

Énumération des 2-arbres k -gonaux

Gilbert Labelle, Cédric Lamathe, Pierre Leroux

RÉSUMÉ : Dans ce travail¹, nous généralisons les 2-arbres en remplaçant les triangles par des quadrilatères, des pentagones ou des polygones à k côtés (k -gones), où $k \geq 3$ est fixe. Cette généralisation, aux 2-arbres k -gonaux, est naturelle et est étroitement liée dans le cas planaire aux arbres cellulaires. Notre objectif est le dénombrement, étiqueté et non étiqueté, des 2-arbres k -gonaux selon le nombre n de k -gones. Nous donnons des formules explicites dans le cas étiqueté, et, dans le cas non étiqueté, des formules de récurrence et des formules asymptotiques.

ABSTRACT: In this paper¹, we generalize 2-trees by replacing triangles by quadrilaterals, pentagons or k -sided polygons (k -gons), where $k \geq 3$ is given. This generalization, to k -gonal 2-trees, is natural and is closely related, in the planar case, to some specializations of the cell-growth problem. Our goal is the enumeration, labelled and unlabelled, of k -gonal 2-trees according to the number n of k -gons. We give explicit formulas in the labelled case, and, in the unlabelled case, recursive and asymptotic formulas.

1 Introduction

L'espèce des arbres bidimensionnels, ou 2-arbres, a été bien étudiée dans la littérature. Voir par exemple [4] et [2, 3]. Essentiellement, un 2-arbre est un graphe simple connexe constitué de triangles qui sont liés entre eux par les arêtes de manière arborescente, c'est-à-dire sans former de cycles (de triangles). Dans [5], Harary et al. ont énuméré une variante des arbres cellulaires (relié au "cell-growth problem"), à savoir des 2-arbres k -gonaux plans et planaires², dans lesquels les triangles ont été remplacés par des quadrilatères, des pentagones ou des polygones à k côtés (k -gones), où $k \geq 3$ est fixe. De tels 2-arbres, bâtis sur des k -gones, sont appelés 2-arbres k -gonaux. Cette généralisation apparaît naturellement et le but de ce travail est l'énumération des 2-arbres k -gonaux libres, c'est-à-dire vus comme graphes simples, sans question de planarité. La figure 1 a) propose un exemple de 2-arbres k -gonal, dans le cas où $k = 4$.

Nous disons qu'un 2-arbre k -gonal est *orienté* si ses arêtes sont orientées de façon telle que chaque k -gone forme un cycle orienté, voir la figure 1 b). Notons par \mathcal{A} et par \mathcal{A}_o les espèces des 2-arbres k -gonaux et des 2-arbres k -gonaux orientés respectivement. Pour ces deux espèces, nous utilisons les symboles $-$, \diamond et \diamond en exposant pour indiquer que les structures ont été pointées en une arête, en un polygone, et en un polygone muni d'une arête distinguée, respectivement.

Notre objectif est le dénombrement, étiqueté et non étiqueté, des 2-arbres k -gonaux selon le nombre n de k -gones. Nous donnons des formules explicites dans le cas étiqueté, et dans le cas non étiqueté, des formules de récurrence et des formules asymptotiques. Pour cela, nous adaptons l'approche de Fowler et al. dans [2, 3] qui correspond au cas $k = 3$. En particulier, les 2-arbres sont étiquetés aux k -gones.

¹ Avec l'appui du FCAR (Québec) et du CRSNG (Canada)

² Au sens où toutes les faces, à part la face externe, sont des k -gones

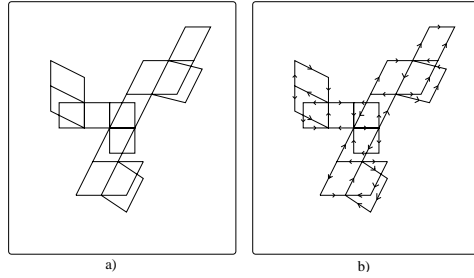


Figure 1: Un 2-arbre 4-gonal non orienté et orienté

La principale difficulté à cette extension vient, comme on le verra, du cas où k est pair.

Les deux premières étapes sont assez directes. Il s'agit d'étendre le théorème de dissymétrie au cas k -gonal et de caractériser l'espèce $B = \mathcal{A}^{\rightarrow}$ des 2-arbres k -gonaux munis d'une arête distinguée et orientée, à l'aide d'une équation fonctionnelle de type lagrangien. Le premier résultat est une extension immédiate du cas $k = 3$ et la démonstration est omise.

Théorème 1.1. THÉORÈME DE DISSYMÉTRIE. *Les espèces \mathcal{A} et \mathcal{A}_o des 2-arbres k -gonaux orientés et non orientés respectivement satisfont les isomorphismes d'espèces suivants :*

$$\mathcal{A}_o^- + \mathcal{A}_o^\circ = \mathcal{A}_o + \mathcal{A}_o^\circ, \quad (1)$$

$$\mathcal{A}^- + \mathcal{A}^\circ = \mathcal{A} + \mathcal{A}^\circ. \quad (2)$$

Dans la prochaine section, nous caractérisons l'espèce $B = \mathcal{A}^{\rightarrow}$ et nous en donnons ses propriétés. Par la suite, nous exprimons les diverses espèces pointées qui apparaissent dans le théorème de dissymétrie en fonction de l'espèce B et nous en déduisons les résultats énumératifs désirés pour les espèces \mathcal{A}_o et \mathcal{A} . Le cas orienté, plus simple, est traité d'abord, dans la section 3. Le cas non orienté, suit, dans la section 4, en distinguant les deux cas de parité de k , pour le dénombrement non étiqueté. Enfin, les résultats asymptotiques sont présentés dans la section 5.

2 L'espèce $B = \mathcal{A}^{\rightarrow}$

L'espèce $B = \mathcal{A}^{\rightarrow}$ joue un rôle fondamental dans l'étude des 2-arbres k -gonaux.

