></td></tr></table>	1	2	3	4	5		{1,2}				
1	2	3									
4	5										
<table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>3</td><td>5</td><td></td></tr></table>	1	2	4	3	5		{1,3}				
1	2	4									
3	5										
<table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td><td>5</td></tr><tr><td>3</td><td>4</td><td></td></tr></table>	1	2	5	3	4		{1,4}				
1	2	5									
3	4										
<table border="1"><tr><td>1</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>2</td><td>5</td><td></td></tr></table>	1	3	4	2	5		{1,5}				
1	3	4									
2	5										
<table border="1"><tr><td>1</td><td>3</td><td>5</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td></td></tr></table>	1	3	5	2	4		{2,3}				
1	3	5									
2	4										
<table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>5</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	1	2	3	4	5				{2,4}		
1	2	3	4								
5											
<table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>5</td></tr><tr><td>4</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	1	2	3	5	4				{2,5}		
1	2	3	5								
4											
<table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>3</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	1	2	4	5	3				{3,4}		
1	2	4	5								
3											
<table border="1"><tr><td>1</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>2</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	1	3	4	5	2				{3,5}		
1	3	4	5								
2											
<table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	1	2	3	4	5						{4,5}
1	2	3	4	5							

som innehåller både alla tablåer med 5 tal och alla sätt att välja ut 2 tal

³<http://www.research.att.com/~njas/sequences/Seis.html>

från $\{1, \dots, 5\}$, komma på ett sätt att koppla samman varje tablå till vänster med ett val av två tal till höger.

Vi försöker lösa detta problem genom att använda vår intuition om vad som kan tänkas leda till en rimlig generell algoritm för att skapa sådana par. Betraktar vi valet av talen $\{4, 5\}$, så kan man ju tänka sig att dessa

skulle kopplas samman med tablå $\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & \\ \hline \end{array}$. Det samma gäller för de övriga tablåerna med två tal i den undre raden. Tar vi bort dessa får vi följande lite mer problematiska tabell:

$\begin{array}{ c c c c } \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 5 & & & \\ \hline \end{array}$	$\{1,2\}$
$\begin{array}{ c c c c } \hline 1 & 2 & 3 & 5 \\ \hline 4 & & & \\ \hline \end{array}$	$\{1,3\}$
$\begin{array}{ c c c c } \hline 1 & 2 & 4 & 5 \\ \hline 3 & & & \\ \hline \end{array}$	$\{1,4\}$
$\begin{array}{ c c c c } \hline 1 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 2 & & & \\ \hline \end{array}$	$\{1,5\}$
$\begin{array}{ c c c c c } \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline \end{array}$	$\{2,3\}$

Tänker vi oss att de tal som är utvalda är tal som vi skulle vilja placera i undre raden (detta stämmer ju med vad vi gjort hittills) ser vi att alla val som återstår skulle leda till otillåtna tablåer. Fyran och femman förekommer bara i två av valen på högersidan, så det är inte speciellt långsökt att identifiera dessa med de respektive tablåer där fyran och femman är i den undre raden. Det enda som återstår är nu

$\begin{array}{ c c c c } \hline 1 & 2 & 4 & 5 \\ \hline 3 & & & \\ \hline \end{array}$	$\{1,2\}$
$\begin{array}{ c c c c } \hline 1 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 2 & & & \\ \hline \end{array}$	$\{1,3\}$
$\begin{array}{ c c c c c } \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline \end{array}$	$\{2,3\}$

Det finns naturligtvis många alternativ, både i den här situationen och i det övriga resonemanget kring hur bijektionen skall utformas. Det känns dock naturligt att låta $\{1, 2\}$ kopplas samman med den enradiga tablå, $\{1, 3\}$ med tablå som har trean som enda tal i undre raden, och till sist $\{2, 3\}$ med tablå som har två som enda tal i undre raden.

Om vi med utgångspunkt från detta exempel kan ta fram en generell algoritm för att skapa en en- eller tvåradig tablå med utgångspunkt från en uppdelning av talen $1, \dots, n$ i två lika stora delmängder, och varje uppdelning ger en specifik tablå, har vi hittat en bra förklaring till varför antalet en- eller tvåradiga tablåer med n tal är lika med antalet sätt att välja ut hälften av de n talen.

En generell algoritm som ger de kopplingar vi fått mellan tablåer och val av tal i exemplet är följande:

- Placera alla tal som inte är valda i den översta raden, och de valda talen i den undre raden, justerade till vänster. (Detta ger alltså en otillåten tablå med hälften, eller nästan hälften, av talen i den undre raden.)
- Titta på det tal i den undre raden som är längst till vänster. Det finns två möjligheter
 - Om talet ovanför är mindre så är dessa två tal en tillåten kombination. Gå då vidare med nästa tal i den undre raden.
 - Om talet ovanför är större så lägg det undre talet i den övre raden, närmast till vänster om det tal som är i den övre raden. Flytta sedan de övriga undre talen ett steg åt vänster så att det tal som står på tur hamnar under samma tal i övre raden som det vi just flyttade på hade ovan för sig innan vi flyttade på det.
- Fortsätt på detta sätt tills alla tal i den undre raden är beaktade.
- Vi har nu en tablå som kan se konstig ut, för talen i den undre raden är inte vänsterjusterade. Ordna detta genom att skjuta samman dessa tal längst till vänster.

För det första är det klart att det verkligen blir tillåtna tablåer, för vi låter bara tal vara kvar i den undre raden om de är tillåtna. När vi flyttar upp tal så har vi alltid ett större tal till höger, eftersom vi flyttar upp just om talet ovanför är större, och det är detta tal som sedan hamnar till höger. När vi slutligen flyttar vissa tal i den undre raden åt vänster så hamnar de under tal som är mindre än de tal de tidigare hade ovanför sig, så detta kan inte leda till att tablåen blir otillåten.

Vi illustrerar med ett exempel: Antag att $n = 9$ och talen $\{1, 2, 5, 9\}$ är utvalda. Vi börjar då med den otillåtna tablå

3	4	6	7	8
1	2	5	9	

Eftersom $1 \not> 3$ så flyttar vi upp ettan till vänster om trean...

1	3	4	6	7	8
-	-	2	5	9	

Vi flyttar undre raden ett steg åt vänster, så att tvåan hamnar under det tal som ettan förut hade ovan för sig, dvs trean.

1	3	4	6	7	8
-	2	5	9		

Eftersom $2 \not> 3$ så flyttar vi även upp tvåan, som hamnar mellan ettan och trean...

1	2	3	4	6	7	8
-	-	-	5	9		

skifta undre raden ett steg åt vänster...

1	2	3	4	6	7	8
-	-	5	9			

vi har nu att både $5 > 3$ och $9 > 4$ så vi skall inte flytta upp några mer tal. Slutligen flyttar vi femman och nian åt vänster, så att vi får en riktig tablå...

1	2	3	4	6	7	8
5	9					

och vi är klara med exemplet. Den algoritm vi hittat på fungerar inte som bevis i matematisk bemärkelse. Det stora problemet är att vi inte övertygat oss om att alla möjliga tablåer verkligen kan skapas med hjälp av algoritmen. Vill vi vara matematiskt korrekta bör vi, för att försäkra oss om detta, hitta en algoritm B som tar ett $y \in Y$ och ger ett $x \in X$ och för vilken

$$B(A(x)) = x.$$

Kan vi bevisa att detta gäller för alla x så har vi bevisat att $|X| = |Y|$, det vill säga att mängderna har lika många element. Det var dock lite svårt att göra ett ordentligt bevis för detta, så vi nöjer oss här med att beskriva en algoritm som potentiellt uppfyller denna egenskap:

- Flytta det undre tal som står längst åt höger, längre åt höger tills dess att det, om vi flyttade det ett steg till, skulle få ett tal större än sig självt över sig.
- Upprepa för övriga tal, från höger till vänster. Det finns två orsaker till att ett tal inte kan flyttas längre till höger: antingen att talen i övre raden är för stora, eller att "flyttvägen" blockeras av ett annat redan flyttat tal i den undre raden.
- Fortsätt tills dess att alla tal i den undre raden är flyttade.
- Med början från vänster, flytta ner de tal i den övre raden som står över luckor i den undre raden, tills dess att hälften av talen står i den undre raden.

Med detta lämnar vi försöken att hitta en bijektion mellan Young-tablåer och val av tal. I kapitel (2.4) använder vi istället det förarbete som gjorts i kapitel (2) för att, med hjälp av Ballot-talen, matematiskt bevisa att antalet Young-tablåer av längd n med högst två rader är $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

2.2 Ballot-tal

Vi har nu, om inte bevisat matematiskt, så åtminstone intuitivt gjort klart för oss att $T(n)$ faktiskt är $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$. Under lösningsprocessen skapade vi en tabell med värden för $B(a, b)$, och dessa värden vet vi ingenting om. Vi ser också att huvuddiagonalen i tabellen tycks vara Catalantalen, som uppenbarligen har något samband med detta problem. För att komma vidare använder vi samma konstgrepp som tidigare; databasen på Internet, men den här gången matar vi in tal från rad 5 (bara för att välja någon) i tabellen. Vi får då reda på att vår tabell faktiskt kallas Catalans triangel, att den heter **A009766**, och att den har anknytning till något som kallas Ballot-talen, vilka dyker upp som lösningen till ett problem som har stora likheter med vårt; ett problem vi skall återkomma till senare.

I en artikel av Ira Gessel [6] (som för övrigt studerat för Richard Stanley, som vi tidigare nämnt i samband med Catalantalen) finns en mycket elegant härledning av en sluten formel för Ballot-talen, som mycket enkelt kan fås att passa de definitioner vi tidigare gjort i samband med tvåradiga Young-Tablåer.

Gessel utgår ifrån en differensekvation snarlikt våra ekvationer (3) och (4):

$$B(n, k) = B(n - 1, k) + B(n, k - 1) \quad (6)$$

$$B(0, 0) = 0 \quad (7)$$

$$B(1, 0) = 1 \quad (8)$$

$$B(0, 1) = -1 \quad (9)$$

Istället för att låta $B(0, 1) = 0$ som vi hade (eftersom det inte finns några tabblåer som bara har en ruta i den undre raden) gör han B antisymmetrisk, så att $B(n, k) = -B(k, n)$. Anledningen är att detta leder till en *mycket* enklare formel för $B(n, k)$, även för de värden på n och k där $n > k$. Utifrån dessa ekvationer konstruerar Gessel en genererande funktion.

