

Dictionnaire de suites

Votre problème mathématique
vous donne une suite :
est-il déjà résolu?

Vous calculez le nombre d'intersections de deux droites, de trois droites etc., et vous trouvez la suite de nombres 1, 3, 6, 10, ... Quelle est la formule donnant le terme général? Vous trouverez la réponse en consultant le livre des suites de Neil Sloane, mathématicien des Laboratoires Bell (*Handbook of Integer Sequences*). Vous verrez que cette suite est celle des nombres triangulaires, le terme d'ordre n valant $n(n+1)/2$, et vous tirerez avantage de tout ce qui a été démontré sur les suites de nombres triangulaires, étudiées depuis les Grecs par les plus grands mathématiciens.

Si le problème, délicat, de combinatoire que vous êtes en train d'étudier donne la suite 1, 4, 10, 25, 64, 172, ... vous serez peut-être surpris d'apprendre qu'il s'agit aussi du nombre des esters que l'on peut construire avec n atomes de carbone et vous aurez à disposition toutes les recherches effectuées sur cette suite. Certaines suites apparaissent dans de nombreux problèmes de mathé-

matiques homologues : ainsi rencontre-t-on la suite 1, 2, 5, 14, 42, ... dans de multiples occasions. C'est le nombre de façons d'empiler des cubes sur n colonnes en laissant vide la colonne de gauche et en interdisant que chaque colonne soit haute de plus d'un cube que la colonne à sa gauche ; c'est le nombre de façons de répartir des parenthèses dans un produit algébrique ; c'est le nombre de façons de trianguler un triangle, un carré, un pentagone... Cette suite apparaît dans une dizaine d'autres problèmes.

Savez-vous aussi que la suite des puissances de 2, est la même que la suite des nombres indiquant les empilements de n cubes?

Barry Cipra (*Science*, 22 juillet 1994) raconte le long cheminement du travail de N. Sloane. En 1973, N. Sloane avait publié un premier dictionnaire comportant plus de 2 300 suites. Les spécialistes de combinatoire l'avaient acheté et utilisé avec reconnaissance, voire avec enthousiasme : « Il y avait l'Ancien Testament, le Nouveau Testament et le *Handbook of Integer Sequences*... », a écrit un de ses lecteurs passionnés. Depuis la première édition de ce livre, N. Sloane a accumulé les suites, recueillies dans une masse de documents de plus d'un mètre cube. La nouvelle édition comporte plus de 5 000 suites.

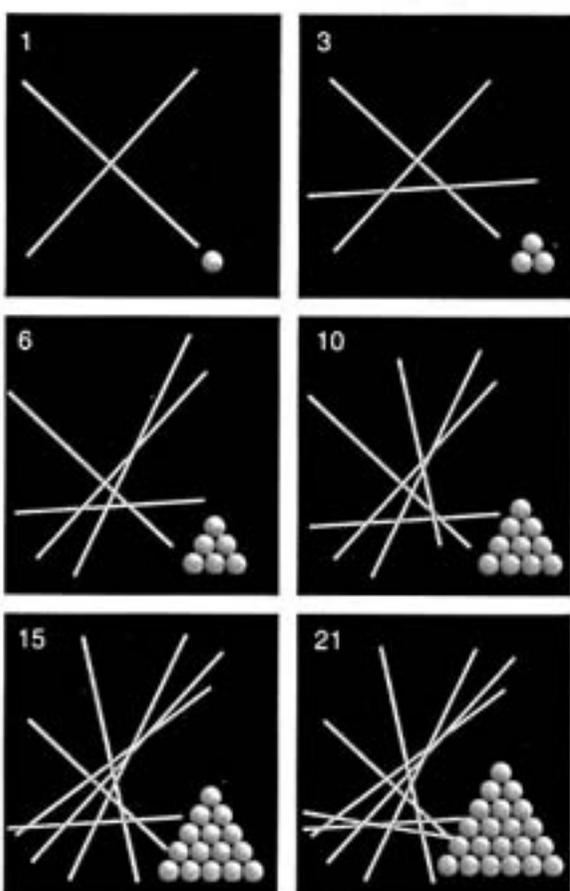
L'identification d'une suite peut même être obtenue sur courrier électronique aux États Unis : il suffit de composer l'adresse électronique : *sequences@research.att.com*. Vous donnez votre suite et l'ordinateur indique les suites de

mêmes nombres de départ, et le contexte dans lequel elles ont été découvertes.

