L'univers de Pi

Hit-Parade

Signez le Livre d'or !

Envoyez-moi un mail

Retour page d'accueil

- Historique
- Mathematiciens
- Formules
- Annexes maths
- L'univers de Pi
- Autour maths
- Autour du site

boris.gourevitch@ensai.fr
version 1.75 MAJ 19/12/99

E-mail

TOUT L'UNIVERS DE

π

ET DES PI-PHÉNOMÈNES !

3.14 2653589793238462643383279502884197169399375105820974944592307816406286208998628034

Actualité : Plein de références à ce site ! Multimania l'inclut dans sa sélection du jour le 17/12/99 (record de visites battu !) et "Science et Avenir" du mois de décembre consacre sa rubrique "Planet-cyber" au nombre Pi dont un paragraphe à ce site avec même une photo.

Mon numéro d'ICQ si vous avez une question, un fichier... 37940988
Pi et moi-même vous souhaitons de joyeuses fêtes !

Petit Historique de π

La géométrie en état de grâce... (Antiquité - XVIIe)

Ah, enfin l'analyse ! (XVIIIe - début XXe)

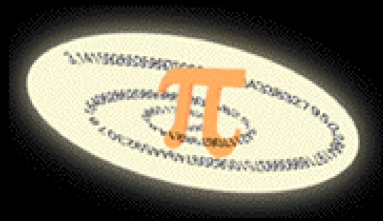
Les ordinateurs au travail... (XXe)

Ces mathématiciens qui ont rêvé de π

Al Kashi	Estenave/Fretigny (new)	Lindemann
Archimède	Euler	Machin
Bellard		Mandelbrot/Bolle/Edgar
J. et P.Borwein		Moivre/Stirling
Brounker		Newton
Brown		Plouffe
Buffon		Ramanujan
G. et D.Chudnovsky		Salamin/Brent
Cesaro	Katahiro	Viete

Cues	Lambert	Wallis
Descartes	Leibniz	Woon

Toutes les formules



Inspiration géométrique...

Inspiration analytique...

Algorithmes modernes

Approximations et curiosités numériques concernant Pi

Le grenier (diverses suites originales, anonymes ou totalement inefficaces !)

Annexes mathématiques concernant π

Nombres de Bernoulli

Delta2 d' Aitken (accélère la convergence des suites)

L'algorithme compte-gouttes New

Autour des maths

Quelques anecdotes autour des mathématiciens

L' univers de π

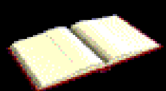
Et pour quelques décimales de plus... (historique des records)

Poème (Un peu de lyrisme...)

10 000 000 décimales de Pi
Visualiser Télécharger

Liens sur Pi (Plus de 210 pages répertoriées avec commentaires !)

Commentez sur le Livre d'or (comme S. Plouffe et J.P. Delahaye !)



Images et fonds d'écran sur Pi

Autour du site

[Bibliographie]

[Je me présente...]

[Remerciements] aux surfeurs, récompenses, liens...

Les [sites] qui m'indexent

Le site est maintenant également accessible par http://go.to/pi314
C'esr tout de même plus simple...
Et pour les possesseurs d'Internet Explorer 5, tapez simplement pi314 comme adresse et vous arriverez - normalement - ici ! Quelqu'un peut-il me dire si ça marche ?

Déjà 007787 passionnés de Pi sont venus depuis le 20/06/99 !

Vous recherchez quelque chose de précis sur ce site ?

eXtense

This The Pi Web Ring site owned by Boris GOUREVITCH.
[Previous 5 Sites|Previous|Next|Next 5 Sites|Random Site|List Sites|Join]

Sélection du jour le 17/12/99 chez Multimania

Site de la semaine le 5 septembre sur Franco-Science

Page du jour sur l'actualité du Net, section sciences, le 08/07/99

et page personnelle du jour le 07/07/99 sur Interneto

Award e-sweet "A voir de suite" 99

Aigle de bronze du web

Boris GOUREVITCH - ENSAI - Rennes

Les Pi-Phénomènes Version 1.75
Mis à jour le 19/12/99
**Dernier(s) changement(s) :*
Des nouvelles image sur Pi
**Changements précédents copncernant les pages :*
Algorithme compte-gouttes - Page sur les sites qui m'indexent - Nouvelle grosse page sur Estenave/Fretigny et le théorème des résidus (Plein de formules !)

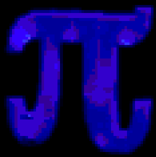
**Prochainement* :

Après les vacances, très rapidement : Une page consacrée aux programmes sur Pi et une autre sur les curiosités concernant Pi. Envoyez m'en si vous en connaissez !

**A venir dans les prochains mois* (enfin j'espère toujours...) :

Une grosse surprise ! Peut-être aussi une page à propos des forums ou sur la statistique et Pi. Peut-être un approfondissement du côté des fractions continues et quelques mots sur la multiplication par la transformée de Fourier rapide à l'honneur dans les algorithmes de calcul de Pi... Ca n'en finira jamais, il y a tellement de choses à faire encore... Si vous avez des suggestions, des résultats, des démonstrations, n'hésitez surtout pas !

TOUT L'UNIVERS DE



ET DES PI-PHÉNOMÈNES !

3.14 2653589793238462643383279502884197169399375105820974944592307816406286208998628034

Actualité : Plein de références à ce site ! Multimania l'inclut dans sa sélection du jour le 17/12/99 (record de visites battu !) et "Science et Avenir" du mois de décembre consacre sa rubrique "Planet-cyber" au nombre Pi dont un paragraphe à ce site avec même une photo.

Mon numéro d'ICQ si vous avez une question, un fichier... 37940988
Pi et moi-même vous souhaitons de joyeuses fêtes !

Petit Historique de π

La géométrie en état de grâce... (Antiquité - XVIIe)

Ah, enfin l'analyse ! (XVIIIe - début XXe)

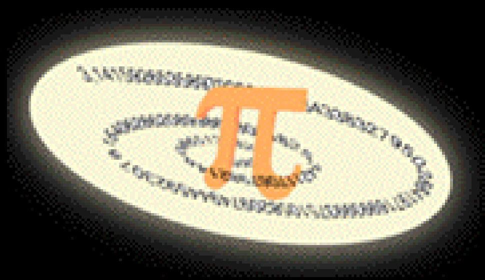
Les ordinateurs au travail... (XXe)

Ces mathématiciens qui ont rêvé de π

Al Kashi	Estenave/Fretigny (new)	Lindemann
Archimède	Euler	Machin

Bellard		Mandelbrot/Bolle/Edgar
J. et P.Borwein		Moivre/Stirling
Brounker		Newton
Brown		Plouffe
Buffon		Ramanujan
G. et D.Chudnovsky		Salamin/Brent
Cesaro	Katahiro	Viete
Cues	Lambert	Wallis
Descartes	Leibniz	Woon

Toutes les formules



Inspiration géométrique...

Inspiration analytique...

Algorithmes modernes

Approximations et curiosités numériques concernant Pi

Le grenier (diverses suites originales, anonymes ou totalement inefficaces !)

Annexes mathématiques concernant π

Nombres de Bernoulli

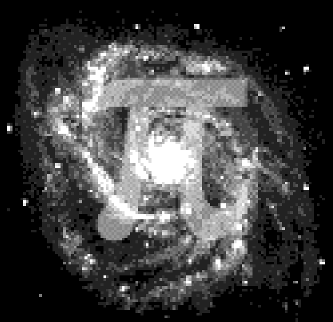
Delta2 d' Aitken (accélère la convergence des suites)

L'algorithme compte-gouttes

Autour des maths

Quelques anecdotes autour des mathématiciens

L' univers de π



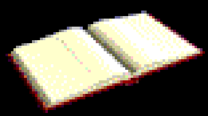
Et pour quelques décimales de plus... (historique des records)

Poème (Un peu de lyrisme...)

10 000 000 décimales de Pi
Visualiser Télécharger

Liens sur Pi (Plus de 210 pages répertoriées avec commentaires !)

Commentez sur le Livre d'or (comme S. Plouffe et J.P. Delahaye !)



Images et fonds d'écran sur Pi

Autour du site

Bibliographie

Je me présente...

Remerciements aux surfeurs, récompenses, liens...

Les sites qui m'indexent New

Le site est maintenant également accessible par http://go.to/pi314
C'esr tout de même plus simple...
Et pour les possesseurs d'Internet Explorer 5, tapez simplement pi314 comme adresse et vous arriverez - normalement - ici ! Quelqu'un peut-il me dire si ça marche ?

Déjà 007787 passionnés de Pi sont venus depuis le 20/06/99 !

Vous recherchez quelque chose de précis sur ce site ?

eXtense

The Pi WebRing	This The Pi Web Ring site owned by Boris GOUREVITCH. [Previous 5 Sites|Previous|Next|Next 5 Sites|Random Site|List Sites|Join]	Next

Sélection du jour le 17/12/99 chez Multimania

Site de la semaine le 5 septembre sur Franco-Science

Page du jour sur l'actualité du Net, section sciences, le 08/07/99

et page personnelle du jour le 07/07/99 sur Interneto

Award e-sweet "A voir de suite" 99

Site de la semaine Fr@nco-Science

Aigle de bronze du web

Boris GOUREVITCH - ENSAI - Rennes

Les Pi-Phénomènes Version 1.75
Mis à jour le 19/12/99
**Dernier(s) changement(s) :*
Des nouvelles image sur Pi
**Changements précédents copncernant les pages :*
Algorithme compte-gouttes - Page sur les sites qui m'indexent - Nouvelle grosse page sur Estenave/Fretigny et le théorème des résidus (Plein de formules !)
**Prochainement* :
Après les vacances, très rapidement : Une page consacrée aux programmes sur Pi et une autre sur les curiosités concernant Pi. Envoyez m'en si vous en connaissez !
**A venir dans les prochains mois* (enfin j'espère toujours...) :
Une grosse surprise ! Peut-être aussi une page à propos des forums ou sur la statistique et Pi. Peut-être un approfondissement du côté des fractions continues et quelques mots sur la multiplication par la transformée de Fourier rapide à l'honneur dans les algorithmes de calcul de Pi... Ca n'en finira jamais, il

y a tellement de choses à faire encore... Si vous avez des suggestions, des résultats, des démonstrations, n'hésitez surtout pas !

page d'accueil

La géométrie en état de grâce !
Antiquité - XVIIe siècle

Petit préambule

Derrière cette célèbre constante se cachent près de 4000 ans de mathématiques !
Alors, si les pages consacrées aux mathématiciens se veulent détaillées, rien ne vaut une petite synthèse de l'historique de Pi. Cela complètera l'ensemble de ce site qui se veut complet mais léger (enfin j'espère !)...
Avec Pi, la machine à explorer le temps est une réalité... Mais bien sûr, pour plus de commodités, le langage moderne et habituel des mathématiques est utilisé ici... Il ne faut pas croire que les Egyptiens écrivaient π et les nombres en décimales. Ils ne connaissaient même pas la trigonométrie. Cela étant dit, retournons aux origines de la légende...

Du haut des pyramides, π nous contemple...

Les premières traces que l'on trouve de l'existence de Pi remontent aux environs de 2000 ans av.J.-C. chez les Babyloniens et les Egyptiens. Dans certaines civilisations, on s'est visiblement rendu compte assez vite que le rapport du périmètre d'un cercle (figure géométrique de base !) sur son diamètre était constant. Concernant les Babyloniens, une tablette en écriture cunéiforme dite de "Suse", et datant de 2000 av.J.-C. précise une première approximation dans la base 60 alors utilisée :

$$3+\frac{7}{60}+\frac{30}{3600}=3+\frac{1}{8}=3,125$$

Précision remarquable pour l'époque ! Pour l'obtenir, les Babyloniens ont estimé la différence entre l'aire d'un hexagone (3) et celle d'un cercle de diamètre 1.

De leur côté, les Egyptiens ont eu un scribe devenu célèbre grâce à Pi... En effet, dans le Papyrus de Rhind conservé au British Museum et datant d'environ 1800 av.J.-C., le scribe Ahmès assimile l'aire d'un cercle de diamètre d à un carré de côté a=8d/9 ce qui donne :

$$\pi R^2=\frac{8^2}{9^2}d^2 \quad \Leftrightarrow \quad \pi=\left(\frac{16}{9}\right)^2\approx 3,16$$

On ignore un peu comment ces civilisations ont obtenu ces résultats, sans doute par approximations, mais remarquons tout de même (soyons beaux joueurs !) que les moyens rudimentaires utilisés ont néanmoins fourni des valeurs correctes à moins d'1% près ! Les égyptiens calculant avec des fractions de numérateur 1, c'est d'ailleurs le meilleur rapport entre le diamètre d et l'aire s qu'ils pouvaient atteindre. En effet :

$$\frac{s}{d}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\approx 0,88624 \quad \text{et} \quad 1-\frac{1}{8}=0,875 \quad \text{et enfin} \quad \frac{8}{9}=1-\frac{1}{9}\approx 0,888$$

Après les Egyptiens et les Babyloniens, c'est un peu le vide... Les Chinois vers -1200 donnent 3 pour valeur, ce qui dénote tout de même un certain manque de recherches sur le sujet !
La Bible, manquant un peu d'inspiration divine pour l'occasion, fournit

vers -550 av.J.-C. elle aussi, 3 pour valeur de Pi. Le passage du fondeur Hiram et de son chaudron est resté célèbre, le voici en termes francisés : "Il fit aussi une mer de fonte de dix coudées d'un bord jusqu'à l'autre, qui était toute ronde : elle avait cinq coudées de haut et était environnée tout à l'entour d'un cordon de trente coudées".
30/10=3, pas d'erreur ! On dira bien plus tard que le passage concernait le contour intérieur du chaudron pour calmer les polémiques, mais l'absence de besoin de précision pour les fondeurs semble être la seule justification....
Heureusement, voilà les Grecs qui vont remettre un peu d'ordre...

Eurêka !!!

Les grecs s'intéressent à divers problèmes géométriques qui sont en relation avec la célèbre constante... Les plus fameux sont la trisection de l'angle, la duplication du cube, et surtout la quadrature du cercle... Cette dernière fut introduite par Anaxagore de Clazomène (500-428 av.J.-C.) après un séjour en prison pour impiété (ça ne rigolait pas en ce temps là !).
L'ardeur de la recherche de la solution (construire un carré de même aire qu'un cercle à l'aide d'une règle et d'un compas) ne s'est jamais démentie, et avec raison, puisque l'on prouvera bien plus tard que ce problème est équivalent à la transcendance de Pi. En effet, les seuls nombres que l'on peut construire avec une règle et un compas sont des combinaisons de racines et de fractions, c'est à dire les solutions d'équations polynomiales...
Mais la démonstration de la transcendance de Pi ne sera achevée qu'en 1882 par Lindemann et nous sommes toujours dans l'Antiquité...
Alors, revenons à nos amis Grecs... Ce problème les tourmentait et leur manque de définitions cohérentes des limites, par exemple, poussera Antiphon, contemporain de Socrate, à proposer la méthode suivante:

> On circonscrit un polygone à un cercle, et l'on double le nombre de côtés plusieurs fois... Comme l'on sait construire un carré de même aire qu'un polygone et que celui-ci tend à se confondre avec le cercle lorsque le nombre de ses côtés augmente, la quadrature du cercle semble résolue pour

n'importe quelle précision. On sait bien sûr aujourd'hui que ce n'est pas parce qu'une propriété est vraie pour tout n entier qu'elle l'est à la limite.

Ce processus est très intéressant car il va conditionner la méthode d'appproximation de Pi qui va dominer pendant 2000 ans ! Archimède s'en inspire avec le succès que l'on sait (et c'est pourquoi nous appellerons cela ensuite un peu abusivement la "méthode d'Archimède") et calcule 3 décimales ! Notons sa virtuosité exceptionnelle puisque tous ses calculs sont basés sur des considérations géométriques uniquement !!!
Ptolémée améliorera quelque peu le résultat au moyen de tables trigonométriques.
Et la nuit mathématique tombe sur l'Occident pendant 1500 ans par la suite... Il est vrai que le système numérique des romains par exemple est peu propice aux calculs (tentez donc de multiplier LVIII par XCVI !!!)

Voyage, voyage...

En Inde, on travaille aussi puisque Aryabhata propose, vers 500 ap J.C., 3 décimales exactes. Mais c'est en Chine où le système décimal a toujours été utilisé, que les progrès sont les plus rapides. Tsu Chung Chih semble être le premier à avoir proposé la fraction célèbre 355/113 = 3,1415929 2... vers 480 ap. J.-C. soit 6 décimales !
Les Arabes et perses ne sont pas en reste puisque dans son système Hexagésimal, Al Kashi calcule avec virtuosité 10 digits soit 14 décimales en 1429... Record absolu !
Mais la notation décimale commence lentement à s'imposer en Europe au Moyen Âge et c'est alors tout naturellement que l'Occident se réveille :

La Renaissance... des mathématiques

C'est Fibonacci qui s'illustre tout d'abord et obtient en décimales Pi=3,1418... mouais ! Précisons que toutes les approximations précédemment citées sont obtenues par la méthode d'Archimède ou une de ses variantes !
Notons aussi que l'on ne cernait pas encore précisément le côté transcendant de Pi (mais c'est un peu normal!) puisque Nicolas de Cues propose au XVe siècle $\pi = \frac{3}{4}\left(\sqrt{3}+\sqrt{6}\right) \approx 3{,}136$. Regiomontanus démontrera (!) que cette valeur est erronée...
Avec simplement 1000 ans de retard sur les Chinois, mais c'est son nom qui est resté, Adrian Anthonisz fait la moyenne des valeurs d'encadrement calculées par Archimède et trouve 355/113=3,14159292... C'est en tout cas ce que nous rapporte son fils qui a publié le résultat en 1625. Ce qui est extraordinaire avec le recul, c'est de constater que ces valeurs étaient tenues pour exactes pour Pi !!
La numérotation décimale fait vite progresser la course aux décimales qui devient un sport en vogue... Le plus célèbre des "coureurs" de décimales, et qui a donné son nom à Pi en Allemagne fut Ludolph von Ceulen (1539-1610). Ce dernier calcula 20 décimales à l'aide d'un polygone de $60*2^{33}$ côtés puis 34 décimales, toujours par la méthode d'Archimède. Quelle obstination ! Inutile de dire que ce calcul lui prendra plusieurs années et il fera même graver le résultat sur sa pierre tombale !!!

D'autres pistes de recherche

Mais déja, l'ère géométrique semble toucher à sa fin... Les mathématiciens commencent à découvrir d'autres méthodes que celle d'Archimède. Se basant néanmoins toujours sur des considérations géométriques, ils prennent le problème par d'autres côtés... Ainsi, Viete découvre (sans le démontrer, mais bon, ce n'est guère l'époque !) le premier produit infini donnant Pi... Mais la convergence est si lente qu'il préfère encore utiliser la méthode d'Archimède pour calculer lui-même 9 décimales en 1593 !!!
Descartes, de son côté, prend le problème à l'envers, et partant d'un cercle de périmètre fixé, construit son diamètre. C'est la méthode des

isopérimètres... Ingénieux... La convergence n'est guère plus rapide, et ce n'est pas étonnant puisque ce sont à peu près les mêmes considérations géométriques qui forment les suites par récurrence !
On peut encore signaler la formule de Nicolas de Cues, très intéressante, mais là, un problème se pose à moi ! Cette formule est souvent donnée comme celle "officielle" de la formule d'Archimède, et pourtant je l'ai découverte sur un TD de maths en prépa intitulé "La méthode de Cues". Et dans "Le Petit Archimède", cette formule est considérée comme celle de Grégory... Si quelqu'un connait la véritable paternité de cette suite, qu'il me la précise !
La quadrature du cercle continue, elle, à poser de véritables problèmes... Sortant de l'ère géométrique qui n'en a pas donné de solutions, l'analyse va s'y pencher, et on le verra, avec succès. Notons que l'Académie des Sciences en France, ayant promis une récompense pour la solution, reçoit à cette époque plusieurs dizaines de preuves erronées, . Comme le dit "Le petit Archimède", la palme revient dans ce domaine à un nommé Liger qui commmençait par démontrer que $\sqrt{24} = \sqrt{25}$, le reste suit...

Suite de l'histoire de Pi à travers les siècles à la page Ah, enfin l'analyse!

---

retour à la page d'accueil

page d' accueil

Carl-Louis-Ferdinand von Lindemann
(1852 - 1939)

Alors ça, c'est fort...

π est transcendant !!!

Tranches de vie

Carl Louis Ferdinand Lindemann est né le *12 avril 1852* à Hanovre. De *1870* à *1873*, ce grand voyageur a effectué des études à Göttingen, Erlangen, Munich, Londres et Paris. Puis il enseigna à Wurzbourg (*1877*), Fribourg (*1877-1883*), Königsberg (*1883-1893*) et enfin Munich.
En *1882*, Lindemann publie *Die Zahl Pi* qui met fin au problème de la quadrature du cercle et *25* siècles d'interrogations !
Mais Lindemann a aussi porté ses premiers efforts vers la géométrie et après son grand succès sur *Pi*, il se tournera vers le grand théorème de Fermat tout le reste de sa vie, sans trouver de solution...

Autour de π - Quelques mots sur la transcendance

On rappelle qu'un nombre complexe (donc a fortiori réel) est dit algébrique s'il est racine d'un polynôme non nul à coefficients entiers et qu'il est dit transcendant dans le cas contraire.
i est algébrique par exemple (enfin ça servira plus tard...) car *i* est racine du polynôme $x^4-1=0$.
Ce n'est qu'en *1844* que l'existence de nombres transcendants fut démontrée par Liouville.
En *1874*, la grand Georges Cantor prouva grâce à sa passion pour la théorie des ensembles, que la plupart des nombres réels sont transcendants, ou plutôt que l'ensemble des algébriques réels est dénombrable (donc de la taille de *N* !)
La transcendance de *Pi* est un résultat moins profond que l'on ne pourrait le penser dans la mesure où cela ne donne pas de renseignement pratique vraiment intéressant sur les décimales de *Pi*. De plus, comme l'a montré Cantor, l'ensemble des transcendant étant beaucoup plus grand que celui des algébriques, *Pi*, comme tout nombre tiré au hasard d'ailleurs, avait des chances de se trouver parmi ceux-là ! Mais comme la découverte de Lindemann mettait fin à un des problèmes les plus vieux du monde mathématique, à savoir la quadrature du cercle...
En effet, tracer un carré (ou rectangle d'ailleurs !) de même aire qu'un cercle avec la règle et le compas conduisait à construire un segment de longueur *Pi* avec ces mêmes instruments. Or je-ne-sais-plus-qui avait montré que seules les additions, multiplications, racines, quotients pouvaient être construits à l'aide de la règle et du compas. Ce qui était équivalent à ce que *Pi* soit racine de n'importe quel polynôme à coefficients entiers.
Ce beau rêve (trop beau !) s'évanouit avec Lindemann. Sa démonstration s'inspira très fortement de la méthode avec laquelle Hermite avait prouvé la transcendance de *e* en 1873. Celui-ci avait estimé, après son exploit, que la méthode devait s'appliquer à *Pi* mais de façon plus compliquée et qu'il n'avait pas le courage de s'y pencher...
Ce n'est pas le cas pour nous puisque les démonstrations de la transcendance de e puis celle de *Pi* épurée par Weierstrass, Hilbert, Hurwitz et Gordan suivent ce paragraphe. Elles sont tirées de

Transcendental Number Theory de A. Baker et de *le Fascinant Nombre Pi* de J.P. Delahaye (voir Biblio)
A noter que si vous arrivez à montrer que $e+\pi$ est rationnel ou transcendant, vous aurez gagné le gros lot puisque le problème est toujours ouvert !

Démonstration

Transcendance de *e* :

Soit $f(x)$ un polynôme de degré m à coefficients réels. Posons :

$$I(t) = \int_0^t e^{t-u} f(u)du$$

On intègre m fois par parties et on obtient alors :

$$I(t) = e^t \sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(t) \qquad (1)$$

Maintenant, soit f^* le polynôme f où les coefficents ont été remplacés par leur valeur absolue.
En majorant les termes dans l'intégrale, on obtient :

$$|I(t)| \le \int_0^t \left|e^{t-u} f(u)\right| du \le |t| e^{|t|} f^*(|t|) \qquad (2)$$

Ces préliminaires étant écrites, recentrons le débat et supposons e algébrique. En d'autres termes, supposons qu'il existe un entier $n>0$ et $q_1,\ldots,q_n$ non nuls tel que :

$$q_0+q_1e+\ldots+q_ne^n=0 \qquad (3)$$

La suite consiste à construire $J=q_0I(0)+q_1I(1)+\ldots+q_nI(n)$
$I(t)$ ne change pas de définition et l'on choisit $f(x)=x^{p-1}(x-1)^p\ldots(x-n)^p$ avec p un grand entier premier.
En calculant J d'après la définition *(1)* et l'hypothèse *(3)*, on tire :

$$J = -\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} q_k f^{(j)}(k)$$

où m est donc le degré du polynôme f soit $(n+1)p-1=m$.
Les k variant entre 1 et n étant des racines d'ordre p chacune, on a $f^{(j)}(k)=0$ si $j<p$ et $k>0$ et de même pour $k=0$ si $j<p-1$. Donc pour $j\#p-1$ et $k\#0$, soit c'est nul, soit la dérivation fait sortir un $p!$ et donc $f^{(j)}(k)$ est un entier divisible par $p!$. De plus, pour le cas $j=p-1$, par récurrence sur n, on a facilement :

$$f^{(p-1)}(0)=(p-1)!(-1)^{np}(n!)^{p}$$

Donc si l'on a $p>n$, c'est à dire p ne divisant pas $(n!)$, $f^{(p-1)}(0)$ est un entier divisible par $(p-1)!$ mais pas par $(p!)$.
Si l'on prend alors $p>|q_0|$, J est un entier non nul qui est divisible par $(p-1)!$ donc, évidemment, $|J|\geq(p-1)!$

Voilà une première inégalité. Le tout est maintenant de trouver une contradiction.
Pour cela, puisque $|k-n|\leq(2n)$ et $m=(n+1)p-1$, en majorant dans f^*, on obtient $f^*(k)\leq(2n)^m$ et donc si l'on utilise (2) et la définition de J,

$$|J|\leq|q_1|ef^*(1)+...+|q_n|ne^nf^*(n)\leq c^{p}$$

puisque $p>n$, c étant une constante indépendante de p. Si l'on choisit p suffisamment grand, la factorielle l'emportant sur la puissance, les deux inégalités sur $|J|$ se contredisent.

Et voilà le théorème démontré.
Evidemment, on a un peu l'impression que cela marcherait pour n'importe quelle constante, mais en fait, c'est (1) et (2) qui décident de tout !

Transcendance de π

Toujours par l'absurde, supposons maintenant que π est algébrique et

donc $\theta=i\pi$ également.
Soit d le degré du polynôme dont θ est la solution. Comme C est algébriquement clos, ce polynôme admet d racines et notons $\theta_1=\theta$, $\theta_2,\dots,\theta_d$ toutes ces racines.
Considérons ensuite le polynôme minimal de θ, c'est à dire le plus petit polynôme (non décomposable en facteurs) dont θ est racine et dont les coefficients sont premiers entre eux, notons L son coefficient dominant, c'est-à-dire celui du terme de plus haut degré.
Sachant, comme ce bon vieux Euler l'a montré, que $exp(i\pi)+1=0$, on peut donc écrire :

$$(1+exp(i\theta_1))(1+exp(i\theta_2))\dots(1+exp(i\theta_d))=0$$

Si l'on développe cette dernière expression, on obtient la somme de 2^d termes e^x, où x est un ensemble de valeurs :

$$x=a_1\theta_1+a_2\theta_2+\dots+a_d\theta_d \qquad a_i=0 \text{ ou } 1$$

Supposons que n de ces valeurs x sont non nulles et notons les $ß_1,\dots,ß_n$.
La somme des 2^d termes s'écrit donc :

$$q+exp(ß_1)+\dots+exp(ß_n)=0 \qquad (4)$$

avec $q=2^d-n$.
De même que pour e, le principe va être maintenant de trouver deux inégalités contradictoires pour $J=I(ß_1)+\dots+I(ß_n)$, mais avec cette fois-ci $f(x)=L^{np}x^{p-1}(x-ß_1)^p\dots(x-ß_n)^p$, p désignant toujours un grand nombre premier.
En utilisant *(1)* et *(4)* dans la définition de J, on obtient :

$$J=-q\sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(0)-\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=1}^{n} f^{(j)}(ß_k)$$

avec toujours $m=(n+1)p-1$.
Si l'on regarde de plus près la somme avec k en indice, on voit que, toutes les racines jouant le même rôle dans $f(x)$, cette somme est un polynôme symétrique en $Lß_1,...,Lß_n$, c'est à dire qu'il est invariant par permutation de ces nombres.
Or le théorème d'algèbre sur les polynômes symétriques nous dit que ce genre de polynôme peut s'écrire sous la forme d'un polynôme des coefficients de l'équation dont $Lß_1,...,Lß_n$ sont les racines. Donc ce polynôme des coefficients est un entier, donc la somme sur k également.
Puis le même raisonnement que pour e s'applique. On a $f^{(j)}(ß_k)=0$ lorsque $j<p$, donc cette somme entière est de plus divisible par $p!$. En calculant à partir de l'expression de f, on remarque que c'est aussi le cas pour le rationnel $f^{(j)}(0)$ si $j\#p-1$. Si $j=p-1$, on a :

$$f^{(p-1)}(0)=(p-1)!(-L)^{np}(ß_1...ß_n)^p$$

qui est divisible par $(p-1)!$ mais pas par $p!$ pour un p assez grand.
Et donc pour $p>q$, on a $|J|\geq(p-1)!$
Mais là encore, la relation *(2)* nous donne la majoration :

$$|J|\leq|ß_1|exp(|ß_1|)\ f^*(|ß_1|)+...+|ß_n|exp(|ß_n|)\ f^*(|ß_n|)\leq c^p$$

avec c constante indépendante de p.
Mais, Oh! les deux inégalités sont incompatibles pour un p choisi assez grand, donc $i\pi$ est transcendant, donc π est transcendant !