2.3 Genererande funktioner

En genererande funktion är en kontinuerlig funktion vars serieutveckling har de (hel)tal man är intresserad av som koefficienter. Antag att vi är intresserade av följderna $1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$ vilken bestäms av differensekvationen $a_{k+1} = a_{k-1} + a_k$ samt begynnelsevillkoren $a_0 = 0$ och $a_1 = 1$ (det vill säga Fibonaccitalen). Den genererande funktionen $F(x)$ för denna talföljd är då, per definition,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Den viktigaste poängen med genererande funktioner är deras användbarhet för att representera och få fram slutna uttryck för talföljder som är definierade i form av differensekvationer. Genererande funktioner används i samband med differensekvationer på samma sätt som Laplace-transformen i samband med differentialekvationer. För att demonstrera detta skall vi följa ett exempel ur Herbert Wilfs bok *generatingfunctionology* [19], där han tar fram en formel för Fibonaccitalen med hjälp av genererande funktioner. På samma sida som detta exempel finns en punktlista där Wilf redogör för den generella metod man använder när man löser problem med hjälp av genererande funktioner, en lista som är så användbar att den förtjänar att återges i sin helhet:

1. Försäkra dig om att de värden för den fria variabeln (säg n) där differensekvationen är uppfylld är klart avgränsade.

2. Ge ett namn åt den genererande funktionen som du letar efter, och skriv ut funktionen i termer av den okända talföljden (det vill säga, kalla den till exempel $A(x)$ och definiera den att vara $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$).
3. Multiplicera båda sidorna av differensekvationen med x^n , och summera över alla värden av n där differensekvationen gäller.
4. Uttryck båda sidorna explicit i form av $A(x)$.
5. Lös ut den okända genererande funktionen ur de ekvationer som skapats.
6. Om du vill ha en exakt formel för talföljden som är definierad av differensekvationen, så försök att expandera $A(x)$ som en potensserie med hjälp av vilken metod som helst som du kan komma på. Speciellt, om $A(x)$ är en rationell funktion (en kvot av två polynom) så kommer detta att åstadkommas med hjälp av partialbråksuppdelning, följt av separat hantering av de respektive termerna.

Vi börjar alltså (punkt ett) med att konstatera att vår differensekvation

$$a_{n+1} = a_{n-1} + a_n$$

gäller för alla ($n \geq 1$). Vi kallar vår genererande funktion för $F(x)$, och definierar den som $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$ (punkt två). Vi multiplicerar vänsterledet med x^n och summerar (punkt 3 och 4):

$$a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + \dots = \frac{F(x) - x}{x}.$$

Gör vi exakt samma sak med högerledet får vi:

$$(a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots) + (a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 \dots) = F(x) + xF(x)$$

Vi löser nu ut $F(x)$ (punkt 5):

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

Vi vill ha en explicit formel för fibonaccitalen, och då måste vi hitta potensserieutvecklingen av $\frac{x}{1-x-x^2}$. Det enklaste sättet att göra detta är att partialbråksuppdelna, så vi slipper den kvadratiske termen i nämnaren. Wilf löser detta genom att först notera att

$$1 - x - x^2 = (1 - xr_+)(1 - xr_-) \quad (r_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2})$$

så vi kan skriva

$$\begin{aligned} \frac{x}{1-x-x^2} &= \frac{x}{(1-xr_+)(1-xr_-)} \\ &= \frac{1}{(r_+ - r_-)} \left(\frac{1}{(1-xr_+)} - \frac{1}{(1-xr_-)} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \sum_{j \geq 0} r_+^j x^j - \sum_{j \geq 0} r_-^j x^j \right\} \end{aligned}$$

Och enligt definitionen av vår genererande funktion så är alltså a_n koefficienten framför x^n i den serieutveckling vi fått fram, det vill säga

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(r_+^n - r_-^n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (10)$$

är en explicit formel för Fibonaccitalen. Det verkar smått osannolikt att uttrycket (10) skall vara heltaligt för alla n , men det är det.

2.4 Bevis med hjälp av Ballot-talen

Vi återgår nu till våra försök att med Ira Gessels hjälp ta fram en sluten formel för Ballot-talen, som alltså även beskriver antalet tvåradiga tabläer med en viss form. Gessel går direkt från ekvationerna (6)–(9) till uttrycket

$$(1-x-y) \sum_{m,n=0}^{\infty} B(m,n)x^m y^n = x-y$$

som faktiskt är ekvivalent med dessa ekvationer. I vänsterledet har vi motsvarande $B(m,n) - B(m-1,n) - B(m,n-1)$, och högerledet svarar mot begynnelsevillkoren. Vi kan nu lösa ut vår genererande funktion (som vi inte givit något namn):

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} B(m,n)x^m y^n = \frac{x-y}{1-x-y}$$

och härifrån få de slutna uttryck för Ballot-talen som vi söker:

$$B(m,n) = \binom{m+n-1}{m-1} - \binom{m+n-1}{m} = \frac{m-n}{m+n} \binom{m+n}{m}. \quad (11)$$

Formel (11) svarar mot följande tabell:

$m \setminus n$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	0	-1	-2	-3	-4	-5
2	1	1	0	-2	-5	-9	-14
3	1	2	2	0	-5	-14	-28
4	1	3	5	5	0	-14	-42
5	1	4	9	14	14	0	-42
6	1	5	14	28	42	42	0

De negativa talen i tabellen har ingen egentlig kombinatorisk betydelse. Kombinatorikern Percy A. MacMahon, vars arbete i början av 1900-talet [11] haft stor betydelse för den senare kombinatoriska forskningen, kallade en sådan funktion för "redundant genererande funktion". De egentliga Ballot-talen är de tal i tabellen som är positiva.

Vi kan nu bevisa det vi kom fram till i det inledande kapitlet, nämligen att antalet Young-tablåer av storlek k med en eller två rader är $\binom{k}{\lceil k/2 \rceil}$. Vår algoritm för att konstruera tablåer ledde till ekvationerna (3) och (4). För $m > n$ är dessa ekvationer identiska med ekvationerna för Ballot-talen, och vi kan identifiera $B(m, n)$ som antalet tablåer med $m - 1$ tal i den övre raden och n tal i den undre.

Antalet tablåer med k rader ges alltså som summan av de $B(m, n)$ för vilka $m + n = k + 1$ och $m > n$. Vi har nu att

$$\begin{aligned}
 \sum_{\substack{m > n \\ m+n=k+1}} B(m, n) &= \sum_{i=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} B(k+1-i, i) \\
 &= \sum_{i=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \binom{k}{k-i} - \binom{k}{k-i+1} \\
 &= \sum_{i=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \binom{k}{k-i} - \sum_{j=-1}^{\lfloor k/2 \rfloor - 1} \binom{k}{k-j} \\
 &= \binom{k}{k - (\lfloor k/2 \rfloor)} - \binom{k}{k+1} \\
 &= \binom{k}{\lceil k/2 \rceil}
 \end{aligned}$$

vilket visar påståendet.

2.5 Ballot-talens ursprung

Ballot-talen har fått sitt namn från följande problem: Antag att det varit val, och kandidaterna A och B fått a respektive b röster. Om $a > b$ hur stor är då sannolikheten att A haft fler röster än B under hela rösträkningen? Denna fråga ställdes för första gången i slutet av 1800-talet av fransmannen M. Bertrand, och fick sitt svar 1887 i en artikel av D. André [7].

Det finns en direkt koppling mellan tablåer med högst två rader och de röstningsförlopp vi är intresserade av här, genom att ett tal i den övre raden svarar mot en röst på kandidat A och ett tal i den undre raden svarar mot en röst på kandidat B .⁴

Det är lätt att inse att det totala antalet röstförlopp som kan inträffa är $\binom{a+b}{a}$. Om vi kallar antalet förlopp där A hela tiden haft fler röster än B för $B(a, b)$ (för att vara specifika får vi säga att $B(a, b)$ räknar antalet möjligheter efter det att a fått den första rösten, eftersom A inte har fler röster än B när båda har noll röster) så är den sannolikhet vi söker

$$\frac{B(a, b)}{\binom{a+b}{a}}. \quad (12)$$

Sätter vi in uttrycket för ballottalen (11) i (12) ser vi att lösningen till Ballotproblemet är $\frac{a-b}{a+b}$.

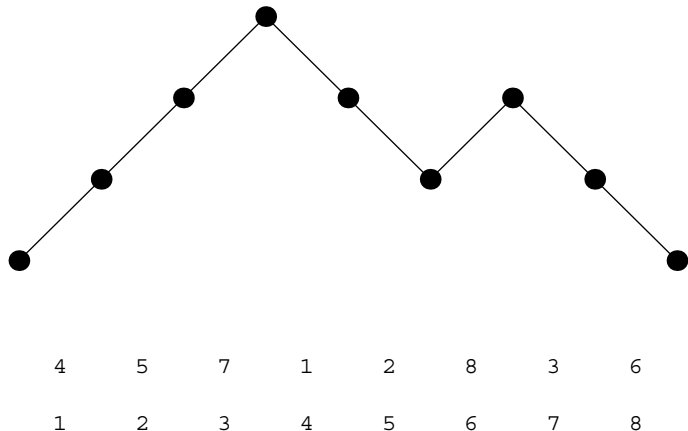
2.6 Dyckvägar

En mycket användbar teknik för att visualisera det fenomen som Ballot-talen och de tvåradiga tablåerna beskriver är Dyckvägar⁵. En Dyckväg är en

⁴Att kandidat A under hela förloppet måste *leda*, och sedan *vinna* svarar i tablåvärlden mot att vi bara är intresserade av tablåer där den övre raden är längre än den undre, samt den första ettan redan utplacerad, men detta är något vi inte skall fästa någon större vikt vid.

