

Énumération des méandres : une approche à partir des méthodes de physique théorique

Jérémie BOUTTIER

Mémoire d'exposé bibliographique
du DEA de Physique Théorique

Réalisé sous la direction de
Jesper Lykke JACOBSEN (LPTMS Orsay)

Juin 2001

Table des matières

1	Introduction	3
1.1	Le problème des méandres	3
1.2	Historique	3
1.3	Plan	5
2	Généralisations du problème, formulations équivalentes	6
2.1	Autres types de méandres	6
2.2	Formulations équivalentes	7
2.2.1	Problème des timbres-poste	7
2.2.2	Permutations planes	8
2.3	Méandres sur la sphère	9
3	Formalisme des modèles de matrices	11
3.1	Introduction du formalisme	11
3.2	Application aux méandres	12
4	Interprétation en terme de gaz de boucles couplé à la gravité quantique	16
4.1	Le modèle FPL^2	16
4.1.1	Définition	16
4.1.2	Description par une théorie conforme	17
4.2	Le modèle $GFPL^2$	19
4.2.1	Couplage à la gravité quantique	19
4.2.2	Lien avec les méandres	19
4.2.3	Résultats	20
5	Conclusion	23

1 Introduction

1.1 Le problème des méandres

Le problème des méandres est l'un de ces problèmes mathématiques à l'énoncé fort simple, qui reste malgré tout encore sans solution complète aujourd'hui : de combien de façons une route fermée sans croisement peut-elle traverser une rivière rectiligne en un nombre donné de ponts ?

De façon plus mathématique, on définit la notion de *méandre fermé* : étant donné une droite (*rivière*), un méandre fermé d'ordre n est un chemin fermé auto-évitant ou lacet de Jordan (*route*) qui coupe la rivière en $2n$ points¹ (*ponts*). Deux méandres seront dits équivalents si on peut passer de l'un à l'autre par déformation continue sans déplacer la rivière ni changer l'ordre des ponts.

Le problème revient donc à chercher le nombre M_n de classes d'équivalence de méandres fermés d'ordre n . Pour clarifier les choses, la figure 1 montre les $M_3 = 8$ classes de méandres d'ordre 3.

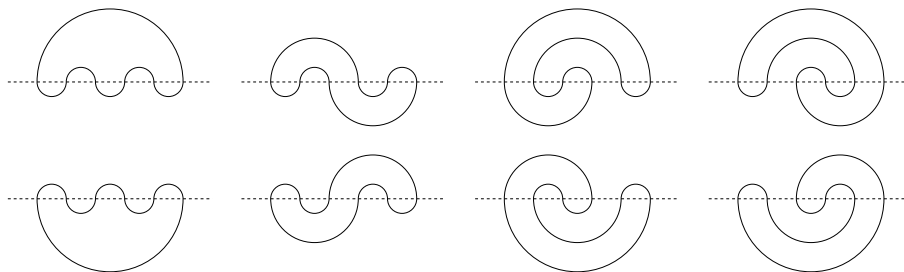


FIG. 1: Les 8 classes de méandres d'ordre 3 (6 ponts)

On ne connaît aujourd'hui aucune formule explicite donnant M_n en fonction de n . Une vingtaine de termes de la suite sont connus par énumération (tableau 1), ce qui nécessite déjà des méthodes avancées en raison de la croissance exponentielle de M_n . On trouve d'autre part des estimations du comportement asymptotique de cette suite.

1.2 Historique

Le problème des méandres est connu au moins depuis la fin du XIX^e siècle, sous diverses formulations. La version la plus ancienne semble être connue sous le nom de *problème des timbres-poste* : de combien de façons peut-on replier totalement une bande de n timbres sur un seul timbre² ? Ce problème est mentionné par Lucas en 1891 [2]. Plus tard, Sainte-Laguë s'y intéresse [3] et y consacre notamment en 1937 un chapitre dans un ouvrage de

¹Il y a nécessairement un nombre pair d'intersections.

²L'équivalence entre différentes formulations sera discutée dans la partie suivante.

n	M_n
1	1
2	2
3	8
4	42
5	262
6	1828
7	13820
8	110954
9	933458
10	8152860
\vdots	\vdots
20	64477712119584604

TAB. 1: Premières valeurs de la suite M_n (valeurs tirées de [1])

récréations mathématiques [4], où on trouve une représentation du problème en terme de méandres (même si l’auteur n’utilise pas explicitement ce mot). Notons par la suite les contributions de Touchard [5], Koehler [6], Lunnon [7] à la recherche de relations de récurrence entre termes et d’algorithmes d’énumération par des méthodes combinatoires «classiques».

Une réactualisation du problème a été faite par Arnol’d dans les années 80 [8]. Dans des travaux en rapport avec le seizième problème de Hilbert (énumération des ovals de courbes algébriques planes), il s’intéresse aux propriétés géométrico-différentielles de la variété des zéros de polynômes hyperboliques dans le plan projectif. En particulier, connaissant le nombre d’intersections d’un lacet et d’une droite projective, il parvient à une estimation du nombre de points d’inflexion de ce lacet par des considérations sur le «méandre» ainsi formé. Arnol’d est le premier à introduire la dénomination de méandres, même s’il s’intéresse alors plus particulièrement aux méandres *projectifs* (tracés dans le plan projectif). À sa suite, les travaux de Lando et Zvonkin [9] [10] introduisent la formulation moderne du problème des méandres dans le plan affine.

À côté du problème de l’énumération, les méandres apparaissent chez Poincaré dans une tentative de démonstration d’un théorème de point fixe³ [11]. Si la preuve définitive de ce théorème par Birkhoff en 1913 n’y fait plus allusion, les méandres réapparaissent dans une généralisation par Eliashberg en 1978 [12]. Ils interviennent également dans des travaux de classification des 3-surfaces [13], par des résultats combinatoires pour la recherche d’invariants

³L’énoncé est le suivant : toute transformation d’une couronne circulaire préservant l’aire et déplaçant les bords en des directions opposées admet au moins deux points fixes. Dans son approche, les positions relatives d’un cercle et son image par la transformation sont représentées comme des méandres.

de Witten-Reshetikhin-Turaev.

En informatique, on étudie les *permutations planes* équivalentes aux méandres [14]. Ces permutations peuvent être ordonnées en temps linéaire [15]. Il existe également un lien avec la théorie des langages formels car un méandre peut se représenter en terme de parenthésage.

D'un point de vue esthétique, le problème des méandres est d'une grande beauté. Phillips [16] s'est intéressé aux labyrinthes présents dans l'art de différentes civilisations, et observe des analogies structurelles avec les méandres.