Théorème 2.1. *L'espèce $B = \mathcal{A}^{\rightarrow}$ des 2-arbres k -gonaux pointés en une arête orientée satisfait l'équation (isomorphisme) fonctionnelle suivante :*

$$B = E(XB^{k-1}), \quad (3)$$

où E représente l'espèce des ensembles.

Preuve. On décompose une $\mathcal{A}^{\rightarrow}$ -structure en un ensemble de *pages*, c'est-à-dire en sous-graphes maximaux qui partagent un seul k -gone avec l'arête distinguée. Pour chaque page, l'orientation de l'arête pointée permet alors de définir un ordre et une orientation sur les $k - 1$ arêtes restantes du polygone possédant cette arête, selon la figure 2 a) pour le cas impair, et b) pour le cas pair. Ces arêtes étant orientées, on peut alors y accrocher des B -structures. On en déduit alors l'équation (3). ■

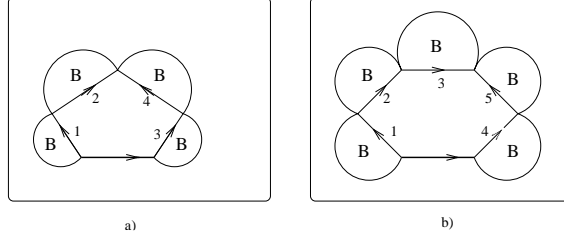


Figure 2: Une page orientée a) $k = 5$ b) $k = 6$

On peut relier simplement l'espèce $B = \mathcal{A}^\rightarrow$ à celle des arborescences (arbres enracinés), A , caractérisée par l'équation fonctionnelle $A = XE(A)$, où X est ici l'espèce des sommets. En effet de (3), on déduit successivement

$$(k-1)XB^{k-1} = (k-1)XE((k-1)XB^{k-1}), \quad (4)$$

sachant que $E^m(X) = E(mX)$, et, par unicité,

$$(k-1)XB^{k-1} = A((k-1)X). \quad (5)$$

Finalement, on obtient l'expression suivante pour l'espèce B en fonction de l'espèce des arborescences :

Proposition 2.2. *L'espèce $B = \mathcal{A}^\rightarrow$ des 2-arbres k -gonaux pointés en une arête orientée vérifie*

$$B = \sqrt[k-1]{\frac{A((k-1)X)}{(k-1)X}}. \quad (6)$$

Proposition 2.3. *Les nombres a_n^\rightarrow , $a_{n_1, n_2, \dots}^\rightarrow$, et $b_n = \tilde{a}_n^\rightarrow$ de 2-arbres k -gonaux pointés en une arête orientée et ayant n k -gones, respectivement étiquetés, laissés fixes par une permutation de \mathbb{S}_n de type cyclique $1^{n_1}2^{n_2} \dots$, et non étiquetés, satisfont les relations suivantes :*

$$a_n^\rightarrow = ((k-1)n+1)^{n-1} = m^{n-1}, \quad (7)$$

où $m = (k-1)n+1$ est le nombre d'arêtes,

$$a_{n_1, n_2, \dots}^\rightarrow = \prod_{i=1}^{\infty} (1 + (k-1) \sum_{d|i} dn_d)^{n_i-1} (1 + (k-1) \sum_{\substack{d|i \\ d < i}} dn_d), \quad (8)$$

et

$$b_n = \frac{1}{n} \sum_{1 \leq j \leq n} \sum_{\alpha} (|\alpha|+1) b_{\alpha_1} b_{\alpha_2} \dots b_{\alpha_{k-1}} b_{n-j}, \quad b_0 = 1, \quad (9)$$

la deuxième somme étant prise sur les $(k-1)$ -uplets d'entiers $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1})$ tels que $|\alpha|+1$ divise l'entier j , où $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{k-1}$.

Preuve. Les formules (7) et (8) s'obtiennent en spécialisant avec $\mu = (k-1)^{-1}$ les formules suivantes, données par Fowler et al. dans [2, 3],

$$\left(\frac{A(x)}{x}\right)^\mu = \sum_{n \geq 0} \mu(\mu+n)^{n-1} \frac{x^n}{n!}, \quad (10)$$

$$Z\left(\frac{A(x/\mu)}{x/\mu}\right)^\mu =$$

$$\sum_{n_1, n_2, \dots} \frac{x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots}{1^{n_1} n_1! 2^{n_2} n_2! \dots} \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{\mu} \sum_{d|i} dn_d\right)^{n_i-1} \left(1 + \frac{1}{\mu} \sum_{d|i, d < i} dn_d\right). \quad (11)$$

La formule (7) peut également se voir directement par une adaptation de la bijection de Prüfer. Pour obtenir la récurrence (9), il suffit de prendre la dérivée logarithmique de l'équation

$$\tilde{B}(x) = \exp\left(\sum_{i \geq 1} \frac{x^i \tilde{B}^{k-1}(x^i)}{i}\right), \quad (12)$$

où $\tilde{B}(x) = \sum_{n \geq 0} b_n x^n$, qui découle de la relation (3). ■

La suite des nombres $\{b_n\}$, pour $k = 2, 3, 4, 5$, est répertoriée dans l'encyclopédie des suites d'entiers [11] et l'équation (3), dans l'encyclopédie des structures combinatoires [6]. Le comportement asymptotique des nombres b_n est analysé, notamment en fonction de k , dans la section 5.

3 Cas orienté

Commençons par déterminer les espèces pointées qui apparaissent dans le théorème de dissymétrie. Ces relations sont assez immédiates et la démonstration est laissée au lecteur.

Proposition 3.1. *Les espèces \mathcal{A}_o^- , \mathcal{A}_o^\diamond , et \mathcal{A}_o° sont caractérisées par les isomorphismes suivants*

$$\mathcal{A}_o^- = B, \quad \mathcal{A}_o^\diamond = XC_k(B), \quad \mathcal{A}_o^\circ = XB^k, \quad (13)$$

où $B = \mathcal{A}^{\rightarrow}$ et C_k représente l'espèce des cycles (orientés) de longueur k .