⁵Walther Franz Anton von Dyck (1856–1934) arbetade med gruppteori, bland annat för Felix Klein.

väg i ett heltalsgitter från punkten $(0, 0)$ till en punkt $(2n, 0)$ som: 1) bara innehåller steg av typen $(1, 1)$, det vill säga snett upp åt höger, och $(1, -1)$, det vill säga snett ned åt höger och 2) aldrig går under x -axeln. Figur (2) visar en typisk Dyckväg. Antalet Dyckvägar av längd $2n$ räknas av Cata-



Figur 2: Bilden visar en typisk Dyckväg. Under Dyckvägen visas den motsvarande 3412-undvikande involutionen.

lantalen, och Dyckvägar som slutar i punkten (n, k) (som alltså egentligen inte är Dyckvägar, men ändå brukar kallas “Dyckvägar som slutar i punkten ...”) räknas av Ballot-talen. Med detta avslutar vi undersökningen av de tvåradiga tablåerna.

3 Rekapitulation

När vi undersökte kombinatoriken kring Young-Tablåer med två rader fick vi användning av en rad olika kombinatoriska tekniker: En tabell med exempel ledde till förkastandet av vår första hypotes, att vårt problem beskrevs av Catalantalen. Genom att föreställa oss en stegvis konstruktion av våra kombinatoriska objekt (dvs de tvåradiga Young-Tablåerna) kunde vi formulera en differensekvation som, tillsammans med begynnelsevillkor, fullständigt beskrev problemet. Detta kunde vi betrakta som en första lösning på problemet, eftersom vi då relativt enkelt (speciellt genom att skriva ett litet datorprogram) kunde ta fram antalet tablåer för godtyckliga värden på n , antalet rutor i tablåerna. Med hjälp av vår differensekvation fick vi på köpet,

genom att göra en två-dimensionell tabell, värden för antalet tablåer med en specifik form, något vi inte frågade efter inledningvis. För att komma vidare utnyttjade vi en stor databas över heltalsföljder (The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences), från vilken vi fick fram att de tal vi beräknade faktiskt hade en mycket enkel sluten formel i form av den centrala binomialkoefficienten $\binom{n}{\lceil n/2 \rceil}$. För att förklara detta faktum konstruerade vi sedan en bijektion mellan de kombinatoriska objekt som $\binom{n}{\lceil n/2 \rceil}$ beskriver, och de tvåradiga Young-Tablåerna.

Eftersom också de övriga talen i tabellen, och inte bara de diagonalsummor som beskriver antalet Young-Tablåer med två rader, väckt vår nyfikenhet skickade vi utdrag ur tabellen till databasen på Internet, och vi fick då kontakt med de så kallade Ballot-talen. Med Ira Gessel vid vår sida kunde vi sedan härleda en formel för hela tabellen; en process som gick via genererande funktioner, vilka vi också testade på ett lite enklare exempel hämtat ifrån en bok av Herbert Wilf. För att sluta säcken var vi tvungna att utföra några matematiska operationer på formeln för Ballot-talen så att vi fick fram den centrala binomialkoefficienten, vilken vi ursprungligen var ute efter.

Som en avslutning gick vi sedan till botten med det nära sambandet mellan det problem kring röstning som givit namnet åt Ballot-talen och våra tvåradiga Young-Tablåer. Detta med hjälp av en annan artikel (som vi hittat genom att söka efter information om Ballot-problemet) författad av Peter Hilton och Jean Pedersen, där vi också fick bekanta oss med Dyckvägar.

4 Young-Tablåer

En *permutation* av talen $1, \dots, n$ är ett sätt att flytta om ordningen på dessa tal. Så är till exempel 1423 och 3412 permutationer av 1234. En permutation kan ses som en funktion som går från permutationer till permutationer⁶ (jag tar hjälp av en lärobok i diskret matematik skriven av Norman L. Biggs [1]). Om talet k står på plats i i en permutation σ betyder detta att det tal som står på plats i i den permutation som σ opererar på skall flyttas till plats k . Låter vi till exempel 4132 operera på 2341 skall vi

⁶Observera att detta kan vara förvirrande: permutationer är både funktioner, och det som funktionerna opererar på.

1. flytta tvåan till plats fyra,
2. flytta trean till plats ett,
3. flytta fyran till plats tre (den får alltså stå kvar på samma plats), och
4. flytta ettan till plats två.

Detta ger oss permutationen 3142. Mängden av alla permutationer av talen $1, \dots, n$ (permutationer med längden n) kallas för S_n , och den innehåller $n!$ element.

En *involution* är en speciell permutation som bara tillåter att elementen i den permutation den opererar på antingen står kvar på samma plats, eller att två element byter plats. En konsekvens av detta är att om man låter en involution operera två gånger på samma permutation så får man tillbaka den permutation man hade från början. Permutationen 14523 är ett exempel på en involution. Vi kallar mängden av alla involutioner av längd n för I_n . Det finns ingen enkel formel för antalet involutioner av längd n , men den talföljd som beskriver antalet involutioner börjar

$$1, 1, 2, 4, 10, 26, 76, 232, 764, 2620 \dots \quad (13)$$

Ett förbluffande faktum är att denna talföljd även beskriver antalet Young-Tablåer med n rutor. Vi skall med hjälp av ett avsnitt ut matematikern och datalogen Donald E. Knuths extremt betydelsefulla bok "The Art of Computer Programming" [8], försöka ge en antydning till förklaring av varför det förhåller sig på detta sätt.

Grunden i resonemanget är två algoritmer på en typ av tablåer som uppfyller alla krav som finns på Young-Tablåer förutom att de inte måste innehålla alla tal $1, \dots, n$:

- En algoritm för att lägga till ett godtyckligt tal (som inte redan finns i tablåen) till en tablå.
- En algoritm för att ta bort ett av talen från en tablå.

4.1 Algoritm I

Denna algoritm (och dess invers) kallas för *Robinson–Schensted–Knuth algoritmen* (förkortas RSK) efter de tre män som bidragit till dess slutgiltiga form. Låt P vara en tablå och x ett tal som inte finns i P . Vi sätter in x i P genom att rad för rad jämföra tal i P med x . Vi börjar i den översta raden.

Om x är större än alla tal i den rad vi undersöker, så placera x längst till höger i denna rad. Ta annars det tal y i denna rad som är närmast större än x och placera in x i dess ställe. Gå vidare och försök placera in y i nästa rad i tablå. Om det inte finns någon nästa rad, så placera y längst till vänster i en ny understa rad.

Exempel: Antag att

$$P = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 5 \\ \hline 2 & 6 & \\ \hline \end{array}$$

och vi skall placera in $x = 3$. Vi börjar då med att jämföra 3 med talen 145 och konstaterar att 4 är det tal som är närmast större än 3. Alltså byter vi ut 4 mot 3, vilket ger tablå

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 6 & \\ \hline \end{array}$$

och vi skall nu placera in 4 i den andra raden. Eftersom 6 är det tal som är närmast större än 4 så byter vi ut 6 mot 4 vilket ger

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 4 & \\ \hline \end{array}$$

och vi placerar nu slutligen 6 underst i tablå:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 4 & \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array}$$

4.2 Algoritm D

Algoritm D är en "invers" av I på det sättet att om vi börjat med en tablå P , satt in talet y och detta resulterat i att det sista tal som sattes in i tablå

(insättningsalgoritmen innebär ju att man får en sekvens av olika tal som man placerar in i olika rader) hamnade på position (i, j) och vi därmed fått tablån P' , får vi, om vi använder D för att ta bort det tal som står på (i, j) i P' tillbaka tablån P och talet x .

På samma sätt gäller att om vi använder algoritmen D på tablån P och börjar med att ta bort talet som står på (i, j) och detta resulterar i tablån P' och talet y , så kan vi få tillbaka P genom att använda I på tablån P' och talet x .

Att göra I baklänges innebär att vi börjar på en position (i, j) i tablån (rad i , kolumn j) och plockar ut detta tal x . Vi går sedan till raden ovanför (om det finns någon sådan rad) och byter ut det tal y som är närmast mindre än x med x . På samma sätt fortsätter vi med alla rader.

Exempel: Antag att

$$P = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 5 \\ \hline 2 & & \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array}$$

och vi skall ta bort talet på $(2, 1)$, det vill säga tvåan. Vi börjar då med att ta bort tvåan, vilket ger

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 5 \\ \hline 3 & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}.$$

Vi tittar sedan på raden ovanför, som innehåller 145 och byter ut talet som är närmast mindre än 2, dvs 1 mot tvåan, vilket ger

$$P' = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 4 & 5 \\ \hline 3 & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}.$$

Man kan se att om vi använder I för att placera in 1 i denna tablå, så får vi tillbaka P .

4.3 Young-Tablåer och involutioner

Med hjälp av algoritmen I kan vi, genom att sätta in ett tal i talet, skapa en tablå P med hjälp av en permutation σ . Men tydligen är antalet tablåer mindre än antalet permutationer, så det måste gå att skapa samma tablå på många olika sätt. Man kan hålla ordning på konstruktionsprocessen med

hjälp av en andra tablå, där vi registrerar i vilken ordning elementen i tablåen placerades in. Antag alltså att vi har en permutation, till exempel

$$\begin{pmatrix} 51432 \\ 12345 \end{pmatrix}.$$

Vi bygger nu upp tablåen P med hjälp av permutationen σ . Men om inplacerandet av talet x med ordningsnummer k i permutationen resulterade i att rutan (i, j) skapades i P , så placerar vi en motsvarande ruta (i, j) i tablåen Q och placerar där talet k . Med hjälp av Q kan vi nu, om vi vill, använda D upprepade gånger på P för att få tillbaka σ .

Permutationen 51432 leder till följande sekvens av tablåer

	P	Q
Sätt in 5	5	1
	1	1
Sätt in 1	5	2
	1 4	1 3
Sätt in 4	5	2
	1 3	1 3
	4	2
Sätt in 3	5	4
	1 2	1 3
	3	2
	4	4
Sätt in 2	5	5

Detta resonemang ger oss en bijektion mellan *ordnade par av tablåer* (P, Q) av storlek n där båda tablåerna har samma form och permutationer av storlek n . Vi kan skriva detta som

$$\sum_{\lambda \vdash n} f_{\lambda}^2 = n!$$

där $\lambda \vdash n$ betyder att λ är en form för en tablå med n rutor, och f_{λ} är antalet tablåer som har formen λ .