Finalement, dans les années 90, le problème a commencé à intéresser les physiciens théoriciens. Le problème des timbres-poste peut s'interpréter de façon évidente comme l'énumération des configurations d'un polymère totalement replié, d'où une connexion avec la physique statistique. D'autre part, Kazakov et Kostov⁴ ont suggéré le lien entre méandres et graphes de Feynman, dans la cadre des modèles de matrices. Di Francesco, Golinelli et Gütter approfondissent ce lien [17], tout en présentant d'autres approches récursives et des résultats exacts dans certains cas particuliers. Les approches énumératives [18] sont poursuivies par l'utilisation de méthodes de matrice de transfert ayant permis un calcul de M_n jusqu'à $n = 24$ [19], ou bien par une approche Monte-Carlo pour des estimations jusqu'à $n = 400$ [20]. Des méthodes algébriques fondées sur l'algèbre de Temperley-Lieb sont entreprises [21]. Enfin, le comportement asymptotique est estimé [22] en interprétant le problème des méandres comme le couplage d'un gaz de boucles compactes à la gravité quantique bidimensionnelle. Des exposants peuvent ainsi être prédits et vérifiés numériquement [23].

1.3 Plan

Ce mémoire a pour objet de présenter brièvement les méthodes récentes tirées de la physique théorique, qui ont pu être appliquées au problème des méandres. Mon étude bibliographique a donc principalement porté sur les publications récentes sur le sujet, presque toutes citées dans le dernier paragraphe de la section précédente. Je dois ajouter à celles-ci un article de revue [24] comportant une partie consacrée aux méandres.

En une première partie je présenterai quelques variantes du problème des méandres et des formulations équivalentes. Puis je montrerai un modèle de matrice lié aux méandres. Enfin j'exposerai l'approche la plus récente à partir du couplage d'un gaz de boucles à la gravité quantique, qui permet de prédire certains exposants critiques.

⁴Leurs résultats ont été indirectement publiés dans [10].

2 Généralisations du problème, formulations équivalentes

2.1 Autres types de méandres

Jusqu'ici, nous n'avons parlé que des méandres fermés. On peut bien entendu définir de nombreuses autres classes. Citons d'abord (fig. 2) :

- les méandres *ouverts* pour lesquels on ne suppose plus la route fermée (route à deux extrémités),
- les méandres ouverts pour lesquels on fixe les extrémités de la route à l'infini (il est alors loisible d'inverser les dénominations de route et rivière, ce qui donne une image plus réaliste),
- les *semi-méandres* pour lesquels la route est fermée mais la rivière est une demi-droite : la route peut alors contourner la rivière autour de son extrémité (*source*).

Pour ces types de méandres, le nombre de ponts n'est pas nécessairement pair.

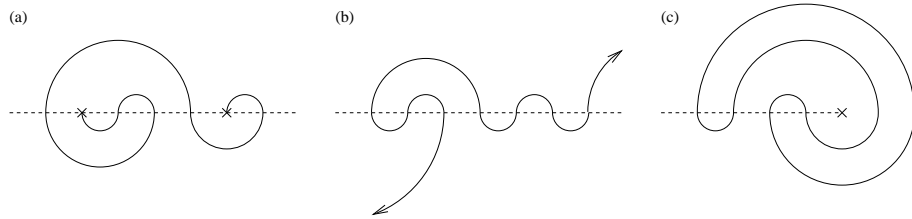


FIG. 2: Autres types de méandres. a : méandre ouvert (par déformation, on peut toujours ramener les extrémités de la route en un pont) ; b : méandre ouvert avec extrémités à l'infini ; c : semi-méandre.

Dans le sens d'Arnol'd [8], un méandre est un méandre ouvert avec extrémités à l'infini, et où la route va du « sud-ouest » au « nord-est » ou « sud-est » selon la parité du nombre de ponts. La figure 2-b montre en fait un tel méandre avec 7 ponts. Suivant [10], on note m_n le nombre de classes de méandres au sens d'Arnol'd à n ponts. On a alors la relation $M_n = m_{2n-1}$, qui résulte de la bijection réalisée en « refermant » un méandre d'Arnol'd par un pont supplémentaire situé à gauche des $2n - 1$ autres.

Généralisons encore la notion de méandre en relâchant la contrainte de connexité de la route : on peut s'intéresser aux configurations avec une rivière toujours rectiligne, $2n$ ponts, et un nombre $k \geq 1$ de routes fermées ne se croisant pas mutuellement mais traversant la rivière au moins une fois. De telles configurations sont appelées *systèmes de méandres fermés* à $2n$ ponts et k composantes connexes, le nombre de configurations inéquivalentes est noté $M_n^{(k)}$. Pour $k = 1$ on retrouve évidemment les méandres fermés usuels :

$M_n^{(1)} = M_n$. Comme chaque route comporte au moins deux ponts, on a l'inégalité $k \leq n$; la quantité $M_n(q) = \sum_{k=0}^n M_n^{(k)} q^k$ est un polynôme en q appelé *polynôme méandrique*. Le cas $q = 1$ correspond au nombre de systèmes de méandres à $2n$ ponts sans contrainte sur le nombre de composantes connexes, et ce nombre peut-être calculé explicitement : $M_n(1) = c_n^2$ où $c_n = \frac{2n!}{n!(n+1)!}$ est le $n^{\text{ième}}$ nombre de Catalan.

2.2 Formulations équivalentes

2.2.1 Problème des timbres-poste

En introduction, nous avons mentionné le problème des timbres-poste : combien existe-t-il de façons différentes de replier totalement une bande de n timbres, de sorte que l'empilement occupe la surface d'un seul timbre ?

Nous supposons ici que les deux faces d'un timbre ainsi que les deux extrémités de la bande sont indistingables. Par contre, l'empilement des timbres est supposé placé dans un plan vertical, les plis sont horizontaux et on regarde horizontalement, parallèlement au plan (fig. 3-gauche) ; nous supposons que dans ces conditions on peut distinguer gauche et droite, haut et bas de l'empilement. Comme le montre la figure 3, la correspondance avec les méandres peut alors se voir façon directe : on représente les timbres comme points alignés sur une droite et les plis entre timbres comme des arcs de cercles joignant les points correspondants (fig. 3).

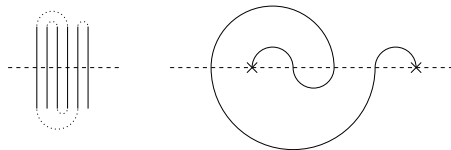


FIG. 3: Relation entre timbres et méandres : à gauche, une bande de 6 timbres pliée (les charnières entre timbres sont représentées en arcs pointillés) ; à droite, le méandre ouvert correspondant.

Ainsi il y a correspondance entre le pliage d'une bande ouverte de n timbres et un méandre ouvert à n ponts ; de la même façon, le pliage d'une bande fermée de $2n$ timbres correspond à un méandre fermé d'ordre n . Pour une bande ouverte mais dont une extrémité est attachée à un support fixe, la correspondance naïve serait avec un méandre ouvert dont une extrémité serait à l'infini. En fait, on peut trouver une correspondance avec les semi-méandres, mais de façon plus difficile à voir (fig. 4).

On remarque qu'à la différence des autres correspondances, la bande de timbres devient la rivière et non la route. Il est possible de définir une correspondance analogue pour les bandes fermées, qui est *duale* à la correspondance directe vue plus haut, au sens où route et rivière sont échangées.

