Stellingen behorende bij het proefschrift

# Bifurcations in Hamiltonian systems
## Computing singularities by Gröbner bases

van
Gerton Lunter

### I

In al hun verscheidenheid zijn wiskundigen op één punt tamelijk eensgezind, namelijk in hun, wat Freud omschreef als, "narcisme van het kleine verschil".

### II

[1, 2, 3] Beschouw het vierkant rooster $\mathbb{Z}^2$, en verbind horizontaal of verticaal aangrenzende punten met weerstanden van $1\Omega$. De vervangingsweerstand tussen de punten $(0,0)$ en $(n,m)$ is dan

$$
\begin{aligned}
R(n,m) &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{\text{Alle paden be-}\\ \text{ginnend in } (0,0)}} \frac{1}{4^{\text{padlengte}}} \times \begin{cases} \;\;1 \text{ als het pad eindigt in } (0,0) \\ -1 \text{ als het pad eindigt in } (n,m) \\ \;\;0 \text{ in alle andere gevallen} \end{cases} \\
&= \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{1 - \cos nt \cdot \cos ms}{2 - \cos t - \cos s} \mathrm{d}t\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i}^{i} \frac{2}{1+u^2} - \frac{(u+1)^n u^n}{(1+u^2)(u-1)^n} \left\{ \frac{u^m(1-u)^m}{(1+u)^m} + \frac{(1+u)^m}{u^m(1-u)^m} \right\} \mathrm{d}u.
\end{aligned}
$$

(De pad-som convergeert voorwaardelijk; de termen dienen gegroepeerd te worden naar padlengte. De laatste integraal geldt voor $n \geq 0$, en het integratiepad dient het punt $u = 0$ links te passeren indien $m > n$.)

In het bijzonder is $R(1,0) = \frac{1}{2}$, en $R(n,n) = \frac{2}{\pi} \left( 1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1} \right)$.

## III

[4] Maak twee vergissingen, en je hebt de nijlpaarden aan het dansen.

## IV

[5] Voor elke $n$ reële getallen $b_1, \ldots, b_n$, niet allemaal nul, geldt de volgende ongelijkheid:

$$\left(2\sin\frac{\pi}{2(n+1)}\right)^4 \leq \frac{\sum_{k=1}^n (b_{k-1} - 2b_k + b_{k+1})^2}{\sum_{k=1}^n b_k^2} \leq \left(2 + 2\cos\frac{\pi}{n+1}\right)^2,$$

waarbij $b_0 = b_{n+1} = 0$. Deze ongelijkheid kan niet worden aangescherpt.

## V

[6] Niet alleen wiskundigen abstraheren met plezier.

## VI

[7, 8] Zij $a_n$ het $n$-de getal in Peter Hendriks' binaire variant van Conway's audioaktieve reeks, ook bekend als de *look-and-say sequence*, die begint met

| | | |
|---|---|---|
| $a_0$: | 1 | 1 éen, |
| $a_1$: | 11 | 2 enen, |
| $a_2$: | 101 | 1 éen, 1 nul, 1 éen, |
| $a_3$: | 111011 | 3 enen, 1 nul, 2 enen, |
| $a_4$: | 11110101 | 4 enen, 1 nul, 1 éen, 1 nul, 1 éen, |
| $a_5$: | 100110111011 | (etc.) |

Het aantal cijfers waaruit $a_n$ bestaat is gelijk aan

$$\left(\frac{8}{9} + \frac{1}{18}\sqrt[3]{748 - 36\sqrt{93}} + \frac{1}{18}\sqrt[3]{748 + 36\sqrt{93}}\right) \times$$
$$\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\sqrt[3]{116 - 12\sqrt{93}} + \frac{1}{6}\sqrt[3]{116 + 12\sqrt{93}}\right)^n,$$

naar beneden afgerond op een geheel getal, behalve voor $n = 2$ en $n = 3$.