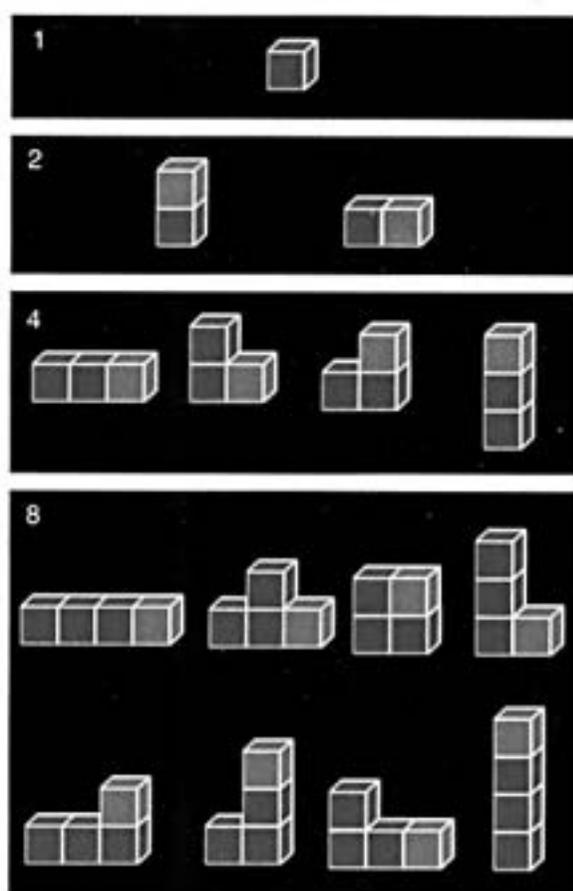
Plus vous indiquez de termes, plus l'identification de la suite sera précise. Toutefois, si vous vous trompez dans un des chiffres, soit à la suite d'une faute de frappe, soit à cause d'une erreur de calcul, le programme cherchera la suite la plus proche de celle que vous avez donnée. Un programme de recherche superpuissant, distinct du programme de recherche précédemment décrit, est également interrogeable sur courrier électronique. Il recherche si une combinaison de deux suites redonne la suite que vous proposez, ou si la suite des différences entre les nombres de votre suite correspond à une suite déjà identifiée. Ainsi, à la donnée de la suite 3, 8, 17, 32, 57, 100, le programme répond mieux que vous : c'est $n^2 + 2^n$.

La suite favorite de N. Sloane est : 1, 11, 21, 1211, 111221, 312211, 13112221, ... Pouvez-vous continuer? Cherchez un peu...

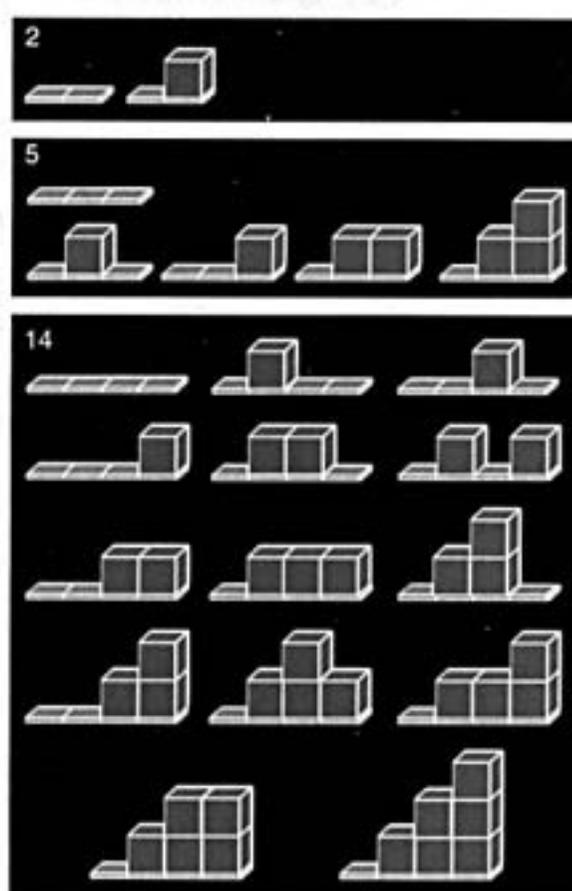
La suite correspond à l'énumération orale des chiffres successifs, lus de gauche à droite, en regroupant les chiffres identiques consécutifs, et à la conversion de cette énumération en chiffres : un (1), un un (11), deux un (21), un deux un un (1211), un un un deux deux un (111221), etc.. Trouvez les termes suivants. Vous avez obtenu 312211, 13112221, 1113213211? Vous avez bon! Le programme de N. Sloane identifie cette suite, mais peut-on donner la formule du terme d'ordre n ? □



1. Suites des nombres de points d'intersection de droites et des nombres triangulaires.



2. La suite des nombres d'empilements de cubes est celle des puissances de deux.



3. Empilements colonne de gauche vide et pas de colonne avec un cube de plus que celle à gauche.