On ne voit pas vraiment ce qui s'est passé, mais le résultat est là !

Les démonstrations originales d'Hermite et Lindemann sont disponibles dans *le Petit Archimède* , mais c'est encore plus long et compliqué, en fait, ça ne ressemble même pas follement à ce que l'on vient de faire...

---

retour à la page d' accueil

page d'accueil

Bibliographie

Le monde de π sur Internet est vaste mais peu de sites sont vraiment complets à mon sens... En tout cas, je n'ai trouvé sur aucun site français ce que je cherchais vraiment, et pour un matheux non mathématicien comme moi, il est parfois difficile de retrouver toutes les démonstrations tout seul...
Pour réaliser ce site et assouvir ma passion durant depuis près de 3 ans, j'ai forcément repris certaines formules ou démonstrations lues dans divers livres remarquables.
Peu d'ouvrages existent sur le sujet, mais ils sont à mon sens très intéressants car écrits par des passionnés dont la pédagogie n'a d'égal que le talent... (diantre !)
Voici donc mes 4 livres de chevet dans lesquels j'ai puisé quelques informations :

"le Nombre π"

> Association pour le Développement de la Culture Scientifique
> Amiens (réédité en 1992)

"le Fascinant Nombre π"

> Jean-Paul Delahaye
> Bibliothèque "Pour la Science" (1997)
> En allemand chez Birkhauser (1999)
> Un article du Monde sur Pi, le record de Fabrice Bellard avec une intervention de J.P. Delahaye

"Des mathématiciens de A à Z"

B. Hauchecorne/D. Suratteau
Ed. Ellipses (1996)

"Les mathématiciens"

Bibliothèque "Pour la Science" (1996)

Citons également un ouvrage de référence (que j'aimerais bien posséder !) :

"Pi and the AGM"

P. Borwein et J. Borwein
Ed. Wiley (1987)

Un nouveau livre paru très récemment, très riche, mais assez technique puisque ce sont des formules et exercices suivis des démonstrations :

"Autour du nombre Pi"

P. Eymard/J.P. Lafon
Ed. Hermann (1999)

Et LE site de référence des mathématiques sur le net :

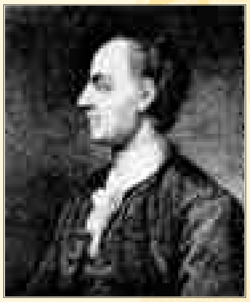
Encyclopédie concise des mathématiques

E. Weisstein

---

retour à la page d'accueil

page d'accueil



Leonhard Euler
(1707 - 1783)

Une avalanche de formules !

1) *1739*

$$\pi = \sqrt{6\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}} \qquad \pi = \sqrt{3}\sqrt[4]{10}\sqrt[4]{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}}$$ plus généralement, on a

$$\forall i \in N^{*} \quad \pi = \frac{1}{2}\sqrt[2i]{\frac{2(2i)!}{|Ber_{2i}|}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2i}}}$$ où Ber_{2i} est le nombre de Bernoulli d' indice $2i$

on pourra se référer à l'annexe : Nombres de Bernoulli

2)

$$\pi = 4 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{8}{1-16n^2}$$ et plus généralement $\forall z \in R^{*} \setminus N \quad \pi = \dfrac{\dfrac{1}{z} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2 - k^2}}{\cot an(\pi z)}$

3) et 4) (*1737*)

$$\pi = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!}$$ et aussi $\forall i \in N^{*} \quad \pi = \dfrac{1}{2}\sqrt[2i]{\dfrac{2(2i)!}{|Ber_{2i}| \displaystyle\prod_{p \ premier}(1 - \frac{1}{p^{2i}})}}$

Tranches de vie

A l'image de sa production scientifique toute entière, Euler fut prolifique en ce qui concerne les formules sur π.
Leonhard Euler est né à Bâle en *1707*. Fils et petit fils de pasteur, Euler et sa famille sont pauvres. Son apprentissage ne comprend pas de mathématiques, ce qui le pousse à prendre des cours auprès d'un étudiant. A *13* ans, il commence des études de théologie et de philosophie dont il est diplômé à *16* ans. Son père le destine à devenir pasteur, il s'y prépare mais continue à étudier les mathématiques. Son talent est remarqué par Jean Bernoulli, un membre de la grande lignée de mathématiciens du même nom, et en *1727*, il part à l'académie des Sciences de St-Pétersbourg. Le départ de Russie de Daniel Bernoulli lui permet de devenir professeur de mathématiques. Il rencontre alors la fille d'un artisan russe qui lui donne 13 enfants. Euler a une patience remarquable avec sa progéniture et est resté célèbre pour sa capacité à jouer tout en rédigeant un article. Il perd un oeil après une fièvre brutale.
Installé brièvement à la cour de Berlin sur l'invitation de Frédéric Le Grand, celui-ci préfère pourtant les esprits brillants comme Voltaire, et le traite de "Cyclope mathématique" (!). Revenu en Russie, il devient presque aveugle à partir de *1771*... Il dicte néanmoins à son fils ses publications. Il meurt à St-Pétersbourg en *1783* en buvant du thé avec ses amis !

Autour de π

Son oeuvre est immense... Ses travaux ont permis l'essor de l'analyse grâce aux équations différentielles et intégrales. Il aborda également la géométrie différentielle, la théorie des nombres et divers domaines de la physique. Ceux qui l'ont cotoyé le considéraient comme le plus grand mathématicien de tous les temps. Il faut dire qu 'il a publié près de *800* pages de texte scientifique par an soit au total *75* volumes de *600* pages chacun ! Infatigable, il a aussi imposé dans un souci de clarté de nombreuses notations comme *e* (pour la base des logarithmes

néperiens), *i* pour les imaginaires et (surtout!) vulgarisé la notation π (introduite en *1706* par W. Jones).
Sa rigueur est parfois contestable mais l'ingéniosité et la justesse des résultats sont remarquables. Un bon exemple en est la façon dont il a trouvé le résultat de la convergence de la somme des carrés des inverses et qui est relatée ci-dessous :

Démonstration

Pour les fondus d'analyse !!!
Par où commencer ? Bon, occupons-nous de l'égalité contenant les nombres de Bernoulli, la formule 1). Plusieurs démonstrations sont possibles, plus ou moins complexes... Celle présentée ci-dessous a le mérite d'être rapide (tout est relatif !) et repose sur la première définition des nombres de Bernoulli. Elle montre par ailleurs en complétant la démonstration suivante de la formule 2) l'équivalence des deux définitions des nombres de Bernoulli...
Puis juste après, la "démonstration" (hum!) originelle d'Euler pour la somme des inverses des carrés ! Si la rigueur n'est pas vraiment au rendez-vous, quelle imagination et quelle astuce !
Mais cela, c'est pour après la véritable preuve...

---

1) On ne pourra en effet jamais dire assez merci à Monsieur Fourier, sa théorie va nous être encore bien utile...

Considérant les polynomes de Bernoulli $B_{2n}(t)$, prenons la fonction f_{2n} pour n entier, de période 1, et qui est égale à B_{2n} sur $[0,1[$. f_{2n} est évidemment C^1 par morceaux car restriction de polynomes à un intervalle de R. Elle vérifie donc le théorème de Dirichlet pour les fonctions T-périodiques et on peut l'écrire sous forme d'une série de Fourier.

1.1 Premier petit résultat intermédiaire :

$$\forall n \in N^* \quad B_n(1) - B_n(0) = \int_0^1 B_n'(t)\,dt = n\int_0^1 B_{n-1}(t)\,dt = 0$$

1.2 Calculons maintenant les coefficients de Fourier. Pour ne pas s'embêter inutilement, montrons tout d'abord par récurrence sur n que B_{2n} est paire par rapport à $x=1/2$...

$B_0=1$ par calcul immédiat donc pas de problèmes au rang 1...

Supposons pour un certain n entier que $B_{2n}(x+1/2)=B_{2n}(1/2-x)$

Soit $g_{2n+2}(x)=B_{2n+2}(x+1/2)-B_{2n+2}(1/2-x)$. C'est un polynôme donc g_{2n+2} est C^2 sur R.

$g''_{2n+2}(x) = (2n+2)(2n+1)B_{2n}\left(x+\frac{1}{2}\right) - (2n+2)(2n+1)B_{2n}\left(\frac{1}{2}-x\right) = 0$ d'après l'hypothèse de récurrence...

donc g'_{2n+2} est constante... or,

$g'_{2n+2}(0)=(2n+2)B_{2n+1}(0)-(2n+2)B_{2n+1}(0)=0$ donc $g'_{2n+2}=0$ donc g_{2n+2} est constante or $g_{2n+2}(0)=0$ donc finalement, B_{2n+2} est bien symétrique par rapport à $x=1/2$, c'est l'hypothèse au rang suivant donc la proposition est valable pour tout n entier et sur $[0,1]$, f_{2n} est symétrique par rapport à $x=1/2$.

Donc on a le coefficient de Fourier associé $b_k(f_{2n})=$

$$2\int_0^1 B_{2n}(t)\sin(2k\pi t)\,dt = 0$$

1.3 Calculons d'autre part pour n entier non nul

$a_k(B_{2n})=$

$$2\int_0^1 B_{2n}(t)\cos(2k\pi t)\,dt = 2\left(\left[\frac{1}{2k\pi}B_{2n}(t)\sin(2k\pi t)\right]_0^1 - \frac{2n}{2k\pi}\int_0^1 B_{2n-1}(t)\sin(2k\pi t)\,dt\right)$$

$$= 2\left(0 - \frac{2n}{2k\pi}\left(\left[-\frac{1}{2k\pi}B_{2n-1}(t)\cos(2k\pi t)\right]_0^1 + \frac{2n-1}{2k\pi}\int_0^1 B_{2n-2}(t)\cos(2k\pi t)\,dt\right)\right)$$

$= \frac{-(2n)(2n-1)}{(2k\pi)^2}a_k(B_{2n-2}) = \frac{(-1)^{n-1}(2n)!}{2^{2n-2}(k\pi)^{2n-2}\,2}a_k(B_2)$ d'après 1.1 puis par récurrence descendante immédiate...

Jusque là, tout va bien ! Le reste n'est pas beaucoup plus compliqué... Il nous reste en effet à calculer $a_k(B_2)$.

1.4 On pourra vérifier (puisqu'il y a unicité) que $B_2=X^2-X+1/6$ est bien le polynôme de Bernoulli qui convient aux définitions. Par simple puis double intégration par partie, on a $\int_0^1 t\cos(2k\pi t)\,dt=0$ et $\int_0^1 t^2\cos(2k\pi t)\,dt=\frac{1}{2(k\pi)^2}$. Et bien sûr, $\int_0^1 \cos(2k\pi t)\,dt=0$, donc, finalement, $a_k(B_2)=2\int_0^1\left(t^2-t+\frac{1}{6}\right)\cos(2k\pi t)\,dt=\frac{1}{(k\pi)^2}$.

1.5 On a donc trouvé d'après 1.3 et 1.4

$$a_k(B_{2n})=\frac{(-1)^{n-1}(2n)!}{2^{2n-1}(k\pi)^{2n}}$$

1.6 Le développement de B_{2n} en série de Fourier nous donne alors pour t dans $[0,1[$:

$B_{2n}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n)!}{2^{2n-1}(k\pi)^{2n}}\cos(2k\pi t)$ et donc en particulier pour t=0, on a :

$$\zeta(2n)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2n}}=\frac{(-1)^{n-1}2^{2n-1}\pi^{2n}}{(2n)!}Ber_{2n}$$ où $Ber_{2n}=B_{2n}(0)$

et voilà !!!

Au vu de l'importance du résultat, cette démonstration est monstrueusement rapide par rapport à d'autres !!! Et en bidouillant un peu, on obtient également deux expressions bien utiles :

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^{2n}}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2n}}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^{2n}}=\left(1-\frac{1}{2^{2n}}\right)\zeta(2n)=\left(1-\frac{1}{2^{2n}}\right)\frac{(-1)^{n-1}2^{2n-1}\pi^{2n}}{(2n)!}Ber_{2n}$$

et $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^{2n}}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2n}}-2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^{2n}}=\frac{(-1)^{n-1}(1-2^{2n-1})\pi^{2n}}{(2n)!}Ber_{2n}$$

Plus généralement, on appelle sommes de Reynolds l'expression :

$$S_p = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k}{2k+1} \right)^p$$

Donc, pour p=2n pair, on a la somme du dessus, et pour p impair, on a :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^{2n+1}} = \frac{(-1)^n E_{2n} \pi^{2n+1}}{2^{2n+2}(2n)!}$$ avec E_{2n} les coefficients d' Euler tels que :

$$\frac{2}{e^t + e^{-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \frac{t^n}{n!}$$ ou encore puisqu' il s' agit de la formule de Taylor:

$$E_n = \frac{d^n \left(\frac{2}{e^t + e^{-t}} \right)}{dt^n}(0)$$ soit $E_{2n-1} = 0,\ E_0 = 1,\ E_2 = -1,\ E_4 = 5,\ E_6 = -61,\ E_8 = 1385$

Ces nombres font intervenir les polynômes d'Euler dont je n'ai malheureusement pas trouvé la définition. Il suffit d'appliquer la méthode précédente aux polynômes d'Euler pour trouver le résultat.

Sinon, avec les premières valeurs des nombres de Bernoulli et la première formule, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^8} = \frac{\pi^8}{9450} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{10}} = \frac{\pi^{10}}{93555}$$ entre autres...

---

1) bis... Voilà donc la preuve originelle, d'Euler lui-même, de la somme des inverses des carrés... La convergence avait été démontrée par Jacques Bernoulli et Leibniz s'y était cassé les dents... voyons ce qu'Euler a fait. Il a trouvé la limite, mais les justifications sont un peu douteuses, vous verrez !

Se basant sur la théorie des équations algébriques, Euler savait que la somme des inverses des racines de $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + 1 = 0$ vaut

$-a_1$. Considérant alors le développement de

$\frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = 1 - \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{5!} - \frac{x^3}{7!} + \frac{x^4}{9!} - ...$ il sait grâce à la périodicité de sinus que le membre de droite s'annule pour $x=\pi^2, 4\pi^2, 9\pi^2, 16\pi^2...$

Euler se dit alors que la propriété qui est vraie pour un polynôme fini doit l'être pour un polynôme infini et il en déduit

$\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \frac{1}{16\pi^2} = -a_1 = \frac{1}{3!}$ soit $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Très fort !

---

2) Bon, revenons à des choses un peu plus sérieuses (mathématiquement !)... La démonstration de la formule générale du 2) (abrégée, n'abusons pas du calcul, et de plus, je me sens un peu fatigué !) se trouve sur la page de Fourier. Une application $z=1/2$ donne :

$$\pi = 4 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{8 - 16k^2}.$$

Mais il y a plus fort ! Dans $\pi \cot an(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - k^2}$ on développe

$$\frac{2z}{z^2 - k^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z^{2n-1}}{k^{2n}} \quad donc \quad \pi \cot an(\pi z) = \frac{1}{z} - 2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z^{2n-1}}{k^{2n}} = \frac{1}{z} - 2\sum_{n=1}^{\infty} \zeta(2n) z^{2n-1}$$

en échangeant les sommes (z inférieur à 1 et absolue convergence des sommes)

En posant $t=2i\pi z$ et en calculant cotan au moyen de son expression en exponentielles complexes (*cos/sin*), on obtient

$$\frac{t}{e^t - 1} = 1 - \frac{t}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \zeta(2n) t^{2n}}{\pi^{2n} 2^{2n-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} Ber_k \frac{t^k}{k!}$$

d'après la *2ème* définition des nombres de Bernoulli. Ah ah !
Par identification des termes deux à deux (ce sont deux séries entières), on peut alors conclure

$$\zeta(2n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} = \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n-1} \pi^{2n}}{(2n)!} Ber_{2n} \quad !!!$$

C'est effectivement le bon résultat montré en 1) et c'est aussi la méthode originelle qu'avait utilisé Euler. Voilà, *2* preuves pour le prix d'une ! Cela implique aussi l'équivalence des définitions des nombres de Bernoulli (ceux d'indice impair sont en effet nuls...)

---

3) Ouf, petite pause...

Bien, passons maintenant à la formule *3*... Là encore, une astuce monstrueuse d'Euler intervient... Celui-ci utilise en effet un développement très inhabituel, mais ô combien efficace, d'arctan à savoir :

$$\text{Arctan}(t) = \frac{t}{1+t^2}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2\, 2^{2n}}{(2n+1)!}\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^n\right]$$

pour *t* positif... Euler l'a utilisé avec une formule d'*arctan* $\pi = 20\text{Arctan}(1/7) + 8\text{Arctan}(3/79)$ pour calculer *20* décimales de *Pi* en une heure (essayez donc !). Il est vrai que si on pose t=1/7, $\frac{t^2}{1+t^2}$=0,02 !

Pratique... Habile, Euler l'était certainement...
Voyons en effet sa démonstration :

3.1 Posons $x = \frac{t^2}{1+t^2}$, *t* positif et *x* dans *[0,1[*.

On a $t = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$. Posons maintenant $y = \frac{1+t^2}{t}\text{Arctan}(t) = \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$ Arctan

$\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$

3.2 Essayons de simplifier l'écriture... Si z=Arctan $\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$, on obtient $\dfrac{x}{1-x} = \tan^2 z = \dfrac{\sin^2 z}{\cos^2 z} = \dfrac{\sin^2 z}{1-\sin^2 z}$ ce qui donne $\sin^2 z = x$ et donc

$$y=\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}\text{Arcsin}\sqrt{x}.$$

Mais on n'y voit toujours pas très clair... Continuons donc...
3.3 On dérive cette expression par rapport à *x* et on obtient :

$$2y'(x-x^2)+y(1-2x)=1$$

3.4 Cherchons *y* sous la forme $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Inséré dans l'équation différentielle, nos yeux exorbités découvrent $a_0+x(3a_1-2a_0)+\sum_{n=0}^{\infty}\left((2n+1)a_n-2na_{n-1}\right)x^n = 1+0.x+0.x^2+\ldots$ ce qui, par identification, nous donne $a_0=1$, $3a_1-2a_0=0$ donc $a_1=2/3$, et $(2n+1)a_n-2na_n-1=0$ donc :

$$a_n = a_{n-1}\frac{2n}{2n+1} = \frac{(n!)^2\,2^{2n}}{(2n+1)}$$

par récurrence immédiate sur *n* entier (calcul hyper classique !).
Réciproquement, on vérifie que $y=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(n!)^2\,2^{2n}}{(2n+1)!}x^n$ convient comme solution de l'équation différentielle (à ne pas oublier, mais ne comptez pas sur moi pour le faire !).

3.5 Le reste est trivial commme disent certains... D'après la définition de *y*, on en conclut pour *t* réel positif :

$$Arctan(t) = \frac{t}{1+t^2}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n+1)!}\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^n\right]$$

Mais que peut on faire de cela ? Plein de choses ! Tout d'abord appliquer la formule d'Euler décrite au début de cette section... Puis poser $t=1$ et obtenir la formule 3)... ou $t=1/2$, ou $1/4$, ou utiliser les formules d'*Arctan*... tout est possible ! Comme d'habitude, plus t est petit, plus la convergence est rapide, car le terme en t dans la somme est de plus en plus petit...
Moi, j'aime bien $t=\frac{1}{\sqrt{3}}$, car on obtient avec $Arctan(t)=\pi/6$:

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$$

ce qui est très proche de la formule de Schroeppel-Gosper ! Chouette non ?

---

4) Bon, encore une démo... Au risque de paraître quelqu'un qui abrège de plus en plus au fil des démonstrations, je ne peux que donner les pistes de la démonstration de la formule 4)... D'après "*Le fascinant nombre Pi*" (voir Biblio) :
Soit $a>1$. Pour p nombre premier, $p^a>1$ donc par développement limité :

$$\left(1-\frac{1}{p^a}\right)^{-1} = 1 + \frac{1}{p^a} + \frac{1}{p^{2a}} + \frac{1}{p^{3a}} + \ldots$$

Si l'on écrit ces égalités pour tout nombre premier et que l'on fait leur produit, on obtient à gauche :

$$\prod_{p=2,\,premier}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p^a}\right)^{-1}$$

et à droite alors ? On obtient le produit des membres de droite, c'est à dire de sommes infinies. Si l'on élimine tous les produits infinis qui vont se former (des produits infinis de termes en $1/p^{ka}$ donnent 0 ne serait-ce que parce que $0<1/p^{ka}<1/2$), il reste la somme de tous les termes de la forme $\frac{1}{p^{ka}q^{ia}r^{ja}\ldots}$, où *p,q,r...* sont des nombres premiers et *k, i, j...* des entiers... Cela ne vous rappelle rien ? Un certain théorème d'arithmétique qui dit que tout entier n est décomposable sous la forme $p^k q^i r^j\ldots$ c'est à dire comme produit de nombres premiers chacun à une certaine puissance... Comme tous les nombres premiers et leurs puissances sont présents ici, on en déduit que cette somme infinie vaut :

$$\prod_{p=2,\,premier}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p^a}\right)^{-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a}=\zeta(a)$$

Et pour a pair, on a alors d'après la formule 1) :

$$\prod_{p=2,\,premier}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p^{2n}}\right)^{-1}=\frac{(-1)^{n-1}2^{2n-1}\pi^{2n}}{(2n)!}Ber_{2n}$$

Ce qui est bien la formule 4), si l'on isole *Pi* !
Ces deux fabuleuses égalités trouvées par Euler seront réutilisées dans la page consacrée à Césaro. Une des conséquences importantes de ce résultat est que pour *a=1*, la somme des inverses diverge, donc le produit (membre de gauche) vaut l'infini, donc il existe une infinité de nombres premiers... Pas mal, non ? Voilà que Pi fait une entrée fracassante dans le monde de l'arithmétique !!!

Essais

Bon, avouons-le, toutes ces formules sont très belles mais ne sont pas vraiment faites pour le calcul des décimales... La forme des formules de type 1) promet une affligeante convergence logarithmique...

1) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

n=10	*3,0493 (0)*
n=100	*3,1320 (1)*
n=1 000	*3,1406 (2)*
n=10 000	*3,141497 (3)*
$n=10^{15}$	*3,14159265358979228 (14)*

une convergence d'environ *0.434*ln(n)-1*, désespérant ...
A noter que j'ai trouvé sur Internet (mais je n'ai plus l'adresse) une suite accélérant un peu les calculs :

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{31}{8} - 9 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 (4k^2 - 1)(25k^4 + 5k^2 + 9)}$$

Mais la puissance dominante du bas étant *8*, pas de miracles, cette suite converge moins vite que la suivante :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{10}} = \frac{\pi^{10}}{93555}$$

n=10	*3,1415926535860 (11)*
n=100	*19* décimales justes
n=1 000	*28* décimales justes
n=10 000	*37* décimales justes
$n=10^{10}$	*92* décimales justes

Et une convergence d'environ *4ln(n)+0.5*, si ça n'est pas malheureux !

2) Oublions la formule 2) du même genre que la 1) à un facteur et une translation près, ce qui ne change rien aux résultats...

3) La formule 3) s'avère un peu plus intéressante :

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$$

Je prends la version $t=\frac{1}{\sqrt{3}}$ dans le développement d'*arctan* car, après tout, elle est plus rapide que la formule 3)...

n=5	*3,14131 (3)*
n=10	*3,1415924 4 (6)*
n=50	*30* décimales justes
n=100	*61* décimales justes

Ah, une convergence linéaire d'environ *3n / 5*, déja plus accueillant...

Tiens, appliquons la formule de Machin avec le développement d'*Arctan* trouvé par Euler :

n=5	*3,1415926500 (8)*
n=10	*15* décimales justes
n=50	*74* décimales justes

Une convergence linéaire de *3n/2*, ce n'est pas mal du tout !
Et enfin, appliquons la formule d'*arctan* trouvée par Euler pour calculer les décimales de *Pi* :
π *=20Arctan(1/7)+8Arctan(3/79)*

n=5	*10* décimales justes
n=12	*21* décimales justes
n=50	*88* décimales justes

7n/4 de convergence et l'on remarquera qu'Euler a dû calculer *12* itérations pour obtenir les *20* décimales de *Pi*... En *1* heure, cela paraît incroyable ! Tentez donc à la main.

4) Pour finir, la formule *4* n'a aucune vocation calculatoire et sa forme laisse augurer d'une convergence logarithmique, alors...

Accélération de la convergence

Tout petit paragraphe, car franchement, rien n'est terrible, même avec le *Delta2* d'Aitken... Mais à convergence lente, présence du *Delta2* qui décidément, sauve certaines suites d'un bide lamentable...

Pour $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$:

n=1000	*3,14111 (3)*
n=10000	*3,141544 (4)*
n=100000	*3,1415921717 (6)*

environ *log(n)*, pas si mal, mais tout de même...

Et pour la formule d'arctan avec $t=\frac{1}{\sqrt{3}}$:

n=10	*3,1415926520 (8)*
n=50	*34* décimales justes

Une convergence linéaire d'environ *7n/10*. Mieux, mais pas de quoi déplacer les montagnes...

---

retour à la page d'accueil

page d'accueil

Jacques Bernoulli
(1654 - 1705)

Définition à retenir !

Les polynômes de Bernoulli B_n sont définis par récurrence d'après :

$$\begin{cases} B_0 = 1 \\ \forall n \geq 1 \quad B_n' = nB_{n-1} \quad et \quad \int_0^1 B_n(t)\,dt = 0 \end{cases}$$

Les nombres (Ber_n) sont alors définis par $Ber_n = B_n(0)$

Autre définition équivalente :

Les nombres de Bernoulli Ber_k sont définis comme des coefficients dans la série entière

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} Ber_k \frac{t^k}{k!}$$

Tranches de vie

Premier de la lignée des célèbres mathématiciens suisses du même nom, Jacques (Jakob) est originaire d'Anvers mais s'exile sous la dictature du duc d'Albe en Flandre. Abandonnant la théologie chère à son père, il se tourne vers les mathématiques et la physique. Il tirera de son intérêt pour l'astronomie sa devise "Invito patre sidera verso" (j'étudie les étoiles contre la volonté de mon père). Devenu professeur à l'université de Bâle, il s'intéresse au calcul infinitésimal qu 'il met en

rapport avec les courbes (Lemniscate...) et qui lui permet d'introduire les coordonnées polaires. Il étudie également les probabilités et les séries numériques, ce qui le pousse à définir les fameux nombres de Bernoulli décrits plus haut.
* Photos de Johann (*1667-1748*) et Daniel (*1700-1782*) Bernoulli

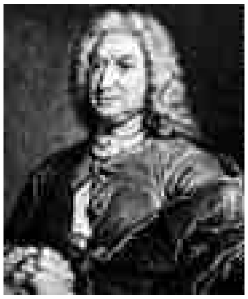
Autour de π

Plusieurs formules d'analyse font apparaître ces nombres de Bernoulli, notamment dans de nombreuses limites de séries comme l'a montré Euler. Son apport à la recherche sur π est donc fondamental même s'il reste indirect. On lui doit la démonstration de la convergence de $\sum \frac{1}{n^2}$ dont la limite et celles des suites de ce type seront trouvées par Euler.
Les premiers nombres de Bernoulli sont :

$B_0=1$
$B_1=-1/2$
$B_2=1/6$
$B_4=-1/30$
$B_6=1/42$
$B_8=-1/30$
$B_{10}=5/66$

---

retour à la page d'accueil



page d'accueil

Joseph Fourier
(1768 - 1830)

Théorème fondamental

Si f est 2π périodique et continue et dérivable par morceaux, alors pour tout $x \in R$,

$$\frac{f(x+)+f(x-)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$$

$$\text{avec } \forall k \in N \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx \quad \text{et} \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx$$

ce qui s'écrit en complexe et pour une fonction de période *T* :

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{\frac{-2i\pi nx}{T}}\,dx \quad et \quad f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2i\pi nx}{T}} \quad pour \quad 0 \le x \le T$$

Tranches de vie

Fourier occupe une place à part dans le monde mathématique et aussi dans celui des suites convergeant vers π.
Né en *1768*, Fourier était obsédé par l'étude de la chaleur. Alors que son logement à Grenoble était surchauffé au point d'incommoder ses visiteurs, il s'engonçait dans de lourds vêtements. Cependant, pour étudier ces phénomènes, il mit au point une méthode de décomposition d'un signal périodique en somme de signaux plus élémentaires, notamment de type sinusoïdal.
Le technicien a rarement besoin de plus de quelques signaux pour reconstituer le signal voulu avec une approximation satisfaisante. Le mathématicien dispose, lui, de la décomposition exacte en signaux de plus en plus faibles. Si l'on a une fonction *f* continue, périodique de période 2π et dérivable, elle peut se décomposer comme ci-dessus. La formule reste valable si f est continue et dérivable par morceaux, on remplacera simplement dans le cas où *x* est un point de discontinuité *f(x)* par *(f(x-)+f(x+))/2*.
Remarquons que cette théorie audacieuse a reçu un accueil plus que mitigé à son époque. Nombre de mathématiciens parisiens célèbres, parmi lesquels Lagrange, Laplace, Legendre, Biot et Poisson, n'acceptaient pas cette conjecture, et lorsque Fourier l'exposa devant l'académie des Sciences, Lagrange se leva et déclara qu'il la tenait pour fausse!
A cause du chauffage excessif, Fourier mourut d'un arrêt du coeur en 1830 !