Ett faktum som är ganska förvånande är att om permutationen $\begin{pmatrix} 4132 \\ 1234 \end{pmatrix}$ ger tablåparet (P, Q) så ger den inversa permutationen (som kan fås genom att byta plats på de två raderna som beskriver permutationen, och sedan sortera kolumnerna så att den undre raden är sorterad) tablåparet (Q, P) . Involutioner är, som vi konstaterade i avsnitt (4), sina egna inverser. Detta leder till

att om vi skapar tablåer med hjälp av en involution så måste $(P, Q) = (Q, P)$. Alltså måste $P = Q$. Eftersom varje involution ger en specifik tablå är antalet involutioner lika med antalet tablåer. För att försäkra oss om att vi verkligen bara får en tablå testar vi med involutionen $\begin{pmatrix} 43215 \\ 12345 \end{pmatrix}$:

	P	Q
Sätt in 4	4	1
	3	1
Sätt in 3	4	2
	2	1
	3	2
Sätt in 2	4	3
	1	1
	2	2
	3	3
Sätt in 1	4	4
	1 5	1 5
	2	2
	3	3
Sätt in 5	4	4

5 Young–Tablåer med fixerad form

Vi har tidigare studerat tablåer som fick ha högst två rader. Antag att vi bestämmer att tablåen måste ha formen λ där λ är en lista med radlängder $\ell_1 > \ell_2 > \dots > \ell_k$. Den fascinerande formeln för antalet tablåer är då [8]

$$f_\lambda = \frac{n!}{\prod_{(i,j) \in \lambda} h(i,j)} \quad (14)$$

där $h(i, j)$ är något som kallas “hook”-längden, fritt översatt till “kroklängden”, för rutan (i, j) . Kroklängden är det antal rutor som fås i den “krok” som bildas av rutorna till höger och rakt nedanför (i, j) i tablåen, inklusive

rutan (i, j) själv. Alltså får vi i tablån

—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	
—	*	*	*	*		
—	*	—				
—	*					
—						

kroklängden 6 för rutan $(3, 2)$.

Fram tills 1997 fanns det inget enkelt bevis för sats (14), men då konstruerade Jean–Christophe Novelli, tillsammans med Igor Pak och Alexander V. Stoyanovskii ett bijektivt bevis [12] som anses vara beviset med stort B av denna sats [9]. Novelli m. fl. konstruerar algoritmer liknande algoritmerna I och D med vars hjälp de skapar en bijektion mellan de två mängderna

1. Tablåer med n rutor, med en given form λ som inte har några restriktioner vad gäller storleksförhållandet mellan rutorna. Det finns uppenbarligen $n!$ sådana tablåer.
2. Par (P, H) där P är en Young–Tablå och H är en tablå där varje ruta (i, j) innehåller ett tal mellan 1 och $h(i, j)$, något de kallar för en “krokfunktion”.

Eftersom antalet krokfunktioner med form λ är $\prod_{(i,j) \in \lambda} h(i, j)$, så säger bijektionen att

$$f_\lambda \times \prod_{(i,j) \in \lambda} h(i, j) = n!$$

vilket är ekvivalent med ekvation (14).

5.1 Young–Tablåer och generaliserade Ballot–tal

Om vi tänker tillbaka på vad vi skrivit tidigare om Ballot–problemet inser vi att en tablå med en bestämd form motsvarar ett röstningsförlopp där antalet kandidater ges av antalet rader, och deras slutplaceringar av radernas respektive längd. Det var relativt enkelt att räkna antalet röstförlopp då

vi bara hade två kandidater, och detta resultat motsvarade exakt antalet tablåer med två rader med en viss form.

Antalet röstförlopp med k kandidater, där kandidaterna slutat på positioner $\ell_1 > \ell_2 > \dots > \ell_k$ måste ges av krokängdsformeln. Ballotproblemet för flera kandidater har studerats helt oberoende av teorin kring Young–Tablåer och har lösts genom att betrakta röstförloppet som en Dyckväg⁷ i flera dimensioner.

Problemet, vars ursprung kan sträcka sig ändå tillbaka till en artikel av Abraham De Moivre (1667–1754) 1711, har sedan dess utvecklats och generaliserats, och när vi söker efter en formel för antalet röstförlopp, givet att k kandidater som slutligen fått $a_1 > a_2 > \dots > a_k$ röster hittar vi följande formel

$$N = n! \det\left(\frac{1}{u(i, j)}\right) \quad (15)$$

som kräver lite ytterligare förklaringar, i en artikel av Michael Filaseta [4].

Filaseta utgår från en generaliserad variant av Ballot-problemet där man kan bestämma *hur mycket* kandidaterna måste leda över varandra under röstförloppets gång. Detta specificeras av tal t_1, \dots, t_k , som anger att

$$A_i(m) < A_{i-1}(m) + t_i \quad (m = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, k) \quad (16)$$

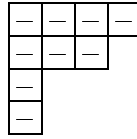
där $A_i(m)$ är antalet röster kandidat i har fått när m personer har röstat. Vi tillåter att kandidaterna har lika många röster, vilket i ekvation (16) motsvaras av att $t_1 = \dots = t_k = 1$. (Det icke intuitiva sättet att formulera “ \leq ” beror på att vi följer Filasetas artikel.) Filaseta låter $u(i, j) = a_j + S(i, j)$, där $S(i, j) = \sum_{v=1}^i t_v - \sum_{v=1}^j t_v$, vilket för oss leder till att $u(i, j) = a_j + i - j$.

Vårt tidigare resonemang säger att uttrycket (15) skall vara ekvivalent med krokängdsformeln (14), det vill säga:

$$n! \det\left(\frac{1}{(a_j + i - j)!}\right) \equiv \frac{n!}{\prod_{(i,j) \in \lambda} h(i, j)} \Leftrightarrow \det\left(\frac{1}{(a_j + i - j)!}\right) \equiv \frac{1}{\prod_{(i,j) \in \lambda} h(i, j)} \quad (17)$$

⁷Egentligen inte riktiga Dyckvägar, eftersom de avslutas i punkten (ℓ_1, \dots, ℓ_k) som inte nödvändigtvis ligger på x -axeln.

Vi testar på tablån



Kroklängdsformeln blir:

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{7 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} = 216.$$

Matrisen vi får i Filasetas formel är

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{24} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{120} & \frac{1}{6} & 1 & 0 \\ \frac{1}{720} & \frac{1}{24} & 1 & 1 \\ \frac{1}{5040} & \frac{1}{120} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

vars determinant är $\frac{1}{1680}$. Multiplicerar vi detta med $9!$ så får vi 216 , samma sak som vi fick för kroklängdsformeln. Det tycks dock inte finnas något enkelt sätt att se att de två formlerna är ekvivalenta.

6 Young–Tablåer med högst n rader

Att räkna tablåer med begränsat antal rader större än två är ganska svårt. Amitai Regev [15] fick 1981 fram uttrycket

$$T_3(n) = \sum_{i=0}^{n/2} \binom{n}{2i} C_i \quad (18)$$

där C_i är det i :te Catalantalet, för antalet Young–Tablåer med högst tre rader. Dominique Gouyou–Beauchamps fick 1989 fram uttrycken

$$T_4(n) = C_{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} C_{\lceil (n+1)/2 \rceil} \quad (19)$$

och

$$T_5(n) = 6 \sum_{i=0}^{n/2} \binom{n}{2i} C_i \frac{(2i+2)!}{(i+2)!(i+3)!} \quad (20)$$

för tablåer med högst fyra respektive fem rader. I en artikel [5] från 1990, som visat sig mycket användbar för den fortsatta forskningen kring Young-Tablåer, ger Ira Gessel en generell metod för att ta fram dessa uttryck med hjälp av symmetriska funktioner.

Symmetriska funktioner är en sorts genererande funktioner som har många fascinerande egenskaper. Även om själva idén som ligger bakom de symmetriska funktionerna (som uttömmande redovisas i boken *Symmetric functions and Hall polynomials* av I. G. MacDonald [10]) inte är svår att förstå⁸ krävs det en hel del ganska krånglig matematik för att nå fram till de resultat som används för att räkna tablåer med begränsat antal rader.

7 Mönsterundvikande

En konsekvens av algoritmen I som vi inte nämnt är att om man skapar en tablå P med hjälp av en permutation π så bestäms antalet rader i P av den längsta avtagande sekvensen i π . En avtagande sekvens av längd k är en följd av tal $a_1 > \dots > a_k$ som står i denna ordning i π . Begreppet *längsta avtagande sekvens* är ett specialfall av det mer generella begreppet *mönster* på permutationer. Vi hämtar nu, för att underlätta de fortsatta resonemangen, en del notation från Anders Claessons licenciatuppsats "Generalised Pattern Avoidance" [2].

Ett mönster är en permutation $\sigma \in S_k$. En permutation $\pi \in S_n$ *undviker* σ om det inte finns någon delföljd i π där talen⁹ är i samma relativa ordning som i σ . Detta betyder till exempel att $\pi \in S_n$ undviker 132 om det inte finns några $1 < i < j < k \leq n$ sådana att¹⁰ $\pi(i) < \pi(k) < \pi(j)$, det vill säga det största talet står i mitten och det minsta till vänster.

På ett liknande sätt som Claesson definierar vi den delmängd av S_n (permutationer av längd n) respektive I_n (involutionser av längd n) som undviker mönstret σ som $S_n(\sigma)$ respektive $I_n(\sigma)$. Vi kommer i fortsättningen även att intressera oss för mängden involutionser utan fixpunkter av längd $2n$ (det vill

⁸det handlar om funktioner i flera variabler, säg $f(x_1, \dots, x_k)$ vars värde är oberoende av i vilken ordning man stoppar in variablerna.

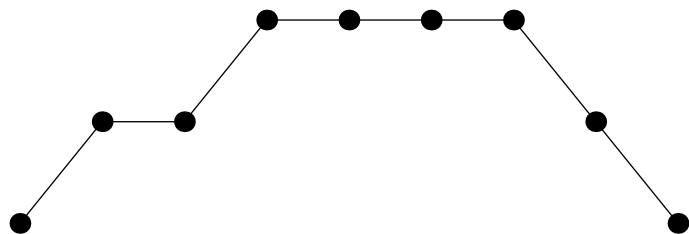
⁹Claesson arbetar med bokstäver snarare än tal.

¹⁰Här betyder $\pi(i)$ det tal som står på plats i i π .

säga involutioner som inte låter något av talen i permutationen den opererar på stå kvar på samma plats), vilken vi kallar för U_{2n} . I denna terminologi kan vi beskriva mängden av alla involutioner vars längsta avtagande sekvens är högst tre som $I_n(321)$, och antalet sådana involutioner som $|I_n(321)|$.