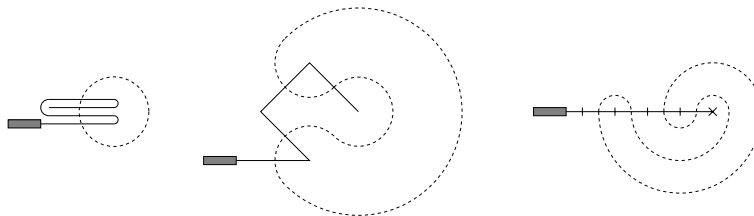


FIG. 4: Relation entre pliage d'une bande avec extrémité fixe et semi-méandres. On trace tout d'abord un cercle traversant chaque timbre de la bande pliée (figure de gauche) ; on « déplie » ensuite la bande par déformation (au milieu) ; le cercle déformé devient alors un semi-méandre (à droite).

2.2.2 Permutations planes

Les permutations planes sont en fait des représentations des méandres sous formes de permutations. Considérons un méandre fermé d'ordre n et un marcheur parcourant la route avec un point de départ et un sens de parcours arbitraires ; le premier pont qu'il rencontre sera numéroté 1, le second 2, et ainsi de suite, jusqu'au moment où le marcheur repasse par son point de départ, alors les ponts auront été numérotés de façon biunivoque par un entier dans $\{1, \dots, 2n\}$. Lorsqu'on lit la numérotation des ponts le long de la rivière et non plus la route, on obtient une permutation *plane* de $\{1, \dots, 2n\}$.

Réciproquement, pour vérifier qu'une permutation σ de $\{1, \dots, 2n\}$ est plane, on numérote $2n$ ponts successifs sur une rivière horizontale par $\sigma(1), \dots, \sigma(2n)$ et on construit la route en reliant chaque point à son successeur dans la numérotation, par un demi-cercle orienté alternativement de part et d'autre de la rivière ; si la permutation est plane on construit ainsi un méandre, dans le cas contraire, certains cercles se coupent (fig 5).

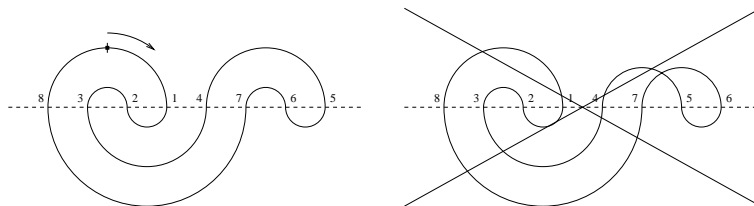


FIG. 5: Équivalence avec les permutations planes : (83214765) est une permutation plane, (83214756) ne l'est pas.

L'inverse d'une permutation plane est également plane, on peut considérer que les méandres correspondants sont liés par une réflexion d'axe la rivière. Deux permutations planes définissent un même méandre si elles diffèrent d'un facteur à droite ω^k où ω est le cycle $(2, 3, \dots, 2n, 1)$; ceci correspond simplement à un changement de point de départ du marcheur sur la

route, sans changement de sens de parcours. Il y a donc exactement $2nM_n$ permutations planes.

2.3 Méandres sur la sphère

On peut trouver des correspondances entre les différents types de méandres plans rencontrés jusqu'ici en généralisant les méandres à la sphère. Il s'agit en effet d'une généralisation puisque le plan est compactifié en une sphère par ajout du point à l'infini.

Cependant, sur la sphère, le point à l'infini perd sa spécificité et on autorise alors toute déformation continue. Dans le cas des méandres fermés, rivière et route deviennent alors des lacets simples, sans plus permettre de distinction entre les deux. Les méandres ouverts et les semi-méandres correspondent à des configurations avec un lacet et un chemin ouvert.

Inversement, les méandres sur la sphère peuvent être projetés dans le plan après choix d'un point à l'infini (fig 6).

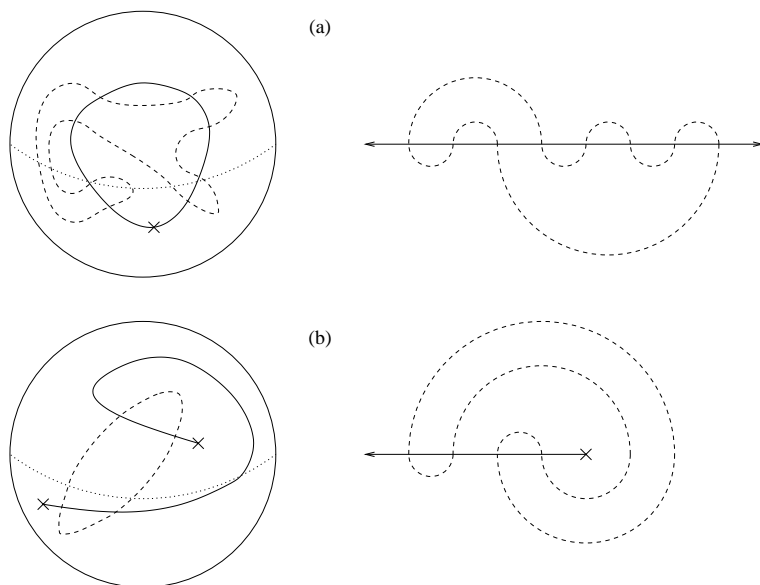


FIG. 6: Méandres sur la sphère et leurs correspondants plans. a : méandre fermé, projeté dans le plan par choix du point à l'infini sur un lacet ; b : méandre semi-ouvert, projeté en un semi-méandre dans le plan par envoi d'une extrémité du chemin ouvert à l'infini.

On ne peut toutefois aisément relier le nombre de classes de méandres sphériques et plans. Par exemple, un méandre fermé sur la sphère peut générer *a priori* autant de méandres fermés plans qu'il y a de façons de choisir le point à l'infini puis une orientation de la rivière, mais certains de ces méandres peuvent être en fait équivalents en raison des «symétries» du

méandre de départ.

3 Formalisme des modèles de matrices

3.1 Introduction du formalisme

Les modèles de matrices [25] permettent de reformuler virtuellement tout problème d'énumération de graphes en terme de calcul d'une intégrale sur des matrices. Nous présentons brièvement dans cette section le cas le plus simple de modèle de matrice, destiné à introduire le formalisme, avant de passer au modèle correspondant aux méandres.

Considérons une intégrale sur les matrices hermitiennes $N \times N$ de la forme :

$$Z(V, N) = \frac{1}{Z_0(N)} \int dM e^{-N \text{Tr} V(M)} \quad (1)$$

où $V(x)$ est un « potentiel » polynomial $V(x) = \frac{x^2}{2} - \sum_{i \geq 3} t_i \frac{x^i}{i}$, et $Z_0(N)$ un facteur de normalisation tel que $Z(V_0, N) = 1$ où $V_0 = \frac{x^2}{2}$.