Autour de π

Aujourd'hui, si l'on veut retrouver les innombrables formules contenues dans les ouvrages d'Euler, par exemple, on utilise la théorie de Fourier. La formule générale permet en effet par de nombreux cas particuliers de calculer les limites de presque toutes les séries...
De plus, il est amusant de constater qu'encore aujourd'hui, les techniques d'accélération des calculs dans les algorithmes actuels reposent sur les transformées de Fourier rapides (TFR), et permettent d'atteindre les milliards de décimales calculées sur les ordinateurs... décidément très utile ce monsieur Fourier !

Démonstration

Nous ne nous arrêterons pas sur la démonstration de la formule, appelée "Théorème de Dirichlet", assez longue et pas en rapport direct avec π. Néanmoins, détaillons un tout petit peu :

Soit f une fonction de R dans C, 2π périodique et continue par morceaux sur $[0,2\pi]$.

Soit x un point où f est de plus dérivable à droite et à gauche.

Posons $S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\exp(ikx)$ où $c_k(f) = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-\text{int}}dt$

On a alors par une égalité classique $\sin(t)\sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = \sin(n+\frac{1}{2})t$ puis Chasles et un changement de variables $t \longrightarrow t+\pi$ le résultat suivant $Sn(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin(t)}(f(x-t)+f(x+t))dt$. D'après Dirichlet, Sn(x) converge vers $\frac{1}{2}(f(x^+)+f(x^-))$.

Applications

C'est ici qu'intervient pour nous tout l'intérêt de la théorie de Fourier ! Il suffit en effet maintenant de choisir une fonction vérifiant les conditions du théorème et de calculer ses coefficients de Fourier. Puis on choisit un *x* particulier :

1) Si f est la fonction de période 2π définie par $f(x) = |x|$ si $-\pi \le x \le \pi$

on trouve $a_0 = \frac{\pi}{2}$ $a_{2n-1} = -\frac{4}{(2n-1)^2\pi}$ les autres coefficients étant nuls ($b_n = 0$ de toutes façons par parité de la fonction f)

donc $|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cos(x) - \frac{4}{3^2\pi}\cos(3x) - \frac{4}{5^2\pi}\cos(5x)\dots$ et en particulier avec $x = 0$, on obtient

$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$ ce qui n'est autre qu'une des nombreuses formules d'Euler !

2) Si $f(x) = x^2 \quad pour \quad -\pi \le x \le \pi$

on obtient la formule $x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\cos(x) + \frac{4}{2^2}\cos(2x) + \ldots = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$

Avec $x = \pi$ on a en particulier $\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

Et avec $x = \frac{\pi}{2}$ on a $\frac{\pi^2}{12} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$ chouette, non?

3) Formule de Leibniz

$$Si \quad f(x) = \begin{cases} 1 & lorsque \quad 0 < x < \pi \\ -1 & lorsque \quad -\pi < x < 0 \end{cases}$$

on obtient pour $x \neq k\pi$ la formule $f(x) = \frac{4}{\pi}\sin(x) + \frac{4}{3\pi}\sin(3x) + \frac{4}{5\pi}\sin(5x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi}\sin((2n-1)x)$

avec $x = \frac{\pi}{2}$ apparaît devant nos yeux exhorbités... $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)}$

4) Encore plus fort !

Si $f(x) = \cos(zx) \quad pour \quad -\pi < x < \pi \quad et \quad z \in R \setminus N$

on obtient après calcul des coefficients la formule $\frac{\cos(zx)}{\sin(\pi z)} = \frac{1}{\pi z} + \frac{2z}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(nx)}{z^2 - n^2}$

soit avec $x = 0$ $\frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \frac{1}{z} + 2z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^2 - n^2}$

ou encore avec $x = \pi$ $\pi \mathrm{cotan}(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}$ (on reconnaitra là encore une formule dûe à Euler...)

Et si l' on dérive 3 fois chacun des membres (on a parfaitement le droit, et comme la somme des dérivées successives converge uniformément pour z sur]0, 1[, on peut dériver terme à terme), on obtient $\frac{\pi^4 (1 + 2\cos^2(\pi x))}{3\sin^4(\pi z)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^4}$

Et si l' on tente alors un $z = \frac{1}{2}$ on obtient $\frac{\pi^4}{96} = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}$ que l' on peut transformer :

Avec $S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} = \frac{1}{16}S + \frac{\pi^4}{96} \Rightarrow S = \frac{\pi^4}{90}$ trop fort !

Essais

se reporter à Euler pour les essais de rapidité de convergence des séries engendrées par les formules de Fourier...

Retour à la page d'accueil

page d'accueil

Gottfried Wilhelm Leibniz
(1646 - 1716)

Pourquoi faire compliqué ?

$$\pi = 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}$$ (tout simplement !)

et une série dérivée :

$$\pi = 8\left(\frac{1}{1.3}+\frac{1}{5.7}+\frac{1}{9.11}+\ldots\right) = 8\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(4k+1)(4k+3)}$$

Tranches de vie

Leibniz est né à Leipzig en *1646*. Mathématicien et philosophe allemand, toute son oeuvre est cependant écrite en français ou latin. Fils de professeur de philosophie, sa formation n'est que très peu mathématique, mais il se découvre une passion pour elle grâce à Huygens avec qui il se lie d'amitié.... (merci Huygens !)
Leibniz s'intéresse surtout aux séries numériques - Ah ! voilà qui est intéressant - et affirme sa paternité du calcul différentiel, ce qui lui vaudra une violente querelle avec Newton et assombrira la fin de sa vie.
On ne le sait pas toujours, mais ce bon vieux Leibniz est un grand inventeur de notations. On lui doit les signes $\int$ (intégrale), = , *dx* , . pour la multiplication et : pour la division.

Mais Leibniz, malgré son génie, n'avait pas une idée très précise des nombres complexes par exemple et écrivait des lignes entières d'égalités sans grand sens comme :

$$\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}=\sqrt{6}$$

avec laquelle il étonna Huygens...
Ses conceptions philosophiques influençaient grandement sa vision mathématique... Il considérait ainsi ces fameux nombres complexes comme amphibie à mi-chemin entre existence et non-existence !
Ignoré à sa mort par les communautés scientifiques allemandes et anglaises, notre célèbre centenaire Fontenelle fit néanmoins son éloge à Paris... Il l'avait bien mérité !

Autour de π

Alors là, il y a un peu d'abus de ma part, car Leibniz n'est pas vraiment le découvreur de cette formule. James Grégory (*1638-1675*) avait en effet calculé le développement en série entière :

$$\arctan(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

pour x entre *-1* et *1*. Il serait étonnant que Grégory n'ait pas vu le cas particulier $x=1$ qui donne la formule :

$$\pi = 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}$$

Mais comme nous allons le voir, sa convergence est plus qu'exécrable et Grégory a dû se rendre compte du peu d'intérêt qu'offre la formule en pratique... Mais avouez qu'elle est très belle et d'une simplicité remarquable ! Donc rendons à Grégory ce qui lui appartient, même si la première publication de cette formule est seulement explicitée dans l'oeuvre de Leibniz...
D'autre part, cette formule de Leibniz/Grégory réserve quelques surprises, découvertes très récemment par Roy North... Allez donc voir la section essais !

Démonstration

Que dire de la démonstration tant elle paraît un peu évidente...
On se rappellera que arctan : *R->]-π/2,π/2[* est définie comme la fonction réciproque de la bijection *tan* : *]-π/2,π/2[->R*.
Or, on a $tan'(x)=1+tan^2(x)$ (en passant par les *cos* et *sin*) et donc d'après la formule de la dérivée d'une fonction réciproque

$f' = \frac{1}{(f^{-1})' \circ f}$ on a $\mathrm{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Or on connaît la série entière $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ définie sur *]-1,1[*.

On sait que l'on peut l'intégrer terme à terme sur cet intervalle d'après les propriétés des séries entières. Après avoir remarqué que le résultat obtenu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ converge en *1* et *-1* ce qui assure la convergence uniforme de la série sur *[-1,1]* vers *arctan*, on fait *x=1* et le tour est joué... On peut également utiliser $x=1/3^{1/2}$, ce qui est plus intéressant :

$$\pi = 2\sqrt{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1) * 3^n}$$

Essais

Attention, grand moment !
Pour la formule de Leibniz/Grégory :

n=10	*3,2323 (0)*
n=100	*3,151493401 (1)*
n=1 000	*3,14259165 (2)*
n=10 000	*3,14169264359054 32 (3)*

n=100 000	*3,14160265348979398846014336 (3)*
n=500 000	*3,141590653589793240462643383269502884197 (5)*
n=1 000 000	*3,14159365358879323921264313 (5)*

Si il y a quelques décimales en marron, c'est parce qu'elles sont fausses! Mais alors, pourquoi les suivantes sont-elles justes? Car enfin la convergence est bien logarithmique d'après la forme (environ *log(n)*) ! C'est le problème que Roy North a posé aux frères Borwein il y a quelques années... Je n'ai plus la solution, mais elle fait intervenir les nombres d'Euler et deux formules de sommation. En attendant des recherches ultérieures...

Pour la seconde formule (juste au dessus de la section Essais) on a une intéressante convergence linéaire d'environ *n/2* :

n=10	*3,141593304 5*
n=100	*49 décimales justes*

Accélération de la convergence :

Si il y a bien une suite pour laquelle le *Delta2* d'Aitken est vraiment, mais alors vraiment utile, c'est bien celle de Leibniz... Et d'autres formes d'accélération marchent aussi ! Car, une convergence logarithmique, ça n'est guère convaincant...

1) Avec le *Delta2* : accélération classique et de plus en plus rapide normalement... requiert un calcul avec beaucoup de décimales à cause de l'instabilité numérique du procédé.

2) Avec une moyenne :

Puisque c'est une suite alternée, j'ai eu l'idée d'appliquer une moyenne à la suite de Leibniz. Ce qui n'aurait dû en théorie qu'apporter au mieux 1 décimale de plus se révèle accélérer la convergence de la suite de façon surprenante ! :

on note $x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)}$ et $m_n = \frac{x_n + 3x_{n-1} + 3x_{n-2} + x_{n-3}}{8}$ la moyenne pondérée associée.

Les résultats apparaissent dans le tableau ci-dessous pour les *2* types d'accélération :

	Leibniz	*Delta2*	Moyenne
n=3	*2,8952 (0)*	*3,13333 (1)*	*3,161904 (1)*
n=5	*2,976 (0)*	*3,13968 (1)*	*3,143434 (2)*
n=10	*3,2323 (0)*	*3,141839 (3)*	*3,14150053 (4)*
n=100	*3,15149 (1)*	*3,141592905 (6)*	*3,14159264593 (7)*
n=1000	*3,142591 (2)*	*3,141592653839792 (9)*	*3,141592653589041 (12)*
n=10000	*3,14169264 (3)*	*3,1415926535900 ? (10)*	*3,1415926535897931634 (15)*

Le dernier résultat pour le *Delta2* me paraît douteux, surtout au vu du résultat de la moyenne, je l'ai calculé avec *100* décimales pourtant...

Ce qu'il y a de bien avec les suites construites à partir d'autres, c'est que l'on peut réitérer le procédé.
Application tout de suite !

	Delta2 itéré *2* fois	Moyenne itérée *2* fois
n=3	*3,13888 (1)*	n'existe pas...
n=5	*3,141450 (2)*	*3,1215 (1)*
n=10	*3,141595655 (5)*	*3,141598653 (5)*
n=100	*3,1415926536094 (9)*	*3,141592653589922 (12)*

n=1000	*3,14159265358979342 69 (15)*	*3,1415926535897932384 7405 (19)*
n=10000	trop douteux !!	*3,14159265358979323846264338 440 (26)*

A noter que les combinaisons entre *Delta2* et moyenne sont moins efficaces...

3) on peut aussi réordonner les termes comme l'avait fait Leibniz, mais ce n'est guère plus efficace.

$$\pi = 8\left(\frac{1}{1.3} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{9.11} + \ldots\right) = 8\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(4k+1)(4k+3)}$$

Bon, cette fois-ci, je crois que c'est tout concernant cette suite finalement très riche !!

---

retour à la page d'accueil

page d' accueil


Jonathan et Peter Borwein

Site des travaux sur Pi au CECM

Et voici le top du top !

1) *1984* : convergence quadratique (reposant sur la moyenne arithmético-géométrique)

$$a_0 = \sqrt{2} \qquad b_0 = 0 \qquad a_{n+1} = \frac{\sqrt{a_n}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{a_n}} \qquad b_{n+1} = \frac{\sqrt{a_n}\,(1+b_n)}{a_n + b_n}$$

$$p_0 = 2 + \sqrt{2} \qquad p_{n+1} = p_n b_{n+1} \frac{1 + a_{n+1}}{1 + b_{n+1}} \xrightarrow{n \to \infty} \pi$$

2) *1987* : convergence quadratique (reposant aussi sur l'*AGM*)

$$y_0 = \sqrt{2} \qquad z_1 = \sqrt[4]{2} \qquad y_{n+1} = \frac{1 + y_n}{2\sqrt{y_n}} \qquad z_{n+1} = \frac{1 + y_n z_n}{(1 + z_n)\sqrt{y_n}}$$

$$f_0 = 2 + \sqrt{2} \qquad f_n = f_{n-1} \frac{1 + y_n}{1 + z_n} \xrightarrow{n \to \infty} \pi$$

3) convergence quadratique (reposant sur les équations modulaires comme les suivantes)

$$y_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad y_{n+1} = \frac{1 - \sqrt{1 - y_n^2}}{1 + \sqrt{1 - y_n^2}} \qquad \alpha_0 = \frac{1}{2} \qquad \alpha_{n+1} = \left((1 + y_{n+1})^2 \alpha_n\right) - 2^{n+1} y_{n+1}$$

$$\beta_n = \frac{1}{\alpha_n} \xrightarrow{n \to \infty} \pi$$

$$y_0 = \frac{1}{3} \qquad y_{n+1} = \frac{1 - \sqrt{1 - y_n^2}}{1 + 3\sqrt{1 - y_n^2}} \qquad \alpha_0 = \frac{1}{3} \qquad \alpha_{n+1} = (1 + 3y_{n+1})\alpha_n - 2^n y_{n+1}$$

$$\beta_n = \frac{1}{\alpha_n} \xrightarrow{n \to \infty} \pi$$

4) convergence quadratique :

$$y_0 = 2 \quad y_n = \frac{4}{1+\sqrt{(4-y_{n-1})(2+y_{n-1})}} \quad \alpha_0 = \frac{1}{3} \quad \alpha_n = y_{n-1}\alpha_{n-1} + \frac{2^{n-1}}{3}(1-y_{n-1})$$

$$\beta_n = \frac{1}{\alpha_n} \xrightarrow{n\to\infty} \pi$$

5) convergence cubique :

$$y_1 = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \quad y_n = \frac{1-\sqrt[3]{1-y_{n-1}^3}}{1+2\sqrt[3]{1-y_{n-1}^3}} \quad \alpha_0 = \frac{1}{3} \quad \alpha_n = \left((1+2y_n)^2\alpha_{n-1}\right) - 4.3^{n-2}(1+y_n)y_n$$

$$\beta_n = \frac{1}{\alpha_n} \xrightarrow{n\to\infty} \pi$$

6) convergence quartique :

$$y_1 = \sqrt{2}-1 \quad y_{n+1} = \frac{1-\sqrt[4]{1-y_n^4}}{1+\sqrt[4]{1-y_n^4}} \quad \alpha_0 = 6-4\sqrt{2} \quad \alpha_{n+1} = \left((1+y_{n+1})^4\alpha_n\right) - 2^{2n+3}\left(1+y_{n+1}+y_{n+1}^2\right)y_{n+1}$$

$$\beta_n = \frac{1}{\alpha_n} \xrightarrow{n\to\infty} \pi$$

7) convergence quintique :

$$S_0 = 5\left(\sqrt{5}-2\right) \quad \alpha_0 = \frac{1}{2} \quad S_{n+1} = \frac{25}{S_n\left(Z+\frac{X}{Z}+1\right)^2}$$

$$\text{où} \quad X = \frac{5}{S_n} - 1 \quad Z = \frac{1}{2}\sqrt[5]{X\left(Y+\sqrt{Y^2-4X^3}\right)} \quad Y = (X-1)^2+7$$

$$\alpha_{n+1} = S_n^2\alpha_n - 5^n\left(\frac{S_n^2-5}{2} + \sqrt{S_n(S_n^2-2S_n+5)}\right) \quad \beta_n = \frac{1}{\alpha_n} \xrightarrow{n\to\infty} \pi$$

8) convergence septique :

$$\alpha_0 = \frac{4}{3\sqrt{7}} \quad M = \left(2\cos\left(\frac{4\pi ij}{7}\right)\right)_{1\le i,\, j\le 3} \quad x_2 < x_1 < x_3 \quad \text{solutions de} \quad 27^4x^3 - 27^3 32x^2 + 27^2 325x - 13^4 = 0$$

$$y_1 = \left(x_1^3 x_3\right)^{\frac{1}{7}} \quad y_2 = \left(x_2^3 x_1\right)^{\frac{1}{7}} \quad y_3 = \left(x_3^3 x_2\right)^{\frac{1}{7}} \quad s_0 = \left(\frac{27}{13}\right)^{\frac{3}{7}} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad s_n = \frac{1}{7}\sqrt{m_{n-1}}\left[M s_{n-1}^{\times} + 1\right]$$

$$g_1 = s_{1,n}s_{2,n}s_{3,n} \quad g_2 = s_{1,n}^3 s_{2,n} + s_{2,n}^3 s_{3,n} + s_{3,n}^3 s_{1,n} \quad g_3 = 1 - \frac{10}{7}g_1 + \frac{1}{7}g_2 \quad g_4 = 3 - \frac{51}{7}g_1 + \frac{10}{7}g_2$$

$$m_n = \frac{49}{\left(1 + 2s_n^{\times}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)} \quad s_n^{\times} = \begin{pmatrix} \left(\dfrac{\mu^3\gamma}{g_3^3}\right)^{\frac{1}{7}} \\ \left(\dfrac{\beta^3\mu}{g_3^3}\right)^{\frac{1}{7}} \\ \left(\dfrac{\gamma^3\beta}{g_3^3}\right)^{\frac{1}{7}} \end{pmatrix} \quad \beta < \mu < \gamma \quad \text{solutions de} \quad x^3 - g_4x^2 + xg_3(2g_4 - 3g_3) - g_3^4 = 0$$

$$\alpha_n = m_{n-1}\alpha_{n-1} + \sqrt{7}\,\frac{7^{n-1}}{3}(1 - m_{n-1}) \xrightarrow{\infty} \frac{1}{\pi}$$

9) convergence nonique :

$$\alpha_0 = \frac{1}{3} \quad s_1^{\times} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \quad s_1 = \left(1 - \left(s_1^{\times}\right)^3\right)^{\frac{1}{3}} \quad s_{n+1} = \frac{(1 - s_n^{\times})^3}{(t + 2u)(t^2 + tu + u^2)}$$

$$\text{avec} \quad t = 1 + 2s_n^{\times} \quad u = \left[9s_n^{\times}(1 + s_n^{\times} + (s_n^{\times})^2)\right]^{\frac{1}{3}} \quad s_n^{\times} = \left(1 - (s_n)^3\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$m = 27\,\frac{(1 + s_n + s_n^2)}{t^2 + tu + u^2} \quad \alpha_n = m\alpha_{n-1} + 3.9^{n-2}(1 - m) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{\pi}$$

10) convergence "hexadécimalique" ! (ordre 16)

$$\alpha_0 = \frac{1}{3} \quad s_1 = \sqrt{2} - 1 \quad s_1^{\times} = \left(1 - (s_1)^4\right)^{\frac{1}{4}} \quad s_{n+1} = \frac{(1 - s_n^{\times})^4}{(t + u)^2(t^2 + u^2)} \quad \text{avec}$$

$$m_1 = \left(\frac{1 + s_n}{t}\right)^4 \quad m_2 = \frac{1}{t^4} \quad t = 1 + s_n^{\times} \quad u = \left[8s_n^{\times}(1 + (s_n^{\times})^2)\right]^{\frac{1}{4}} \quad s_n^{\times} = \left(1 - s_n^4\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$\alpha_n = 16m_1\alpha_{n-1} + \frac{4^{2n-1}}{3}(1 - 12m_2 - 4m_1) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{\pi}$$

11) 1989 : convergence linéaire :

$$\pi = \frac{1}{12}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (6n)!(212175710912\sqrt{61} + 1657145277365 + (13773980892672\sqrt{61} + 107578229802750)n)}{(3n)!(n!)^3 (5280(236674 + 30303\sqrt{61}))^{3n+\frac{3}{2}}}\right)^{-1}$$

12) et pour le fun !

$$\pi = \frac{1}{\sqrt{-C^3}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(6n)!(A+nB)}{(3n)!(n!)^3\,C^{3n}}\right)^{-1}$$ avec :

$\boldsymbol{A}=6336502831297199958542622 0+2833770214080084204682560 0*5^{1/2} +$
$384*5^{1/2}(10891728551171178200467436212395209160385656017 +$
$4870929086578810225077338534541688721351255040*5^{1/2})^{1/2}$
$\boldsymbol{B}=7849910453496627210289749000+3510586678260932028965606400 +$
$2515968*3110^{1/2}(6260208323789001636993322654444020882161 +$
$2799650273060444296577206890718825190235*5^{1/2})^{1/2}$
$\boldsymbol{C}=-214772995063512240-96049403338648032*5^{1/2}-1296*5^{1/2}(10985234579463550323713318473$
$+ 4912746253692362754607395912*5^{1/2})^{1/2}$

Tranches de vie

Jonathan et Peter Borwein sont des mathématiciens canadiens faisant partie du CECM rattaché à l'université Simon Fraser de Vancouver.
Jonathan en est le directeur et Peter son frère en est le directeur associé. Pour plus de renseignements, cliquez sur leurs noms et vous irez sur leur page personnelle.

Autour de π

Depuis plus de *15* ans, ces deux-là ont révolutionné la recherche sur *Pi* ! Après l'algorithme à convergence quadratique trouvé par Brent/Salamin en *1976*, ils ont alors pratiquement monopolisé les découvertes de séries. Quadratique, cubique, quartique, nonique... la vitesse de convergence ne s'est plus arrêtée depuis !
En fait, ils ont prouvé il y a quelques années qu'un algorithme à vitesse n-ique convergeant vers *Pi* existe pour tout *n* entier... Mais la complexité des calculs s'accroit très vite et il semble bien que l'algorithme à convergence quartique représente le meilleur rapport complexité/rapidité... Il a d'ailleurs été utilisé dans la plupart des records depuis sa découverte et notamment par Kanada pour calculer les 206 milliards de décimales récemment.
Vous l'aurez compris, les Borwein représentent aujourd'hui avec le petit groupe composé des Chudnovsky, Simon Plouffe, Garvan, Gosper et Bailey, le summum de la recherche active sur *Pi*.
En ce qui concerne la preuve de ces formules, je me dois malheureusement de passer outre le grand principe de ce site... Car ces démos sont déja transcrites sur le web à l'adresse suivante : www.cecm.sfu.ca/organics/papers/garvan/paper/html/paper.html. Pour les gens allergiques à l'anglais (comme moi !), la lecture d'une démo dans cette langue est toujours un peu pénible et puis elle fait ici cruellement défaut à mon sens. Mais il faut reconnaître aussi qu'il serait inutile de recopier bêtement *4* ou *5* résumés de démonstration sans pouvoir compléter les intermédiaires de calcul (même si le principe est assez simple à comprendre), n'étant pas du niveau d'un mathématicien...
Je retranscris donc seulement le résumé de la preuve pour le 3) (*2e* formule), qui est parfaitement représentatif du principe des démonstrations utilisant les équations modulaires... (voir la page conscrée à Ramanujan pour l'explication de cette théorie et du principe de la

démonstration)

Démonstration :

Les techniques de cette démo font principalement appel aux thêta fonctions, à la fonction êta de Dedekind et à leurs propriétés.

1.1 Introduction :

Posons ainsi les thêta fonctions :

$$\theta_2(q) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \quad \theta_3(q) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{n^2} \quad \theta_4(q) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{n^2}, \quad q = \exp\left(-\pi\sqrt{r}\right), \ r>0$$

On introduit ensuite la fonction α des Borwein : $\forall r \in R^{+*}$,

$$\alpha(r) = \frac{\left(\frac{1}{\pi} - 4\sqrt{r}q\,\frac{\dot{\theta}_4(q)}{\theta_4(q)}\right)}{\theta_3^4(q)} \qquad \left(\dot{\theta}_4(q) = \frac{d\theta_4(q)}{dq}\right)$$

Lorsque $r \to +\infty$, $q \to 0$ et $\lim_{q\to 0} \theta_3^4(q) = 1$ donc $\lim_{r\to\infty} \alpha(r) = \frac{1}{\pi}$.

Nous allons construire une infinité de suites α_p et trouver une relation entre $\alpha_p(N^2 r)$ et $\alpha_p(r)$ (comme le disent les Borwein, c'est une relation "agréable" si $N=p$!)

2.1 Construction des suites α_p

Pour cela, on pose $q=exp(2i\pi\tau)$ et on considère η la fonction êta de Dedekind :

$$\eta(\tau) = e^{\frac{i\pi\tau}{12}} \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - e^{2in\pi\tau}\right) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - q^n\right)$$

on rappelle pour la suite la relation trouvée par Euler :

$$\prod_{j=1}^{\infty}\left(1 - q^{kj}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{\frac{3kn(n-1)}{2}}$$

2.2 Cette fonction êta admet entre autre comme propriété :

$$\eta\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \sqrt{\frac{\tau}{i}}\,\eta(\tau)$$

2.3 Posons par ailleurs :

$$B_p(r) = \frac{\eta^p(\tau)}{\eta(p\tau)} \quad C_p(r) = \frac{\eta^p(p\tau)}{\eta(\tau)} \quad \text{où} \quad \tau = \frac{i\sqrt{r}}{rp} \quad \text{et donc} \quad q = e^{-2\pi\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{p}}}$$

2.4 et posons enfin (ouf !) la fonction α_p définie par :

$$\alpha_p(r)=\frac{\left(\frac{1}{\pi}-\frac{q^{8\sqrt{r}}\,\dot{B}(q)}{(p-1)\sqrt{p}B(q)}\right)}{A_p(r)}\quad \text{avec}\quad A_p(r)=q\left(\frac{24}{p^2-1}\right)\left[\frac{\dot{C}(q)}{C(q)}-\frac{\dot{B}(q)}{B(q)}\right]$$

(facile à retenir, voyons...)

2.5 On a :

$A_p(r)=1+O(q)$

2.6 et d'après 2.2, $A_p\left(\frac{1}{r}\right)=rA_p(r)$

On a alors $\alpha_p\left(\frac{1}{r}\right)=\left(\frac{1}{r}\right)\left(\frac{p+1}{3\sqrt{p}}\sqrt{r}-\alpha_p(r)\right)$

(toutes ces précédentes relations sont très difficiles à trouver mais heureusement vraies (!) et le principe est intéressant...)

2.7 Donc pour $r=1$ on a $\alpha_p(1)=\frac{p+1}{6\sqrt{p}}$ (ne dépend pas de π !!)

2.8 On a de plus, de même que pour α : $\lim_{r\to\infty}\alpha_p(r)=\frac{1}{\pi}$

3.1 Relation entre $\alpha_p(N^2r)$ et $\alpha_p(r)$

Soient $N,p\geq 1$, on obtient :

$$\alpha_p\left(N^2r\right)=\alpha_p(r).\,m_{N,p}(r)+\sqrt{r}E_{N,p}(r)$$

$$\text{avec}\quad E_{N,p}(r)=\frac{p+1}{3\sqrt{p}}\left(\frac{q\,\frac{\dot{B}(q)}{B(q)}-Nq^N\,\frac{\dot{B}(q^N)}{B(q^N)}}{q^N\,\frac{\dot{C}(q)}{C(q)}-q^N\,\frac{\dot{B}(q^N)}{B(q^N)}}\right)\quad \text{et}\quad m_{N,p}(r)=\frac{A_p(r)}{A_p(N^2r)}$$

Relation exceptionnelle sur laquelle sont basés tous ces algorithmes !!