Le théorème de dissymétrie permet d'exprimer la série génératrice ordinaire $\tilde{\mathcal{A}}_o(x)$ des 2-arbres k -gonaux orientés non étiquetés, en termes des espèces pointées,

$$\tilde{\mathcal{A}}_o(x) = \tilde{\mathcal{A}}_o^-(x) + \tilde{\mathcal{A}}_o^\diamond(x) - \tilde{\mathcal{A}}_o^\circ(x), \quad (14)$$

et par la proposition 3.1, nous pouvons alors exprimer $\tilde{\mathcal{A}}_o(x)$ en fonction de $\tilde{B}(x) = \tilde{\mathcal{A}}^{\rightarrow}(x)$.

Proposition 3.2. *La série génératrice ordinaire $\tilde{a}_o(x)$ de l'espèce des 2-arbres k -gonaux orientés non étiquetés est donnée par l'expression*

$$\tilde{a}_o(x) = \tilde{B}(x) + \frac{x}{k} \sum_{\substack{d|k \\ d>1}} \phi(d) \tilde{B}^{\frac{k}{d}}(x^d) - \frac{k-1}{k} x \tilde{B}^k(x). \quad (15)$$

Corollaire 3.3. *Les nombres $a_{o,n}$ et $\tilde{a}_{o,n}$ de 2-arbres k -gonaux orientés étiquetés et non étiquetés, sur n k -gones sont donnés par*

$$a_{o,n} = ((k-1)n+1)^{n-2} = m^{n-2}, \quad n \geq 2, \quad (16)$$

$$\tilde{a}_{o,n} = b_n - \frac{k-1}{k} b_{n-1}^{(k)} + \frac{1}{k} \sum_{\substack{d|k \\ d>1}} \phi(d) b_{\frac{n-1}{d}}^{(\frac{k}{d})}, \quad (17)$$

où $b_i^{(j)} = \sum_{i_1+\dots+i_j=i} b_{i_1} b_{i_2} \dots b_{i_j}$, représente le coefficient de x^i dans la série $\tilde{B}^j(x)$, avec $b_r^{(j)} = 0$ si r est non entier ou négatif.

Preuve. Pour le cas étiqueté, il suffit de remarquer que $a_n^{\rightarrow} = m a_{o,n}$. Dans le cas non étiqueté, l'équation (17) s'obtient directement de (15). ■

4 Cas non orienté

Dans le cas non orienté, le nombre a_n de 2-arbres k -gonaux étiquetés sur n polygones satisfait $2a_n = a_{o,n} + 1$, puisque le seul 2-arbre k -gonal orienté étiqueté laissé fixe par changement d'orientation pour un nombre de polygones donné, est celui dont les polygones partagent tous une arête commune. On obtient

Proposition 4.1. *Le nombre a_n de 2-arbres k -gonaux étiquetés sur n polygones est donné par*

$$a_n = \frac{1}{2} (m^{n-2} + 1), \quad n \geq 2, \quad (18)$$

où $m = (k-1)n + 1$.

Pour le dénombrement non étiqueté des 2-arbres k -gonaux (non orientés), nous allons considérer certaines espèces quotients de la forme F/\mathbb{Z}_2 , où F est une espèce de structures "orientées" et $\mathbb{Z}_2 = \{1, \tau\}$, est un groupe dont l'action de τ sur les F -structures est de renverser l'orientation. Une structure d'une telle espèce quotient consiste alors en une orbite $\{s, \tau \cdot s\}$ de F -structures selon l'action de \mathbb{Z}_2 .

Par exemple, les diverses espèces pointées de 2-arbres k -gonaux, \mathbf{a}^- , \mathbf{a}^\diamond et $\mathbf{a}^{\hat{\diamond}}$, s'expriment comme espèces quotients des espèces de 2-arbres k -gonaux orientés correspondantes :

$$\mathbf{a}^- = \frac{\mathbf{a}^{\rightarrow}}{\mathbb{Z}_2}, \quad \mathbf{a}^\diamond = \frac{\mathbf{a}_o^\diamond}{\mathbb{Z}_2} = \frac{XC_k(B)}{\mathbb{Z}_2}, \quad \mathbf{a}^{\hat{\diamond}} = \frac{\mathbf{a}_o^{\hat{\diamond}}}{\mathbb{Z}_2} = \frac{XB^k}{\mathbb{Z}_2}. \quad (19)$$

Pour le dénombrement non étiqueté de telles espèces quotients, on utilise la formule suivante qui est évidente :

$$(F/\mathbb{Z}_2)^\sim(x) = \frac{1}{2}(\tilde{F}(x) + \tilde{F}_\tau(x)), \quad (20)$$

où $\tilde{F}_\tau(x) = \sum_{n \geq 0} |\text{Fix}_{\tilde{F}_n}(\tau)| x^n$ est la série génératrice des F -structures non étiquetées laissées fixes par l'action de τ , c'est-à-dire par changement d'orientation. Toutefois, le calcul de ces séries $\tilde{F}_\tau(x)$ est assez complexe et il est avantageux de différencier en deux cas selon la parité de k .

4.1 Cas k impair

On peut remarquer, en observant les figures 2 a) et b), que dans tout k -gone contenant l'arête pointée (mais non orientée), d'une \mathcal{A}^- -structure, il est possible d'orienter les $k - 1$ autres arêtes, dans la direction s'éloignant de l'arête pointée comme dans la figure 2 a), lorsque k est impair, mais qu'il restera une arête ambiguë si k est pair. Ce phénomène permet d'introduire des espèces squelettes, lorsque k est impair, en analogie avec l'approche de Fowler et al. [2, 3] où $k = 3$. Ce sont les espèces à deux sortes $Q(X, Y)$, $S(X, Y)$ et $U(X, Y)$, où X représente la sorte des k -gones et Y celle des arêtes orientées, définies par les figures 3 a), b) et c), où $k = 5$. En analogie avec le cas $k = 3$, on a les propositions suivantes.