## VII

[9] Zij $B_n := (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus \cdots \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ ($n$ termen); $B_n \subset B_m$ $(n < m)$ door rechts toevoegen van nullen; $B := \cup_{n \in \mathbb{N}} B_n$.
Zij $\pi_n : B \to B_n$ de canonieke projectie.
Zij $P_n$ de groep van permutaties van $B_n$; $P_n \subset P_m$ $(n < m)$ door rechts als de identiteit te laten werken; $P := \cup_{n \in \mathbb{N}} P_n$.
Zij $L_k := \{\sigma \in P | \exists n : \sigma \in P_{n+k}$ en $\forall \beta \in B : \pi_n \sigma \beta = \pi_n \beta\}$ ($k$-lokale permutaties).
Zij $c_k(\sigma) := \min\{m \in \mathbb{N} | \exists (\sigma_1, \ldots, \sigma_m) \in L_k^m : \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_m = \sigma\}$ ($k$-complexiteit).
Zij $N_k(\sigma) := \{\tilde{\sigma} \in P | \forall \beta \in B : \pi_k \sigma \pi_k \tilde{\sigma} \pi_k \sigma \pi_k \beta = \pi_k \sigma \pi_k \beta\}$ ($k$-nepinverses).
Dan:
1. $\forall n \geq 4$ $\forall \sigma \in P_n, \sigma$ een 2-cykel : $c_3(\sigma) \leq 18(n-2)^4$
2. $\forall n \geq 4$ $\forall \sigma \in P_n : c_3(\sigma) \leq (2^n!) 18(n-2)^4$
3. $\forall n \geq 1$ $\forall k \leq n : \max_{\sigma \in P_n} c_k(\sigma) \geq \log(2^n!)/\log(2^k!(2k-1))$
4. $\forall n \geq 4 : \max_{\sigma \in P_n} c_3(\sigma) \geq n 2^{n-5}$
5. $\forall n \geq 1$ $\forall \sigma \in P_n$ $\forall k \geq 1 : N_k(\sigma) \neq \emptyset$
6. P=NP $\Rightarrow$ $\forall a \in \mathbb{N}$ $\exists b \in \mathbb{N} : \max_{\substack{\sigma \in P_{2n}, \\ c_3(\sigma) < n^a}} \min_{\tilde{\sigma} \in N_n(\sigma)} c_3(\tilde{\sigma}) = O(n^b) \qquad (n \to \infty)$

## VIII

Onder invloed van het Engels worden samengestelde woorden steeds vaker los geschreven. Het gebruik van deze Engelse Spatie is besmettelijk, en met name hoger opgeleiden, onder wie velen die normaal gesproken prat gaan op een verzorgd taalgebruik, vormen vanwege hun wisselende linguïstische contacten een risicogroep.

## IX

Nonstandaardanalyse kan een bewijs zowel vereenvoudigen als verhelderen, en verdient een standaardplaats in het wiskundecurriculum. (Dit proefschrift, appendix A.1.)

## X

Wie hardlopen saai vindt, loopt niet hard genoeg.

## Verwijzingen


[1] H. Jordens. Verzin een puzzel en win. *MUON*, 50:14–15, 1998.

[2] G. Venezian. On the resistance between two points on a grid. *Am. J. Phys.*, 62(11):1000–1004, 1994.

[3] F. van Steenwijk. Equivalent resistors of polyhedral resistive structures. *Am. J. Phys.*, 66(1):90–91, 1998.

[4] Ultimate Play The Game: *Sabre Wulf*. `#AD86-#AD8C`: "`BIT 7,(IX+6) // JP P,#AD8F`".

[5] G. A. Lunter. New proofs and a generalisation of inequalities of Fan, Taussky and Todd. *J. of Math. Anal. and Appl.*, 185(2):464–476, 1994.

[6] H. Mulisch. *Bericht aan de rattenkoning*. De Bezige Bij, 1966.

[7] J. H. Conway. The weird and wonderful chemistry of audioactive decay. In T. M. Cover and B. Gopinath, editors, *Open problems in communication and computation*, pages 173–188. Springer Verlag, 1987.

[8] N. J. A. Sloane. The on-line encyclopedia of integer sequences. `Http://www.research.att.com/~njas/sequences/`, 1999. Reeksen A001387 en A049194.

[9] E. Fredkin and T. Toffoli. Conservative logic. *Int. J. Theor. Ph.*, 21(3–4):219–253, 1982.