7.1 Motzkintal

Ekvation (18) som Regev [15] tagit fram för antalet tablåer med högst tre rader beskriver Motzkintalen¹¹ [3], vars enklaste tolkning förmodligen är i form av Motzkinvägar. Dessa är som Dyckvägar, förutom att det också



7	2	8	4	5	6	1	3
1	2	3	4	5	6	7	8

Figur 3: Bilden visar en typisk Motzkinväg. Under visas den motsvarande 4321-undvikande involutionen.

är tillåtet att gå steg av typen $(1,0)$, det vill säga parallellt med x -axeln. Figur (3) visar en typisk Motzkinväg. De första Motzkintalen är

$$1, 2, 4, 9, 21, 51, 127, 323, \dots \quad (21)$$

Algoritm I säger oss att Motzkintalen även räknar antalet involutioner vars längsta avtagande sekvens har längd tre. Vi har alltså tre till synes helt olika kombinatoriska objekt som, för varje storlek¹² på objekten, är lika många:

¹¹Efter Theodor Motzkin, född 1918.

¹²I artiklar som behandlar kombinatoriska objekt används ofta termen "vikt" för att beskriva objektens storlek. Vi låter alltså vikten (storleken) av en Motzkinväg med n steg vara n , men det är även möjligt att "väga" Motzkinvägar på andra sätt.

1. Young-Tablåer med högst tre rader.
2. Involutioner vars längsta avtagande sekvens har längden tre.
3. Motzkinvägar.

Algoritmerna I och D ger oss en bijektion mellan tablåer och involutioner. Det vore fint om man kunde hitta någon motsvarande enkel koppling mellan antingen tablåer och Motzkinvägar, eller involutioner och Motzkinvägar. Vi skall strax undersöka detta närmare.

7.2 Mönsterundvikande och cykelstrukturer

Mönsterundvikande på permutationer, dvs bijektioner för identiteter $|S_n(\sigma)| \equiv |X_n|$ med varierande mönster σ och kombinatoriska objekt X är ett relativt nytt forskningsområde inom kombinatoriken. Med datorns hjälp¹³ och Sloanes [16] databas på Internet kan man med hjälp av de inledande termerna i sekvensen, dvs $|S_1(\sigma)|, |S_2(\sigma)|, |S_3(\sigma)|, \dots$ göra kvalificerade gissningar av vilken talföljd man har att göra med. Vi tar med hjälp av vårt datorprogram fram så många termer att ett av följande alternativ inträffar:

1. Sökningen i databasen säger att talföljden är okänd.
2. Vi hittar exakt en talföljd som inleds av de termer vi fått fram. Vi antar då att det vi studerar, till exempel $S_n(\sigma)$ för något σ , har något gemensamt med den kombinatorik som finns beskriven i databasen i anknytning till talföljden. Med detta som grund kan vi gå vidare och till exempel försöka hitta en bijektion mellan de objekt vi studerar, och något som finns beskrivet i databasen.

Vi tabellerar i kapitel (A), Tabeller och Bilder, resultatet av sökningar i Sloane för $S_n(\sigma)$, $I_n(\sigma)$, $U_{2n}(\sigma)$ (det vill säga permutationer, involutioner och involutioner utan fixpunkter) för alla möjliga $\sigma \in S_k$ ($k = 3, 4$). Det visade sig att fem termer (som ibland kan vara ganska tidskrävande att ta fram) var tillräckligt för att få endast en , eller ingen, träff i Sloane. Observera att de namn som anges i tabellerna är just gissningar och antaganden om

¹³Vi har använt det utmärkta matematikprogrammet MATHEMATICA.

vilka talföljder vi har att göra med. I vissa fall, till exempel då vi har att göra med Catalantalen, finns det ingen större anledning att tvivla på att våra antaganden är riktiga. Tvärtom är det med antagandet att $|U_n(3142)|$ genererar, som det står i Sloane, “Number of 6-ary Lyndon words with trace 1 mod 6”.

För att tydligare se eventuella samband i tabellerna, som är ganska många, kan det vara bra att visualisera mönstren. Det vi är ute efter är att se samband mellan mönster och de talföljder som genereras (speciellt om flera olika mönster tycks ge samma talföljd). För att underlätta detta sökande och upptäckande av samband visualiserar vi våra mönster med hjälp av små bilder som visar mönstrens cykelstruktur. Vi använder följande regler när vi konstruerar dessa bilder:

- En fixpunkt representeras av en punkt. Så skall till exempel \cdots tolkas som mönstret (permutationen) 1234, som ju har fyra fixpunkter.
- En cykel av längden två representeras av en kurva eller en linje beroende på om cykeln går mellan närliggande positioner i mönstret eller om den “innesluter” någonting. Bilden “-” skall tolkas som 21, medan mönstret 321, där alltså cykeln innesluter en fixpunkt, ritas \frown där alltså cykeln blir en båge som går *ovanför* fixpunkten.
- En cykel med längd större än två ritas som en sluten kurva där
 - Ett hopp framåt till närmast framförliggande plats blir ett streck: “-”.
 - Ett hopp framåt som innesluter någonting blir en båge *ovanför* det som innesluts.
 - Ett hopp bakåt ett steg blir ett streck: “-”.
 - Ett hopp bakåt som innesluter någonting blir en båge *under* det som innesluts.

Tabellerna (1) och (2) som också hittas i kapitel (A), Tabeller och Bilder, visar hur mönster översätts till bilder enligt dessa regler.

Våra experiment (det är nödvändigt att nu, om inte förr, bläddra fram till tabellerna och titta på dem för att resten av texten i denna uppsats skall bli meningsfull) har onekligen gett oss en hel del ytterligare material att

arbeta med utöver sambandet mellan involutioner som undviker \frown (4321) och Motzkinvägar. Med utgångspunkt från de tabeller vi tagit fram skall vi nu, helt i linje med den matematiska prosans praxis, göra några påståenden (som ibland knyter an till våra tidigare resonemang) och försöka bevisa dessa.

Ett centralt tema i det följande är förhållandet mellan mönster (i den vanliga enligt ovan definierade bemärkelsen), och cykelstrukturer. I många fall har dessa två sätt att beskriva en permutation inte någon uppenbar relation till varandra. Det visar sig dock att det åtminstone för involutioner och involutioner utan fixpunkter, finns intressanta kopplingar mellan dessa två begrepp. Ett exempel på en sådan koppling är att alla involutioner längd n som undviker *mönstret* 3412 även undviker den cykelstruktur som mönstret 3412 har (vilken vi alltså visualiserar med bilden \frown). Mer förvånande är att även det omvända gäller. Vi skall strax definiera vad vi menar med att en permutation undviker en cykelstruktur.

För att tydliggöra skillnaden mellan mönster och cykelstrukturer definierar vi två operatorer \otimes och \odot vilka tar två permutationer av längd k och n och skapar en mängd med permutationer av längd $k+n$. Operatorerna beskriver två olika sätt att dela in en permutation i två disjunkta delar, den ena med avseende på *mönster*, den andra med avseende på *cykelstruktur*.

Givet två permutationer $p \in S_k$ och $\pi \in S_n$ säger vi att $\psi \in p \otimes \pi$ om det finns ett delord p' av ψ som i ψ har samma cykelstruktur som p , och π är den permutation man får om man tar bort delordet p' från ψ . Betydelsen av detta förstås enklast genom att tänka sig bilder av permutationerna p och π . Permutationerna i mängden $p \otimes \pi$ fås då genom att sträcka ut bilderna på längden, och lägga dem över varandra. Den kryssprodukt som är enklast att föreställa sig är produkten av en permutation p och identitetspermutationen (som består av enbart fixpunkter). Vi får då alla möjliga sätt att "skjuta in" fixpunkter i permutationen. Så är till exempel

$$21 \times 12 = \{1243, 1324, 1432, 2134, 3214, 4231\}$$

(siffror som hör till 12 är kursiverade) eller ekvivalent

$$- \times \cdot\cdot = \{\cdot\cdot-, \cdot-\cdot, \cdot\cdot\smile, -\cdot\cdot, \smile\cdot\cdot, \smile\cdot\cdot\}$$

På liknande sätt som för \otimes definierar vi nu \odot . Istället för att titta på cykelstrukturen i permutationerna intresserar vi oss nu för permutationerna som

mönster. Givet två permutationer $p \in S_k$ och $\pi \in S_n$ säger vi att $\psi \in p \odot \pi$ om det finns ett delord p' av ψ som motsvarar mönstret p och π är den permutation man får då man tar bort delordet p' från ψ .

Skillnaden mellan operatorerna \otimes och \odot ligger alltså i huruvida man ser en permutation p och ett delord p' (som ju inte är en permutation) som lika om de har samma cykelstruktur eller om man ser dem som lika om de motsvarar samma mönster. Om de motsvarar samma mönster kan man också säga att p är den permutation man får om man projicerar p' på mängden $\{1, 2, 3, \dots\}$. Detta innebär i princip att man bara bevarar storleksförhållandet mellan talen i p' .

Som en generalisering av dessa definitioner skriver vi $\otimes p$ för unionen av de mängder man får då man applicerar \otimes på samma permutation många gånger det vill säga $(p \otimes (p \otimes (\dots \otimes p) \dots))$. Vi skriver $\otimes^n p$ för \otimes applicerad n gånger på p . Antag vidare att $A, B \subset S$. Vi låter då $A \otimes B$ vara unionen av de mängder som bildas för alla kombinationer av element mellan A och B .