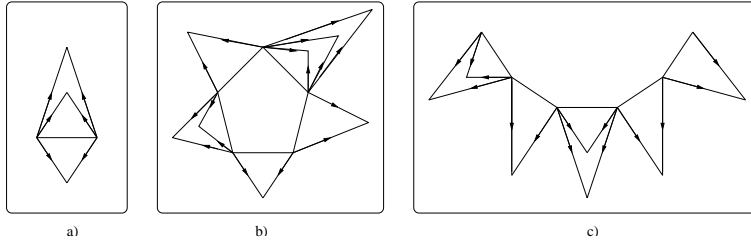


Figure 3: Espèces squelettes a) $Q(X, Y)$, b) $S(X, Y)$ et c) $U(X, Y)$

Proposition 4.2. *Les espèces squelettes Q , S et U admettent des expressions en termes d'espèces quotients :*

$$Q(X, Y) = E(XY^2)/\mathbb{Z}_2, \quad S(X, Y) = C_k(E(XY^2))/\mathbb{Z}_2, \quad U(X, Y) = (E(XY^2))^k/\mathbb{Z}_2. \quad (21)$$

Proposition 4.3. *Lorsque k est impair, $k \geq 3$, on a les expressions suivantes pour les espèces pointées de 2-arbres k -gonaux, où $B = \mathcal{A}^\rightarrow$:*

$$a^- = Q(X, B^{\frac{k-1}{2}}), \quad a^\diamond = S(X, B^{\frac{k-1}{2}}), \quad a^\circ = U(X, B^{\frac{k-1}{2}}). \quad (22)$$

Dans le but d'obtenir des formules d'énumération, il faut préalablement calculer les séries indicatrices de cycles des espèces Q , S et U .

Proposition 4.4. *Les séries indicatrices de cycles des espèces $Q(X, Y)$, $S(X, Y)$ et $U(X, Y)$ sont données par la formule*

$$Z_Q = \frac{1}{2} \left(Z_{E(XY^2)} + q \right), \quad (23)$$

$$Z_S = \frac{1}{2} \left(Z_{C_k(E(XY^2))} + q \cdot (p_2 \circ Z_{E(XY^2)})^{\frac{k-1}{2}} \right), \quad (24)$$

$$Z_U = \frac{1}{2} \left(Z_{(E(XY^2))^k} + q \cdot (p_2 \circ Z_{E(XY^2)})^{\frac{k-1}{2}} \right), \quad (25)$$

où $q = h \circ (x_1 y_2 + p_2 \circ (x_1 \frac{y_1^2 - y_2}{2}))$, p_2 représente la fonction somme de puissances de degré deux, h la fonction symétrique homogène et \circ , la composition pléthystique.

Preuve. La formule (23) et la méthode utilisée se trouvent dans [2, 3]. Il s'agit de dénombrer les $F(X, Y)$ -structures colorées non étiquetées laissées fixes par τ . Dans le cas de S , on doit laisser fixe une $C_k(E(XY^2))$ -structure colorée. Pour cela le cycle de base de longueur k doit posséder au moins un axe de symétrie passant par le milieu d'un des côtés. On peut voir que lorsqu'une telle structure possède plusieurs axes de symétrie, le choix d'un axe est arbitraire. De part et d'autre de l'axe de symétrie, chaque $E(XY^2)$ -structure colorée doit avoir son image miroir; ce qui contribue pour un terme de $(p_2 \circ Z_{E(XY^2)})^{\frac{k-1}{2}}$. Ensuite, la structure attachée à l'arête distinguée doit être globalement laissée fixe, ce qui donne le facteur q . Le raisonnement est très similaire pour l'espèce U . ■

Combinant le théorème de dissymétrie, les équations (23), (24), (25) et les lois de substitution de la théorie des espèces, on obtient les séries génératrices des types de l'espèce des 2-arbres k -gonaux .

Proposition 4.5. *Soit $k \geq 3$ impair. La série génératrice ordinaire $\tilde{a}(x)$ des 2-arbres k -gonaux non étiquetés est donnée par*

$$\tilde{a}(x) = \frac{1}{2} \left(\tilde{a}_o(x) + \exp \left(\sum_{i \geq 1} \frac{1}{2i} (2x^i \tilde{B}^{\frac{k-1}{2}}(x^{2i}) + x^{2i} \tilde{B}^{k-1}(x^{2i}) - x^{2i} \tilde{B}^{\frac{k-1}{2}}(x^{4i})) \right) \right). \quad (26)$$

Corollaire 4.6. *Pour $k \geq 3$ impair, le nombre \tilde{a}_n de 2-arbres k -gonaux non étiquetés sur n k -gones satisfait la récurrence suivante*

$$\tilde{a}_n = \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^n \left(\sum_{l|j} l \omega_l \right) \left(\tilde{a}_{n-j} - \frac{1}{2} \tilde{a}_{o, n-j} \right) + \frac{1}{2} \tilde{a}_{o, n}, \quad \tilde{a}_k[0] = 1, \quad (27)$$

où, pour tout $n \geq 1$,

$$\omega_n = 2b_{\frac{n-1}{2}}^{\binom{k-1}{2}} + b_{\frac{n-2}{2}}^{(k-1)} + b_{\frac{n-2}{4}}^{\binom{k-1}{2}}, \quad (28)$$

et $b_i^{(j)}$ est défini au corollaire 3.3.