3.2 D'après 2.4, on a :

$$A_p=\frac{1}{p-1}\left[pP\left(q^p\right)-P(q)\right]\quad \text{avec}\quad P(q)=1-24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nq^n}{1-q^n}=24q\,\frac{\dot{\eta}(q)}{\eta(q)}$$

(La série utilisée s'appelle la série d'Eisenstein $E_2(q)$)

3.3 D'après 3.1, on a encore :

$$E_{p,p}(r)=\frac{\sqrt{p}}{3}\left(1-m_{p,p}(r)\right)$$

3.4 et donc pour $N=p$ on a d'après 3.1 :

$$\alpha_p\left(p^2r\right) = \alpha_p(r).m_{p,p}(r) + \frac{\sqrt{rp}}{3}\left(1 - m_{p,p}(r)\right)$$

or d'après 3.1 et 2.6 on a :

$$m_{p,p}(\frac{1}{p})=p$$

3.5 On trouve donc pour $r=\frac{1}{p}$ et d'après 2.6 :

$$\alpha_p(\frac{1}{p})=\frac{1}{3}$$

(Tiens, ne serait-ce pas un bon point de départ pour $\frac{1}{\pi}=0,318...$!!)

4.1 Construction de la suite

On pose

$$\alpha_n=\alpha_p(r_0\, p^{2n})$$

$r_0\, p^{2n} \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$
donc $\alpha_n \sim \frac{1}{\pi}$ car $\alpha_p(r_0\, p^{2n}) \to \frac{1}{\pi}$ d'après 2.8.
on pose également

$$m_n=m_{p,p}(r_0\, p^{2n})$$

Cette écriture n'étant pas ce que l'on peut appeler le plus pratique, on va donc chercher une relation entre α_n et α_{n-1} sachant que :
$\alpha_0=\alpha_p(r_0)$ pour $r_0=\frac{1}{p}$, donc $\alpha_0=\frac{1}{3}$.

La première partie de l'étude générale est terminée. Pour construire les algorithmes, la suite consiste à choisir un p particulier et puis d'introduire des formes modulaires $a(q)$, $b(q)$ et $c(q)$. L'existence d'une relation entre $a(q)$, $b(q)$, $c(q)$ et $a(q^p)$, $b(q^p)$, $c(q^p)$ nous fournit l'équation modulaire

$$a^p+b^p=c^p$$

(non, non, ce n'est pas le théorème de Fermat !!)
En définissant :
$s(q) = \frac{c(q)}{a(q)}$ et $s^*(q) = \frac{b(q)}{a(q)}$, on a $s^p+(s^*)^p=1$ et les relations entre s, s^* et α nous fournissent l'algorithme...

Application à l'ordre 2 (p=2) :

5.1 Définitions :

D'après 3.2, on a $A_2(q)=2P(q^2)-P(q)=\theta_3^4(q)+\theta_2^4(q)$ d'après 1.1 et 3.2

Posons par ailleurs :

5.2 $a(q)=\theta_3^4(q)+\theta_2^4(q)$
5.3 $b(q)=\theta_4^4(q)$
5.4 $c(q)=2\theta_2^2(q)\theta_3^2(q)$

L'équation modulaire associée est :

5.5 $a^2=b^2+c^2$

D'après 3.1 on a donc :

5.6 $m_{2,2}(r) = \dfrac{a(q)}{a(q^2)}$

Puis d'après 5.2 à 5.5, on trouve (pas facilement) :

5.7 $a(q^2) = \dfrac{a(q)+3b(q)}{4}$ et

5.8 $a(q)=a(q^2)+3c(q^2)$

En posant s et s^* comme définis plus haut, on en déduit :

5.9 $1+3s(q^2) = 1+3\dfrac{c(q^2)}{a(q^2)} = \dfrac{a(q)}{a(q^2)}$ et

5.10 $1+3s^\times(q) = 1+3\dfrac{b(q)}{a(q)} = 4\dfrac{a(q^2)}{a(q)}$, bien...

On a d'après 5.5 :
5.11 $s^2+(s^*)^2=1$

D'après 5.9 et 5.6, on a :
5.12 $m_{2,2}(r)=(1+3s(q^2))$ (pas trop dur, ça !)

et donc, d'après 5.10 et 5.9

$$4\frac{a(q^2)}{a(q)}\frac{a(q)}{a(q^2)} = 4 = (1+3s(q^2))(1+3s^\times(q))$$

D'autre part, d'après 3.4 et 5.12, on a

$$\alpha_2(4r) = \alpha_2(r).m_{2,2}(r) + \frac{\sqrt{2r}}{3}\left(1-m_{2,2}(r)\right)$$

5.13 $$= \alpha_2(r)(1+3S(4r)) + \frac{\sqrt{2r}}{3}S(4r) \quad \text{où} \quad S(r)=s(q),\ \ q=e^{-2\pi\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2}}}$$

Or, de 3.4 et 3.5, on sait que $\alpha_2(\frac{1}{2})=\frac{1}{3}$ et $m_{2,2}(\frac{1}{2})=p=2$

et d'après 5.12, $2=1+3S(2)$ donc $S(2)=\frac{1}{3}$.

5.14 On a alors $\alpha_n=\alpha(4^n\frac{1}{2})$

5.15 et $s_n=S(4^n\frac{1}{2})$

donc, finalement, on a $\alpha_0=\frac{1}{3}$, $s_1=S(2)=\frac{1}{3}$, et

$$(s_n)^2+(s_n^\times)^2=1 \quad\Rightarrow\quad s_{n-1}^\times=\sqrt{1-s_{n-1}^2}$$

$$(1+3s_n)(1+3s_{n-1}^\times)=4 \quad\Rightarrow\quad s_n=\frac{1-\sqrt{1-s_{n-1}^2}}{1+3\sqrt{1-s_{n-1}^2}}$$

et d'après 5.13,

$$\alpha_n=(1+3s_n)\alpha_{n-1}-2^{n-1}s_n$$

d'où on tire (enfin !) l'algorithme suivant :

$$y_0=\frac{1}{3} \qquad y_{n+1}=\frac{1-\sqrt{1-y_n^2}}{1+3\sqrt{1-y_n^2}} \qquad \alpha_0=\frac{1}{3} \qquad \alpha_{n+1}=(1+3y_{n+1})\alpha_n-2^n y_{n+1}$$

$$\beta_n=\frac{1}{\alpha_n}\xrightarrow{n\to\infty}\pi$$

Ce qui est le plus frustrant dans cette démo, c'est la simplicité du principe et l'horreur parallèle des calculs qui n'apparaît pas ici puisque les résultats les plus difficiles sont admis...

Concernant les séries, j'ai la formule générale de formation de ces séries et le principe, mais n'ayant pas tout compris, je vous laisse aller regarder sur le site des Borwein :

$$\pi=\sqrt{-j(t)}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(a(t)+n.\,b(t))\frac{(6n)!}{(3n)!(n!)^3(j(t))^n}\right)^{-1} \quad \text{avec}$$

$$b(t)=\sqrt{t(1728-j(t))} \qquad a(t)=\frac{b(t)}{6}\left(1-\frac{E_4(t)}{E_6(t)}\left(E_2(t)-\frac{6}{\pi\sqrt{t}}\right)\right)$$

$$j(t)=\frac{1728(E_4(t))^3}{(E_4(t))^3-(E_6(t))^2} \quad \text{et les séries de Eisenstein :}$$

$$E_2(t)=1-24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nq^n}{1-q^n} \qquad E_4(t)=1+240\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3q^n}{1-q^n}$$

$$E_2(t)=1-540\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5q^n}{1-q^n} \qquad \text{et} \quad q=-e^{-\pi\sqrt{t}}$$

La première série correspond au cas $t=427$ et la seconde au cas $t=1555$.

Essais

Alors là par contre, pas d'essais trouvés sur le net, donc, en voici. Evidemment, ils sont assez époustouflants !
La deuxième formule a été testée aussi au chapitre Salamin...
Pour les suivantes, accrochons-nous ! L'ordre indique la vitesse de convergence (*2*->quadratique, *4*->quartique...), et le chiffre entre parenthèses la formule à laquelle le test se réfère...

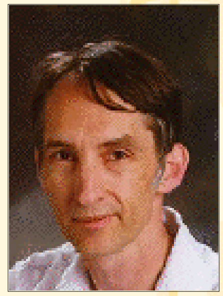
n=	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*12*
Ordre *2* (2)	*2*	*8*	*18*	*40*	*83*	*170*	*344*	*693*	*1392*	*2789*	
Ordre *2* (3.2)	*0*	*2*	*7*	*18*	*40*	*84*	*171*	*345*	*694*		
Ordre *4*	*7*	*40*	*170*	*694*							*29360128*
Ordre *5*	*5*	*31*	*166*	*848*							

Je n'ai pu tester les ordres supérieurs à *5*, mon calculateur actuel ne dépassant pas *100* décimales de précision (ce qui est lamentablement petit, vu la rapidité de la convergence !)

---

retour à la page d' accueil

page d'accueil



Eugène Salamin / Richard Brent

Suites inspirées par la formule de Brent/Salamin :

1) Formule originelle Brent/Salamin *1976* (*Mathématics of computation*)

$$a_0 = 1 \qquad b_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

$$U_m = \frac{4a_m^2}{1 - 2\sum_{n=1}^{m} 2^n (a_n^2 - b_n^2)} \xrightarrow{m \to \infty} \pi$$

2) Suite assez évidente que je n'ai bizarrement trouvée nulle part !

$$a_0 = 1 \qquad b_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad u_0 = 0 \qquad v_0 = 1$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \qquad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \qquad v_{n+1} = \frac{u_n b_n + a_n v_n}{2 b_{n+1}}$$

$$2\sqrt{2}\,\frac{a_n^3}{u_n} \overset{n \to \infty}{\sim} 2\sqrt{2}\,\frac{a_n^3}{v_n} \overset{n \to \infty}{\sim} 2\sqrt{2}\,\frac{b_n^3}{u_n} \overset{n \to \infty}{\sim} 2\sqrt{2}\,\frac{b_n^3}{v_n} \xrightarrow{n \to \infty} \pi$$

3) Variation des frères Borwein *1984*

$$a_0 = \sqrt{2} \qquad b_0 = 0 \qquad a_{n+1} = \frac{\sqrt{a_n}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{a_n}} \qquad b_{n+1} = \frac{\sqrt{a_n}\,(1 + b_n)}{a_n + b_n}$$

$$p_0 = 2 + \sqrt{2} \qquad p_{n+1} = p_n b_{n+1} \frac{1 + a_{n+1}}{1 + b_{n+1}} \xrightarrow{n \to \infty} \pi$$

4) Frères Borwein *1987* (*Pi and the AGM*)

$$y_0 = \sqrt{2} \qquad z_1 = \sqrt[4]{2} \qquad y_{n+1} = \frac{1 + y_n}{2\sqrt{y_n}} \qquad z_{n+1} = \frac{1 + y_n z_n}{(1 + z_n)\sqrt{y_n}}$$

$$f_0 = 2 + \sqrt{2} \qquad f_n = f_{n-1} \frac{1 + y_n}{1 + z_n} \xrightarrow{n \to \infty} \pi$$

Une autre suite d'après une observation de Salamin

Je n'ai pas encore testé ces algorithmes.

Convergence quadratique

$$f(k) = k.2^{-\frac{k}{4}}\left[\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-k\frac{n(n-1)}{2}}\right]^2 \qquad g_0 = \frac{f(n)}{f(2n)} \qquad g_k = \sqrt{\frac{1}{2}\left(g_{k-1} + \frac{1}{g_{k-1}}\right)}$$

$$\pi = 2\ln(2) f(n) \prod_{k=1}^{\infty} g_k$$

Convergence cubique

Cet algorithme converge vers le plus proche multiple de *Pi* de f_0.

$f_n = f_{n-1} + \sin(f_{n-1})$

Je n'ai malheureusement pas trouvé les démonstrations de ces algorithmes...

Tranches de vie

Et je n'ai pas trouvé grand-chose non plus sur Salamin ou très peu... comme cette photo le montrant en compagnie des plus grands chercheurs sur *Pi* (Bailey, Gosper, Kanada...)
Sur Brent, par contre, tout va bien ! Richard Brent est un mathématicien australien né en *1946*. Il est pour l'instant professeur à Oxford et est spécialiste des algorithmes. Pour plus de renseignements, vous pouvez allez visiter sa page personnelle.

Autour de π

La formule originelle a été découverte en *1973* et publiée en *1976* par Eugène Salamin dans l'article *Computation of Pi* dans la revue *Mathematics of computation* . Elle fut publiée au même moment et indépendamment par Richard Brent également (qui est d'ailleurs maintenant directeur de *Mathematics of computation* !). Il est vrai que la coutume est de l'appeler algorithme de Salamin, mais n'oublions pas ce cher Brent !
Cette formule est la première véritable découverte importante concernant le calcul de *Pi* depuis les formules d'arctan et celles de Ramanujan. La force de cet algorithme est de proposer une convergence quadratique (2^n comme je le note habituellement sur ce site) c'est à dire que le nombre de décimales exactes double à chaque itération ! Une fusée !
Bien sûr, la démonstration est à la hauteur de la performance, d'une longueur très pénible...
Mais j'ai passé un tel temps vainement sur Internet à la recherche de cette démonstration lorsque j'en avais besoin pour mon dossier sur *Pi* (voir page perso) que je ne peux résister à la publier ici...
Elle repose sur la moyenne arithmético-géométrique qui fut étudiée par Legendre et Gauss,

mais ce dernier, pour une fois (!), ne vit pas l'intérêt qu'elle pouvait avoir pour le calcul de *Pi* !

Démonstration

C'est parti pour les algorithmes 1), 2) et 4) ! Je vais tenter de bien structurer l'affichage des résultats car le web n'est pas ce qu'il y a de plus pratique pour des démonstrations mathématiques!

Moyenne arithmético-géométrique

Soient *a* et *b* deux réels positifs ou nuls. On définit les suites (a_n) et (b_n) par :

$$a_0 = a \qquad b_0 = b$$
$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

I Convergence

Lemme 1 : (a_n) et (b_n) sont convergentes et de même limite. De plus, (a_n) est décroissante et (b_n) est croissante. Cette limite est notée $M(a,b)$ et appelée Moyenne arithmético-géométrique de *a* et *b*.

Démonstration

I.a) Montrons que pour $n>0$ et $a\#b$,

$$\left|\begin{array}{l} 0 \le b_n \le b_{n+1} < a_{n+1} < a_n \ (1) \\ a_{n+1} - b_{n+1} \le \frac{1}{2}\left(a_n - b_n\right) \ (2) \end{array}\right.$$

- En effet, si $a=b$, on a immédiatement pour tout *n* entier $a_n=a=b_n$

- Si $a=0$ ou $b=0$, on a (tout aussi immédiatement !) pour tout entier n $b_n=0$ et $a_{n+1}=a_n/2$ ce qui assure bien (1) et (2)

- Si $a>0$ et $b>0$, $a\#b$

  I.a).(1) Une petite récurrence pour (1) pour bien commencer !
  $n=1$: $a\#b$ donc $\left(\sqrt{\frac{a}{2}} - \sqrt{\frac{b}{2}}\right)^2 > 0$ donc $\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$ en développant, donc $b_1<a_1$, et en refaisant de même, $b_2<a_2$.
  De plus, $a_2=a_1/2+b_1/2<a_1/2+a_1/2=a_1$ donc $a_2<a_1$ et $b_2>(b_1^2)^{1/2}=b_1$ donc,

finalement, on a le résultat (1) au rang *1*

Supposons maintenant le résultat (1) valable pour k dans $[[1,n]]$...
Puisque $b_n<a_n$, on a de même $(a_nb_n)^{1/2}<(a_n+b_n)/2$ donc $b_{n+1}<a_{n+1}$ et
$a_{n+1}<2a_n/2=a_n$ et enfin $b_{n+1}>(b_n^2)^{1/2}=b_n$
Donc $0<b_n<b_{n+1}<a_{n+1}<a_n$
C'est sacrément l'hypothèse au rang suivant, donc par le théorème de récurrence, le résultat (1) est bien valable pour tout entier n non nul...

I.a).(2) Pour tout n>0, on a :

$$2\left(a_{n+1}-b_{n+1}\right)=a_n+b_n-2\sqrt{a_nb_n}=\left(\sqrt{a_n}-\sqrt{b_n}\right)^2=\left(a_n-b_n\right)\left(\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{b_n}}{\sqrt{a_n}+\sqrt{b_n}}\right)<\left(a_n-b_n\right)$$

C'est bien le résultat (2) !

I.b) Montrons maintenant que ces suites sont convergentes :

- Si $a=b$ on a pour tout n $a_n=b_n$ et donc (difficile !) $\lim_{n\to\infty} a_n=a=\lim_{n\to\infty} b_n$
- Si $b=0$, $a\#0$ on a pour tout $n>0$: $b_n=0$ et $a_n=a_{n-1}/2=a_0/2^n$ donc $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n=0$
- Si $a=0$, $a_n=0$ et donc $b_n=0$ pour tout n, ce qui règle l'affaire de la limite !
- Si $a>0$, $b>0$, $a\#b$
_ D'après I a) (1) (b_n) est croissante, et (a_n) est décroissante
_ De plus, d'après I a) (2) et par récurrence immédiate, $a_n-b_n<(a_1-b_1)/2^{n-1}$ donc $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$, tiens !
Ne serait-ce pas des suites adjacentes ? Mais oui ! Elles convergent alors vers une même limite que nous noterons donc $M(a,b)$

II Propriétés de la moyenne AGM (arithmético-géométrique)

II.a) $M(a_n,b_n)=M(a,b)$
II.b) $M(a,b)=M(b,a)$
II.c) $M(ßa,ßb)=ßM(a,b)$ pour n entier, $ß>0$, $a>0$, $b>0$

Démonstration

II.a) Soit $n_0>0$
$(a_{no+k})_k$ et $(b_{no+k})_k$ ont même limite que $(a_k)_k$ et $(b_k)_k$ donc, $M(a_{no},b_{no})=M(a,b)$

II.b) Soient (a'_n) et (b'_n) les suites définies comme (a_n) et (b_n), mais avec $a'_0=b$ et $b'_0=a$
On a $a'_1=a_1$ et $b'_1=b_1$ donc d'après I. a) avec $n=1$, on a $M(a,b)=M(b,a)$

II.c) De même, si on définit (a''_n) et (b''_n) par $a''_0=ßa_0$ et $b''_0=ßb_0$, on a immédiatement pour tout n : $a''_n=ßa_n$ et $b''_n=ßb_n$.
Donc, en passant à la limite, $M(ßa,ßb)=ßM(a,b)$

III Fonction $f(x)=M(1,x)$

Nous voici au coeur de la démonstration : Pour $a=1$ et $b=x$, les résultats précédents (convergence...) nous permettent de construire une fonction f définie par :
pour x réel positif ou nul,

$$f(x)=M(1,x)$$

Les résultats intéressants sur cette fonction sont :

III.a) Lemme 2

f est continue sur $[0,+\infty[$

Démonstration

Dans le cas $a_0=a=1$ et $b_0=b=x$, nous allons montrer la convergence uniforme des suites (a_n) et (b_n) sur tout compact de R^+ vers la fonction f. Pour bien différencier ce cas de l'étude précédente, je noterai respectivement (U_n) et (V_n) ces suites de fonctions...

III.a).1) Montrons que pour tout n entier, U_n et V_n sont continues sur R^+

Par récurrence, par exemple !
$n=0$: $U_0(x)=1$, $V_0(x)=x$, no comment !
Supposons le résultat jusqu'à un certain n entier,

$U_{n+1}=(U_n+V_n)/2$ et $V_{n+1}=(U_nV_n)^{1/2}$ donc U_{n+1} et V_{n+1} sont clairement continues comme composées de fonctions continues...
Le théorème de récurrence se vérifie donc, U_n et V_n sont continues pour tout n sur R^+.

III.a).2) Montrons la convergence uniforme de U_n et V_n vers f sur tout compact de R^+ :

- D'après I.a).1). on a $\forall n\geq 0,\ b_n\leq M(a,b)\leq a_n$ donc :
  $\forall x\in R^+,\ V_n(x)\leq f(x)\leq U_n(x)$ donc :

  $0\leq U_n(x)-f(x)\leq U_n(x)-V_n(x)<(U_{n-1}(x)-V_{n-1}(x))/2<|1-x|.2^{-n}$ pour tout $x\in R^+$

- Plaçons nous sur un compact $[A,B]$ de R^+
  $\forall n\in N^*,\ 0\leq U_n(x)-f(x)\leq (B+1)2^{-n}$

  De même, $0\leq f(x)-V_n(x)\leq U_n(x)-V_n(x)<|1-x|2^{-n}\leq (B+1).2^{-n}$

  Cette majoration est uniforme, il y a donc convergence uniforme de (U_n) et (V_n) vers la fonction f sur tout compact de R^+

Donc f est continue sur $[0,+\infty[$, déja un premier résultat très important !

III.b) Lemme 3

f est croissante sur $[0,+\infty[$

Démonstration

III.b).1) Montrons par récurrence (encore !) sur $n\in N$ que (Un) et (Vn) sont croissantes sur $[0,+\infty[$
$U_0=1$ et $V_0=x$ donc on a le résultat pour $n=0$
Supposons que le résultat soit valable pour un certain $n\in N$
U_n et V_n étant croissantes, U_n+V_n et $(U_nV_n)^{1/2}$ aussi donc U_{n+1} et V_{n+1} le sont également et c'est l'hypothèse au rang suivant !
Le résultat est bien valable pour tout $n\in N$.

III.b).2). Soient $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ avec $x_1 < x_2$
Puisqu'il y a convergence uniforme de (U_n) vers f, on a $f(x_2)-f(x_1)=\lim_{n\to\infty}(U_n(x_2)-U_n(x_1))$
or $\forall n \in N^*$, $U_n(x_2)-U_n(x_1) \geq 0$ (croissance de U_n), donc $f(x_2)-f(x_1) \geq 0$, ce qui nous assure la croissance de f sur $[0,+\infty[$, et voilà, fin de la démonstration du lemme 3 !

III.c) Lemme 4 (Etude aux bornes...)

f admet une tangente verticale en $x=0$ En 0, $\lim f = 0$ En $+\infty$, $\lim f = +\infty$, $f(x)=o(x)$

Démonstration

III.c).1) on a $x^{1/2}=V_1(x) \leq f(x)\ \forall x \in R^{+*}$, donc $x^{-1/2} \leq f(x)/x$ et finalement :

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=+\infty$$

donc f admet une tangente verticale en $x=0$.
Si $x=0$, pour $n \geq 1$ $U_n(x)=U_{n-1}(x)/2=2^{-n}$, et $V_n(x)=0$ donc $f(0)=0$

III.c).2) D'après II.b) et II.c),
$\forall x \in R^{+*}$, $f(x)=M(1,x)=xM(1/x,1)=xM(1,1/x)=xf(1/x)$

Quand $x \to +\infty$ $\lim f(1/x)=f(0)=0$ car f est continue en 0
donc $f(x)/x \to 0$ et en $+\infty$, $f(x)=o(x)$

De plus $\forall x \in R^{+*}$, $f(x) \geq x^{1/2}$, donc en $+\infty$, $\lim f=+\infty$

III.d) Théorème 5

f est de classe C^{∞} sur $]0,+\infty[$

Ce résultat très fort (presque trop puisque nous n'aurons besoin que du caractère C^1 !) n'est pas simple à démontrer. Il va même nous entraîner dans la théorie des intégrales elliptiques !
Ainsi, nous allons successivement :
III.d).1) Exprimer $M(a,b)$ par une intégrale elliptique $I(a,b)$
III.d).2) Appliquer ce résultat à la fonction f
III.d).3) Utiliser le caractère C^{∞} de $I(1,x)$ pour en déduire celui de f !

Démonstration

III.d).1) On s'intéresse tout d'abord à l'intégrale suivante,
Soient $a,b>0$, on pose :

$$I(a,b)=\int_0^{\infty}\frac{dt}{\sqrt{\left(t^2+a^2\right)\left(t^2+b^2\right)}}$$

III.d).1).i) Convergence

Soit $m(t)=\dfrac{1}{\sqrt{\left(t^2+a^2\right)\left(t^2+b^2\right)}}\underset{t\to\infty}{\sim}\dfrac{1}{t^2}$ et $m(0)=1/(ab)$, or m étant bien sûr continue sur R^+, m est intégrable sur R^+ et donc $I(a,b)$ est bien définie...

III.d).1).ii) Changement de variable

Posons $\begin{cases}\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[\to R^+\\ y\to b\tan(y)\end{cases}$

c'est une bijection croissante donc effectuons un petit changement de variables... Posons $t=b.tan(y)$, on obtient :

$$I(a,b)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{b.dy}{\cos^2(y)\sqrt{\left(b^2\tan^2(y)+a^2\right)\left(b^2\tan^2(y)+b^2\right)}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dy}{\sqrt{a^2\cos^2(y)+b^2\sin^2(y)}}$$

III.d).1).iii) fonction g

On définit la fonction g par $g(x)=I(1,x)$

Montrons qu'elle est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$

Soit $h(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{\cos^2(y)+x^2\sin^2(y)}}$ avec $(x,y)\in]0,+\infty[*[0,\pi/2]$

Montrons par récurrence sur $n\in N$ (toujours !) que $\dfrac{\partial^n h}{\partial x^n}$ existe et est continue sur $]0,+\infty[*[0,\pi/2]$

Pour cela, montrons en même temps, toujours par récurrence, qu'avec les hypothèses sur les paramètres :

$$\frac{\partial^n h}{\partial x^n}(x,y)=\frac{P_n(x,y)}{\left(\sqrt{\cos^2(y)+x^2\sin^2(y)}\right)^{2n+1}} \text{ où } x \to P_n(x,y)\in R_n[x]$$

- $n=0$, c'est la définition même de h !
  h est clairement continue sur $]0,+\infty[*[0,\pi/2]$ et admet une dérivée partielle selon x

- n=1 : $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,y)=\dfrac{-x\sin^2(y)}{\left(\sqrt{\cos^2(y)+x^2\sin^2(y)}\right)^3}$
  C'est bien la forme annoncée pour $n=1$ et c'est parfaitement continu sur $]0,+\infty[*[0,\pi/2]$

- Supposons maintenant le résultat pour un certain $n\in N$
  $$\frac{\partial^{n+1} h}{\partial x^{n+1}}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{P_n(x,y)}{\left(\sqrt{\cos^2(y)+x^2\sin^2(y)}\right)^{2n+1}}\right)=\frac{P'_n(x,y)\left(\cos^2(y)+x^2\sin^2(y)\right)-P_n(x,y)\left(n+\frac{1}{2}\right)(2x\sin^2(y))}{\left(\cos^2(y)+x^2\sin^2(y)\right)^{n+\frac{3}{2}}}$$
  $$=\frac{P_{n+1}(x,y)}{\left(\cos^2(y)+x^2\sin^2(y)\right)^{\frac{2(n+1)+1}{2}}}$$
  ce qui est bien le résultat attendu avec P_{n+1} de la forme voulue... P_{n+1} est un polynôme en x et un polynôme trigonométrique en y et est donc à ce titre continu sur $]0,+\infty[*[0,\pi/2]$ et dérivable selon x. De même pour le dénominateur, donc l'hypothèse est vérifiée au rang $n+1$, ce qui achève la récurrence !

h est donc de classe C^∞ sur $]0,+\infty[*[0,\pi/2]$

Puisque l'on se place sur le segment $[0,\pi/2]$ pour y, la fonction g définie par :

$$g(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} h(x,y)dy$$

est elle même de classe C^∞ sur R^{+*} et l'on a :

$$g^{(n)}(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial^n h}{\partial x^n}(x,y)dy$$

$x \to I(1,x)$ est donc une fonction de classe C^∞ sur R^{+*}

Reste à exprimer $M(a,b)$ en fonction de $I(a,b)$

C'est là bien sûr le principal résultat de cette étude et il fut obtenu par Gauss (il n'a pas été plus loin !).