On développe alors en série formelle en les t_i la partie non-gaussienne de l'exponentielle ; le coefficient de $\prod t_i^{v_i}$ est :

$$\frac{1}{Z_0(N)} \int dM e^{-N \text{Tr} \frac{M^2}{2}} N^{\sum v_i} \prod_i \frac{\text{Tr}(M^i)^{v_i}}{i^{v_i} v_i!}. \quad (2)$$

Il s'agit d'une valeur moyenne d'une fonction de matrice avec un poids gaussien. Comme pour toute mesure gaussienne, une telle valeur moyenne peut être calculée à partir des règles de Feynman. Sans détailler le processus d'élaboration de ces règles, mentionnons-les brièvement (fig 7) :

- Le propagateur (a) est $\langle M_{ij} M_{kl} \rangle = \delta_{il} \delta_{jk} / N$ et est représenté par une ligne double, chaque ligne étant orientée et « portant » un indice de matrice qui est conservé.
- Chaque $\text{Tr}(M^i)$ dans (2) introduit un vertex i -valent analogue à (b), affecté d'un poids N/i . Sur les lignes connectées, l'indice de matrice est le même.
- Lorsqu'un graphe de Feynman est constitué en connectant les vertex par les propagateurs, les lignes connectées forment des boucles (c) et portent toutes le même indice matriciel. La sommation sur ces indices de boucle fait apparaître un facteur N supplémentaire par boucle.

Le calcul du poids global d'un graphe de Feynman est finalement très simple : compter un facteur N par vertex, un facteur $1/N$ par propagateur (arête du graphe), et enfin un facteur N par boucle, d'où un facteur total $N^{f-a+v} = N^{2-2g}$, où f, a, v, g sont respectivement les nombres de faces, d'arêtes et de vertex et le genre du graphe⁵. Tous les autres facteurs se

⁵ $\chi \equiv f - a + v$ est la caractéristique d'Euler du graphe, et on a la relation $\chi = 2 - 2g$.

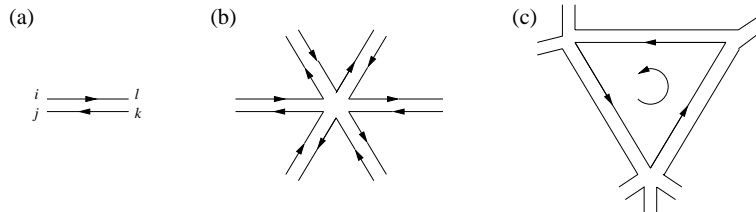


FIG. 7: Constituants des diagrammes de Feynman de modèles de matrices. a : propagateur ; b : vertex 6-valent ; c : boucle d'indice libre.

groupent en un simple facteur de symétrie, ce qui aboutit finalement au développement :

$$Z(V, N) = \sum_{\text{graphes } \Gamma} \frac{1}{|\text{Aut}(\Gamma)|} N^{2-2g(\Gamma)} \prod_i t_i^{v_i(\Gamma)} \quad (3)$$

où la somme s'étend sur tous les diagrammes non nécessairement connexes, et $|\text{Aut}(\Gamma)|$, $g(\Gamma)$, $v_i(\Gamma)$ désignent respectivement l'ordre du groupe de symétrie, le genre et le nombre de vertex i -valents du graphe Γ . La somme est restreinte aux diagrammes connexes si on considère le logarithme de Z .

Le fait remarquable est qu'on obtient ainsi une série formelle en N , le terme en N^{2-2g} étant donné par une sommation sur les graphes de genre g . Dans la limite $N \rightarrow \infty$, la contribution dominante correspond aux graphes de genre 0, c'est-à-dire les graphes pouvant être tracés sur une surface de genre 0 comme la sphère ou le plan. Pour cette raison, la limite $N \rightarrow \infty$ est appelée limite *planaire*. L'énergie libre planaire est définie par :

$$F_{pl}(V) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\ln Z(V, N)}{N^2} \quad (4)$$

et se développe en :

$$F_{pl}(V) = \sum_{\Gamma} \frac{\prod_i t_i^{v_i(\Gamma)}}{|\text{Aut}(\Gamma)|} \quad (5)$$

où la somme porte sur tous les graphes Γ connexes planaires.

3.2 Application aux méandres

Le modèle présenté ci-dessus ne comporte qu'une seule intégration sur les matrices. Une généralisation évidente du modèle se fait en considérant une intégration sur n matrices de taille $N \times N$:

$$Z(V, N) = \frac{1}{Z_0(N)} \int \prod_{i=1}^n dM_i e^{-N \text{Tr} V(M_1, \dots, M_n)}. \quad (6)$$

En prenant pour V un potentiel de partie quadratique diagonale ($V_0(\{M_i\}) = \frac{1}{2} \sum M_i^2$), l'indice de « couleur » i est conservé le long d'un propagateur. La forme des vertex est quant à elle déterminée par la partie quadratique.

Pour représenter les méandres en terme de graphe d'un modèle de matrice, l'idée évidente est de représenter les ponts comme vertex et les éléments de route et de rivière comme propagateurs. La limite planaire du modèle de matrice est utile pour ne retenir que les diagrammes correspondant effectivement à des méandres du plan.

Il faut *a priori* deux couleurs de matrice dans le modèle, pour permettre de distinguer entre les éléments de route et de rivière. Cependant, il est également souhaitable de garder un moyen de contrôler le nombre de composantes connexes de route et de rivière ; ceci peut être réalisé en utilisant une méthode de « répliques ». Notre modèle contiendra donc n matrices « noires » N_1, \dots, N_n et b matrices « blanches » B_1, \dots, B_b . L'intégrale de matrice considérée sera alors :

$$Z(N; n, b, x) = \frac{1}{Z_0(N; n, b)} \int \prod_{i=1}^n dN_i \prod_{j=1}^b dB_j e^{-N \text{Tr} V(\{N_i\}, \{B_j\})} \quad (7)$$

avec le potentiel :

$$V(\{N_i\}, \{B_j\}) = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n N_i^2 + \sum_{j=1}^b B_j^2 - x \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^b N_i B_j N_i B_j \right). \quad (8)$$

Sur les graphes de Feynman, il y a donc des arêtes noires (représentées en trait continu) portant un indice de réplique compris entre 1 et n , et des arêtes blanches (trait pointillé) portant un indice de réplique compris entre 1 et b . Le seul type de vertex possible est présenté sur la figure 8.

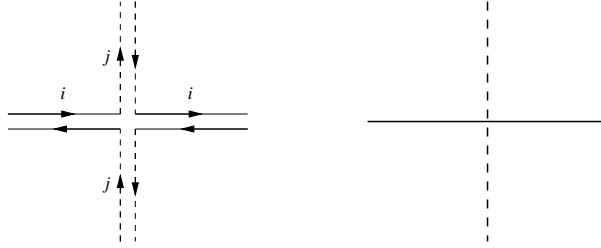


FIG. 8: Vertex du modèle, et son squelette.

Dans la limite planaire, il n'est plus nécessaire de représenter la propagation des indices matriciels, et le squelette du graphe fournit une représentation très explicite des routes et rivières. Notons toutefois que la présence des indices reste sous-jacente car elle « force » la route à traverser la rivière. De plus, l'indice de réplique de chaque type d'arête est conservé au niveau

des vertex : la sommation de ces indices fournit un poids n par boucle noire et b par boucle blanche dans un graphe de Feynman.