4.2 Cas k pair

Le cas où k est pair est plus délicat. Dans le but d'exprimer les séries génératrices ordinaires des types des trois espèces \mathcal{A}^- , \mathcal{A}° et \mathcal{A}^∞ , nous appliquons la formule (20) aux formules (19). Pour l'espèce \mathcal{A}^- , on a

$$\tilde{\mathcal{A}}^-(x) = \frac{1}{2}(\tilde{\mathcal{A}}^{\rightarrow}(x) + \tilde{\mathcal{A}}_{\tau}^{\rightarrow}(x)), \quad (29)$$

où $\tilde{\mathcal{A}}_{\tau}^{\rightarrow}(x) = \sum_{n \geq 0} |\text{Fix}_{\tilde{\mathcal{A}}_n^{\rightarrow}}(\tau)| x^n$ est la série génératrice des 2-arbres k -gonaux pointés en une arête orientée, non étiquetés, laissés fixes par changement d'orientation. Il faut donc calculer $\tilde{\mathcal{A}}_{\tau}^{\rightarrow}(x)$. Pour cela, introduisons quelques espèces auxiliaires. La première, notée \mathcal{A}_{TS} , est l'espèce des 2-arbres k -gonaux pointés en une arête orientée et dont toutes les pages attachées autour de cette arête sont verticalement symétriques, sans symétries croisées (voir plus loin); on dira *totalemment symétriques*. On peut caractériser cette espèce par l'équation fonctionnelle suivante

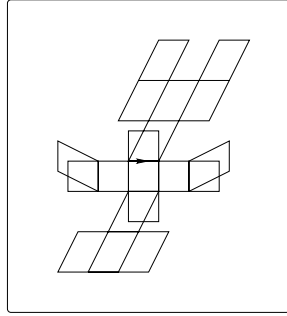


Figure 4: Une structure de l'espèce \mathcal{A}_{TS}

(voir figure 4),

$$\mathcal{A}_{\text{TS}} = E(X \cdot X_{=}^2 < B^{\frac{k-2}{2}} > \cdot \mathcal{A}_{\text{TS}}) = E(P_{\text{TS}}), \quad (30)$$

où $X_{=}^2 < F >$ représente l'espèce des couples de F -structures isomorphes et P_{TS} est l'espèce des *pages totalement symétriques*. Cette équation se traduit au niveau des séries génératrices des types par

$$\tilde{\mathcal{A}}_{\text{TS}}(x) = \exp \left(\sum_{i \geq 1} \frac{1}{i} x^i \tilde{B}^{\frac{k-2}{2}}(x^{2i}) \tilde{\mathcal{A}}_{\text{TS}}(x^i) \right). \quad (31)$$

Proposition 4.7. *Les nombres $\beta_n = |\tilde{\mathcal{A}}_{\text{TS}}[n]|$, de \mathcal{A}_{TS} -structures non étiquetées sur n polygones satisfont la récurrence*

$$\beta_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{d|i} d \omega_d \right) \beta_{n-i}, \quad n \geq 1 \quad \beta_0 = 1, \quad (32)$$

où

$$\omega_n = \sum_{\substack{i+j=n-1 \\ i \text{ pair}}} b_{\frac{i}{2}}^{\binom{k-2}{\frac{i}{2}}} \beta_j.$$

Preuve. Il suffit de prendre la dérivée logarithmique de l'expression (31). \blacksquare

Passons maintenant à l'introduction des deux espèces P_{CR} et P_{M} , des *paires de pages croisées* et des *pages mixtes*. Une paire de pages *croisées* est, par définition, une paire de pages orientées (des \mathcal{A}^\rightarrow -structures comportant une seule page) de la forme $\{s, \tau \cdot s\}$ avec s et $\tau \cdot s$ non isomorphes. La figure 5 a) montre une structure de cette espèce. Une page *mixte* est une page symétrique possédant une (ou plusieurs) symétrie de type croisée. Une telle structure est dessinée en figure 5 b). On peut alors exprimer ces deux espèces l'une en fonction de l'autre, comme suit

$$P_{\text{CR}} = \Phi_2 \langle XB^{k-1} - (P_{\text{TS}} + P_{\text{M}}) \rangle, \quad (33)$$

$$P_{\text{M}} = X \cdot X_{\pm}^2 \langle B^{\frac{k-2}{2}} \rangle \cdot \mathcal{A}_{\text{TS}} \cdot E_+(P_{\text{CR}} + P_{\text{M}}), \quad (34)$$

où $\Phi_2 \langle F \rangle$ représente l'espèce des paires de F -structures de la forme $\{s, \tau \cdot s\}$ et E_+ est l'espèce des ensembles non vides. Passant aux séries génératrices des types, il vient

$$\tilde{P}_{\text{CR}}(x) = \frac{1}{2}(x^2 \tilde{B}^{k-1}(x^2) - \tilde{P}_{\text{TS}}(x^2) - \tilde{P}_{\text{M}}(x^2)), \quad (35)$$

$$\tilde{P}_{\text{M}}(x) = x \tilde{B}^{\frac{k-2}{2}}(x^2) \tilde{\mathcal{A}}_{\text{TS}}(x) \left(\exp \left(\sum_{i \geq 1} \frac{1}{i} (\tilde{P}_{\text{CR}}(x^i) + \tilde{P}_{\text{M}}(x^i)) \right) - 1 \right). \quad (36)$$

Après manipulations et la prise de la dérivée logarithmique de (36), on obtient les nombres $\tilde{P}_{\text{CR},n}$ et $\tilde{P}_{\text{M},n}$ de pages croisées et mixtes respectivement sur n polygones

$$\tilde{P}_{\text{CR},n} = b_{\frac{n-2}{2}}^{(k-1)} - \tilde{P}_{\text{TS},\frac{n}{2}} - \tilde{P}_{\text{M},\frac{n}{2}}, \quad (37)$$

$$\tilde{P}_{\text{M},n} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{d|i} \varepsilon_d \right) c_{n-i} + f_n, \quad (38)$$

où

$$\varepsilon_n = \frac{k-2}{2} b_{n-1}^{(k-1)} + \tilde{P}_{\text{TS},n} + \tilde{P}_{\text{CR},n} + \tilde{P}_{\text{M},n}, \quad (39)$$

$$c_n = \tilde{P}_{\text{M},n} + \sum_{i+j=n-1} b_{\frac{i}{2}}^{(\frac{k-2}{2})} \tilde{\mathcal{A}}_{\text{TS},j}, \quad (40)$$

$$f_n = \sum_{i+j=n-1} b_{\frac{i}{2}}^{(\frac{k-2}{2})} \tilde{\mathcal{A}}_{\text{TS},j} + 2 \sum_{i+j+l=n-2} b_{\frac{i}{2}}^{(\frac{k-4}{2})} j b_{\frac{j}{2}} \tilde{\mathcal{A}}_{\text{TS},l} + \sum_{i+j=n-1} j b_{\frac{i}{2}}^{(\frac{k-2}{2})} \tilde{\mathcal{A}}_{\text{TS},j}. \quad (41)$$