III.d).1).iv) Montrons tout d'abord que :

$$I\left(\frac{a+b}{2},\sqrt{ab}\right)=I\,(a,b)$$

Pour cela, posons $j(t)=\frac{(t^2-ab)}{2t}$ définie sur R^{+*} et qui est clairement une bijection de R^{+*} sur R ($j'(t)=\frac{(t^2+ab)}{2t^2}>0$) donc, dans $I(1,t)$ définie au 1), on pose $s=\frac{(t^2-ab)}{2t}$ et on obtient :

$$\frac{1}{\sqrt{(s^2+ab)\left(s^2+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right)}}=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{4}\left(t-\frac{ab}{t}\right)^2+ab\right)\left(\frac{1}{4}\left(t-\frac{ab}{t}\right)^2+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right)}}=$$

$$\frac{4t^2}{\sqrt{\left(t^4+\left(ab+b^2\right)t^2+ab^3\right)\left(t^4+\left(ab+a^2\right)t^2+a^3b\right)}}=\frac{4t^2}{\left(t^2+ab\right)\sqrt{\left(t^2+a\right)\left(t^2+b\right)}}$$

et d'autre part, $ds=\frac{(t^2+ab)}{2t^2}dt$, donc on obtient finalement :

$$I\left(\frac{a+b}{2},\sqrt{ab}\right)=\int_0^\infty\frac{1}{\sqrt{(s^2+ab)\left(s^2+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right)}}\,ds=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\left(t^2+a\right)\left(t^2+b\right)}}\,dt$$

$$=\int_0^\infty\frac{1}{\sqrt{\left(t^2+a\right)\left(t^2+b\right)}}\,dt=I\,(a,b)$$

L'avant dernière égalité étant obtenue grâce à la parité du terme sous l'intégrale

---

III.d).1).v) Alors, on avance bien, montrons maintenant que $M(a,b)=\frac{\pi}{2\,I\,(a,b)}$

On a clairement $I(ßa,ßb)=I(a,b)/ß$ donc :

$$I(a,b)=I(a_0,b_0)=I\left(\frac{a_0+b_0}{2},\sqrt{a_0 b_0}\right)=I(a_1,b_1)=\ldots=I(a_n,b_n)=\frac{1}{a_n}I\left(1,\frac{b_n}{a_n}\right)=\frac{1}{a_n}g\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

or $\lim_{n\to\infty} a_n=M(a,b)$ et on a $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n=1$.
De plus, g est continue sur R^{+*} d'après iii) donc :

$$\lim_{n\to\infty} g\left(\frac{b_n}{a_n}\right)=g(1)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dy}{\sqrt{\cos^2(y)+\sin^2(y)}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dy=\frac{\pi}{2}$$

ce qui nous permet de conclure :

$$M(a,b)=\frac{\pi}{2\,I(a,b)}$$

III.d).2) en appliquant ce résultat à la fonction f, on obtient

$$\forall x\in R_+^* \quad M(1,x)=\frac{\pi}{2\,I(1,x)} \Leftrightarrow f(x)=\frac{\pi}{2g(x)}$$

III.d).3) Et la démonstration du théorème 5 est finie, g étant C^∞ sur R^{+*}, f l'est également sur le même intervalle

Petite note : f est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0 d'après le lemme 4...

III.e) Comportement asymptotique de f

Nous allons chercher des équivalents de f aux bornes de R^+ au moyen d'équivalents de g

Lemme 6

$$f(x)\underset{x\to 0^+}{\sim}-\frac{\pi}{2\ln(x)} \qquad f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{\pi x}{2\ln(x)}$$

Démonstration

III.e).1) Une nouvelle expression de g !

Posons à tout hasard (!) $s=x/t$:

$$\int_0^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\sqrt{(t^2+1)(t^2+x^2)}} = \int_{+\infty}^{\sqrt{x}} -x\frac{ds}{s^2\sqrt{\left(\frac{x^2}{s^2}+1\right)\left(\frac{x^2}{s^2}+x^2\right)}} = \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{ds}{\sqrt{(s^2+x^2)(s^2+1)}} \quad \text{donc}$$

$$g(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\sqrt{(t^2+1)(t^2+x^2)}} + \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2+x^2)(t^2+1)}} = 2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\sqrt{(t^2+1)(t^2+x^2)}}$$

III.e).2) Trouvons maintenant un équivalent de g au voisinage de 0

$\forall t \in [0,x^{1/2}]$, on a $1 \leq 1+t^2 \leq 1+x$, donc

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}\int_0^{\sqrt{x}} \frac{2\,dt}{\sqrt{t^2+x^2}} \leq g(x) \leq \int_0^{\sqrt{x}} \frac{2\,dt}{\sqrt{t^2+x^2}} \quad \text{donc} \quad g(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \int_0^{\sqrt{x}} \frac{2\,dt}{\sqrt{t^2+x^2}} = 2\left[\ln\left(\sqrt{t^2+x^2}+t\right)\right]_0^{\sqrt{x}}$$

$$= 2\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\left(1+\sqrt{1+x}\right)\right) \underset{x\to 0^+}{\sim} 2\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}}(2+o(x))\right) \underset{x\to 0^+}{\sim} -2\ln\left(\sqrt{x}\right) \quad \text{donc} \quad \underline{\underline{g(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\ln(x)}}$$

donc d'après III.d).2) on a :

$$f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{\pi}{2\ln(x)} \qquad f(x) \underset{x\to +\infty}{\sim} \frac{\pi x}{2\ln(x)}$$

la deuxième équivalence étant obtenue trivialement grâce à III.c).2) (*f(x)=x.f(1/x)*)

IV Expression de *Pi* en fonction de *f* et *f'*

Nous allons montrer que $\pi = 2\sqrt{2}\,\dfrac{f^3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{f'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$

Pour cela, on restreint U_n et V_n à *]0,1[* et on introduit W_n et k_n, fonction définie sur *]0,1[* par :

$$W_n = \sqrt{U_n^2 - V_n^2} \text{ et } k_n = \frac{1}{2^n}\ln\left(\frac{U_n}{V_n}\right)$$

Ces fonctions sont évidemment bien définies et positives car d'après III a)2) $0<V_n(x)<U_n(x)$ sur $]0,1[$

IV.a) Convergence de $(k_n)_n$

IV.a).1) Propriété

$$2M(Un+1,Wn+1)=M(Un,Wn)$$

$$M(U_n, W_n) = \frac{1}{2^n} f\left(\sqrt{1-x^2}\right)$$

Démonstration

$$\forall n \in N \quad W_{n+1} = \sqrt{U_{n+1}^2 - V_{n+1}^2} = \frac{1}{2}\sqrt{U_n^2 + V_n^2 + 2U_nV_n - 4U_nV_n} = \frac{U_n - V_n}{2} \quad donc$$

$$M(U_{n+1}, W_{n+1}) = M\left(\frac{U_n+V_n}{2}, \frac{U_n-V_n}{2}\right) = \frac{1}{2}M(U_n+V_n, U_n-V_n)$$

Posons $a=U_n+V_n=a_0$, $b=U_n-V_n=b_0$ comme au I, on a

$$M(U_{n+1}, W_{n+1}) = \frac{1}{2}M(U_n+V_n, U_n-V_n) = \frac{1}{2}M(a,b) = \frac{1}{2}M\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = \frac{1}{2}M\left(U_n, \sqrt{U_n^2-V_n^2}\right) = \frac{1}{2}M(U_n, W_n)$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}}M(U_0, W_0) = \frac{1}{2^{n+1}}M\left(1, \sqrt{1-x^2}\right) = \frac{1}{2^{n+1}} f\left(\sqrt{1-x^2}\right)$$

IV.a).2) Convergence

$$\lim_{n\to\infty} 2^n f\left(\frac{W_n(x)}{U_n(x)}\right) = \frac{f\left(\sqrt{1-x^2}\right)}{f(x)}$$

Démonstration

$$\lim_{n\to\infty} 2^n f\left(\frac{W_n(x)}{U_n(x)}\right) = \lim_{n\to\infty} 2^n M\left(1, \frac{W_n(x)}{U_n(x)}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n M\left(U_n(x), W_n(x)\right)}{U_n(x)} = \frac{f\left(\sqrt{1-x^2}\right)}{f(x)}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} k_n(x) = \frac{\pi}{2}\,\frac{f(x)}{f\left(\sqrt{1-x^2}\right)}}$$

Démonstration

$$\lim_{n\to\infty} \frac{W_n(x)}{U_n(x)} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{1-\frac{V_n^2(x)}{U_n^2(x)}} = \sqrt{1-1} = 0$$

donc d'après l'étude asymptotique du III e), on obtient :

$f\left(\frac{W_n(x)}{U_n(x)}\right) \overset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{-\pi}{2\ln\left(\frac{W_n(x)}{U_n(x)}\right)} = \dfrac{\pi 2^{-(n+1)}}{k_n(x)}$ et $f\left(\frac{W_n(x)}{U_n(x)}\right) \overset{n\to\infty}{\sim} 2^{-n}\dfrac{f\left(\sqrt{1-x^2}\right)}{f(x)}$ d'après la propriété précédente, ce qui permet en rapprochant les deux égalités de conclure à :

$$\lim_{n\to\infty} k_n(x) = \frac{\pi}{2}\,\frac{f(x)}{f\left(\sqrt{1-x^2}\right)}$$

fort !

IV.b) Convergence de $(k'_n)_n$

Intéressons nous désormais à la suite de fonctions dérivée $(k'_n)_n$. En effet, f'apparaî t dans l'expression finale recherchée, il y a ainsi de grandes chances pour que l'on parle de suites dérivées à un moment... Cela se précise donc :

IV.b).1) Existence et positivité

$\forall n \in N$, U_n, V_n, W_n, k_n sont continûment dérivables De plus, $\forall x \in]0,1[$, $\forall n \in N^*$, $U'_n>0$, $V'_n>0$

De même que pour la continuité de U_n et V_n, on fait une récurrence sur n entier pour prouver cela. Abrégeons donc !
U_1 et V_1 vérifient évidemment la propriété et si l'on suppose la propriété vraie pour un certain n, un petit calcul d'après la définition de U_n et V_n donne
$U'_{n+1} = \frac{U'_n + V'_n}{2}$ et $V'_{n+1} = \frac{U'_n V_n + U_n V'_n}{2\sqrt{U_n V_n}}$ ce qui assure l'existence, la continuité et la positivité au rang $n+1$... Hop, c'est fini, inutile de s'attarder sur de telles récurrences !

W_n et k_n étant des composées de fonctions continûment dérivables, elles le sont aussi pour tout n...

IV.b).2) Expression de (k'_n)

$\forall x \in]0,1[, \forall n \in \mathbb{N}, \ k'_n(x) = \frac{V_n^2(x)}{x\left(1-x^2\right)}$

Démonstration :

$$2^{n+1} k'_{n+1} = \frac{U'_{n+1}}{U_{n+1}} - \frac{W'_{n+1}}{W_{n+1}} = \frac{U'_n + V'_n}{U_n + V_n} - \frac{U'_n - V'_n}{U_n - V_n}$$ d'après IV a)1) donc

$$\frac{2^{n+1} k'_{n+1}}{V_{n+1}^2} = \frac{2\left(V'_n U_n - U'_n V_n\right)}{V_{n+1}^2\left(U_n^2 - V_n^2\right)} = \frac{2\left(V'_n U_n - U'_n V_n\right)}{\left(U_n V_n\right) W_n^2} = \frac{2}{W_n V_n^2}\left(\frac{V'_n V_n}{W_n} - \frac{V_n^2 U'_n}{W_n U_n}\right)$$

or $V_n^2=U_n^2-W_n^2$ et en dérivant, $2V_nV_n'=2U_nU_n'-2W_nW_n'$ donc :

$$\frac{2^{n+1} k'_{n+1}}{V_{n+1}^2} = \frac{2}{W_n V_n^2}\left(\frac{U'_n U_n}{W_n} - \frac{W'_n W_n}{W_n} - \frac{U_n^2 U'_n}{W_n U_n} + \frac{W_n^2 U'_n}{W_n U_n}\right) = \frac{2}{W_n V_n^2}\left(\frac{W_n U'_n}{U_n} - W'_n\right) = \frac{2}{V_n^2}\left(\frac{U'_n}{U_n} - \frac{W'_n}{W_n}\right) = \frac{2^{n+1} k'_n}{V_n^2}$$

$$\textit{donc} \quad \frac{k'_n(x)}{V_n^2(x)} = \frac{k'_{n-1}(x)}{V_{n-1}^2(x)} = \frac{k'_0(x)}{V_0^2(x)} = \frac{2^{-0}\left(\frac{U'_0(x)}{U_0(x)} - \frac{W'_0(x)}{W_0(x)}\right)}{x^2} = \frac{2x}{2x^2\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{x\left(1-x^2\right)}$$

et on obtient finalement :

$$k_n'(x) = \frac{V_n^2(x)}{x(1-x^2)}$$

IV.b).3) Convergence

(k'_n) converge uniformément sur tout compact de $]0,1[$ vers : x-> $\frac{f^2(x)}{x(1-x^2)}$

Démonstration

Plaçons-nous sur $[a,b]$ compact de $]0,1[$, $0<a<b<1$
$\forall n \in N$, $\forall x \in [a,b]$, on a :

$$\left|k_n'(x) - \frac{f^2(x)}{x(1-x^2)}\right| = \left|\frac{V_n^2(x) - f^2(x)}{x(1-x^2)}\right| \leq \left|\frac{(V_n(x)-f(x))(V_n(x)+f(x))}{a(1-b^2)}\right| \leq \left|\frac{2^{-n}(b+1)(1+1)}{a(1-b^2)}\right| \leq \frac{4.2^{-n}}{a(1-b^2)}$$

en utilisant III.a).2)...

Cette majoration uniforme entraîne la convergence uniforme de $(k'_n)_n$ vers
$x \to \frac{f^2(x)}{x(1-x^2)}$ sur tout compact de $]0,1[$

IV.c) Expression de Pi

Nous y sommes enfin !

IV.c).1) Dérivée

$x \to \frac{f^2(x)}{x(1-x^2)}$ est la dérivée de $x \to$ $\frac{\pi}{2}\frac{f(x)}{f\left(\sqrt{1-x^2}\right)}$

Démonstration

- $\forall n \in N$, k_n est de classe C^1 sur $]0,1[$ d'après IV b)1)
- La suite de fonctions (k_n) converge simplement sur $]0,1[$ vers la fonction $x \to \frac{\pi}{2}\frac{f(x)}{f\left(\sqrt{1-x^2}\right)}$ d'après IV a)2)
- La suite de fonctions (k'_n) converge uniformément sur tout compact de $]0,1[$ vers $x \to \frac{f^2(x)}{x\left(1-x^2\right)}$

Donc en application du théorème de dérivation des suites de fonctions (Prépa !), $x \to \frac{f^2(x)}{x\left(1-x^2\right)}$ est la dérivée sur $]0,1[$ de $x \to \frac{\pi}{2}\frac{f(x)}{f\left(\sqrt{1-x^2}\right)}$

IV.c).2) Equation différentielle

f vérifie l'équation différentielle :

$\forall x \in]0,1[$,

$$\frac{\pi}{2}\left(f\left(\sqrt{1-x^2}\right) f'(x) + f(x) f'\left(\sqrt{1-x^2}\right)\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{f^2\left(\sqrt{1-x^2}\right) f^2(x)}{x\left(1-x^2\right)}$$

Démonstration

Facile ! Il suffit de dériver $x \to \frac{\pi}{2}\frac{f(x)}{f\left(\sqrt{1-x^2}\right)}$ et d'utiliser le résultat précédent a).

Je ne le fais pas, ce n'est que du calcul !

IV.c).3) Expression de Pi

La quête du Saint-Graal mathématique irait-elle vers son terme ? En tout ca, on touche ici au résultat le plus important de la démo !

$$\pi = 2\sqrt{2}\,\frac{f^3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{f'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

Démo

Là, encore, très facile, il suffit de faire $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ dans l'équation différentielle. Pareil, ce n'est que du calcul, je ne vais pas encore alourdir le chargement de cette page avec des expressions inutiles.

C'est tout de même un résultat formidable !
Et qui va être la base de la construction de plusieurs algorithmes très performants à convergence quadratique

---

V Applications

Passons aux choses sérieuses !
Plusieurs exploitations de cette formule sont possibles :

V.a) Utilisation directe des suites dérivées

La première à laquelle on pense tout de suite est d'utiliser les suites de fonctions dérivées (U'_n) et (V'_n) convergeant vers f' (la démonstration de cette convergence est donnée au V.b)).
On obtient en remplaçant f et f' par U_n et V_n de différentes façons l'algorithme suivant :

$$a_0 = 1 \qquad b_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad u_0 = 0 \qquad v_0 = 1$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \qquad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \qquad v_{n+1} = \frac{u_n b_n + a_n v_n}{2 b_{n+1}}$$

$$2\sqrt{2}\,\frac{a_n^3}{u_n} \overset{n\to\infty}{\sim} 2\sqrt{2}\,\frac{a_n^3}{v_n} \overset{n\to\infty}{\sim} 2\sqrt{2}\,\frac{b_n^3}{u_n} \overset{n\to\infty}{\sim} 2\sqrt{2}\,\frac{b_n^3}{v_n} \xrightarrow{n\to\infty} \pi$$

Même s'il paraît plus compliqué que les algorithmes de Borwein ou Brent/Salamin, je me suis étonné de ne le trouver absolument nulle part ! Mais dans mon souci d'exhaustivité, je ne pouvais manquer de le signaler.

V.b) Algorithme de J. and P. BORWEIN (1987)

Cet algorithme est paru dans *Pi and the AGM* (dont j'aimerais tant avoir un exemplaire même si je ne suis pas sûr de pouvoir tout comprendre !). Je vais en donner la démonstration détaillée et en évaluer la performance... Il est donné sous la forme :

$$y_0 = \sqrt{2} \qquad z_1 = \sqrt[4]{2} \qquad y_{n+1} = \frac{1+y_n}{2\sqrt{y_n}} \qquad z_{n+1} = \frac{1+y_n z_n}{(1+z_n)\sqrt{y_n}}$$

$$f_0 = 2+\sqrt{2} \qquad f_n = f_{n-1}\frac{1+y_n}{1+z_n} \xrightarrow{n\to\infty} \pi$$

Démonstration

On se placera durant toute la démo sur un compact K de $]0,1[$
Avec les notations des parties précédentes, posons pour $n \geq 1$:

$$y_n = \frac{U_n}{V_n} \qquad z_n = \frac{V_n'}{U_n'}$$

V.b).1) Convergence

Montrons que :

$y_n \geq 1,\ z_n \geq 1,\ n \in N^*$
(y_n) et (z_n) convergent uniformément vers 1 sur K
$y_{n+1} = \dfrac{1+y_n}{2\sqrt{y_n}} \qquad z_n = \dfrac{1+y_n z_n}{(1+z_n)\sqrt{y_n}}$

Démonstration

* D'après III.a).2). et la définition de y_n et z_n, $U_n \geq V_n$, donc $y_n \geq 1$
* $\forall n \in N,\ \forall x \in]0,1[$

$$y_{n+1}(x) - 1 = \frac{U_n(x) - V_n(x)}{V_n(x)} < \frac{1}{2^n}\frac{1-x}{x}$$

d'après III.a).2). et $V_n(x) > V_0(x) = x$.
Sur K, on a de plus $x \to 1/x-1$ est bornée (continue sur un compact) par un certain $M \in R^{+*}$, donc

$$\forall x \in K,\ y_n(x) - 1 < M.2^{-n}$$

De ce fait, (y_n) converge uniformément vers 1 sur K

* Montrons par récurrence sur $n \in N^*$ que $z_n \geq 1$

$n=1$: $z_1 = x^{-1/2} > 1$ sur $]0,1[$
Supposons le résultat pour un certain $n \in N^*$

$$y_{n+1} = \frac{U_{n+1}}{V_{n+1}} = \frac{U_n + V_n}{2\sqrt{U_n V_n}} = \frac{y_n + 1}{2\sqrt{y_n}}$$

$$z_{n+1} = \frac{V'_{n+1}}{U'_{n+1}} = \frac{U'_n V_n + U_n V'_n}{\sqrt{U_n V_n}\left(U'_n + V'_n\right)} = \frac{1 + \frac{U_n V'_n}{V_n U'_n}}{\left(1 + \frac{V'_n}{U'_n}\right)\sqrt{\frac{U_n}{V_n}}} = \frac{1 + y_n z_n}{\left(1 + z_n\right)\sqrt{y_n}}$$

ce qui montre en passant les relations de récurrence pour (y_n) et (z_n) !
donc

$$z_{n+1} - 1 = \frac{1 + y_n z_n - \left(1 + z_n\right)\sqrt{y_n}}{\left(1 + z_n\right)\sqrt{y_n}} = \frac{\left(\sqrt{y_n} - 1\right)\left(z_n\sqrt{y_n} - 1\right)}{\left(1 + z_n\right)\sqrt{y_n}} \geq 0$$

car $z_n \geq 1$ par hypothèse de récurrence et $y_n \geq 1$ d'après précédemment, en conséquence ceci achève la récurrence...

Pour $n \geq 1$, $z_{n+1} - y_{n+1}$ est du signe de :
$2(1+y_n z_n)-(1+z_n)(1+y_n)=1+y_n z_n - z_n - y_n = (z_n - 1)(y_n - 1) \geq 0$
donc

$$z_{n+1} \geq y_{n+1}$$

De même, $z_{n+1} - y_n^{1/2}$ est du signe de :
$1+y_n z_n - y_n(1+z_n) = 1 - y_n \leq 0$
or $y_n \geq 1$ donc $y_n^{1/2} \leq y_n$ et finalement :

$$y_{n+1} \leq z_{n+1} \leq y_n^{1/2} \leq y_n$$

donc $0 < y_{n+1} - 1 < z_{n+1} - 1 < y_n - 1$ et :

$$Sup_K(z_{n+1}(x)-1) \leq Sup_K(y_n(x)-1)$$

La convergence uniforme de (y_n) vers 1 sur K assure, par là même, la convergence uniforme de (z_n) vers 1 sur K...

V.b).2) Montrons maintenant que (U'_n) et (V'_n) convergent uniformément sur K. C'est certainement la démonstration la plus pénible à obtenir, mais elle marche et c'est bien le principal !!

Soit donc $x\in]0,1[$, $n\in N^*$,
$z_n\geq 1$, donc $U'_n\leq V'_n$ et comme $U'_{n+1}=(U'_n+V'_n)/2$ on a $U'_{n+1}\geq U'_n$
(U'_n) est donc croissante
$V'_{n+1}(x)-V'_n(x)=\dfrac{U_n'(x)V_n(x)+U_n(x)V_n'(x)}{2\sqrt{U_n(x)V_n(x)}}-V_n'(x)$ donc le signe de $V'_{n+1}(x)-V'_n(x)$ est celui de :
$U_n'(x)V_n(x)+U_n(x)V_n'(x)-2V_n'(x)\sqrt{U_n(x)V_n(x)}$.

En divisant par $U'_n(x)V'_n(x)>0$ on obtient :

$$1+z_n(x)y_n(x)-2z_n(x)\sqrt{y_n(x)}=z_n(x)\left(\sqrt{y_n(x)}-1\right)^2-z_n(x)+1$$

$$\text{donc}\quad V_{n+1}'(x)-V_n'(x)\leq 0\quad \text{si}\quad \left(\sqrt{y_n(x)}-1\right)^2\leq\frac{z_n(x)-1}{z_n(x)}$$

or, d'après a), $y_n^{1/2}-1\leq y_n-1\leq z_n-1$, et (z_n) converge uniformément vers 1 sur K donc à partir d'un certain rang n_0, pour $n\geq n_0$,
$\forall x\in K$, $0<z_n(x)-1<1/2$, d'où :

$$\left(\sqrt{y_n(x)}-1\right)^2\leq\left(z_n(x)-1\right)^2\leq\frac{z_n(x)-1}{2}\leq\frac{z_n(x)-1}{z_n(x)}\quad\text{car } z_n(x)\leq 2$$

ainsi pour $n\geq n_0$ et $x\in K$, $V'_{n+1}(x)\leq V'_n(x)$ et finalement :

$$U'_n(x)\leq U'_{n+1}(x)\leq V'_{n+1}(x)\leq V'_n(x)$$

Ceci étant, soit $ß>0$
(z_n) converge uniformément vers 1 sur K, donc il existe $n_1\in N$ tel que :

$$n\geq n_1 \Rightarrow 0\leq \sup_K(z_n(x)-1)<ß^*V_{no}(x)^{-1}$$

or $z_n(x)-1=\dfrac{V_n'(x)-U_n'(x)}{U_n'(x)}$ donc

$$0\leq V_n'(x)-U_n'(x)<\frac{ßU_n'(x)}{V_{n_0}(x)}<\frac{ßV_n'(x)}{V_{n_0}(x)}$$

avec $n\geq Max(n_0,n_1)$ et puisque (V'_n) est décroissante d'après ci-dessus (eh oui !), on a pour $n\geq Max(n_0,n_1)$ $V'_n(x)\leq V'_{no}(x)$, donc :

$$0\leq V'_n(x)-U'_n(x)<ßV'_{no}(x)V'_{no}(x)^{-1}=ß$$

$\forall x \in]0,1[$, $(U'_n(x))$ et $(V'_n(x))$ sont de ce fait des suites adjacentes et convergent vers une limite commune que l'on notera $\mu(x)$.
On a donc :

$$\forall x \in]0,1[,\ 0 \leq U'_n(x) \leq U'_{n+1}(x) \leq \mu(x) \leq V'_{n+1}(x) \leq V'_n(x)$$

Pour $n \geq Max(n_0,n_1)$ on a donc :

$$\forall x \in]0,1[,\ 0 \leq \mu(x) - U'_n(x) \leq V'_n(x) - \mu(x) \leq ß$$

Donc les suites (U'_n) et (V'_n) convergent uniformément sur K vers $\mu(x)$

V.b).3) Construisons maintenant la suite (f_n) (enfin !)

(U_n) converge uniformément (donc a fortiori simplement) sur K vers f et (U'_n) converge uniformément sur K donc sa limite est f' sur $]0,1[$

Posons $$f_n = 2\sqrt{2}\,\frac{V_{n+1}^{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)U_{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{U'_{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 2\sqrt{2}\,\frac{f^{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{f'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \pi$$

On a :

$$\frac{f_n}{f_{n-1}} = \frac{V_{n+1}^{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)U_{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)U'_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{U'_{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)V_n^{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)U_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{U_{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)U'_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{U'_{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)V_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{\left(U_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+V_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)U'_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\left(U'_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+V'_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)V_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{1+y_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{1+z_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

puis

$$f_0 = 2\sqrt{2}\,\frac{V_1^{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)U_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{U'_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = 2\sqrt{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)2 = 2+\sqrt{2}$$

$$y_0 = \frac{U_0\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{V_0\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2} \quad et \quad z_1 = \frac{V'_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{U'_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}}}\,\frac{1}{\frac{1}{2}} = \sqrt[4]{2}$$

ce qui achève la démonstration. Ah ! quel beau résultat !

Performance

Toute la longueur des démonstrations du *XXe* siècle trouve sa récompense au chapître des performances (encore heureux !)
Cet algorithme est en effet à convergence quadratique. C'est-à-dire que le nombre de décimales exactes double à chaque itération, mais cela ne se voit pas au premier abord !

Montrons donc que :

$$\boxed{0 \leq f_{n+1} - \pi \leq 4 f_0 (500)^{-2^n}}$$

Démonstration

Soit $n \in N$.

$$0 \leq y_{n+1} - 1 = \frac{1 + y_n - 2\sqrt{y_n}}{2\sqrt{y_n}} = \frac{\left(\sqrt{y_n} - 1\right)^2}{2\sqrt{y_n}} \leq \frac{\left(\sqrt{y_n} - 1\right)^2}{2} \frac{\left(\sqrt{y_n} + 1\right)^2}{\left(\sqrt{y_n} + 1\right)^2} \quad car \quad \sqrt{y_n} \geq 1$$

$$\leq \frac{\left(y_n - 1\right)^2}{8} \leq \frac{\left(y_{n-1} - 1\right)^4}{8.8^2} \leq \ldots \leq \frac{\left(y_1 - 1\right)^{2^n}}{8.8^{2^n}} \quad car \quad \sqrt{y_n} + 1 \geq 2$$

Pour $x=2^{-1/2}$, un petit calcul numérique donne :

$$\frac{y_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 1}{8} = \frac{\sqrt{2} + 1}{8\sqrt{2}} \sqrt[4]{2} - \frac{1}{8} < 0,02 = \frac{1}{500} \quad donc$$

$$0 \leq y_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{8} (500)^{-2^n}$$

D'autre part,

$$0 \leq f_n - f_{n+1} = f_n \frac{1 + z_{n+1} - 1 - y_{n+1}}{1 + z_{n+1}} \leq f_n \frac{y_n - y_{n+1}}{2} \leq \frac{f_0}{2} \left(y_n - y_{n+1}\right)$$

$$car \quad z_{n+1} \leq y_n \leq z_n \quad et \quad donc \quad aussi \quad f_n = f_{n-1} \frac{1 + y_n}{1 + z_n} \leq f_{n-1} \leq f_0$$

Or, on a $0 \leq f_{n+1} - f_{n+k} = \sum_{i=1}^{k-1} \left(f_{n+i} - f_{n+i+1}\right)$, les termes se compensant deux à deux. On fait alors tendre k vers $+\infty$, et on obtient :

$$0 \leq f_{n+1} - \pi = \sum_{i=1}^{+\infty} \left(f_{n+i} - f_{n+i+1}\right) \leq \frac{f_0}{2} \sum_{i=1}^{+\infty} \left(y_{n+i} - y_{n+i+1}\right) \leq \frac{f_0}{2} \left(y_{n+1} - 1\right) \leq 4 f_0 (500)^{-2^n}$$

V.c) Algorithme de Brent/Salamin (1976)

L'algorithme originel est celui-ci, on ne pouvait donc passer outre sa démonstration, que je n'ai d'ailleurs étonnament trouvée nulle part, mais il n'est pas trop dur de la refaire, grâce à tout le boulot réalisé précédemment !