Finalement, les graphes de Feynman sont constitués de boucles noires et blanches se coupant sans tangence, tracés sur la sphère. L'énergie libre planaire se développe comme somme sur les tels graphes connexes :

$$F_{pl}(n, b, x) = \sum_{\Gamma} \frac{1}{|\text{Aut}(\Gamma)|} x^{v(\Gamma)} n^{L_n(\Gamma)} b^{L_b(\Gamma)} \quad (9)$$

où $v(\Gamma)$, $L_n(\Gamma)$, $L_b(\Gamma)$ sont respectivement le nombre de vertex, le nombre de boucles noires, le nombre de boucles blanches du graphe Γ .

Pour revenir aux configurations de méandres vues plus haut, il faut imposer la connexité de la rivière, c'est-à-dire imposer $L_b(\Gamma) = 1$. Cela revient à prendre le terme linéaire en b dans l'énergie libre planaire. Dans ces conditions, la somme peut être vue comme portant sur les configurations de systèmes de méandres :

$$\left. \frac{\partial F_{pl}(n, b, x)}{\partial b} \right|_{b=0} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{4k} M_k(n) \quad (10)$$

où apparaissent les polynômes méandriques vus plus hauts. Le nombre de méandres fermés apparaît alors en retenant la partie linéaire en n de cette expression. Le facteur $1/4n$ est identifié en notant que les systèmes de méandres sur la sphère se projettent en $4n$ systèmes de méandres plans modulo le facteur de symétrie.

Ainsi, l'énergie libre planaire du modèle de matrice étudié est, dans certaines limites, fonction génératrice d'une suite reliée aux nombres de méandres fermés. Ce modèle de matrice permet d'obtenir également des fonctions génératrices pour d'autres nombres méandriques. Pour générer les méandres ouverts de la sphère (en correspondance avec les semi-méandres plans), il suffit de considérer la fonction de corrélation à deux points $\langle \phi_1 \phi_1 \rangle$ avec $\phi_1 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^b \text{Tr} B_i$. En effet les graphes de Feynman contribuant à cette fonction de corrélation possèdent deux « pattes » externes blanches soit deux extrémités de rivière. On trouve finalement :

$$\left. \frac{\partial^2 \langle \phi_1 \phi_1 \rangle_{pl}}{\partial b \partial n} \right|_{b=n=0} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} x^k \bar{M}_k \quad (11)$$

où \bar{M}_k est le nombre de semi-méandres inéquivalents à k ponts.

Malheureusement, l'intégrale de matrice (7) n'a pu être calculée explicitement jusqu'à présent. Si des méthodes de calcul existent dans le cas de modèles à une matrice, elles ne peuvent être généralisées à notre modèle. On peut toutefois réaliser une intégration partielle, par exemple sur les matrices blanches, puisque cette intégrale partielle est gaussienne. Le développement du résultat fournit des méthodes d'énumération de méandres. D'autre part,

l'interprétation en terme de modèle de matrices fournit des comparaisons « physiques » lors de la reformulation en terme de gaz de boucles couplé à la gravité quantique.

4 Interprétation en terme de gaz de boucles couplé à la gravité quantique

La relation (9) suggère l'analogie avec les modèles de gaz de boucles, puisqu'elle fait apparaître un développement en terme de nombre de boucles sur un graphe. Plus précisément, un tel gaz de boucles est « couplé à la gravité quantique », ce qui ne signifie autre chose que la fonction de partition (ou l'énergie libre) est obtenue en sommant sur différents graphes sur lesquels sont tracés les boucles.

Les gaz de boucles sur des réseaux réguliers ont été intensivement étudiés, car ils apparaissent notamment comme équivalents à des problèmes de coloriage de réseaux. Pour le cas des méandres, le modèle sous-jacent de gaz de boucles sur réseau régulier comporte des boucles de deux couleurs, chaque type remplissant de façon dense le réseau carré. Ce modèle est connu sous le nom de *gaz de boucles denses sur le réseau carré*, ou modèle FPL^2 ⁶, et a été étudié par Jacobsen et Kondev [26] [27].

Nous présenterons brièvement quelques propriétés du modèle FPL^2 avant d'examiner le mécanisme de couplage à la gravité quantique (modèle $GFPL^2$), qui permet finalement de prédire des exposants apparaissant dans le comportement asymptotique des méandres.

4.1 Le modèle FPL^2

4.1.1 Définition

Les configurations du modèle de gaz de boucles denses sont obtenues en coloriant de deux couleurs (noir et blanc) les arêtes du réseau carré, de sorte qu'à chaque site du réseau, on a exactement 2 arêtes noires et 2 blanches incidentes (fig 9). Il y a donc, à rotation près, deux types de sites possibles : intersection et évitement.

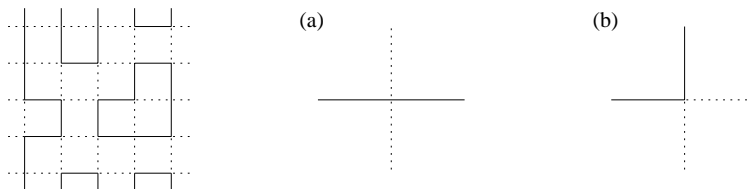


FIG. 9: À gauche, exemple de configuration de gaz de boucles denses. Avec des conditions aux limites périodiques, il y a 4 boucles noires (trait continu) et 2 boucles blanches (trait pointillé). À des rotations près, les sites du réseau sont soit de type a (intersection) ou de type b (évitement).

⁶Fully Packed Loop model.

Avec des conditions aux limites périodiques, les arêtes de même couleurs forment des boucles fermées. Chaque site du réseau est visité par une boucle de chaque couleur, d'où la dénomination de boucles *denses*.

On définit alors la fonction de partition du modèle en introduisant la fugacité n des boucles noires et b des boucles blanches :

$$Z_{\text{FPL}}(n, b) = \sum_{\text{configurations } \mathcal{C}} n^{L_n(\mathcal{C})} b^{L_b(\mathcal{C})} \quad (12)$$

où $L_n(\mathcal{C}), L_b(\mathcal{C})$ désignent respectivement le nombre de boucles noires et blanches dans la configuration \mathcal{C} .

Une remarque importante est que cette fonction de partition peut être ré-exprimée en fonction de l'état *local* de chaque site. Décidons en effet d'orienter arbitrairement chaque boucle noire ou blanche, et d'associer à chaque site du réseau un poids $e^{i\pi(\epsilon_n e_n + \epsilon_b e_b)/4}$, où ϵ_i vaut $-1, 0$ ou 1 selon que la boucle de couleur i tourne à gauche, va tout droit ou tourne à droite au site considéré. Une boucle se refermant sur elle-même tournant 4 fois plus dans une direction que dans l'autre⁷, on obtient un facteur $e^{\pm i\pi e_i}$ par boucle orientée de couleur i , et après sommation sur les différentes orientations possibles des boucles, on obtient un poids $n = 2 \cos \pi e_n$ par boucle noire, $b = 2 \cos \pi e_b$ par boucle blanche.