För att exemplifiera hur våra definitioner kan användas har vi till exempel att $\odot^n 1 = S_n$, det vill säga mängden av alla permutationer av längd n . Om vi istället använder den andra operatören får vi $\otimes^n 1 = 1234 \dots n$. Eftersom 1 är en fixpunkt får vi mängden av alla permutationer av längd n som bara består av fixpunkter. Det finns bara en sådan permutation, och det är identitetspermutationen. Vi har också att

$$\otimes^n 21 = \{\text{involutioner av längd } 2n \text{ utan fixpunkter}\}.$$

Vi bevisar nu ett antal påståenden genom att se mönster som cykelstrukturer:

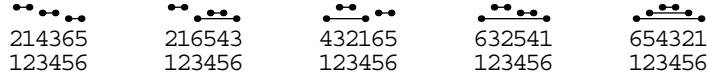
Påstående 1. *Antalet involutioner av längd $2n$ utan fixpunkter som undviker något av mönstren $\cdot -$, $- \cdot$, \frown , \smile och \frown är C_n , det n :te Catalan-talet.*

Bevis. Cykler av längd två kan parvis förhålla sig till varandra på tre olika sätt:

1. De kan ligga sida vid sida.
2. De kan överlappa varandra.

3. Den ena kan vara innesluten i den andra.

Involutioner som undviker \curvearrowright har inga par av cykler av längd två som överlappar varandra. Figur (4) visar $U_6(\curvearrowright)$, där U_n står för mängden av alla

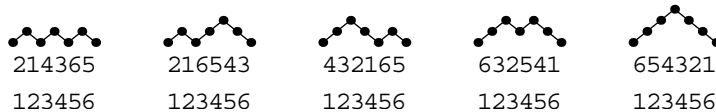


Figur 4: Visualisering av $U_6(\curvearrowright)$.

involutioner av längd n utan fixpunkter. En naturlig funktion från $U_n(\curvearrowright)$ till Dyckvägar (som ju räknas av Catalantalen) är att låta det första elementet i varje cykel bli ett $(1, 1)$ -steg och det andra elementet bli ett $(1, -1)$ -steg i den motsvarande Dyckvägen. Att två cykler inte överlappar varandra motsvarar i Dyckvägen att;

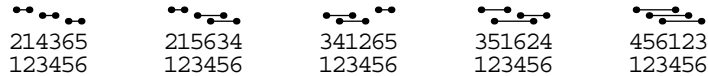
- varje cykel motsvarar ett $(1,1)$ och ett $(1,-1)$ -steg som ligger på samma höjd.
- de två steg som en cykel motsvarar aldrig har någonting mellan sig på samma eller lägre höjd.

Dessa två förhållanden gör att vi lätt kan bilda en motsvarande funktion från Dyckvägar till $U_n(\curvearrowright)$, genom att identifiera par av steg i Dyckvägen. Att samtidigt betrakta figurerna (4) och (5) skall räcka för att se hur bijektionen fungerar. Vi ser detta som ett bevis för att påståendet gäller för mönstret \curvearrowright .



Figur 5: De Dyckvägar som motsvarar $U_6(\curvearrowright)$. (Det vill säga alla Dyckvägar av längd 6.)

Involutioner som undviker \curvearrowleft har inga par av cykler av längd två där den ena cykeln är innesluten i den andra. Vi vill nu hitta en bijektion liknande den för mönstret \curvearrowright . Använder vi exakt samma algoritm, det vill säga omvandlar



Figur 6: Visualisering av $U_6(\curvearrowright)$.

det första elementet i varje cykel till ett $(1, 1)$ -steg och det andra till ett $(1, -1)$ -steg, ser vi att detta faktiskt, för våra datorgenererade exempel, ger en bijektion. Hur skall vi tolka detta?

Vi kan konstruera en funktion från Dyckvägar av längd n till element i $U_n(\curvearrowright)$ genom att omvandla varje $(1, 1)$ -steg till första elementet i en cykel. Dessa cykler, vars andra element vi ännu inte vet, placerar vi i en "first in, first out" kö. Då vi i Dyckvägen, som vi traverserar från vänster till höger, kommer till ett $(1, -1)$ -steg avslutar vi den cykel som står på tur i kön. Det inses lätt att detta verkligen ger involutioner som undviker \curvearrowright .

Mönstren $\cdot -$ och $- \cdot$ går båda att dela på mitten, utan att någon cykel går från den ena sidan till den andra. Antag att en permutation går att dela upp på detta sätt. Kan den då undvika något av mönstren? Ja, om den inte har någon cykel på någon av sidorna. Om vi begränsar oss till permutationer som består endast av cykler av längd två, det vill säga involutioner utan fixpunkter, kan vi konstatera att om de skall undvika något av dessa mönster, så får inga två cykler ligga bredvid varandra. En inte helt uppenbar konsekvens av detta är att de $n/2$ lägsta talen i permutationen ligger på de $n/2$ sista platserna. Vidare bestämmer dessa tal entydigt de $n/2$ största talens placering på de $n/2$ första platserna.

För att bevisa att antalet involutioner utan fixpunkter av längd $2n$ som undviker $\cdot -$ eller $- \cdot$ räknas av C_n kan vi först betrakta enbart de sista $n/2$ positionerna i involutionen. Bortser vi från första halvan av involutionen kan dessa tal placeras på C_n sätt, eftersom vi vet att antalet permutationer av längd n som undviker samma mönster räknas av C_n . Kan vi nu visa att denna placering av de $n/2$ sista talen alltid leder till att hela involutionen också undviker mönstret är vi klara.

Först kan vi konstatera att mönstret inte kan förekomma som en kombination av tal från båda sidor av mitten.

Det enklaste sättet att se att mönstret inte kan förekomma på den första

halvan är förmodligen med hjälp av ett motsägelsebevis. Antag därför att vi har en förekomst av mönstret $- \cdot$ på den första halvan. Vi skall nu visa att detta ger en förekomst av mönstret också på den andra halvan. Ty, det mellersta talet ligger längst till vänster. Detta motsvaras på den andra halvan av att det minsta talet hamnar i mitten. Det minsta talet ligger i mitten, vilket på den andra halvan gör att det mellersta talet hamnar längst till vänster. Slutligen är det största talet i mönstret längst till höger, vilket betyder att det största talet ligger lägst till höger även på den andra halvan. Eftersom ett mönster på första halvan alltså alltid leder till samma mönster på andra halvan, och andra halvan ju inte har några förekomster av mönstret, kan inte heller första halvan ha det.

Det samma gäller för mönstret $\cdot -$.

För mönstret \frown konstaterar vi att exakt samma involutioner utan fixpunkter undviker \frown som \smile . Detta beror på att \frown innebär att ingenting får vara inneslutet i en cykel av längd två, men eftersom vi inte tillåter några fixpunkter, så är det enda som kan vara inneslutet en cykel av längd två, vilket motsvarar mönstret \smile . \square

Påstående 2. Låt π vara en permutation i kryssprodukten $p_1 \otimes p_2$, där $p_1 \in U_n(\sigma)$ för $\sigma \in \{\frown, \smile\}$ och $p_2 = e_m$ ($m > 0$) (identitetspermutationen av längd m). Det vill säga π är en permutation som kan delas upp i två delar; en del som enbart innehåller cykler av längd två och som undviker mönstret σ , och en del som består av enbart fixpunkter.

Då gäller att $\pi \in I_{n+m}(\sigma)$, det vill säga då undviker även π mönstret σ . Poängen är att vi kan "skjuta in" hur många fixpunkter vi vill i en involutions utan fixpunkter som undviker σ , utan att för den skull få någon förekomst av detta mönster.

Bevis. Vi vill visa att om $\pi \notin I_n(\sigma)$, så finns det en permutation $p \in U_m$ sådan att $\pi \in p \otimes e_{n-m}$ och $p \notin U_n(\frown)$. Med andra ord betyder detta att om en eller flera fixpunkter i π ingår i mönstret \frown så finns det alltid ett antal cykler av längd två i π som också ger detta mönster.

Antag att vi har en permutation π i vilken det finns fyra element

$$\cdots a_1 \cdots a_2 \cdots a_3 \cdots a_4 \cdots$$

som motsvarar ett mönster σ . Vart och ett av dessa element är antingen en fixpunkt eller en del av en cykel av längd två. Man inser ganska lätt att inget av mönstren \frown och \smile går att skapa med hjälp av tre fixpunkter och en cykel av längd två. Figureerna (7), (8), (9) och (10) i appendix visar alla möjliga sätt att bilda de respektive mönstren med hjälp av en och två fixpunkter. Vi ser att alla dessa involutioner innehåller mönstret även i form av kombinationer av cykler av längd två, vilket bevisar påståendet. (Figur (11) visar alla sätt att bilda mönstret $--$. Här gäller inte det påstående vi visat.) \square

Påstående 3. *Antalet involutioner som undviker något av mönstren \frown och \smile är det n :te Motzkintalet M_n .*

Bevis. Påstående (1) och (2) säger oss att varje permutation $\pi \in I_n(\sigma)$, $\sigma \in \{\frown, \smile\}$, kan skrivas som en produkt $p_1 \otimes p_2$ där $p_1 \in U_{2i}(\sigma)$ och p_2 består av $n - 2i$ fixpunkter. Vi kan bestämma antalet element i $p_1 \otimes p_2$ med hjälp av något man kallar *multimängder*, och den där tillhörande “binomialkoefficienten” $\langle n \rangle_k$ [17]. En multimängd är en mängd där samma element får förekomma flera gånger. På ett ekvivalent sätt betyder $\langle n \rangle_k$ antalet sätt att välja ut k element från en mängd med n element då det är tillåtet att välja samma element flera gånger. Vi har att

$$\langle n \rangle_k = \binom{n+k-1}{k}.$$

Fixpunkterna kan “placeras ut” i permutationen utan fixpunkter på $2i + 1$ ställen, och vi skall placera ut $2i - n$ fixpunkter¹⁴. Detta ger att

$$\langle 2i + 1 \rangle_{n-2i} = \binom{2i+1+n-2i-1}{n-2i} = \binom{n}{n-2i} = \binom{n}{2i}.$$

Varje permutation i $U_{2i}(\sigma)$ ger alltså $\binom{n}{2i}$ permutationer i $I_n(\sigma)$. Eftersom $|U_{2i}(\sigma)| = C_i$ kan vi få det totala antalet permutationer i $I_n(\sigma)$ genom att summera:

$$|I_n(\sigma)| = \sum_{i=0}^{n/2} \binom{n}{2i} C_i. \quad (22)$$

som ger Motzkintalen. \square

¹⁴Eller ekvivalent: de platta stegen kan placeras ut i Dyckvägen på $2i + 1$ ställen.