Cet algorithme est donné sous la forme :

$$a_0 = 1 \qquad b_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

$$U_m = \frac{4a_m^2}{1 - 2\sum_{n=1}^{m} 2^n (a_n^2 - b_n^2)} \xrightarrow{m \to \infty} \pi$$

Démonstration

Elle est très rapide ! Reprenons exactement les mêmes notations que pour la démo précédente...

V.c).1) Rappelons nous : $k_n = \frac{1}{2^n} \ln\left(\frac{U_n}{V_n}\right)$

$k_n' = 2^{-n}\left(\frac{U_n'}{U_n} - \frac{W_n'}{W_n}\right)$ or $W_n = \sqrt{U_n^2 - V_n^2}$ donc

$$W_n' = \frac{2U_n' U_n - 2V_n' V_n}{2\sqrt{U_n^2 - V_n^2}} = \frac{U_n' U_n - V_n' V_n}{W_n} \quad \textit{donc}$$

$$k_n' = 2^{-n}\left(\frac{U_n'}{U_n} - \frac{U_n' U_n - V_n' V_n}{W_n^2}\right) = 2^{-n}\left(\frac{-U_n' V_n^2 - V_n' V_n U_n}{U_n W_n^2}\right) = -\frac{2^{-n} V_n}{U_n W_n^2}\left(U_n' V_n - V_n' U_n\right) = -\frac{2^{-n} V_n^3}{U_n W_n^2}\left(\frac{U_n}{V_n}\right)'$$

or d'après IV.b).2), sur *]0,1[* $k_n'(x) = \frac{V_n^2(x)}{x\left(1 - x^2\right)}$ en conséquence

$$\left(\frac{U_n}{V_n}\right)'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{-2\sqrt{2}\, 2^n U_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) W_n^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{V_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$ en $x = 2^{-1/2}$

V.c).2) Posons d'autre part

$$\forall n \in N, \quad T_n = \frac{V_n'}{V_n} \quad \textit{on a} \quad \lim_{n \to \infty} \frac{2\sqrt{2}\, U_n^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{T_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \pi$$

calculons (encore !) :

$$T_{n+1} - T_n = \frac{U_n' V_n + U_n V_n' - 2V_n' U_n}{2U_n V_n} = \frac{U_n V_n' - V_n' U_n}{2U_n V_n} = \left(\frac{U_n}{V_n}\right)' \frac{V_n^2}{2U_n V_n}$$ (tiens !)

$$T_{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - T_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{-2\sqrt{2}\, 2^n U_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) W_n^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) V_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{2V_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) U_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = -\sqrt{2}\, 2^n W_n^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Par récurrence immédiate, on a donc :

$$T_{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = T_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \sqrt{2}\sum_{m=1}^{n} 2^{m}\, W_m^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}\sum_{m=1}^{n} 2^{m}\, W_m^2$$ en simplifiant les notations.

Donc, on obtient finalement:

$$\forall n \in N, \quad f_n = \frac{2\sqrt{2}\,U_n^2}{T_n} = \frac{2\sqrt{2}\,U_n^2}{\frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}\sum_{m=1}^{n} 2^{m}\, W_m^2} = \frac{4\,U_n^2}{1 - 2\sum_{m=1}^{n} 2^{m}\left(U_m^2 - V_m^2\right)} \quad avec$$

$$U_0 = U_0\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 \quad V_0 = U_0\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad U_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2} \quad V_{n+1} = \sqrt{U_n V_n}$$

ce qui achève toute la partie démo et me donne droit à un repos bien mérité (Ouf ! cette page était bien longue...)

Essais

Les suites présentées ont des performances similaires. Par exemple, concernant la seconde (Borwein), pour obtenir *10 000 000* de décimales de *Pi*, il suffit d'avoir n≥19 !!!

Les essais sont assez extraordinaires :

n=	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
d=	*2*	*8*	*18*	*40*	*83*	*170*	*344*	*693*	*1392*	*2789*

d est le nombre de décimales exactes de *Pi*
La convergence quadratique est parfaitement respectée, c'est à dire que le nombre de décimales exactes double à chaque itération.

De plus, le temps de calcul de *n* décimales, qui nécessite pour les méthodes classiques un temps proportionnel à n^2, se trouve réduit à environ *n.Log(n)* avec les algorithmes de Brent/Salamin et Borwein... Une petite révolution !

---

retour à la page d'accueil

page d' accueil

Attention !

Génie !!!

Srinivasa Ramanujan
(1887 - 1920)

Quelques formules (mais il y en a tellement...)

$$\frac{1}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((2n)!)^3 (42n+5)}{2^{12n+4} (n!)^6} \qquad \pi = 4\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (4n)!(1123+21460n)}{2^{10n+1} (n!)^4 (441)^{2n+1}}\right)^{-1}$$

$$\pi = \frac{9801}{\sqrt{8}}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!(1103+26390n)}{(n!)^4 (396)^{4n}}\right)^{-1}$$

En notant $(x)_n$ la valeur : $\prod_{i=0}^{n-1}(x+i) = \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)} = x(x+1)\ldots(x+n-1)$ (c'est le symbole de Pochhammer), on a :

$$\pi = 4\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(6n+1)\left(\frac{1}{2}\right)_n^3}{4^n (n!)^3}\right)^{-1} \qquad \pi = 32\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(42\sqrt{5}n+5\sqrt{5}+30n-1)\left(\frac{1}{2}\right)_n^3}{64^n (n!)^3}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{8n}\right)^{-1}$$

$$\pi = \frac{27}{4}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(15n+2)\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{3}\right)_n\left(\frac{2}{3}\right)_n}{(n!)^3}\left(\frac{2}{27}\right)^n\right)^{-1} \qquad \pi = \frac{15\sqrt{3}}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(33n+4)\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{3}\right)_n\left(\frac{2}{3}\right)_n}{(n!)^3}\left(\frac{4}{125}\right)^n\right)^{-1}$$

$$\pi = \frac{5\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(11n+1)\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{6}\right)_n\left(\frac{5}{6}\right)_n}{(n!)^3}\left(\frac{4}{125}\right)^n\right)^{-1} \qquad \pi = \frac{85\sqrt{85}}{18\sqrt{3}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(133n+8)\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{6}\right)_n\left(\frac{5}{6}\right)_n}{(n!)^3}\left(\frac{4}{85}\right)^n\right)^{-1}$$

$$\pi = \frac{4}{\sqrt{3}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(28n+3)\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{4}\right)_n\left(\frac{3}{4}\right)_n}{(n!)^3 3^n 4^{n+1}}\right)^{-1} \qquad \pi = 4\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(20n+3)\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{4}\right)_n\left(\frac{3}{4}\right)_n}{(n!)^3 2^{2n+1}}\right)^{-1}$$

$$\pi = \frac{4}{\sqrt{5}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(644n+41)\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{4}\right)_n\left(\frac{3}{4}\right)_n}{(n!)^3 5^n 72^{2n+1}}\right)^{-1} \qquad \pi = 4\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(260n+23)\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{4}\right)_n\left(\frac{3}{4}\right)_n}{(n!)^3 18^{2n+1}}\right)^{-1}$$

$$\pi = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(10n+1)\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{4}\right)_n\left(\frac{3}{4}\right)_n}{(n!)^3 9^{2n+1}}\right)^{-1} \qquad \pi = 2\sqrt{3}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(8n+1)\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{4}\right)_n\left(\frac{3}{4}\right)_n}{(n!)^3 9^n}\right)^{-1}$$

$$\pi = \frac{1}{3\sqrt{3}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(40n+3)\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{4}\right)_n\left(\frac{3}{4}\right)_n}{(n!)^3 49^{2n+1}}\right)^{-1} \qquad \pi = \frac{2}{\sqrt{11}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(280n+19)\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{4}\right)_n\left(\frac{3}{4}\right)_n}{(n!)^3 99^{2n+1}}\right)^{-1}$$

ouf !

Tranches de vie

Avec Ramanujan, on touche à la quintessence de l'étude de *Pi*. C'est le maître d'oeuvre de toute la recherche du *XXe* siècle dans ce domaine, n'ayons pas peur de le dire !
Je m'étendrai donc longuement sur ce génie méconnu qui laissa pourtant une oeuvre magistrale encore incomprise de nos jours dans certains domaines. Sa vie est de plus un véritable roman...

Mais commençons par le début :

Srinivasa Ramanujan est né le *22 décembre 1887* dans la ville d'Erode au sud de l'Inde dans une famille pauvre. Son père est comptable. Sa précocité mathématique est vite reconnue et à sept ans, il obtient une bourse au lycée de Kumbakonam (!). On dit qu'il récitait des formules mathématiques à ses camarades d'école et qu'il savait notamment un grand nombre de décimales de *Pi* !
Dès le début de son étude de la trigonométrie, il découvrit les cosinus et sinus, trouva les relations qui les unissent et se montra fort déçu en apprenant qu'elles étaient déja connues!!!
A *12* ans, Ramanujan maîtrisait ainsi un ouvrage dense : *la Trigonométrie plane* de Loney. A *15*, il se procura *Synopsis of elementary results in pure and applied mathematics* de G.S.Carr, une liste de *6165* théorèmes énoncés souvent sans démonstration. On suppose que c'est de ce livre qu'il tira ses inspirations et sa fâcheuse habitude de ne pas livrer de démo avec ses résultats !
Il était d'ailleurs à cette époque tant omnubilé par ses recherches qu'il échoua à ses examens !
Heureusement, après son mariage en *1909*, il reçut une somme mensuelle d'un riche mécène passionné de mathématiques (R. Rao) sur les recommandations des mathématiciens indiens qui appréciaient les découvertes déja transcrites dans ce que l'on appelle communément ses carnets.
Ayant obtenu un emploi stable en *1912* comme fonctionnaire au comptoir de Madras, il fut encouragé par ses dirigeants à envoyer ses résultats à *3* éminents mathématiciens britanniques, parmi lesquels seul G. Hardy répondit à sa lettre du *16/01/1913*.
En effet, lorsque Hardy et son collègue Littlewood s'attaquèrent aux quelques *120* formules et théorèmes envoyés par Ramanujan, leur conviction fut faite quelques heures plus tard : ils avaient affaire à un génie ! (Hardy avait

construit une "échelle des capacités pures" sur laquelle il se situait lui même à *25*, attribuait *30* à Littlewood, et *80* à Hilbert, figure rayonnante des mathématiques allemandes du début du siècle. Ramanujan fut immédiatement estimé à *100* !!!).

Hardy décrivit d'ailleurs la découverte intellectuelle de Ramanujan et ses conséquences comme le seul événement "romantique" de sa vie...

Lorsqu'il se pencha sur les formules de Ramanujan, il en fut déconcerté et ne sut pas comment les démontrer. Pourtant, affirmait-il, "elles devaient être vraies car si elles ne l'étaient pas, personne au monde n'aurait eu assez d'imagination pour les inventer !"

Il fit venir Ramanujan en Angleterre et travailla avec lui très fructueusement les cinq années suivantes sur les propriétés de plusieurs fonctions arithmétiques. Srinivasa devint même le premier Indien membre de la Royal Society en *1918* et du Trinity College.

Malheureusement, et c'est bien regrettable, Ramanujan était strictement végétarien (à cause d'une promesse faite à sa mère !), et dans une Angleterre en pleine guerre, ses besoins étaient difficiles à satisfaire... Après la guerre, en *1919*, il revint en Inde gravement malade d'une tuberculose et d'une carence en vitamines (c'est humide le royaume Britannique !).

Son travail resta de grande qualité malgré ses souffrances, mais il s'éteignit finalement le *26 avril 1920* à *32* ans.

Une petite anecdote assez connue de Hardy :

"Je me souviens être allé le voir lorsqu'il était malade et alité à Putney. J'étais monté dans un taxi dont la plaque avait pour numéro *1729* et remarqua que ce nombre me semblait bien triste. J'espérai que cela n'annonça pas un mauvais présage...

"Non", répliqua Ramanujan, "c'est un nombre très intéressant, c'est le plus petit des entiers exprimables comme somme de deux cubes, de deux façons différentes" !!

Je lui demandai si il savait quel était le suivant. Il réfléchit et me dit qu'il n'en voyait pas d'autre proche... En fait, le suivant est plusieurs dizaines de milliers plus tard !!

Autour de π

Ramanujan était un passionné de *Pi*. Beaucoup de ses résultats tournent autour de notre constante préférée...
Ramanujan a consigné ses travaux dans des carnets comme je l'ai dit plus haut. Malheureusement, la plupart des formules sont écrites dans des notations non standard et sans démonstrations. Depuis *80* ans, plusieurs mathématiciens (Bruce Berndt actuellement) tentent de déchiffrer ces livres codés pour le plus grand bonheur de la Science !
Car Ramanujan travaillait sur les équations modulaires. Mais qu'est-donc au juste ?
Je vais reprendre l'exemple très clair du livre *Les mathématiciens* pour éclairer la définition.

Une équation modulaire est une équation que vérifie une fonction modulaire $\lambda(q)$ où la variable q intervient à des puissances diverses, par exemple $\lambda(q^n)$. n désigne alors l'ordre de l'équation modulaire.
Considérons par exemple l'équation modulaire du *7e* ordre (*n=7*) :

$$\sqrt[8]{\lambda(q)\lambda(q^7)} + \sqrt[8]{[1-\lambda(q)][1-\lambda(q^7)]} = 1$$

On cherche ensuite la solution de cette équation. Dans notre cas, on a :

$$\lambda(q) = 16q\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+q^{2n}}{1+q^{2n-1}}\right)^8$$

(ne me demandez pas comment elle a été trouvée...)
Jusque là, aucun rapport avec *Pi*...
Eh bien, on appelle valeurs singulières des valeurs de la fonction modulaire $\lambda(q)$ qui vérifient des propriétés supplémentaires. Par exemple, si l'on définit pour *p* entier :

$$K_p = \sqrt{\lambda\left(e^{-\pi\sqrt{p}}\right)}$$

On voit tout de suite que plus p est grand, plus l'exponentielle devient petite et le produit dans $\lambda(q)$ tend vers *16q*
Donc, si l'on prend $\frac{-2}{\sqrt{p}}\ln\left(\frac{K_p}{4}\right)$, on obtient un nombre qui coïncide sur les premières décimales avec *Pi* !
Bien sûr, le nombre de décimales augmente avec *p*. On voit alors tout l'avantage d'avoir une relation entre $\lambda(q)$ et $\lambda(q^p)$, ce dernier nombre étant

donc plus proche de *Pi* que le premier (car l'exponentielle est encore plus petite !)
La chose exceptionnelle dans cette théorie, c'est que ces valeurs singulières ne dépendent absolument pas de *Pi* malgré leur définition.
Ramanujan était un grand spécialiste de ces valeurs et les calculait de façon remarquable. Dans sa lettre à Hardy, il donnait d'ailleurs :

$$K_{210} = \left(\sqrt{2}-1\right)^2\left(2-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{6}\right)^2\left(8-3\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{10}-3\right)^2\left(\sqrt{15}-\sqrt{14}\right)\left(4-\sqrt{15}\right)^2\left(6-\sqrt{35}\right)$$

ce qui permet d'obtenir *20* décimales de *Pi*.
K_{240} permet lui d'obtenir le premier million de décimales de *Pi* !!
Mais il n'a pas entrepris de recherches sur les algorithmes que l'on pouvait en tirer. Les frères Borwein s'en sont chargés, voici donc comment ils ont procédé :

Principe de la démonstration des Borwein

Si l'on regarde la démonstration des Borwein pour l'algorithme du second ordre, on voit clairement que l'on considère l'équation modulaire du second degré :

$$a^2+b^2=c^2$$

avec $a(q)=\theta_3^4(q)+\theta_2^4(q)$, $b(q)=\theta_4^4(q)$, $c(q)=2\theta_2^2(q)\theta_3^2(q)$ et les Thêta Fonctions :

$$\theta_2(q)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \quad \theta_3(q)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{n^2} \quad \theta_4(q)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{n^2}, \quad q=\exp\left(-\pi\sqrt{r}\right)$$

Cette équation conduit à poser $s(q)=\dfrac{c(q)}{a(q)}$ et $s^{\times}(q)=\dfrac{b(q)}{a(q)}$ et à trouver la véritable équation modulaire du second degré utile ici :

$$4=\left(1+3s(q^2)\right)\left(1+3s^{\times}(q)\right) \quad \text{et} \quad 1=s^2+(s^{\times})^2$$

$$\text{donc} \quad s(q^2)=\frac{1-\sqrt{1-s(q)}}{1+3\sqrt{1-s(q)}}$$

dont la solution est bien connue d'après la définition de *s(q)* (on est en fait parti ici de la solution pour arriver à l'équation modulaire).
La valeur initiale s_1 correspond à une première valeur singulière, la suite s_n permet alors de calculer une suite de valeurs singulières.

La suite consiste maintenant comme plus haut à trouver le moyen de se ramener à ../borwein/borwein.html#demo, comme le logarithme le permet dans le premier exemple. Le rôle est joué ici par les $\alpha_p(p^2r)$, et puis on en tire un algorithme. La justification en est donnée par l'apparition de la fonction α dans l'équation de Legendre.
En somme, une bien belle théorie...

A propos des formules de Ramanujan :

Cette page un peu spéciale ne comprend pas de démonstrations. Je n'ai pas refaire les intermédiaires de calculs sur les pages canadiennes des Borwein. A part la formule générale de formation des séries de type Ramanujan trouvées par les Borwein et écrite sur ma page qui leur est consacrée, je préfère vous laisser regarder sur leur site....

D'autres résultats de Ramanujan :

Alors, quoi d'autre ?
Il y a tout d'abord les nombreuses approximations de *Pi* qu'il a trouvées de façon prodigieuse ! Elles sont relatées dans la page approximations de Pi.
Sinon, il n'existe malheureusement pas trop d'informations sur les résultats de Ramanujan. Néanmoins, voilà ce que j'ai pu trouver :

Nombres premiers (fonction *Tau* de Ramanujan) :

Soit τ tel que $g(x) = x\prod_{i=1}^{\infty}\left(1-x^i\right)^{24} = \sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)x^n$

alors $\tau(n.n') = \tau(n)\tau(n')$ pour $PGCD(n,n') = 1$ $(n \wedge n' = 1)$

Cette première propriété permet de calculer la fonction *Tau* pour tous les produits de nombres premiers sachant la valeur *Tau(p)*.
Et puisque que les entiers naturels sont décomposables comme produits de facteurs premiers, la fonction *Tau* sera entièrement évaluée sur *N* si on peut l'évaluer pour les puissances de nombres premiers, ce que réalise le théorème suivant par récurrence :

$$\tau\left(p^{n+1}\right) = \tau(p)\tau\left(p^n\right) - p^{11}\tau\left(p^{n-1}\right)$$

Cette fonction *Tau* possède de plus bon nombre de propriétés supplémentaires :

Il existe des relations de congruence pour 7, 23 et 691

par exemple : $\tau(23n + k) \equiv 0[23]$

De plus, Ramanujan conjecturait : $|\tau(p)| \le 2p^{\frac{11}{2}}$ pour p premier

Notons que la relation de congruence n'est vraie que si *k* est non-résidu quadratique modulo *23*, c'est à dire s'il n'existe pas d'entier *x* tel que $x^2=k[23]$. Comme il y a *(p-1)/2* résidus quadratiques pour *p>2*, on en déduit d'ailleurs qu'en moyenne, un entier naturel *N* sur deux est tel que *tau(N)* est divisible par *23*.

Pierre Deligne (belge et non français) a montré en *1971* que la conjecture plus haut était une conséquence des conjectures de Weil. Et comme il ne voulait visiblement pas en rester là, il les démontra en *1973*, ce qui lui valut en partie l'une des médailles Fields de *1978*.

Et on a aussi :

$\tau(n) \equiv \sigma_{11}(n)[691]$ où $\sigma_{11}(n)$ est la somme des puissances onzièmes des diviseurs de n.

Constante de Landau-Ramanujan :

$$a_k = \int_1^2 \frac{(\ln(x))^k}{x-1}\,dx \quad \text{on} \quad a \; : \; (1909)$$

$$a_1 = \frac{1}{2}\zeta(2) = \frac{\pi^2}{12} \quad \text{et} \quad a_2 = \frac{1}{4}\zeta(3)$$

La démonstration de a_1 est assez évidente en faisant le changement de variable *t=x-1*, puis en écrivant le dévelopement limité de *Ln(1-t)*, et en justifiant l'interversion entre somme et intégrale. Je n'ai pas cherché pour a_2, mais ça a l'air tout à fait faisable !

Répartition des nombres premiers :

$$\pi(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu(m)}{m} \int_c^x \frac{dt}{\log(t)}$$ où c est la racine de Li définie par

$$Li(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dt}{\log(t)} + \int_{1+\varepsilon}^{x} \frac{dt}{\log(t)} \quad (c \approx 1,41513692346)$$

et $\mu(m)$ est la fonction de Möbius définie par

$$\mu(m) = \begin{vmatrix} 1 \text{ si } k = 1 \\ (-1)^r \text{ si k est le produit de r nombres premiers distincts} \\ 0 \text{ sinon} \end{vmatrix}$$

Equations de théorie des nombres :

Ramanujan se posait le problème de trouver les solutions de l'équation :

$$2^N - 7 = X^2$$

Les ordinateurs ont permis de chercher jusqu'à $N=10^{40}$ mais seules ses solutions $(N=3,4,5,7,15)$ furent confirmées. On a en fait prouvé récemment que c'étaient les seules valides !

Un autre problème de Ramanujan ? Mais bien sûr :
Trouver par exemple toutes les solutions de $n!+1=x^2$

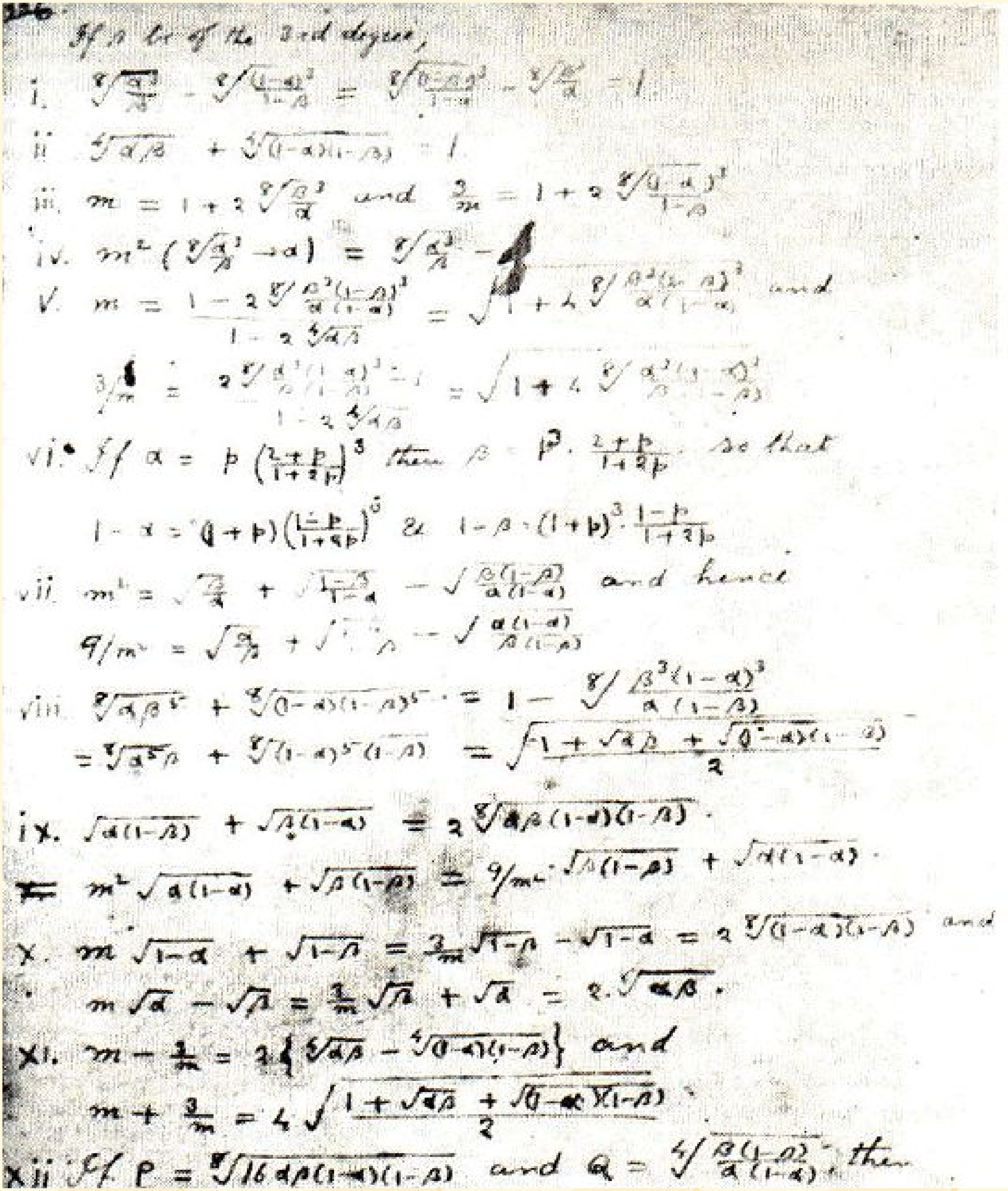
(je n'en ai malheureusement pas la liste...)

Merci à Christian Radoux pour ses précisions sur la fonction *Tau*

retour à la page d' accueil

[page d' accueil](#)

Carnets de Ramanujan



226

If β be of the 3rd degree,

i. $\sqrt[8]{\frac{\alpha^3}{\beta}} - \sqrt[8]{\frac{(1-\alpha)^3}{1-\beta}} = \sqrt[8]{\frac{(1-\beta)^3}{1-\alpha}} - \sqrt[8]{\frac{\beta^3}{\alpha}} = 1.$

ii. $\sqrt[4]{\alpha\beta} + \sqrt[4]{(1-\alpha)(1-\beta)} = 1.$

iii. $m = 1 + 2\sqrt[8]{\frac{\beta^3}{\alpha}}$ and $\frac{3}{m} = 1 + 2\sqrt[8]{\frac{(1-\alpha)^3}{1-\beta}}$

iv. $m^2\left(\sqrt[8]{\frac{\alpha^3}{\beta}} - \alpha\right) = \sqrt[8]{\frac{\alpha^3}{\beta}} -$ [illegible]

v. $m = \dfrac{1 - 2\sqrt[8]{\frac{\beta^3(1-\beta)^3}{\alpha(1-\alpha)}}}{1 - 2\sqrt[4]{\alpha\beta}} = \sqrt{1 + 4\sqrt[8]{\frac{\beta^3(1-\beta)^3}{\alpha(1-\alpha)}}}$ and

$\frac{3}{m} = \dfrac{2\sqrt[8]{\frac{\alpha^3(1-\alpha)^3}{\beta(1-\beta)}} - 1}{1 - 2\sqrt[4]{\alpha\beta}} = \sqrt{1 + 4\sqrt[8]{\frac{\alpha^3(1-\alpha)^3}{\beta(1-\beta)}}}$

vi. If $\alpha = p\left(\frac{2+p}{1+2p}\right)^3$ then $\beta = p^3 \cdot \frac{2+p}{1+2p}$, so that

$1 - \alpha = (1+p)\left(\frac{1-p}{1+2p}\right)^3$ & $1 - \beta = (1+p)^3 \cdot \frac{1-p}{1+2p}$

vii. $m^2 = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} + \sqrt{\frac{1-\beta}{1-\alpha}} - \sqrt{\frac{\beta(1-\beta)}{\alpha(1-\alpha)}}$ and hence

$9/m^2 = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \sqrt{\frac{1-\alpha}{1-\beta}} - \sqrt{\frac{\alpha(1-\alpha)}{\beta(1-\beta)}}$

viii. $\sqrt[8]{\alpha\beta^5} + \sqrt[8]{(1-\alpha)(1-\beta)^5} = 1 - \sqrt[8]{\frac{\beta^3(1-\alpha)^3}{\alpha(1-\beta)}} -$

$= \sqrt[8]{\alpha^5\beta} + \sqrt[8]{(1-\alpha)^5(1-\beta)} = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{\alpha\beta} + \sqrt{(1-\alpha)(1-\beta)}}{2}}$

ix. $\sqrt{\alpha(1-\beta)} + \sqrt{\beta(1-\alpha)} = 2\sqrt[8]{\alpha\beta(1-\alpha)(1-\beta)}.$

$= m^2\sqrt{\alpha(1-\alpha)} + \sqrt{\beta(1-\beta)} = 9/m^2 \cdot \sqrt{\beta(1-\beta)} + \sqrt{\alpha(1-\alpha)}.$

x. $m\sqrt{1-\alpha} + \sqrt{1-\beta} = \frac{3}{m}\sqrt{1-\beta} - \sqrt{1-\alpha} = 2\sqrt[8]{(1-\alpha)(1-\beta)}$ and

$m\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} = \frac{3}{m}\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha} = 2\sqrt[8]{\alpha\beta}.$

xi. $m - \frac{3}{m} = 2\left\{\sqrt[4]{\alpha\beta} - \sqrt[4]{(1-\alpha)(1-\beta)}\right\}$ and

$m + \frac{3}{m} = 4\sqrt{\frac{1 + \sqrt{\alpha\beta} + \sqrt{(1-\alpha)(1-\beta)}}{2}}.$

xii. If $P = \sqrt[8]{16\alpha\beta(1-\alpha)(1-\beta)}$ and $Q = \sqrt[4]{\frac{\beta(1-\beta)}{\alpha(1-\alpha)}}$, then

$$Q + \frac{1}{Q} + 2\sqrt{2}\left(P - \frac{1}{P}\right) = 0$$

[retour à la page d' accueil](#)

page d'accueil

Quelques anecdotes sur la vie des mathématiciens

Il existe sur le web bon nombre d'anecdotes, mais peu en français (voire pas du tout ?), et comme je suis passionné par la vie des mathématiciens (serait-ce le fruit d'une frustration sous-jacente ?), je me propose de vous faire découvrir quelques-unes des histoires connues ou moins connues. Tout cela pour nous rappeler que ce sont bien des hommes eux aussi ! Pour les biographies complètes, cliquer sur les photos et vous atterrirez sur la plus géniale et complète encyclopédie (en Anglais...) du web. Les liens sur les noms renvoient à mes pages.