4.1.2 Description par une théorie conforme

Pour des fugacités des boucles comprises entre -2 et 2 , les facteurs de phase locaux e_n et e_b sont réels, et le modèle est critique. Il peut être décrit dans la limite continue par une théorie conforme de champs scalaires libres. Afin d'identifier les degrés de liberté de la théorie conforme, il est utile de reformuler le modèle en terme de modèle de hauteur d'interface (modèle Solid On Solid). Cette reformulation part d'une interprétation des boucles comme lignes de niveau.

Considérons ainsi une configuration de boucles denses orientées et partitionnons le réseau en sites pairs et impairs, que l'on repère respectivement par des points noirs et blancs (fig 10). Alors il existe 4 types d'arêtes suivant l'orientation de la boucle et sa couleur, que nous noterons A,B,C,D. Selon les conventions de la figure 10, des arêtes de type A et B alternent le long des boucles noires, et des arêtes C et D le long des boucles blanches. De plus, on trouve *exactement une* arête de chaque type autour de chaque site du réseau.

À présent, on définit le modèle de hauteur d'interface de la façon suivante : sur chaque facette du réseau carré est définie une hauteur (pour l'instant quantité algébrique abstraite), et la différence de hauteur entre facettes

⁷Une telle propriété est fautive pour une boucle appartenant à une classe d'homotopie non triviale, ce qui est possible par les conditions aux limites périodiques. Nous ne tiendrons pas compte ce phénomène, qui est correctement pris en compte dans l'étude de Jacobsen et Kondev.

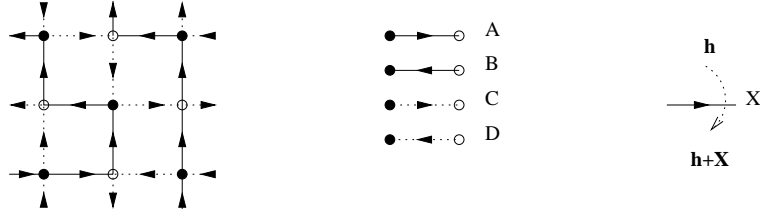


FIG. 10: À gauche, une configuration de boucles denses orientées, sur un réseau bicolorié (damier en noir et blanc). On peut alors distinguer 4 types d'arêtes représentées au milieu. À droite, la convention dite d'Ampère pour la variation de hauteur entre facettes partageant une arête commune de type X .

adjacentes est déterminée par le type de l'arête commune. Plus précisément, on adopte la convention « d'Ampère » : la hauteur est augmentée (respectivement diminuée) d'une quantité X lorsqu'on traverse une arête de type X orientée vers la gauche (resp. vers la droite) par rapport au déplacement (fig 10 droite).

Pour que la hauteur soit une quantité bien définie, il suffit que la variation totale de hauteur soit nulle lorsqu'on entoure un vertex. Il est facile de voir que ceci ne dégage qu'une seule contrainte sur les quantités algébriques A, B, C, D , à savoir $A - B + C - D = 0$. La situation générique est celle où ces quantités appartiennent à un espace vectoriel de dimension 3. Pour une formulation symétrique, on peut décider que les vecteurs $A, -B, C, -D$ sont les vecteurs unitaires pointant du centre d'un tétragone régulier vers ses sommets.

Dans la limite continue, Jacobsen et Kondev montrent que cette hauteur tridimensionnelle devient un champ scalaire à trois composantes. De plus, l'action pour ces trois champs est entièrement fixée par les symétries. La théorie conforme obtenue est une théorie de Liouville, et la charge centrale est

$$c_{\text{FPL}}(n, b) = 3 - 6 \left(\frac{e_n^2}{1 - e_n} + \frac{e_b^2}{1 - e_b} \right). \quad (13)$$

Cette théorie peut être interprétée en terme de gaz de Coulomb, et la diminution de charge centrale par rapport à 3 est due à l'introduction d'une charge électrique de fond, destinée à assurer un poids correct aux boucles d'homotopie non nulle. Cette interprétation permet également le calcul des dimensions conformes des opérateurs de la théorie.

4.2 Le modèle GFPL²

4.2.1 Couplage à la gravité quantique

Le couplage du modèle à la gravité quantique se fait en définissant le modèle non plus sur le réseau carré régulier mais sur un graphe tétravalent arbitraire. Sur un tel graphe, les arêtes sont à nouveau coloriées en noir ou en blanc, et les vertex restent des mêmes types que ceux de la figure 9.

Introduisons un poids x par vertex de type a et y par vertex de type b. La fonction de partition du gaz de boucles denses couplé à la gravité quantique (modèle GFPL) est

$$Z_{\text{GFPL}}(n, b, x, y) = \sum_{\Gamma} \sum_{\mathcal{C}} \frac{1}{|\text{Aut}(\Gamma, \mathcal{C})|} n^{L_n(\mathcal{C})} b^{L_b(\mathcal{C})} x^{v_a(\Gamma)} y^{v_b(\Gamma)} \quad (14)$$

où la première somme porte sur les graphes Γ planaires tétravalents, la seconde sur les configurations \mathcal{C} de boucles denses tracées sur le graphe Γ , $|\text{Aut}(\Gamma, \mathcal{C})|$ est l'ordre du groupe de symétrie du graphe Γ muni de la configuration \mathcal{C} , L_i et v_j comptent respectivement le nombre de boucles de couleur i et le nombre de vertex de type j .

Dans la gravité quantique usuelle, les poids x et y sont tous deux égaux à la « constante cosmologique » qui est conjuguée au nombre total de vertex, c'est-à-dire à l'aire du graphe dual.

Il est à noter une différence notable lors du passage du réseau régulier au réseau aléatoire : on ne peut plus à présent reformuler le modèle en terme de hauteur tridimensionnelle d'une interface. En effet cette reformulation repose sur l'hypothèse cruciale qu'on peut bicolorier le graphe, c'est-à-dire colorier chaque vertex en noir ou blanc de sorte que deux vertex adjacents soient toujours de couleurs opposées. Ceci n'est pas le cas pour un graphe tétravalent arbitraire⁸. Cependant, on peut contourner cette difficulté, en renonçant à la distinction entre les types d'arêtes respectifs A et B, C et D. Plus précisément, on doit imposer les contraintes $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, $\mathbf{C} = \mathbf{D}$, et cela est suffisant puisque la convention d'Ampère reste applicable au modèle sur réseau aléatoire.. Il s'ensuit une réduction dimensionnelle du modèle : la hauteur devient une quantité bidimensionnelle au lieu de tridimensionnelle. Au niveau de la théorie conforme sous-jacente, la réduction du nombre de degrés de liberté entraîne une diminution globale de 1 de la charge centrale :

$$c(n, b) = 2 - 6 \left(\frac{e_n^2}{1 - e_n} + \frac{e_b^2}{1 - e_b} \right). \quad (15)$$

4.2.2 Lien avec les méandres

Les configurations intervenant dans le modèle de gaz de boucles denses couplé à la gravité quantique sont des graphes planaires dont les arêtes sont

⁸Les graphes bicoloriables sont appelés eulériens.

coloriées en noir ou blanc. Elles sont très analogues aux graphes de Feynman du modèle de matrice vu plus haut. La différence principale réside dans le fait qu'on autorise un évitement des boucles par le vertex de type b, tandis que pour le modèle de matrice on impose aux boucles de se couper. En relaxant cette contrainte, on autorise des configurations de méandres où rivière et route se touchent sans se couper, et que l'on appelle méandres *tangents*.