Förmodan 1. *Antalet involutioner av längd $2n$ utan fixpunkter som undviker något av mönstren $\cdot \ominus$; \frown , $\ominus \cdot$ och $\frown \cdot$ är det n :te Delannoytalet D_n (A001850).*

Delannoytalen har mycket stora likheter med de tidigare undersökta Ballot-talen, och har dessutom lånat drag från Motzkinvägar [18]. De vägar vi här har att göra med har steg av typen $(1, 0)$, $(0, 1)$ och $(1, 1)$, och Delannoytalet $D(a, b)$ är antalet sådana vägar från $(0, 0)$ till punkten (a, b) . Vi har här inga restriktioner för vägen, som vi har för både Dyck- och Motzkinvägar. Den visualisering detta ger av Delannoyvägarna motsvarar de visualiseringar vi gjort av Dyck- och Motzkinvägar roterade 90° motsols¹⁵.

De *centrala* Delannoytalen, $D(n, n)$, vars inledande termer är

$$1, 3, 13, 63, 321, \dots \quad (23)$$

genereras av differensekvationen

$$D(a, b) = D(a - 1, b) + D(a, b - 1) + D(a - 1, b - 1) \quad (D(0, 0) = 1, \quad a, b > 0) \quad (24)$$

som kan jämföras med ekvationerna (3) och (4) som ger Ballot-talen.

Det tycks inte finnas något enkelt sätt att övertyga sig om att detta påstående är sant. Studerar man vilka involutioner som är tillåtna ser man att mönstren parvis är ekvivalenta: $U_n(\ominus \cdot) \equiv U_n(\frown \cdot)$ och $U_n(\cdot \ominus) \equiv U_n(\cdot \frown)$. De 13 involutionerna i $U_6(\ominus \cdot)$ visas i figur (12).

Påstående 4. *Antalet involutioner utan fixpunkter av längd $2n$ som undviker mönstret $--$ är lika med antalet permutationer av längd n som undviker samma mönster, vilka kallas "vexillära". (Observera att $--$ är ekvivalent med 2143.)*

I detta bevis är det nödvändigt att se mönstret både som bilden $--$ och som tal, det vill säga 2143.

Vi kan bevisa detta på samma sätt som vi visade att $|U_{2n}(\cdot \cdot)| = C_n$ (se beviset av påstående (1)). Mönstret $--$ säger att två cykler av längd två aldrig får ligga bredvid varandra. Alltså måste de antingen vara inneslutna

¹⁵se <http://forum.swarthmore.edu/advanced/robertd/delannoy.html>

i varandra, eller överlappa varandra (se definitioner i beviset av påstående (1)).

Av detta inser man att de sista n platserna i en involution utan fixpunkter av längd $2n$ som undviker $--$ måste innehålla de n lägsta talen. Dessa tal måste naturligtvis undvika $--$, vilket ger oss att antalet involutions utan fixpunkter som undviker $--$ säkert inte kan vara större än V_n .

Man inser lätt (genom att titta på mönstret i talform: 2143) att en eventuell förekomst av mönstret inte kan innehålla tal från både den första och den andra halvan i involutionen utan fixpunkter, eftersom alla tal i den första halvan ju är större än de i den andra halvan. Det som återstår att visa är därför att mönstret inte kan förekomma på den första halvan, om det inte också förekommer på den andra halvan.

Antag därför att talen $a_1 a_2 a_3 a_4$ på den första halvan motsvarar mönstret 2143 och att dessa fyra tal bildar cykel-par med talen $b_1 b_2 b_3 b_4$ på den andra halvan. Betrakta nu talet a_1 . Det motsvarar tvåan, vilket säger att det är det näst minsta talet av talen $a_1 \cdots a_4$. Varje tal a_i "pekar" på ett av talen b_j . Storleken på a_i bestämmer positionen hos det motsvarande talet b_j . Storleken på talet b_j bestäms å andra sidan av positionen hos a_i . Konsekvensen av detta är att b_2 måste vara det minsta av talen $b_1 \cdots b_4$, eftersom a_1 står längst till vänster.

Går vi vidare med a_2 så ser vi att detta ger att b_1 blir det nästa minsta av talen $b_1 \cdots b_4$. På samma sätt fås att b_4 blir näst störst, och b_3 störst. Alltså motsvarar även $b_1 b_2 b_3 b_4$ mönstret 2143.

Om mönstret inte förekommer på den andra halvan, kan det därför inte heller förekomma på den första, och därmed inte alls. Antalet involutions utan fixpunkter av längd $2n$ som undviker mönstret $--$ (2143) är alltså lika med antalet permutationer av längd n som undviker detta mönster, vilket per definition är V_n .

Förmodan 2. $|P_{2n}(\sigma)| = F_n$ ($n > 0$) $\forall \sigma \in \{-, -, \curvearrowright\}$ där P_{2n} är mängden av alla permutation av längd $2n$ utan fixpunkter (på engelska så kallade 'derangements'), och F_n Fine-talen, A000957.

Det är känt att Fine-talen räknar antalet Dyckvägar som inte har någon topp¹⁶ på höjden ett [14]. Vi vet vidare att antalet permutationer av längd n som undviker ett mönster av längd tre är C_n , det vill säga antalet Dyckvägar av längd $2n$.

Catalantalen kan definieras med hjälp av rekursionen

$$C_n = \sum C_k C_{n-k-1}. \quad (25)$$

En tolkning av ekvation (25) är att det objekt som ett Catalantal motsvarar går att dela in i två partitioner på n sätt där varje partition är ett objekt av samma typ.

Visualiseringen av de bilder som ger Finetalen, tillsammans med det faktum att Finetalen räknar Dyckvägar som inte har någon topp på höjden ett säger oss att det måste finnas en metod för att partitionera de permutationer som undviker dessa mönster på ett sådant sätt att partitioneringspunkter motsvarar att Dyckvägen når x -axeln, och fixpunkter motsvarar just toppar på höjden ett.

¹⁶En topp är ett U-steg följt av ett N-steg.

A Tabeller och Bilder

mönster	bild
123	...
132	·-
213	-·
231	∪
312	∩
321	⊂

Tabell 1: Översättningstabell från mönster i S_3 till bilder.

mönster	bild
1234
1243	··-
1324	·-·
1342	·∪
1423	·∩
1432	·⊂
2134	-··
2143	--
2314	∪·
2341	∩
2413	∪
2431	∩
3124	∩·
3142	∪
3214	⊂·
3241	∩
3412	∪
3421	∩
4123	∩
4132	∩
4213	∩
4231	∩
4312	∩
4321	∩

Tabell 2: Översättningstabell från mönster i S_4 till bilder.

p	$ U_n(p) $	$ I_n(p) $	$ S_n(p) $
\cdots	$\binom{n-1}{n/2}$ (n even)	$\binom{n}{n/2}$	C_n
$\cdot-$	C_k	$\binom{n}{n/2}$	C_n
$- \cdot$	C_k	$\binom{n}{n/2}$	C_n
\smile	2^k	2^n	C_n
\frown	2^k	2^n	C_n
$\hat{\smile}$	C_k	$\binom{n}{n/2}$	C_n

Tabell 3: De talföljder som genereras av mönster i S_3 . De talföljder som indexeras med k är noll för udda n . För jämna n är $2k = n$. Förklaringar i tabell (9).

\cdots	A_k
$\cdot-, - \cdot, \hat{\smile}$	C_k
\smile, \frown	2^k

Tabell 4: Mönster i S_3 grupperade efter vilken talföljd de genererar på $|U_{2k}(\sigma)|$. Förklaringar i tabell (9).

$\cdots, \cdot-, - \cdot, \hat{\smile}$	A_n
\smile, \frown	2^n

Tabell 5: Mönster i S_3 grupperade efter vilken talföljd de genererar på $|I_n(\sigma)|$. Förklaringar i tabell (9).

$\cdots, \cdot-, - \cdot, \hat{\smile}, \smile, \frown$	C_n
---	-------

Tabell 6: Alla mönster i S_3 ger Catalanalen på $|S_n(\sigma)|$.

$\cdot-, - \cdot, \hat{\smile}$	F_n
\cdots	—
\smile, \frown	—

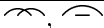


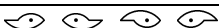
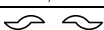
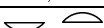
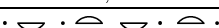
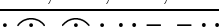



Tabell 7: Här har vi grupperat mönster i S_3 efter vilka talföljder de genererar på *permutationer* utan fixpunkter (på engelska: *derangements*), som vi kallar för P_n . Vi har med denna tabell för mönster i S_3 just på grund av att vi får Finetalen för mönstren $\cdot-$, $- \cdot$ och $\hat{\smile}$. Vi får inte träff i Sloane för något mönster i S_4 på P_n .

p	$ U_n(p) $	$ I_n(p) $	$ S_n(p) $
⋯⋯	G_k	M_n	V_n
⋯-	—	M_n	V_n
⋯⋅	—	M_n	V_n
⋅∪	D_k	—	W_n
⋅∩	D_k	—	W_n
⋅∩̇	—	M_n	V_n
-⋯	—	M_n	V_n
--	V_k	M_n	V_n
∪⋅	D_k	—	W_n
∩	R_k	—	V_n
∩̇	L_k	—	W_n
∩̇⋅	—	—	W_n
∩̇⋅	D_k	—	W_n
∩̇̇	L_k	—	W_n
∩̇̇⋅	—	M_n	V_n
∩̇̇̇	—	—	W_n
∩̇̇̇⋅	C_k	M_n	V_n
∩̇̇̇̇	B_n	—	V_n
∩̇̇̇̇⋅	—	—	W_n
∩̇̇̇̇̇	—	—	W_n
∩̇̇̇̇̇⋅	—	—	W_n
∩̇̇̇̇̇̇	B_n	—	V_n
∩̇̇̇̇̇̇⋅	C_k	M_n	V_n


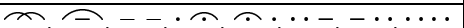

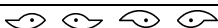
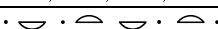


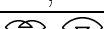
Tabell 8: De talföljder som genereras av mönster i S_4 . De talföljder som indexerats med k är noll för udda n . För jämna n är $2k = n$. Förklaringar i tabell (9).

Beteckning	Namn	Nummer
A	centrala binomialtal	A001700
B	binomialsumma	A032443
C	Catalantal	A000108
D	centrala Delannoy	A001850
F	Finetal	A000957
G	generaliserade Catalantal	A006632
L	speciella Lyndonord	A054666
M	Motzkin	A001006
R	reguljärt uttryck	A052984
V	Vexillära	A005802
W	big Schröder	A022558

Tabell 9: Förklaring av beteckningar i tabeller.