Tranches de vie :

Abel (norvégien 1802 - 1829) :

Niels Abel passe son adolescence à la Kathedralskole de Christinia où il est régulièrement battu par son cruel professeur Bader. Ce dernier est renvoyé après avoir battu à mort un de ses élèves. Il est alors remplacé par Holmboe qui est à peu près tout son contraire tant il fait preuve de pédagogie et de savoir. Découvrant le talent d'Abel, il

s'enthousiasme d'ailleurs et écrit sur son carnet : "A l'excellence de son intelligence s'unit une passion et un intérêt insatiable pour la mathématique, si bien qu'à n'en pas douter, s'il lui est donné de vivre, il deviendra probablement un très grand mathématicien."
Le principal de l'école avait d'ailleurs tempéré l'ardeur de son enseignant qui avait écrit initialement "le plus grand mathématicien du monde" !

Archimède (grec 287 av J.C. - 212 av J.C.) :

Lors de l'attaque de Syracuse par les Romains, Archimède est chargé de défendre la ville. On lui attribue d'avoir incendié à distance la flotte de Marcellus grâce à un jeu de miroirs, mais sur ce point la controverse est vive ! De nombreuses expériences au XVIIe siècle jusqu'au XXe siècle ont été reproduites, mais on n'a jamais pu vérifier réellement la validité de cette légende.
Une autre histoire sur Archimède concerne sa fin. Bien que le général Marcellus ait demandé expressément de sauver Archimède, celui-ci ne connaîtra pas une mort calme. Il était, parait-il, en train de dessiner des figures sur le sol et aurait demandé au soldat qui entrait de s'écarter. Celui-ci, vexé, l'aurait transpercé de sa lance.
Mais le riche intérieur du savant n'est peut-être pas étranger non plus à cet accès de fureur !
Toujours est-il que les Romains lui feront ériger une pierre tombale sur laquelle est inscrite une sphère dans un cylindre. Cette tombe sera redécouverte par Cicéron en 75 av J.C.

Barrow (anglais 1630 - 1677) :

En plus d'avoir été un grand mathématicien et le professeur de Newton, Isaac Barrow fut également un fameux théologien. Il est entré d'ailleurs dans les ordres en devenant prêtre. Non dénué d'humour et de caractère, son examen de passage avec l'aumônier est resté célèbre :

L'aumônier : *Quid est fides ?* (Qu'est-ce que la foi ?)
I. Barrow : *Quod non vides.* (Ce que l'on ne voit pas.)
L'aumônier : *Quid est spes ?* (Qu'est-ce que l'espoir ?)
I. Barrow : *Magna res* (Une grande chose.)
L'aumônier : *Quid est caritas ?* (Qu'est-ce que la charité ?)
I. Barrow : *Magne raritas.* (Une grande rareté.)

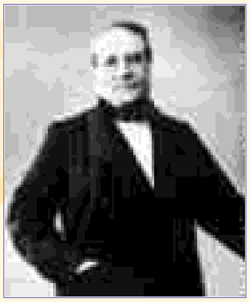
Malgré son manque de respect et les hésitations consécutives de l'aumônier, l'évêque reconnut sa forte personnalité et l'admit !

Bhaskara (indien 1114-1185) :

Son père étant astronome et la théologie étant en liaison étroite avec les sciences à cette époque, Bhaskara cumula les fonctions de mathématicien et astrologue. Sa fille Lilavati devant se marier, il calcula immédiatement le jour et l'heure propices au mariage. Mais lors des préparatifs et alors que l'heure avançait, Lilavati perdit une perle qui bloqua l'horloge hydraulique... Le temps de le remarquer et le mariage n'était plus à l'heure favorable, si bien que Lilavati dût rester célibataire. Devant son désarroi, Bhaskara rédigea un ouvrage d'astronomie sous forme de poêmes qu'il intitula "*Lilavati* " !

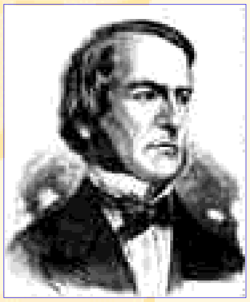
Bernoulli Daniel (Suisse 1700 - 1782) :

Le fils de Jean Bernoulli fut le fondateur de l'hydrostatique et s'intéressa aux mathématiques appliquées à la physique. Aussi célèbre que son illustre père, il fut d'ailleurs chassé de la maison familiale par celui-ci lorsqu'ils durent partager le prix de l'Académie des sciences en 1734.
Il aimait aussi raconter l'anecdote selon laquelle il voyageait un beau jour avec une personne d'apparence cultivée, qui ne le connaissait pas et lui demanda son nom.
Il répondit "Daniel Bernoulli", et son interlocuteur, visiblement étonné rétorqua "Et moi, je suis Isaac Newton"
Ce qui fit un immense plaisir à Daniel Bernoulli, sans commune mesure avec les distinctions !



Bienaymé (français 1796 - 1876) :

Le pauvre Jules Bienaymé n'aura pas la chance de ressembler à son nom ! Sa promotion de Polytechnique est exclue en 1816 par Louis XVIII qui trouve aux étudiants un manque de royalisme patent !
Qu'à cela ne tienne, Bienaymé entre à l'Inspection des finances, d'où il est exclu en 1848 pour manque de républicanisme cette fois ! Et pour couronner le tout, il est exclu de son poste à la Sorbonne en 1851 !



Boole (anglais 1815-1864) :

Boole enseignait au Queen's College à Cork et un jour qu'il faisait le trajet de 3 km à pied depuis son domicile et qu'il pleuvait, il attrapa une pneumonie. Sa femme, pensant qu'un remède doit ressembler à la cause, le mit

au lit et lui jeta des bassines d'eau dessus pendant plusieurs jours !
Ce qui eut pour effet d'achever prématurément une carrière brillante...

Borel (français 1871-1956) :

Pas grand-chose à dire sur cet illustre mathématicien sinon qu'il a réussi l'exploit d'être reçu à 18 ans 1er à l'ENS et à l'X (tout comme Gaston Darboux au siècle précédent). On se sent parfois un peu petit...

Bourbaki (Français 1935) :

Nicolas Bourbaki est, comme c'est assez connu, le nom symbolique d'un mathématicien qui représente en fait toute la fine fleur des mathématiciens français écrivant pour une oeuvre commune. Créé à l'origine par Cartan et Weil, le nom de ce groupe est celui d'un général Français, qu'un des anciens élèves de l'ENS, qui se faisait passer pour un mathématricien suédois, avait cité comme intitulé d'un théorème lors d'un cours.
Les élèves n'y ayant vu que du feu, ils supposèrent Bourbaki russe et lui attribuèrent Nicolas comme prénom. Bourbaki est en fait un mot d'origine crétoise signifiant "Chef des tueurs" !
Dans un des traités de Bourbaki, on trouve au milieu d'un théorème "un ensemble filtrant à droite et à gauche". Dans la version finale de l'ouvrage, ce morceau a été remplacé volontairement par "un ensemble flirtant à droite et à gauche" !

Cardan (italien 1501-1576) :

inventeur du joint du même nom et de la résolution des équations du 3è degré, Cardan était également comme Bhaskara un astrologue réputé. Cependant, ses "exploits" dans ce domaine nous en donnent une image assez amusante. Ainsi en 1552, Edouard VI, malade de la petite vérole, rencontre Cardan et lui demande de lui dresser son horoscope. Cardan s'éxécute et prédit une longue vie au roi... qui meurt l'année suivante à l'âge de 16 ans de la tuberculose !
Ne reculant devant rien, il dresse également l'horoscope de Jésus Christ, ce qui lui vaut un emprisonnement immédiat. Ensuite, il s'occupe de lui et prédit qu'il mourra trois jours avant ses 75 ans. Et pour ne pas combattre le destin, il arrête de s'alimenter peu de temps avant cette date, et il meurt le jour prévu !

Condorcet (français 1743-1794) :

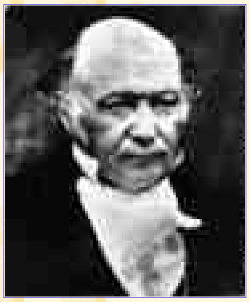
Marquis mais sympathisant de la révolution et Girondin, Condorcet est recherché durant la terreur. Il doit changer de logis chaque jour ce qui est bien fatigant... Entrant dans une auberge un soir, il commande une omelette à l'aubergiste.
Lorsque celui-ci lui demande "Combien d'oeufs ?" quelle n'est pas sa surprise d'entendre comme réponse "Douze !". L'attitude de ce voyageur intrigue d'ailleurs tant l'aubergiste qu'il préfère appeler la police. Cette dernière jette alors Condorcet en prison. Devant les menaces de Robespierre et de ses amis, Condorcet choisit de se suicider. Petite cause, grands effets...

Euler (suisse 1707-1783) :

Inutile de présenter celui qui est considéré par certains comme le plus grand mathématicien de tous les temps. Terriblement prolifique, il publie plus de 800 pages par an !! Doté d'une mémoire fabuleuse, il calcula une nuit d'insomnie les puissances 6è de tous les entiers de 1 à 100 et s'en souvint plusieurs jours plus tard. Une fièvre brutale lui fit perdre son oeil droit.
A la cour de Berlin, Frédéric le Grand, préférant les esprits brillants comme Voltaire aux scientifiques efficaces, le traite de "cyclope mathématique". Sa progéniture est tout aussi prolifique puisqu'il aura treize enfants. Euler n'avait pas son pareil pour rester patient avec eux et continuer à jouer tout en rédigeant un article... Il s'éteint à 76 ans alors qu'il buvait tranquillement le thé.
Sa mort est d'ailleurs relatée par un de ses amis : Le matin, il donna comme à son habitude des cours à ses petits neveux, et déjeuna normalement. Puis en milieu d'après-midi, alors qu'il prenait le thé, il s'écroula subitement en lachant ces derniers mots : "Je meurs...". Il avait en effet été victime d'une attaque cérébrale...

Fourier (français 1768-1830) :

Dès l'âge de 12 ans, Joseph Fourier est doué d'un talent d'écriture, tant et si bien que les dignitaires du diocèse lui demandent d'écrire leurs discours !
Dans ce milieu religieux, il n'hésite pourtant pas à voler des morceaux de chandelle pour s'éclairer le soir et pouvoir dévorer le soir les oeuvres de Bézout et Clairault.
Fourier étudie aussi beaucoup la propagation de la chaleur. Obsédé par elle, malade, il pense que la chaleur peut seule le sauver, surchauffe exagérément son logis et meurt d'un arrêt cardiaque !



Hamilton (irlandais 1805-1865) :

Très précoce, on raconte qu'il parle 13 langues à 13 ans ! Passionné de littérature, il écrit d'ailleurs des poèmes et ose les montrer à son ami le poète Wordsworth. A la lecture de ceux-ci, Wordsworth l'aurait encouragé à écrire dans le domaine des mathématiques !!!
Devenu mathématicien, il cherche après le plan à étendre les complexes à l'espace. Le 16 octobre 1843, alors qu'il se promène avec sa femme le long du Royal Canal à Dublin, un de ces éclairs de lucidité, dont seuls les mathématiciens ont le secret, le frappe et il se rend compte qu'une transformation géométrique de l'espace nécessite 4 scalaires réels. Tout à son euphorie, en traversant le Brougham Bridge, il grave sur une pierre du pont $i^2=j^2=k^2=ijk=-1$. Ce qui donne naissance aux quaternions !
Les conditions de recherches d'Hamilton sont restées célèbres... Il travaille en effet dans sa salle à manger. Mais sa femme est assez mauvaise ménagère et lui amène périodiquement des côtelettes de mouton et de l'alcool, ce dont il ne manque pas d'abuser... Après sa mort, on fouilla dans ses papiers et l'on découvrit d'ailleurs des paquets d'os entre deux pages !

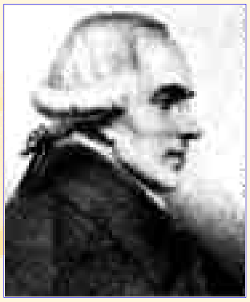
Hardy (anglais 1877-1947) :

Godfrey Hardy était célèbre pour sa dextérité calculatoire. Un jour, un de ses amis lui propose le problème piégé suivant : 2 trains partent de 2 gares distantes de 160km et roulent l'un vers l'autre à 80 km/h en ligne droite. Un bourdon part avec le premier train à 100 km/h et suit la voie. Il fait demi-tour lorsqu'il atteint le 2è train, et encore lorsqu'il rejoint le premier et ainsi de suite. Il tombe mort lorsque les 2 trains se croisent. Quelle distance a-t-il parcouru pendant son trajet ?
(question valable également pour vous !)
Hardy réfléchit quelques secondes seulement et répond "100 km".

"Quoi, vous avez trouvé l'astuce?" lui répond dépité son ami. "L' astuce, quelle astuce ? J'ai calculé pour chaque trajet la distance parcourue, j'ai trouvé le terme général d'une série convergente que j'ai sommée et j'ai trouvé 100".
Mais comme le bourdon volait pendant 1h à 100 km/h, il n'y avait peut-être pas besoin de chercher loin !
Plus tard, pendant un cours, il énonce un résultat et affirme en justification "c'est évident...". Puis, il se gratte la tête, se demandant "Mais au fait, est-ce évident..." pendant plusieurs minutes en tournant. Il sort de la salle devant ses élèves un peu étonnés, et revient 5 minutes plus tard. Il lance alors "oui, c'était évident !"

Hippase (grec Ve av. J.-C.) :

Faisant partie de l'école pythagoricienne pour laquelle tout est fondé sur les entiers, il divulgue la découverte de l'irrationnalité de $2^{1/2}$.
Selon la légende, en ces temps où la mathématique se devait d'être parfaite et réglée sur les entiers, il est jeté à la mer par ses condisciples et meurt noyé !



Laplace (français 1749-1827) :

Napoléon était un grand admirateur des savants. Ayant rencontré et sympathisé avec Laplace, qui était d'ailleurs son examinateur à l'école militaire, il le nomme ministre de l'intérieur. Cependant, la carrière politique de Laplace ne durera pas plus de 6 semaines, car l'Empereur en vient à constater rapidement l'incompétence de celui-ci et ne manque pas alors d'ironiser dans ses mémoires :

> "Géomètre de premier rang, Laplace ne tarda pas à se montrer administrateur plus que médiocre; dès son premier travail nous reconnûmes que nous nous étions trompé. Laplace ne saisissait aucune question sous son véritable point de vue: il cherchait des subtilités partout, n'avait que des idées problématiques, et portait enfin l'esprit des `infiniment petits' jusque dans l'administration." !

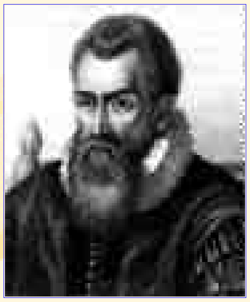
Victor Hugo nous raconte ensuite qu'Arago se rappelait l'anecdote suivante : Quand Laplace eut publié son *Traité de Mécanique céleste*, disait-il, l'Empereur le fit venir. Il était furieux :
"Comment, s'écria-t-il en apercevant Laplace, vous faites tout le système du monde, vous donnez les lois de toute la création et dans tout votre livre vous ne parlez pas une seule fois de l'existence de Dieu !
Sire, répondit Laplace, je n'avais pas besoin de cette hypothèse."

Pour finir sur les relations privilégiées entre l'Empereur et le savant, après que Napoléon eut rapporté quelques résultats nouveau de géométrie élémentaire, Laplace lui lança, non sans ironie :
"La dernière chose que nous attendions de vous, Général, est une leçon de géométrie !"

Lie (norvégien 1842-1899) :
Créateur des célèbres groupes du même nom, outre ses aptitudes intellectuelles, Sophus Lie est doué d'une force physique peu commune.
Pendant la guerre de 1870, Lie est à Paris et décide ainsi de partir à pied (!) pour l'Italie. Dessinant alors, au cours d'une pause, des paysages devant des fortifications près de Fontainebleau, il est arrêté pour espionnage. Au procès, le président du tribunal lui demande de faire un cours pour prouver qu'il est bien mathématicien. Lie n'a pas d'autre choix que d'user de toute sa

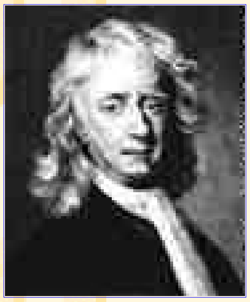
pédagogie ! Mais, résultat inattendu, le président du tribunal comprend toutes les paroles de Lie et le juge bien piètre mathématicien. Lie doit alors faire appel à ses amis Parisiens pour se sortir de ce mauvais pas !
Un autre jour, il se promène dans un costume primitif lorsque, coïncidence, un meurtre est commis dans la région. Les recherches commencent et l'officier de paix, apercevant Lie, pense avoir là trouvé son coupable. Il s'élance à sa poursuite à cheval, mais Lie, très athlétique, ne sera jamais rattrapé !
Il voulut aussi apprendre à nager à son neveu en le jetant d'une barque dans l'eau glacée avec une simple ceinture de liège. Mais par fort vent ce jour là, le vent éloigna le bateau de l'enfant. Les spectateurs commencèrent à s'affoler ! A la suite de cette aventure, Sophus Lie devint le mauvais héros de nombres d'histoires chargées d'effrayer et de calmer ainsi les enfants turbulents de la région de Tvedestrand !

Moivre (français 1667-1754) :
En 1730, Abraham de Moivre donnait une évaluation asymptotique de l'écart entre la probabilité à priori et à posteriori. Pour de Moivre, ceci prouva l'existence de dieu qui maintenait d'une main ferme les fluctuations du hasard.
Infatigable, il se contentait par ailleurs de 6h de sommeil. Ayant atteint les 87 ans, il se mit à dormir bizarrement un quart d'heure de plus chaque nuit. Il calcula alors qu'il décèderait dès qu'il atteindrait les 24 heures, ce qui se réalisa effectivement !



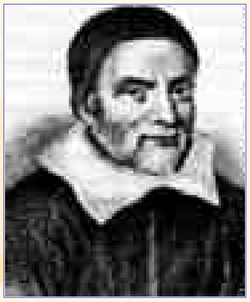
Neper (écossais 1550-1617) :

Neper est un original et n'a de cesse d'appliquer ses idées farfelues ! Il possède ainsi une grande propriété et rale contre le voisin qui laisse ses pigeons dévorer les semences de ses champs. Il menace celui-ci de les confisquer s'il ne fait rien. Le voisin le prend alors pour un fou, et accepte le défi de Neper. Mais celui-ci, dès le lendemain, ramasse les pigeons chancelants sur son champ. Il avait imbibé les grains de whisky !
Son originalité dérange tant que, comme souvent à cette époque, certains le croient adepte de magie noire... Dans sa demeure, Neper se trouve confronté à des problèmes de vol. Il annonce que son coq noir magique va identifier celui des serviteurs qui le vole. Chacun d'eux doit passer dans une pièce obscure et caresser le coq, que Neper a malicieusement enduit de suie auparavant ! Craignant d'être reconnu par l'animal, un des serviteurs n'ose pas le caresser, revient la main propre et est ainsi démasqué !



Newton (anglais 1642-1727) :

Isaac Newton a, semble-t-il, eu une certaine attirance pour les animaux. Outre le cheval qu'il pratiquait, il eut un chat et un chien. Cependant, il ne fut pas très chanceux avec ces deux derniers animaux ! Le premier devint complètement obèse, car il passait son temps à manger et son maître était trop absorbé par ses recherches pour s'en apercevoir ! Quand au second, le chien, il répondait au nom de Diamond et eut la mavaise inspiration de faire tomber un bout de chandelle sur les papiers de Newton. Celui-ci se mit en colère contre son chien et lança : "Oh Diamond! Diamond! thou little knowest the mischief done" !
Très célèbre de son temps, le pape Alexandre aurait affirmé à propos de Newton : "La nature et les lois de la nature restaient enfouies dans la nuit. Dieu dit : Ainsi soit Newton ! Et la lumière fut !"



Oughtred (anglais 1574-1660) :
Il était un travailleur infatigable, se couchant tard, passant parfois une ou deux nuits d'affilée sans dormir, et il gardait près de son lit son briquet et son encrier, au cas où lui viendrait une idée. Son cerveau était constamment au travail. Complètement désintéressé par sa santé, il mourut de joie à 86 ans en apprenant la restauration de Charles II sur le trône d'Angleterre !

Pascal (français 1623-1662) :
Le 23 novembre 1654 entre 10h30 et 12h30, Pascal tombe en extase religieuse et abandonne les sciences pour la théologie, ce qui est resté célèbre. Un soir de 1658, pourtant, un violent mal de tête l'empêche de s'endormir. Il décide alors de réfléchir à la Cycloïde pour ne plus y penser. Quelle ne fut pas sa surprise en constatant que les douleurs cessèrent alors aussitôt ! Il en conclut par la suite que c'était certainement un signe de Dieu, lequel devait aimer les mathématiques !

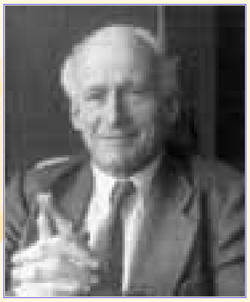
Plateau (belge 1801-1883) :
Joseph Plateau est un adepte de l'extrême ! S'intéressant à la persistance rétinienne, il élabore une expérience complètement folle : au cours de l'été 1829, il fixe le soleil de midi durant 25 secondes pour en tester sur lui-même les conséquences ! La rétine gravement brûlée, il lui faudra plusieurs jours et il endurera une souffrance atroce avant de recouvrer la vue. Mais ayant trop subi de sequelles, quatorze ans plus tard, il deviendra définitivement aveugle...

Ramanujan (Indien 1887-1920) :

Son collègue Hardy nous raconte : "Je me souviens être allé le voir lorsqu'il était malade et alité à Putney. J'étais monté dans un taxi dont la plaque avait pour numéro 1729 et remarqua que ce nombre me semblait bien triste. J'espérai que cela n'annonça pas un mauvais présage...
"Non", répliqua Ramanujan, "C'est un nombre très intéressant, c'est le plus petit des entiers exprimables comme somme de deux cubes, de deux façons différentes" !!
Je lui demandai si il savait quel était le suivant. Il réfléchit et me dit qu'il n'en voyait pas d'autre proche...
En fait, depuis, on a calculé que le suivant est plusieurs dizaines de milliers plus tard !! "

Russel (anglais 1872-1970) :

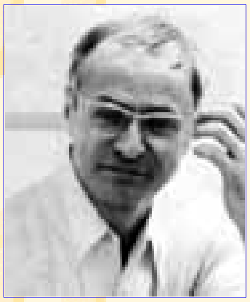
Un étudiant demande un jour à Bertrand Russell :
"Prétendez-vous que de 2 + 2 = 5, on peut déduire que vous êtes le pape?"
"Certainement, répliqua le grand logicien... Réfléchissez un peu. Supposons que 2 + 2 = 5. En soustrayant 2 de chaque côté du signe égal, on obtient que 2 = 3. Par symétrie, on a aussi que 3 = 2 et, en soustrayant un de chaque côté, 2 =1. Maintenant le pape et moi nous sommes deux, mais, puisque 2 = 1, le pape et moi ne sommes qu'un, et donc je suis le pape."



Schwartz (français 1915) :

Laurent Schwartz faillit rater son admission à l'Ecole normale supérieure. N'étant pas très à l'aise avec la pression de l'écrit, il termina dernier admissible au concours ! Heureusement, sa maîtrise mathématique lui permit de se rattraper et il se classa premier à l'oral !

Anecdote pour topologues : Lors d'un voyage en Pologne, à Varsovie il me semble, Laurent Schwartz vit un panneau indiquant la place **Banach**. "Je me dois d'y aller" se dit-il, et il attendit l'autobus. Mais lorsque les portes de celui-ci s'ouvrirent, le conducteur lui lança : "Ne montez pas, c'est **complet** !"



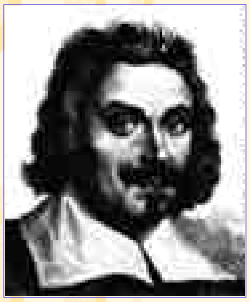
Serre (français 1926) :

J.-P. Serre est un de nos plus célèbres mathématiciens contemporains et médaillé Fields en 1954. S'interrogeant sur la théologie, il discuta avec Dieu lors d'un rêve. N'ayant jusque-là échangés que des banalités, Dieu lance soudain : "Il y a quelque chose que je dois t'avouer : je n'existe pas.". J.-P. Serre lui répond alors : "Je le savais depuis longtemps ".
"Ah, alors cela n'a pas d'importance", lui répondit Dieu. Et ils se séparèrent avec un bon sourire.

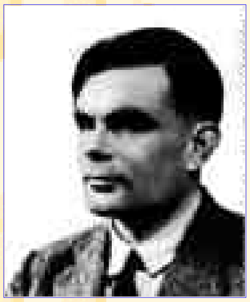
Stifel (allemand 1486-1567) :

Stifel, réformateur passionné par le mysticisme des nombres prophétisa la fin du monde pour le 3 octobre 1533 (déjà !). Prêchant dans les campagnes, il réussit à convaincre de nombreux paysans de quitter leur terre. Le jour dit arriva, rien ne se produisit et Stifel, pour échapper à la colère de ses "disciples", dut se réfugier en prison.
Par ailleurs spécialiste d'arithmographie et antipapiste militant, Stifel

démontra que le pape Léon X était la bête de l'apocalypse. En effet, c'est assez subtil, en latin on dit Leo DeCIMVs X, qui donne DCLXVI après avoir enlevé M pour mystère ; or, ceci vaut 666, c'est-à-dire le nombre de la Bête du dernier livre de la Bible !



Torricelli (italien 1608-1647) :
Evangelista Torricelli était un esprit d'une rare sensibilité. Ainsi, lors de publications parallèles, il fut bouleversé d'être traité de plagiaire par Gilles de Roberval. Il en mourut de consternation et de chagrin l'année suivante !



Turing (américain 1912-1954) :
Après la seconde guerre mondiale, le grand logicien Alan Turing chercha un moyen de se débarrasser du stress accumulé et trouva son bonheur dans la course à pied. Il n'était d'ailleurs pas mauvais du tout dans cet exercice puisqu'il décrocha les records du 3 et 10 miles dans la course du Walton Athletic Club ! Mais sa nature logique ne manquait pas de réapparaître assez systématiquement. Ainsi, pour ne pas perdre trop de temps et s'organiser au mieux, il s'entrainait et utilisait ses capacités en course à pied entre les différentes bibliothèques scientifiques concernant ses recherches !
Il se suicida à l'âge de 42 ans le 7 juin 1954 d'une pomme au cyanure de potassium dans un moment de fragilité mentale... Les raisons de cet acte sont toujours un peu mystérieuses aujourd'hui, mais elles tournent autour de 3 pistes.
En premier lieu, Turing était persuadé qu'un mathématicien commençait à décliner passé la quarantaine, et il se trouvait justement

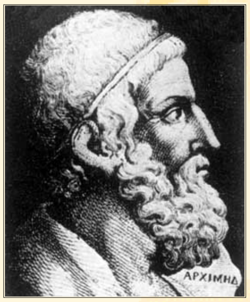
dans une période de dépression à cette époque.
Il passait son temps également à synthétiser des nouvelles sustances, qu'il avait l'habitude de tester sur lui-même sans souci de sécurité, d'après sa mère.
Enfin, les révélations sur son homosexualité éventuelle semblaient le perturber fortement et il aurait peut-être voulu éviter l'embarras...