Notons par $\tilde{\mathcal{A}}_{\text{S}}(x)$ la série génératrice des \mathcal{A}^\rightarrow -structures non étiquetées symétriques. On a alors (voir figure 6)

$$\tilde{\mathcal{A}}_{\text{S}}(x) = E(P_{\text{TS}} + P_{\text{CR}} + P_{\text{M}}) \sim(x), \quad (42)$$

$$= \exp \left(\sum_{i \geq 1} \frac{1}{i} (\tilde{P}_{\text{TS}}(x^i) + \tilde{P}_{\text{CR}}(x^i) + \tilde{P}_{\text{M}}(x^i)) \right). \quad (43)$$

On en déduit alors une récurrence pour le nombre $\alpha_n = \tilde{a}_{S,n}$ de 2-arbres k -gonaux pointés en une arête laissés fixes par changement d'orientation.

$$\alpha_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{d|i} d\omega_d \right) \alpha_{n-i}, \quad \alpha_0 = 1, \quad (44)$$

où

$$\omega_k = \tilde{P}_{TS,k} + \tilde{P}_{CR,k} + \tilde{P}_{M,k}.$$

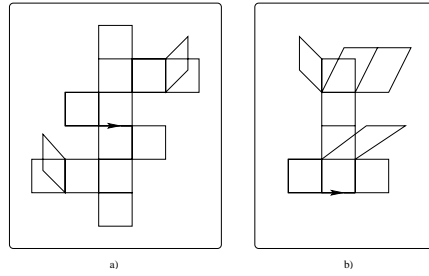


Figure 5: Une paire de pages croisées et une page mixte

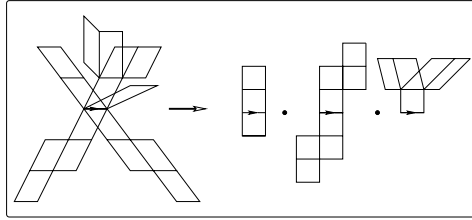


Figure 6: Décomposition d'une \mathcal{A}^\rightarrow -structure fixée sous τ

Proposition 4.8. *Si k est un entier pair, $k \geq 4$, alors le nombre de 2-arbres k -gonaux pointés en une arête (non orientée) sur n k -gones est donné par*

$$\tilde{a}_n^- = \frac{1}{2}(b_n + \alpha_n). \quad (45)$$

Passons maintenant à l'espèce \mathcal{A}° des 2-arbres k -gonaux pointés en un k -gone possédant une arête distinguée. On trouve

$$\tilde{\mathcal{A}}^\circ(x) = \frac{1}{2} \left(\tilde{\mathcal{A}}_o^\circ(x) + \tilde{\mathcal{A}}_{o,\tau}^\circ(x) \right), \quad \text{où} \quad \tilde{\mathcal{A}}_{o,\tau}^\circ(x) = x \tilde{\mathcal{A}}_S^2(x) \tilde{B}^{\frac{k-2}{2}}(x^2), \quad (46)$$

puisque une \mathcal{A}_o° -structure non étiquetée τ -symétrique possède un axe de symétrie qui est, en fait, la médiatrice de l'arête distinguée dans le polygone pointé, et, qui est donc aussi naturellement la médiatrice de l'arête opposée à celle pointée.

Les structures attachées à ces deux arêtes sont donc symétriques, d'où le terme $(\tilde{a}_S(x))^2$; ensuite, de part et d'autre de l'axe, les B -structures que l'on y attache doivent s'échanger par paire, soit une contribution d'un facteur $\tilde{B}(x^2)$ pour chacune des $\frac{k-2}{2}$ paires. On en déduit alors une expression du nombre de \mathcal{A}^\diamond -structures non étiquetées \tilde{a}_n^\diamond ,

$$\tilde{a}_n^\diamond = \frac{1}{2} \left(\tilde{a}_{o,n}^\diamond + \sum_{i+j=n-1} \alpha_i^{(2)} \cdot b_j^{\binom{k-2}{2}} \right), \quad (47)$$

où $\alpha_i^{(2)} = [x^i] \tilde{a}_S^2(x)$.

Procédons de façon similaire pour l'espèce \mathcal{A}^\diamond , des 2-arbres k -gonaux pointés en un polygone. Une nouvelle fois, nous utilisons la relation (20), qui donne

$$\tilde{a}^\diamond(x) = \frac{1}{2} \left(\tilde{a}_o^\diamond(x) + \tilde{a}_{o,\tau}^\diamond(x) \right). \quad (48)$$

Remarquons d'abord que pour qu'une \mathcal{A}_o^\diamond -structure soit laissée fixe par changement d'orientation, elle doit comporter au moins un axe de symétrie, qui peut être de deux types :