En faisant tendre les fugacités n et b vers 0 pour imposer la connexité de la rivière et de la route, il vient :

$$\lim_{n,b \rightarrow 0} \frac{Z_{\text{GFPL}}(n, b, x, y) - 1}{nb} = \sum_{\substack{k,p \geq 0 \\ k+p \geq 1}} \frac{x^{2k} y^p}{2(2k+p)} \mu_{k,p} \quad (16)$$

où $\mu_{k,p}$ désigne le nombre de classes de méandres fermés tangents avec $2k$ points de croisement et p points de tangence. Le facteur de symétrie a une justification analogue à celui vu dans le cadre des modèles de matrices. On retrouve les méandres fermés usuels dans la limite $y = 0$: $\mu_{k,0} = M_k$.

Mais de plus il est conjecturé, à partir de raisonnements physiques, que les méandres tangents appartiennent à la même classe d'universalité que les méandres. Dans le modèle GFPL, un point de tangence correspond à un vertex de type b. La figure 11 nous montre que ce vertex est sans influence du point de vue du modèle de hauteur, on s'attend donc à ce qu'il soit non-pertinent au sens du groupe de renormalisation. Nous en verrons plus loin les conséquences.

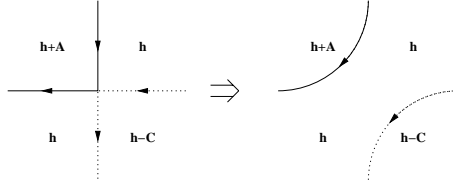


FIG. 11: Non-pertinence du vertex de type b : la hauteur en haut à droite et en bas à gauche sont identiques, on peut donc « défaire » le vertex sans altérer les hauteurs.

4.2.3 Résultats

Quelques résultats sont connus au sujet du couplage entre une théorie conforme avec la gravité quantique bidimensionnelle [28] [29] [30]. En particulier, certains exposants de la théorie couplée sont peuvent être déterminés à partir de la charge centrale et des dimensions d'opérateurs de la théorie non couplée.

En particulier, selon la formule KPZ, la fonction de partition du modèle couplé possède une singularité au voisinage d'une valeur x_c de la constante

cosmologique et la divergence est en :

$$Z(x) \sim (x_c - x)^{2-\gamma(c)} \quad (17)$$

et l'exposant γ dit de susceptibilité de corde est relié à la charge centrale du modèle non couplé selon :

$$\gamma(c) = \frac{c - 1 - \sqrt{(1-c)(25-c)}}{12} \quad (18)$$

Dans le cadre du modèle GFPL, un tel résultat s'applique *a priori* seulement au modèle avec constante cosmologique unique :

$$Z(x) = Z_{\text{GFPL}}(n, b, x = y) \sim (x_c - x)^{2-\gamma(c(n,b))}. \quad (19)$$

Mais comment le vertex de type b est non-pertinent au sens du groupe de renormalisation, les méandres appartiennent à la même classe d'universalité et on s'attend à ce que :

$$\lim_{n,b \rightarrow 0} \frac{Z_{\text{GFPL}}(n, b, x, y = 0) - 1}{nb} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_c^{2k}}{4k} M_k \sim (x'_c - x)^{2-\gamma(c(0,0))} \quad (20)$$

où la position du point critique x'_c non universelle a été changée alors que l'exposant n'est pas modifié. Ceci entraîne le comportement asymptotique :

$$M_k \sim \frac{x_c'^{-2k}}{k^\alpha} \quad (21)$$

avec

$$\alpha = 2 - \gamma(c(0,0)) = 2 - \gamma(-4) = \frac{29 + \sqrt{145}}{12}. \quad (22)$$

La prédiction d'un tel exposant irrationnel est assez extraordinaire. Numériquement, il a pu être vérifié avec un accord de 5 chiffres après la virgule !

De façon analogue, on peut estimer le comportement asymptotique des polynômes méandriques $M_k(n)$ pour $n \leq 2$ fixé :

$$\lim_{b \rightarrow 0} \frac{Z_{\text{GFPL}}(n, b, x, y = 0) - 1}{b} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_c^{2k}}{4k} M_k(n) \sim (x_c(n) - x)^{2-\gamma(c(n,0))} \quad (23)$$

d'où

$$M_k(n) \sim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_c(n)^{-2k}}{k^{2-\gamma(c(n,0))}} \quad (24)$$

avec $c(n,0) = -1 - 6e_n^2/(1 - e_n)$ et $n = 2\cos\pi e_n$.

La formule KPZ pour l'exposant de susceptibilité fournit donc des exposants du comportement asymptotique pour les méandres ou systèmes de méandres fermés. Mais il est possible de tirer d'autres résultats, par exemple pour le cas des semi-méandres.

Dans la partie précédente, nous avons vu que la fonction génératrice des nombres de semi-méandres \bar{M}_k est liée à une fonction de corrélation à deux points du modèle de matrice étudié. Une relation analogue existe dans le cas du modèle GFPL, puisqu'on génère les méandres semi-ouverts sur la sphère par insertion d'une extrémité de ligne noire en deux points distincts. Dans le modèle FPL, l'insertion d'une extrémité de boucle orientée correspond à un opérateur de défaut topologique. Plus précisément, soit donc $\psi_1(z)$ (resp. $\psi_{-1}(z)$) l'opérateur de la théorie conforme FPL réalisant au point z une insertion de boucle noire orientée vers l'extérieur (resp. vers l'intérieur) ; dans l'analogie avec les gaz de Coulomb, un tel opérateur de défaut topologique possède une charge magnétique $\pm 1/2$ (vortex) mais également une charge électrique e_n . La dimension conforme de ces opérateurs est connue et vaut :

$$h_1 = -\frac{e_n^2}{4(1-e_n)} + \frac{1-e_n}{16}. \quad (25)$$

Lors du couplage à la gravité quantique, la théorie KPZ nous apprend que les opérateurs sont « habillés » par la gravité et acquièrent une dimension habillée :

$$\Delta_1 = \frac{\sqrt{1-c+24h_1} - \sqrt{1-c}}{\sqrt{25-c} - \sqrt{1-c}}. \quad (26)$$

Au voisinage du point critique du modèle GFPL, la fonction de corrélation des opérateurs habillés se comporte en :

$$\langle \tilde{\psi}_1 \tilde{\psi}_{-1} \rangle \sim (x_c - x)^{2\Delta_1 - \gamma}. \quad (27)$$

Cette fonction de corrélation correspond aux fonctions génératrices pour les systèmes de méandres avec deux extrémités, les semi-méandres sont obtenus en imposant la connexité de la route et de la rivière, c'est-à-dire dans la limite $n, b \rightarrow 0$. La charge centrale est alors $c = -4$ et la dimension conforme des opérateurs est $h_1 = -3/32$ d'où la dimension habillée :

$$\Delta_1 = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{11} - \sqrt{5}}{\sqrt{29} - \sqrt{5}} \quad (28)$$

et on tire ainsi le comportement asymptotique du nombre de semi-méandres :

$$\bar{M}_k \sim \frac{x'_c{}^{-k}}{k^{\bar{\alpha}}} \quad (29)$$

avec

$$\bar{\alpha} = 2\Delta_1 - \gamma(-4) + 1 = 1 + \frac{1}{24} \sqrt{11}(\sqrt{29} + \sqrt{5}) \quad (30)$$

et l'« entropie » par pont des semi-méandres est $-\log x'_c$, égale à celle des méandres fermés car ces quantités interviennent toutes deux au niveau du point critique du modèle GFPL dans la limite $n, b \rightarrow 0$. À nouveau, l'exposant $\bar{\alpha}$ a pu être vérifié numériquement.