	C_k
	V_k
	B_k
	—
	L_k
	—
	D_k
	—
	—
	—
	G_k

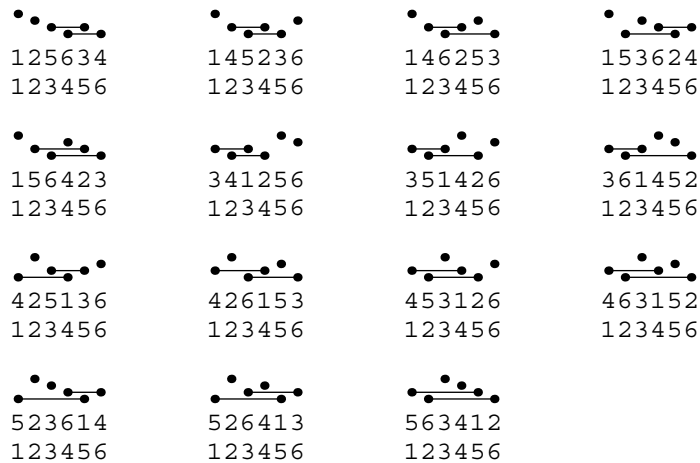
Tabell 10: Mönster i S_4 grupperade efter vilken talföljd de genererar på involutioner utan fixpunkter.

	—
	M_n
	—
	—
	—
	—
	—
	—

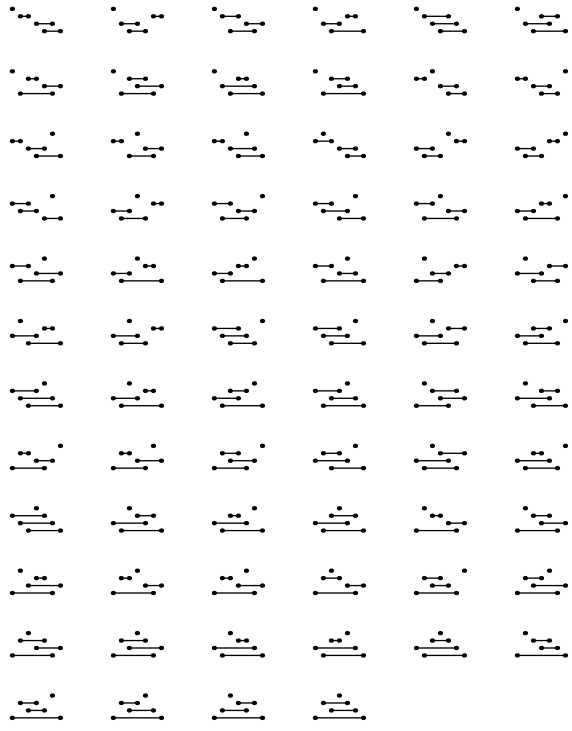
Tabell 11: Mönster i S_4 grupperade efter vilken talföljd de genererar på involutioner.

	V_n
	W_n

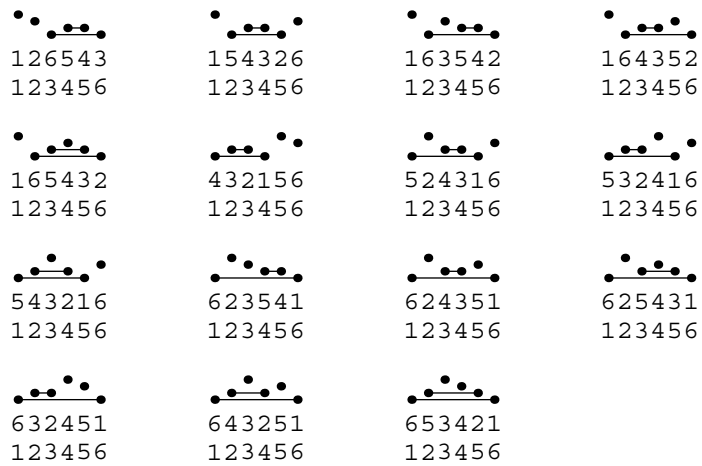
Tabell 12: Mönster i S_4 grupperade efter vilken talföljd de genererar på permutationer.



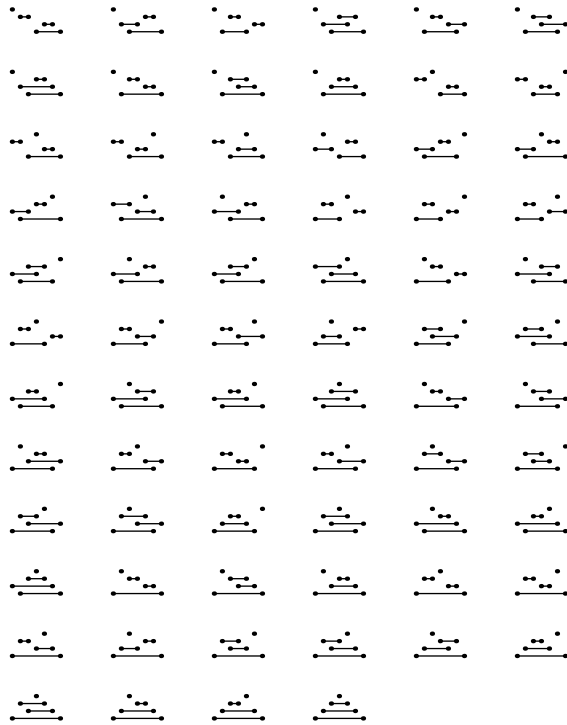
Figur 7: Alla involutioner av längd 6 med två fixpunkter som innehåller mönstret $\overbrace{\quad}$.



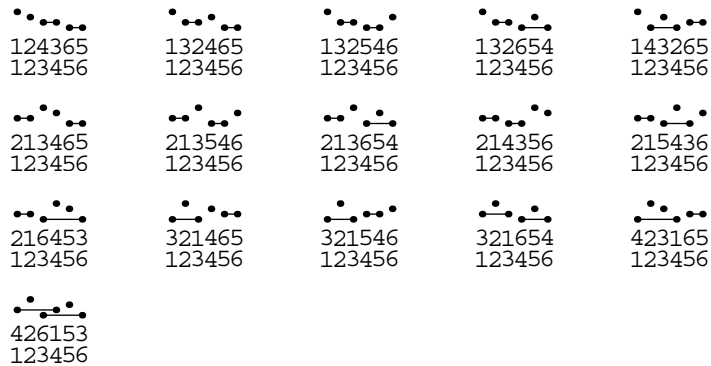
Figur 8: Alla involutioner av längd 7 med en fixpunkt som innehåller mönstret \curvearrowright .



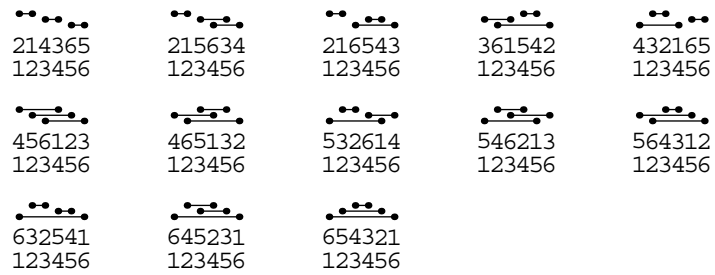
Figur 9: Alla involutioner av längd 6 med två fixpunkter som innehåller mönstret $\overline{(\quad)}$.



Figur 10: Alla involutioner av längd 7 med en fixpunkt som innehåller mönstret $\overline{\curvearrowright}$.



Figur 11: Alla involutioner av längd 6 med två fixpunkter som innehåller mönstret $\overline{\curvearrowright}$. Längst ner har vi en förekomst av mönstret, trots att de två cyklerna inte förhåller sig till varandra på ett förbjudet sätt.



Figur 12: De 13 elementen i $U_6(\curvearrowright)$.

Referenser

- [1] N. L. BIGGS, *Discrete Mathematics*, Oxford Science Publications, 1989. reprinted 1999.
- [2] A. CLAESSEON, *Generalised pattern avoidance*, European Journal of Combinatorics, (2001).
- [3] R. DONAGHEY AND L. W. SHAPIRO, *Motzkin numbers*, Journal of combinatorial theory, 23A (1977).
- [4] M. FILASETA, *A new method for solving a class of ballot problems*, Journal of Combinatorial Theory, 39 (1985).
- [5] I. M. GESSEL, *Symmetric Functions and P-Recursiveness*, Journal of Combinatorial Theory, 53 (1990).
- [6] I. M. GESSEL AND S. REE, *Lattice Paths and Faber Polynomials*, Advances in combinatorial methods and applications to probability and statistics, (1996).
- [7] P. HILTON AND J. PEDERSON, *Catalan Numbers, Their Generalization, and Their Uses*, The Mathematical Intelligencer, 13(2) (1991), pp. 64–75.
- [8] D. E. KNUTH, *The art of computer programming (vol III)*, AddisonWesley, 1973.
- [9] C. KRATTENTHALER, *An involution principle-free bijective proof of Stanley’s hook-content formula*, Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, 3 (1998), pp. 11–32.
- [10] I. G. MACDONALD, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, Oxford University Press, 1995.
- [11] P. A. MACMAHON, *Combinatorial Analysis*, Cambridge University Press, 1915. reprinted 1960.
- [12] J.-C. NOVELLI, I. PAK, AND A. V. STOYANOVSKII, *A Direct Bijective Proof of the Hook-Length Formula*, Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, 1 (1997), pp. 53–67.
- [13] J. J. O’CONNOR AND E. F. ROBERTSON, *Eugène charles catalan*.

- [14] P. PEART AND W.-J. WOAN, *Dyck paths with no peaks at height k* , Journal of Integer sequences, 4 (2001).
- [15] A. REGEV, *Asymptotic Values for Degrees Associated with Strips of Young-Diagrams*, Advances in Mathematics, 41 (1981).
- [16] N. J. A. SLOANE, *The on-line encyclopedia of integer sequences*, 2001.
- [17] R. P. STANLEY, *Enumerative Combinatorics, vol 1*, Cambridge University Press, 1986. reprinted 1997.
- [18] R. A. SULANKE, *Moments of Generalized Motzkin Paths*, Journal of Integer Sequences, 4 (2000).
- [19] H. WILF, *generatingfunctionology*, Academic Press, Inc., 1990. reprinted 1994.