1. un axe passant par le milieu de deux arêtes opposées, ou
2. un axe passant par deux sommets opposés,

du polygone pointé. Le dénombrement se fait en orientant d'abord l'axe de symétrie. On trouve

$$\tilde{a}_{o,\tau}^\diamond(x) = \frac{x}{2} \tilde{a}_S^2(x) \tilde{B}^{\frac{k-2}{2}}(x^2) + \frac{x}{2} \tilde{B}^{\frac{k}{2}}(x^2), \quad (49)$$

où le premier terme correspond à une symétrie de type 1, et le deuxième, de type 2. Les structures qui possèdent les deux symétries sont précisément celles qui sont comptées une demi fois dans chacun des deux termes. Le théorème de dissymétrie donne donc, pour $k \geq 4$ pair,

$$\begin{aligned} \tilde{a}(x) &= \frac{1}{2} \tilde{a}_o(x) + \frac{1}{2} \tilde{a}_S(x) + \frac{1}{2} \tilde{a}_{o,\tau}^\diamond(x) - \frac{1}{2} \tilde{a}_{o,\tau}^\diamond(x), \\ &= \frac{1}{2} \tilde{a}_o(x) + \frac{1}{2} \tilde{a}_S(x) + \frac{x}{4} (\tilde{B}^{\frac{k}{2}}(x^2) - \tilde{a}_S^2(x) \tilde{B}^{\frac{k-2}{2}}(x^2)), \end{aligned} \quad (50)$$

où $\tilde{a}_o(x)$ est donné par (15) et $\tilde{a}_S(x)$ par (43).

Théorème 4.9. *Si $k \geq 4$ est pair, le nombre de 2-arbres k -gonaux non étiquetés sur n k -gones est donné par*

$$\tilde{a}_n = \frac{1}{2} \tilde{a}_{o,n} + \frac{1}{2} \alpha_n + \frac{1}{4} b_{\frac{n-1}{2}}^{\binom{k}{2}} - \frac{1}{4} \sum_{i+j=n-1} \alpha_i^{(2)} \cdot b_j^{\binom{k-2}{2}}, \quad (51)$$

avec

$$b_i^{(m)} = [x^i] \tilde{B}^m(x), \quad \alpha_i^{(2)} = [x^i] \tilde{a}_S^2(x).$$

5 Dénombrement asymptotique

Grâce au théorème de dissymétrie et aux diverses équations combinatoires qui lui sont associées, le dénombrement asymptotique des 2-arbres k -gonaux (étiquetés ou non) dépend essentiellement de celui des B -structures où B est l'espèce auxiliaire caractérisée par l'équation combinatoire (3). Dans le cas étiqueté, la situation est triviale puisque l'on dispose des formules closes simples (7), (16) et (18). Dans le cas non étiqueté, la situation est vraiment plus délicate puisque la série $\tilde{B}(x)$ est caractérisée par l'équation fonctionnelle complexe (12).

Voici quelques notations préliminaires à l'énoncé du résultat principal de la présente section. Si $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_\nu)$ est un partage d'un entier n en ν parts, on écrit $\lambda \vdash n$, $n = |\lambda|$, $\nu = l(\lambda)$, $m_i(\lambda) = |\{j : \lambda_j = i\}| =$ nombre de parts de taille i dans λ . De plus, on pose

$$\sigma_i(\lambda) = \sum_{d|i} dm_d(\lambda), \quad \sigma_i^*(\lambda) = \sum_{d|i, d < i} dm_d(\lambda) \quad (52)$$

$$\hat{\lambda} = 1 + |\lambda| + l(\lambda), \quad \hat{z}(\lambda) = 2^{m_1(\lambda)} m_1(\lambda)! 3^{m_2(\lambda)} m_2(\lambda)! \dots \quad (53)$$

On a le résultat suivant.

Proposition 5.1. *Posons $p = k - 1$ et $\tilde{B}(x) = \sum b_n(p)x^n$. Alors*

- i) $b_n(p)$ est un polynôme en p de degré $n - 1$, $n \geq 1$,
- ii) il existe des constantes α_p et β_p telles que

$$b_n(p) \sim \alpha_p \beta_p^n n^{-\frac{3}{2}}, \quad \text{pour } n \rightarrow \infty. \quad (54)$$

De plus, $\alpha_p = \alpha(\xi_p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(p\xi_p)^{\frac{1}{2}} p} \left(1 + \frac{p\xi_p \omega'(\xi_p)}{\omega(\xi_p)}\right)^{\frac{1}{2}}$ et $\beta_p = \frac{1}{\xi_p}$, où ξ_p est la plus petite racine de l'équation

$$\xi = \frac{1}{ep} \omega^{-p}(\xi), \quad (55)$$

où $\omega(x)$ est la série (absolument convergente au voisinage de ξ_p) donnée par (58). On a le développement convergent

$$\xi_p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{p^n}, \quad (56)$$

où les coefficients c_n sont des constantes, indépendantes de p , données explicitement par

$$c_n = \sum_{\lambda \vdash n} \frac{e^{-\hat{\lambda}}}{\hat{\lambda} \hat{z}(\lambda)} \prod_{i \geq 1} (\sigma_i(\lambda) - \hat{\lambda})^{m_i(\lambda) - 1} (\sigma_i^*(\lambda) - \hat{\lambda}), \quad (57)$$

lorsque λ parcourt l'ensemble des partages de n .

Preuve. La partie *i*) de l'énoncé découle immédiatement de la formule explicite (8). Pour la partie *ii*) qui affirme l'existence des constantes α_n et β_n , on s'inspire de l'approche de Fowler et al. pour les 2-arbres ($k = 3$) en utilisant le théorème classique de Bender. Posons, pour simplifier $b(x) = \tilde{B}(x)$. Alors, grâce à (12), $y = b(x)$ satisfait la relation

$$y = e^{xy^p} \omega(x), \quad \text{où} \quad \omega(x) = e^{\frac{1}{2}x^2 b^p(x^2) + \frac{1}{3}x^3 b^p(x^3) + \dots} \quad (58)$$