5 Conclusion

Cet exposé reste encore très incomplet. Il est en effet possible de poursuivre la méthode de cette dernière partie pour calculer une infinité d'exposants apparaissant pour des classes de méandres exotiques (méandres avec croisements de rivière, ...).

Mais le but principal était de montrer, à partir de l'exemple des méandres, comment les méthodes récentes développées en physique théorique peuvent trouver des applications dans des problèmes combinatoires d'une formulation extrêmement simple. Pourtant, les modèles de gaz de boucles ont été originellement introduits en physique statistique en relation avec des modèles de polymères, et les résultats de KPZ pour la gravité quantique ont été motivés par la théorie des cordes! On perçoit bien la richesse des applications possibles de ces méthodes.

Je dois remercier pour l'élaboration de cet exposé Jesper Jacobsen pour son encadrement, ainsi que Philippe Di Francesco et Emmanuel Guitter qui m'ont initialement présenté ce sujet fort intéressant et qui ont fourni une littérature abondante!

Références

- [1] The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, sequence A005315, <http://www.research.att.com/~njas/sequences/>.
- [2] Édouard LUCAS. *Théorie des nombres I*, page 120. A. Blanchard, Paris, 1961.
- [3] André SAINTE-LAGÜE. *Les Réseaux (ou Graphes)*, page 39. Fasc. 18 de *Mémorial des Sciences Mathématiques*. Gauthier-Villars, Paris, 1926.
- [4] André SAINTE-LAGÜE. *Avec des nombres et des lignes : récréations mathématiques*, page 147. Vuibert, Paris, 1937.
- [5] J. TOUCHARD. Contributions à l'étude du problème des timbres poste. *Canad. J. Math.*, **2** (1950) 385–398.
- [6] J.E. KOEHLER. Folding a strip of stamps. *J. Combinat. Theory*, **5** (1968) 135–152.
- [7] W. LUNNON. A map-folding problem. *Math. of Computation*, **22** (1968) 193–199.
- [8] V.I. ARNOL'D. The branched covering of $CP^2 \rightarrow S^4$, hyperbolicity and projective topology. *Siberian Math. J.*, **29** (1988) 717–725.
- [9] S.K. LANDO et A.K. ZVONKIN. Meanders. *Selecta Math. Sov.*, **11** (1992) 117–144.
- [10] S.K. LANDO et A.K. ZVONKIN. Plane and projective meanders. *Theor. Comp. Science*, **117** (1993) 227–241.
- [11] Henri POINCARÉ. *Sur un théorème de géométrie*. In *Oeuvres VI*, p. 499–538. Gauthier-Villars, Paris, 1953.
- [12] Y.M. ELIASHBERG. Estimates of number of fixed points of area preserving transformations. *VINITI, Syktyvkar*, **104** (1979).
- [13] K.H. KO et L. SMOLINSKY. A combinatorial matrix in 3-manifold theory. *Pacific J. Math.*, **149** (1991) 319–336.
- [14] P. ROSENSTIEHL. *Planar permutations defined by two intersecting Jordan curves*. In *Graph Theory and Combinatorics*. Academic Press, London, 1984.
- [15] K. HOFFMAN, K. MEHLHORN, P. ROSENSTIEHL et R. TARJAN. Sorting Jordan sequences in linear time using level-linked search trees. *Information and Control*, **68** (1986) 170–184.
- [16] A. PHILLIPS. The topology of Roman mosaic mazes. In *The visual mind*, pages 65–73. MIT Press, Cambridge, MA, 1993. Voir aussi <http://www.math.sunysb.edu/~tony/mazes/>.
- [17] P. DI FRANCESCO, O. GOLINELLI et E. GUITTER. Meander, folding and arch statistics. *Math. Comput. Modelling*, **26** (1997) 97–147. [hep-th/9506030](http://arxiv.org/abs/hep-th/9506030).

- [18] P. DI FRANCESCO, O. GOLINELLI et E. GUITTER. Meanders : a direct enumeration approach. *Nucl. Phys.*, **B 482**[FS] (1996) 497–535. hep-th/9607039.
- [19] I. JENSEN. Enumerations of plane meanders. preprint cond-mat/9910313.
- [20] O. GOLINELLI. A Monte-Carlo study of meanders. *Eur. Phys. J.*, **B 14** (2000) 145–155. cond-mat/9906329.
- [21] P. DI FRANCESCO, O. GOLINELLI et E. GUITTER. Meanders and the Temperley-Lieb algebra. *Commun. Math. Phys.*, **186** (1997) 1–59. hep-th/9602025.
- [22] P. DI FRANCESCO, O. GOLINELLI et E. GUITTER. Meanders : exact esymptotics. *Nucl. Phys.*, **B 570** (2000) 699–712. cond-mat/9910453.
- [23] P. DI FRANCESCO, E. GUITTER et J.L. JACOBSEN. Exact meander asymptotics : a numerical check. *Nucl. Phys.*, **B 580**[FS] (2000) 757–795. cond-mat/0003008.
- [24] P. DI FRANCESCO. Folding and coloring problems in mathematics and physics. *Bull. Am. Math. Soc.*, **37** (2000) 251–307.
- [25] E. BRÉZIN, C. ITZYKSON, G. PARISI et J.-B. ZUBER. Planar diagrams. *Comm. Math. Phys.*, **69** (1979) 147.
- [26] J.L. JACOBSEN et J. KONDEV. Field theory of compact polymers on the square lattice. *Nucl. Phys.*, **B 532**[FS] (1998) 635–688. cond-mat/9804048.
- [27] J.L. JACOBSEN et J. KONDEV. Transition from the compact to the dense phase of two-dimensional polymers. *J. Stat. Phys.*, **96** (1999) 21–48. cond-mat/9811085.
- [28] V.G. KNIZHNIK, A.M. POLYAKOV et A.B. ZAMOŁODCHIKOV. Fractal structure of 2d quantum gravity. *Mod. Phys. Lett.*, **A 3** (1988) 819–826.
- [29] F. DAVID. Conformal field theories coupled to 2d quantum gravity in the conformal gauge. *Mod. Phys. Lett.*, **A 3** (1988) 1651–1656.
- [30] J. DISTLER et H. KAWAI. Conformal field theory and 2d quantum gravity. *Nucl. Phys.*, **B 321** (1989) 509.