Par le théorème de Bender, appliqué à la fonction $f(x, y) = y - e^{xy^p} \omega(x)$, on doit chercher un couple (ξ_p, τ_p) solution du système

$$f(x, y) = 0 \quad \text{et} \quad f_y(x, y) = 0. \quad (59)$$

Ceci équivaut à dire que ξ_p est solution de (55) et que $p\xi_p \tau_p^p = 1$. Les formules explicites (56) et (57) s'obtiennent en appliquant préalablement l'inversion de Lagrange à l'équation $\xi = zR(\xi)$ où $z = \frac{1}{ep}$ et $R(t) = \omega^{-p}(t)$, pour obtenir

$$\xi_p = \xi = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} \left(\frac{1}{ep} \right)^n, \quad \frac{a_n}{n!} = \frac{1}{n} [t^{n-1}] \omega^{-np}(t). \quad (60)$$

Ensuite, pour évaluer explicitement $\omega^{-np}(x)$, on utilise la version de Labelle [7] de la formule d'inversion de Good pour les séries indicatrices en tenant compte de (6) et en remarquant que

$$\omega^{-np}(x) = e^{-n(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots)} \circ Z_A(x_1, x_2, \dots) |_{x_i := px^i}, \quad (61)$$

où $A = XE(A)$ est l'espèce des arborescences. ■

Dans le cas orienté non pointé, une méthode similaire basée sur l'équation (15), mène à

$$\tilde{a}_{o,n} \sim \bar{\alpha}_p \beta_p^n n^{-\frac{5}{2}}, \quad \text{où} \quad \bar{\alpha}_p = 2\pi p (p\xi_p)^{\frac{2}{p}} \alpha_p^3. \quad (62)$$

Enfin, une analyse fine de la formule (51) montre que

$$\tilde{a}_n \sim \frac{1}{2} \tilde{a}_{o,n}. \quad (63)$$

La table 1 donne, à 20 décimales, les constantes ξ_p , α_p et $\beta_p = \frac{1}{\xi_p}$ pour $p = 1, \dots, 5$.

p	ξ_p	α_p	β_p
1	0.3383218568 9920769520	1.3003121246 8216843599	2.95576528565 1994974715
2	0.177099522303285617693	0.349261381742311443973	5.646542616232949712893
3	0.119674100436145452060	0.191997258649948899321	8.356026879295995368276
4	0.090334539604383047938	0.131073637348549764379	11.06996287759326312419
5	0.072539192528125499910	0.099178841365021748147	13.785651110084685198930

Table 1 : Valeurs numériques de ξ_p , α_p et β_p , $p = 1, \dots, 5$.

Voici les premières valeurs des constantes universelles c_n apparaissant dans (56), pour $n = 1, \dots, 5$.

$$c_1 = \frac{1}{e} = 0.36787944117144232160, \quad (64)$$

$$c_2 = -\frac{1}{2} \frac{1}{e^3} = -0.02489353418393197149, \quad (65)$$

$$c_3 = \frac{1}{8} \frac{1}{e^5} - \frac{1}{3} \frac{1}{e^4} = -0.00526296958802571004, \quad (66)$$

$$c_4 = -\frac{1}{48} \frac{1}{e^7} + \frac{1}{e^6} - \frac{1}{4} \frac{1}{e^5} = 0.00077526788594593923, \quad (67)$$

$$c_5 = \frac{1}{384} \frac{1}{e^9} - \frac{4}{3} \frac{1}{e^8} + \frac{49}{72} \frac{1}{e^7} - \frac{1}{5} \frac{1}{e^6} = 0.00032212622183609932. \quad (68)$$

Remarque 5.1. *Les calculs de cette section sont également valables pour le cas où $k = 2$ et $p = 1$, correspondant aux arborescences ordinaires (de Cayley) définies par l'équation $A = XE(A)$. Dans ce cas, la constante de croissance $\beta = \beta_1$, dans (54), est connue sous le nom de constante d'Otter (voir [10]). Il est intéressant de noter que cette constante prend la forme explicite $\beta = \frac{1}{\xi_1}$, avec*

$$\xi_1 = \sum_{n \geq 1} c_n. \quad (69)$$

Il est à noter que lorsque $k = 3$, nous retrouvons les résultats asymptotiques obtenus par Fowler et al. dans [2, 3].

References

- [1] F. Bergeron, G. Labelle, and P. Leroux, *Combinatorial Species and tree-like structures*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 67, Cambridge University Press, (1998).
- [2] T. Fowler, I. Gessel, G. Labelle, P. Leroux, *Specifying 2-trees*, Proceedings FPSAC'00, Moscou, 26-30 juin 2000, 202–213.
- [3] T. Fowler, I. Gessel, G. Labelle, P. Leroux, *The Specification of 2-trees*, Advances in Applied Mathematics, 28, 145–168, (2002).
- [4] F. Harary and E. Palmer, *Graphical Enumeration*, Academic Press, New York, (1973).
- [5] F. Harary, E. Palmer and R. Read, *On the cell-growth problem for arbitrary polygons*, Discrete Mathematics, 11, 371–389, (1975).
- [6] INRIA, *Encyclopedia of combinatorial structures*.
<http://algo.inria.fr/encyclopedia/index.html>.
- [7] G. Labelle, *Some new computational methods in the theory of species*, Combinatoire énumérative, Proceedings, Montréal, Québec, Lectures Notes in Mathematics, vol. 1234, Springer-Verlag, New-York/Berlin, 160–176, (1985).

- [8] G. Labelle, C. Lamathe and P. Leroux, *Développement moléculaire de l'espèce des 2-arbres planaires*, Proceedings GASCCom01, 41–46, (2001).
- [9] G. Labelle, C. Lamathe and P. Leroux, *A classification of plane and planar 2-trees*, preprint CO/0202052, submitted.
- [10] R. Otter, *The number of trees*, Annals of Mathematics, 49, 583–599, (1948).
- [11] N. J. A. Sloane and S. Plouffe, *The Encyclopedia of Integer Sequences*, Academic Press, San Diego, (1995).

Gilbert Labelle, Cédric Lamathe, Pierre Leroux

LaCIM

Université du Québec à Montréal

Case Postale 8888, succursale centre-ville

H3C 3P8 Montréal

{gilbert, lamathe, leroux}@math.uqam.ca