Wiener (américain 1894-1964) :
Norbert Wiener appartient au petit groupe des mathématiciens forts distraits ! On raconte qu'un jour, assis à une table de la bibliothèque universitaire, il semblait plongé dans une profonde réflexion.
Un étudiant ayant pourtant besoin de lui poser une question, il s'approche, intimidé, et lui dit : "Pardon, Monsieur Wiener...".
"Merci, merci" répond celui-ci, sortant de sa torpeur, "Voilà le nom que je cherchais !"

---

retour à la page d'accueil

page d'accueil



Archimède
(287 av. J.-C. - 212 av. J.-C.)

Eurêka !

Application de la méthode d'Archimède :

$$U_0 = \frac{1}{2} \qquad V_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$U_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - U_n^2}\right)} \qquad V_{n+1} = \frac{-1 + \sqrt{1 + V_n^2}}{V_n}$$

$$6.2^n\, U_n \xrightarrow{n \to \infty} \pi \qquad 6.2^n\, V_n \xrightarrow{n \to \infty} \pi$$

Tranches de vie :

Archimède est né aux environs de *287* av. J.-C. Considéré par tous comme le plus grand mathématicien et physicien de toute l'antiquité (et c'est justifié !), la légende qui l'entoure et les écrits qui nous sont parvenus sont en effet assez impressionnants. *De l'équilibre des plans, Sur la sphère et le cylindre, l'Arénaire* - où Archimède expose un système de numérotation des grands nombres (calcul du nombre de grains de sable contenus dans la sphère du monde !) - , *Traité de la méthode* , sont autant d'écrits brillants. Sans oublier bien sûr *Des corps flottants* - et son fameux principe d'Archimède - , et *la Mesure du cercle*. Dans ce dernier ouvrage qui nous intéresse, Archimède exhibe l'encadrement célèbre

$$3+\frac{10}{71}<\pi<3+\frac{1}{7}$$

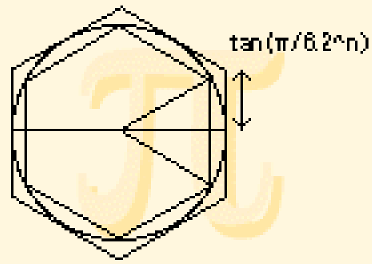
Conduisant la défense de Syracuse contre les Romains (on lui attribue, mais la polémique est vive, d'avoir pu incendier à distance la flotte de Marcellus au moyen d'un jeu de miroirs...) et malgré les ordres de protection du général romain, il est assassiné par un légionnaire lors de la prise de la ville en *212* av. J.-C.
Et pour quel motif, me direz-vous ? Eh bien, d'après la légende, Archimède était en train de dessiner une figure sur le sol, et dit au romain qui entrait de ne pas le déranger. Ce dernier, vexé, l'aurait transpercé de sa lance. Mais la richesse de l'intérieur d'Archimède y fut peut-être aussi pour quelque chose...

Autour de π

Archimède n'a bien sûr jamais eu sous les yeux la formule ci-dessus, il ne connaissait pas la trigonométrie, d'ailleurs ! Néanmoins, celle-ci n'est qu'une écriture moderne de sa méthode d'approximation de π.
Eh oui, ce bon vieux Archimède fut en effet le premier à calculer véritablement ses décimales au moyen d'un algorithme. Il partit de *2* polygones à *6* côtés inscrits et circonscrits à un cercle de rayon $R=1/2$.
En faisant doubler à chaque fois le nombre de côtés des polygones, ces derniers allaient finir par se confondre avec le cercle, et leur périmètre allait tendre vers celui du cercle, soit $2\pi R=\pi$. Brillante idée qui prévaudra jusqu'au *XVIIe* siècle dans le calcul des décimales !
C'est surtout sa méthode qui prévaudra, et celle-ci sera transcrite de différentes manières en écriture algorithmique, dont celle-ci (voir aussi Cues, Al Kashi, Viète); C'est pourquoi on ne sait jamais vraiment de qui proviennent les algorithmes partant de l'idée d'Archimède. J'ai choisi celui-ci, mais cela aurait pu être celui de Cues.
Archimède obtint son encadrement avec un polygone à *96* côtés ($n=4$ dans la formule).

Démonstration

On considère un cercle de rayon *1* et un angle $\frac{\pi}{2^n}$. Posons $U_n = \sin\left(\frac{\pi}{6.2^n}\right)$ *et* $V_n = \tan\left(\frac{\pi}{6.2^n}\right)$. U_n représente la longueur d'un côté du polygone inscrit au cercle et V_n celle d'un côté du polygone circonscrit au cercle.



$6.2^n \sin\left(\frac{\pi}{6.2^n}\right) \xrightarrow{n \to \infty} \pi \xleftarrow{n \to \infty} 6.2^n \tan\left(\frac{\pi}{6.2^n}\right)$ par développements limités en *0*, donc on a immédiatement le résultat de la formule en haut de la page.

Ce raisonnement d'analyse pure se traduisait géométriquement pour Archimède par le fait que le polygone à 6.2^n côtés tend à se confondre avec le cercle lorsque n tend vers l'infini. Reste à ce que les U_n et V_n aient la même forme que dans la formule...

Pour cela, il suffit de chercher une formule de récurrence entre U_{n+1} et U_n (positifs) d'une part, et entre V_{n+1} et V_n (positifs aussi) d'autre part.

A partir de $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ et $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$, on obtient $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \sin^2 x}\right)}$ ce qui donne la relation $U_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - U_n^2}\right)}$.

De même, on a $\tan(x) = \dfrac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$, donc en posant X=$\tan\left(\frac{x}{2}\right)$, on a le trinôme du second degré en X

$\tan(x)X^2 + 2X - \tan(x) = 0$. La solution positive donne X=tan(x/2)= $\dfrac{-1 + \sqrt{1 + \tan^2(x)}}{\tan(x)}$ d'où l'on tire alors pour tout n entier positif $V_{n+1} = \dfrac{-1 + \sqrt{1 + V_n^2}}{V_n}$. La valeur de U_0 et V_0 s'obtient par les expressions premières de U_n et V_n.

Essais

P'tite note sur les essais : Ceux-ci sont simplement une meilleure façon de sentir les performances d'une suite. Pour être clair, j'utiliserai une notation un peu personnelle mais tellement pratique !
Lorsque l'on trouvera une convergence "*d'environ 3n/5*" comme ici, cela voudra dire que l'on aura à peu près *3n/5* décimales justes au rang *n*. Cela n'a rien à voir avec une "convergence en *n*log(n)*" par exemple qui veut dire que le temps de calcul de *n* décimales est proportionnel à *n*log(n)*.
Le chiffre entre parenthèses indique le nombre de décimales justes.

$U_1=3,10582$ (1)	$V_1=3,21539$ (0)
$U_4=3,14103$ (3)	$V_4=3,14271$ (2) (encadrement d'archimède)
$U_{10}=3,14159251$ (6)	$V_{10}=3,14159296$ (6)

On observe une convergence d'environ *3n / 5* pour les *2* suites ce qui est très honorable par rapport aux suites à convergence logarithmique (Wallis, Stirling...). Ceci explique sans doute aussi que cette méthode ait prévalu aussi longtemps pour calculer les décimales de π (oh, juste quelques temps, *20* siècles (!), jusqu'à la découverte de la formule de Machin en *1706*).

Accélération de la convergence

Comme dans à peu près chaque page web de mathématiciens de ce site, on trouvera un chapitre consacré à l'accélération par le *Delta2* d'Aitken, tant cette formule est efficace et simple à appliquer (enfin presque...)
Pour $n=5$, on a $U_5=3,14145$ (3) et $t_5=3,1415926836$ (7).
Impressionnant, on gagne *4* décimales, en fait, on double la rapidité de convergence, ce qui est beaucoup plus économique que de calculer les

6 itérations de U_n supplémentaires dont nous aurions besoin sinon pour obtenir le même nombre de décimales...
Pour *n=7*, on a U_7=*3,141583* (4) et t_7=*3,1415926537 0* (9).

(ne nous enflammons pas trop, rappelons néanmoins que le *Delta2* est très sensible aux imprécisions...)

[retour à la page d'accueil]

page d'accueil

Nicolas de Cues
(1401 - 1464)

Algorithme à retenir

$$a_1 = 0 \qquad b_1 = \frac{1}{4} \qquad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n}$$

$$\frac{1}{2a_n} \xrightarrow{n \to \infty} \pi \qquad \frac{1}{2b_n} \xrightarrow{n \to \infty} \pi$$

Tranches de vie

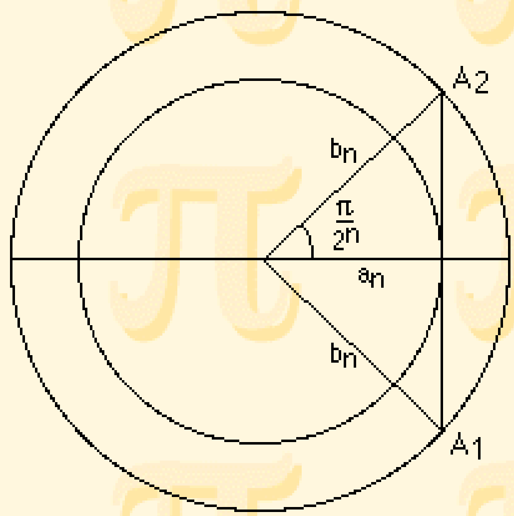
Né en *1401* à Kues, Nikolaus Krebs est un théologien Allemand plus connu sous le nom francisé de Nicolas de Cues. Sa principale action fut de soutenir les papes et le principe de l'infaillibilité contre les conciles. Tout en touchant aux mathématiques, il laissa ainsi une importante oeuvre théologique et philosophique.
Il meurt en *1464* en laissant derrière lui une méthode d'approximation de *Pi* dans la lignée des suites d'origine Archimédienne.
Comme Leibniz et Descartes, ses réflexions théologiques et scientifiques sont souvent liées. Il considère ainsi que la recherche de la solution de la quadrature du cercle est comparable à la recherche de la vérité !

Autour de π

Comme je l'ai déja écrit dans l'histoire de la période géométrique de *Pi*, cette formule me pose problème. Elle est en effet souvent donnée comme la version "officielle" de la formule d'Archimède (*Le fascinant nombre Pi*), et pourtant je l'ai découverte sur un TD de maths en prépa intitulé "La méthode de Cues". Et dans *Le Petit Archimède* , cette formule est considérée comme celle de Grégory... Alors, je renouvelle mon appel, si quelqu'un connait la véritable paternité de cette suite, qu'il me la précise !
Notons toutefois que cette suite utilise le périmètre d'un polygone ayant une valeur fixe. On cherche alors à évaluer les rayons des cercles inscrits et circonscrits ce qui est plus proche encore de la méthode des isopérimètres de Descartes. Mais après tout, j'ai pris le parti de choisir De Cues pour faire connaître un peu ce personnage singulier !

Démonstration

Bien que cet algorithme ressemble beaucoup à la moyenne arithmético-géométrique (voir Salamin), la convergence n'est (hélas !) pas du tout comparable et plus proche d'une convergence linéaire que d'une convergence quadratique !
Comme pour Archimède, on considère un polygone à 2^n côtés de périmètre égal à 1 et l'on note a_n et b_n les rayons respectifs de ses cercles inscrits et circonscrits.



On a donc :

$$\tan\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{\frac{1}{2}A_1A_2}{a_n} \quad et \quad \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{\frac{1}{2}A_1A_2}{b_n}$$

d'où puisque le périmètre du polygone est *1*, on en déduit : $2^nA_1A_2=1$ et

d'après précédemment, on a donc :

$$2^{n+1} a_n \tan\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = 1 = 2^{n+1} b_n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \quad soit \quad a_n = \frac{1}{2^{n+1}\tan\left(\frac{\pi}{2^n}\right)} \quad b_n = \frac{1}{2^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}$$

Calculons maintenant :

$$\frac{a_n + b_n}{2} = \frac{2^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) + 2^{n+1}\tan\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{2.2^{n+1}\tan\left(\frac{\pi}{2^n}\right)2^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)+1}{2.2^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)} = \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{2.2^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}$$

$$= \frac{1}{2^{n+2}\tan\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)} = a_{n+1}$$

$$\sqrt{a_{n+1} b_n} = \frac{1}{\sqrt{2^{n+2}\tan\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)2^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}} = \sqrt{\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{2^{2n+3}\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)2\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2^{2n+4}\sin^2\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}} = b_{n+1}$$

Montrons que ces deux suites sont adjacentes :

$$a_{n+1} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{1}{2^{n+2}\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)} - \frac{1}{2^{n+2}\tan\left(\frac{\pi}{2^n}\right)} = \frac{2^{n+2}\tan\left(\frac{\pi}{2^n}\right) - 2^{n+2}\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{2^{2n+4}\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)\tan\left(\frac{\pi}{2^n}\right)} > 0$$

car *tan>sin*.

De même, $b_{n+1} - b_n = \frac{1}{2^{n+2}\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)} - \frac{1}{2^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) - 2\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{2^{n+2}\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}$ donc

b_{n+1}-b_n est du signe de

$\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) - 2\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) - 2\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) < 0$ car *cos<1* pour *n>0*.

D'où (b_n) est décroissante...

De plus, *tan(x) ~ x* et *sin(x) ~ x* en *0* donc il est immédiat que :

$$a_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2^{n+1}\frac{\pi}{2^n}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \xleftarrow{n\to\infty} \frac{1}{2^{n+1}\frac{\pi}{2^n}} \underset{n\to\infty}{\sim} b_n$$

et nous avons aussi :

$0 < a_{n+1} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2}$ donc $b_n > a_n$ donc a_n et b_n sont bien adjacentes.

Finalement, on a donc :

$$\frac{1}{2\,b_n} \leq \pi \leq \frac{1}{2\,a_n}$$

Evaluons maintenant la rapidité de convergence :

$$\frac{1}{2\,a_n} - \frac{1}{2\,b_n} = 2^n \tan\left(\frac{\pi}{2^n}\right) - 2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = 2^n \tan\left(\frac{\pi}{2^n}\right)\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)\right) \underset{n\to\infty}{\sim} 2^n \frac{\pi}{2^n}\left(1 - 1 + \frac{\pi^2}{2.\,2^{2n}}\right)$$

donc :

$$\frac{1}{2\,a_n} - \frac{1}{2\,b_n} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\pi^3}{2.\,4^n}$$

Ce qui nous donne une convergence linéaire (en passant au *log*). Vérifions tout cela par quelques essais...

Essais

Il ne faut néanmoins pas désespérer de cette convergence linéaire car la suite est tout de même facile à calculer et à accélérer...

	$a_n=$	$b_n=$
n=5	*3,1517 (1)*	*3,136 (1)*
n=10	*3,14160 (3)*	*3,141587 (4)*
n=20	*3,14159265359 9 (10)*	*3,14159265358606 (11)*
n=50	*28* décimales exactes	*29* décimales exactes

On obtient ici une convergence en *3n / 5* environ

Accélération de la convergence

Aitken et son *Delta2* est ici particulièrement efficace. Voyons cela !

	Delta2(a_n)=	*Delta2(b_n)=*
n=5	*3,1422 (2)*	*3,14163 (3)*
n=10	*3,14159265418 (8)*	*3,1415926536 2 (9)*
n=20	*20* décimales justes	*22* décimales justes
n=50	*56* décimales exactes	*58* décimales exactes

C'est assez incroyable, mais le *Delta2* double la rapidité de convergence ! On obtient en effet une convergence de l'orde de *1.2n*

Alors continuons et itérons le procédé (*Delta2* appliqué deux fois !)

	Delta2^2(a_n)=	*Delta2^2(b_n)=*
n=5	indisponible (div par zéro)	*3,1415953 (5)*
n=10	*12* décimales justes	*14* décimales exactes
n=20	*32* décimales justes	*32* décimales justes
n=50	*87* décimales exactes	*87* décimales exactes

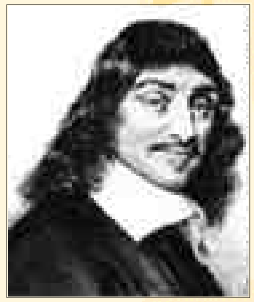
On gagne encore un facteur de *50%* ! On a alors une convergence *1.75n* ce qui est tout à fait honorable pour une suite de cette simplicité apparente !
On pourra donc retenir cette suite parmi les archimédiennes comme une des

plus rapides !

---

retour à la page d'accueil

page d'accueil



René Descartes
(1596 - 1650)

La méthode originale des isopérimètres

$$\forall L \in R^* \qquad r_0 = \frac{L}{8} \qquad r_{n+1} = \frac{r_n + \sqrt{r_n^2 + \frac{r_0^2}{4^n}}}{2}$$

$$S_n = \frac{L}{2 r_n} \qquad S_n \xrightarrow{n \to \infty} \pi$$

Tranches de vie

René Descartes est né à la Haye en Touraine précisément le *31 mars 1596*. Ce fut certainement le philosophe français le plus célèbre ! Mais il ne fut pas que cela...
Après une licence de droit en *1616*, il choisit le métier des armes en Hollande puis chez le Duc de Bavière jusqu'en *1620*. Rentré en France en *1625*, il y rédige ses travaux philosophiques - fameux, mais ce n'est pas l'objet de ce site ! - et fait paraître des travaux scientifiques sur l'optique, l'astronomie, la biologie et surtout la géométrie. En *1631*, paraît ainsi *Géométrie* dans lequel il définit les cooordonnées cartésiennes d'un point. Notons au passage que c'est à Descartes que l'on doit l'habitude de représenter les quantités connues par les premières lettres de l'alphabet *a,b,c,d...* et les inconnues par *x,y,z*. Il meurt en *1650*.

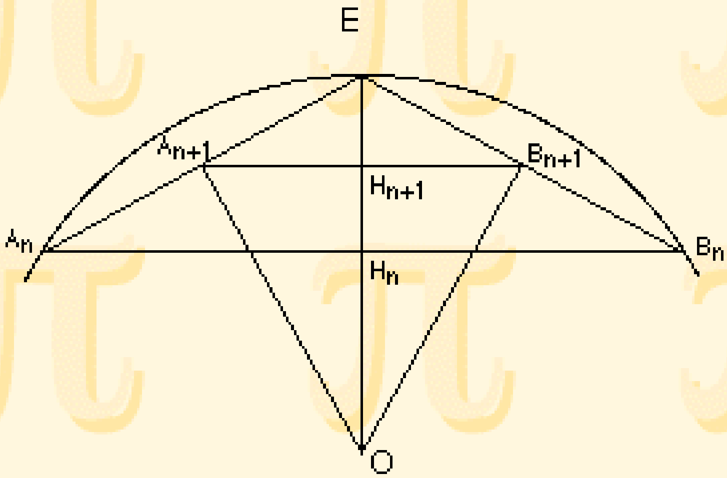
Autour de π

Après son décès, on trouvera dans ses papiers la *méthode des isopérimètres*. Elle consiste à faire le contraire de la méthode d'Archimède c'est à dire à déterminer le rayon d'un cercle dont le périmètre est fixé à l'avance. C'est une construction entièrement géométrique...

Démonstration

Ou plutôt construction, car ce n'est pas une réelle démonstration mathématique !
On considère une suite de polygones réguliers $P_0,P_1,P_2...P_n$ respectivement $2^2,2^3,...,2^{n+2}$ côtés ayant, - c'est important - un même périmètre L

On considère la figure suivante, avec $A_nB_n=C_n$ et $OH_n=r_n$.



Cherchons une relation de récurrence entre r_{n+1} et r_n étant donné que r_n tend vers le rayon du cercle.
On sait que $2^{n+2}C_n=L$ car L est le périmètre du polygone P_n de côté C_n. Cette relation étant valable pour tout $n \in N$, on a aussi $2^2C_0=L$.
Pour P_0, on a un carré donc $OH_0=C_0/2=r_0$, donc $r_0=C_0/2=L/(2.2^2)=L/8$
Soit E le milieu du petit arc A_nB_n. Le segment qui joint les milieux A_{n+1} et B_{n+1} de $[EA_n]$ et $[EB_n]$ est le côté de P_{n+1}. Toute l'histoire va être géométrique, alors concentrons-nous !

On a $A_{n+1}B_{n+1}=C_{n+1}=L / 2^{n+3}$: en effet, par le théorème de ce cher Thalès,

$$\frac{EA_{n+1}}{EA_n} = \frac{A_{n+1}B_{n+1}}{A_nB_n} \quad or \quad \frac{EA_{n+1}}{EA_n} = \frac{1}{2} \quad donc \quad A_{n+1}B_{n+1} = \frac{1}{2} A_nB_n$$

Dans le triangle rectangle OEA_{n+1} (car OA_nE est isocèle), on a $A_{n+1}H_{n+1}{}^2=EH_{n+1}*H_{n+1}O$

Mais montrons-le si ce n'est pas évident !

On a d'une part

$EO^2=(EH_{n+1}+H_{n+1}O)^2=EH_{n+1}{}^2+2EH_{n+1}*H_{n+1}O+H_{n+1}O^2$

donc $EH_{n+1}.H_{n+1}O = \frac{1}{2}EO^2 - \frac{1}{2}EH_{n+1}^2 - \frac{1}{2}H_{n+1}O^2$.

D'autre part, $A_{n+1}H_{n+1}{}^2=A_{n+1}E^2-EH_{n+1}{}^2$ par pythagore et $A_{n+1}H_{n+1}{}^2=OA_{n+1}{}^2-OH_{n+1}{}^2$, donc on a :

$$\begin{aligned} A_{n+1}H_{n+1}{}^2 &= \frac{1}{2}A_{n+1}E^2 - \frac{1}{2}EH_{n+1}^2 + \frac{1}{2}OA_{n+1}^2 - \frac{1}{2}OH_{n+1}^2 \\ &= EH_{n+1}.H_{n+1}O - \frac{1}{2}EO^2 + \frac{1}{2}A_{n+1}E^2 + \frac{1}{2}OA_{n+1}^2 \end{aligned}$$

or toujours par pythagore $EO^2=A_{n+1}E^2+OA_{n+1}{}^2$

donc $A_{n+1}H_{n+1}{}^2=EH_{n+1}*H_{n+1}O$ (franchement désolé pour la lourdeur des notations !)

$$A_{n+1}H_{n+1}{}^2 = \left(\frac{1}{2}A_{n+1}B_{n+1}\right)^2 = \left(\frac{L}{2^{n+4}}\right)^2 = \frac{L^2}{4^{n+4}} = \frac{64r_0{}^2}{4^{n+4}} = \frac{r_0{}^2}{4^{n+1}}$$

or

et $EH_{n+1}=H_{n+1}H_n$ (évident par Thalès !)

$=OH_{n+1}-OH_n=r_{n+1}-r_n$ et encore, $H_{n+1}O=r_{n+1}$

donc :

$$\frac{r_0{}^2}{4^{n+1}} = (r_{n+1} - r_n)r_{n+1}$$

Eh bien, la voilà, notre relation de récurrence !
C'est d'ailleurs un polynôme en r_{n+1}, qui est évidemment positif.

On extrait donc la seule racine positive du polynôme et on obtient :

$$r_{n+1} = \frac{r_n + \sqrt{r_n^2 + \frac{r_0^2}{4^n}}}{2}$$

Lorsque n augmente, le polygone P_n tend à se confondre avec le cercle de périmètre $L=8r_0=2\pi r_n$ (2π*rayon...)

donc :

$$\frac{L}{2r_n} \xrightarrow{n\to\infty} \pi$$

Intéressant, non ?
Et pas si mauvais en termes d'efficacité !

Essais

Regardons cela de plus près...
L'expression $\frac{r_0^2}{4^{n+1}} = (r_{n+1} - r_n)r_{n+1}$ fait penser à l'aire d'un rectangle de côtés r_{n+1} et $r_{n+1}-r_n$. La suite géométrique des aires de ce rectangle serait donc de raison $1/4$. A priori, la relation entre r_{n+1} et r_n devrait elle aussi se comporter comme une suite géométrique, et la convergence devrait être linéaire ($-Log(r_n)=a*n+b$)... Vérifions en prenant $L=8$, et donc $r_0=1$ (le choix de L n'influe pas sur le résultat car la relation entre r_{n+1} et r_n est homogène en L) :

n=5	*3,1422 (2)*
n=10	*3,1415932 (5)*
n=50	*28* décimales exactes
n=100	*60* décimales exactes

Tout à fait, une bonne petite convergence *3n / 5*, voilà qui est fort honorable !

Accélération de la convergence :

Ce qu'il y a de bien avec le *Delta2* d'Aitken, c'est qu'il y a toujours une accélération, si minime soit elle. Mais alors lorsqu'elle est gigantesque, quelle euphorie ! Regardons les essais :

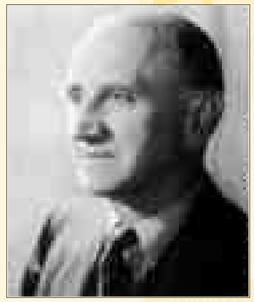
	Sans Aitken	Avec Aitken	Avec Aitken itéré
n=5	*3,1422 (2)*	*3,14159508 (5)*	*3,1415926559 (8)*
n=10	*3,1415932 (5)*	*3,141592653592 (10)*	*16* décimales exactes
n=20	*3,1415926535903 (10)*	*23* décimales exactes	*35* décimales exactes
n=50	*28* décimales exactes	*59* décimales exactes	*90* décimales exactes

C'est tout bonnement incroyable ! Aitken multiplie par plus de *2* la performance la suite qui atteint une convergence de *1.2n*.
Il me semble bien que c'est le meilleur résultat obtenu avec Aitken pour les suites convergeant vers *Pi*.
Et regardez les résultats avec Aitken itéré (on applique *2* fois le *Delta2*) ! Vu la précision limite de mon calculateur (*100* décimales) et la sensibilité du *Delta2*, il est même possible que le résultat soit encore meilleur.
On atteint avec Aitken itéré une précision supérieure à *1.6n* et qui va en s'améliorant !

---

retour à la page d'accueil

page d'accueil



Alexander Aitken
(1895 - 1967)

Une formule remarquable

Soit $(x_n)_{n \in N}$ *une suite convergeant vers* $\bar{x}$. *Alors la suite* $(t_n)_{n \in N}$

définie par $\forall n \in N \quad t_n = \dfrac{x_n x_{n-2} - x_{n-1}^2}{x_{n-2} - 2x_{n-1} + x_n} = x_n - \dfrac{(x_n - x_{n-1})^2}{x_{n-2} - 2x_{n-1} + x_n}$

converge vers $\bar{x}$ *plus rapidement que* $(x_n)_{n \in N}$

Tranches de vie

Voilà un homme bien singulier... et trop méconnu... J'espère que ce site permettra de faire connaître un peu mieux sa formidable formule d'accélération de la convergence, le *Delta2* !
Mais plongeons plutôt dans le récit de l'histoire de ce mathématicien peu commun :
Alexander Aitken est né en *1895* en Nouvelle-Zélande. Etudiant les langues et les mathématiques à partir de *1913*, il est blessé à la bataille de la Somme pendant la première guerre mondiale. Très marqué par cet événement, il rejoint Edimbourg en Ecosse après *3* mois d'hôpital. Doté d'une mémoire extraordinaire (il connaît tout de même *2000* décimales de *Pi* et est capable de donner la décimale à la *n*-ième place !), il met au point le fameux *Delta2* accélérant de façon optimale les suites. Mais cette fameuse mémoire lui rappelle trop souvent la bataille

de la Somme et le traumatise. Il écrit alors ses mémoires mais celles-ci ne contribuent qu'à aggraver sa relative folie mentale et il décède finalement en *1967*.

Autour de π

Le *Delta2* accélère, on l'a dit, de façon optimale certaines suites. Il est conçu pour fonctionner au mieux avec les suites géométriques. Avec celles-ci, il donne directement la limite au bout de *3* itérations, sinon il tente de deviner la limite de cette suite. Si il ne la trouve pas, il accélèrera en tout cas la convergence.
Ses propriété sont assez extraordinaires, prenons par exemple le développement limité de

$$\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}$$

valable sur *]-1,1]* comme chacun sait. Si l'on fait *x=2*, la série va diverger, bien sûr. Eh bien ce cher *Delta2* va le faire converger pendant quelque temps!!! Regardez plutôt :
ln(3)=1,0986...
Avec la série au rang *8*, on a *-19,31* (!)
Avec le *Delta2* itéré *2* fois, au rang *8*, on a *1,0979*
Après on recommence à s'éloigner de la vraie valeur. Mais que des valeurs complètement fausses dans la série donnent une bonne valeur avec le *Delta2*, c'est assez fabuleux, n'est-ce pas ?
En général, le *Delta2* accélère toutes les suites dont le rapport de deux écarts consécutifs converge vers une limite non nulle comprise entre *-1* et *1*, ce qui est bien sûr le cas des suites géométriques.
Le *Delta2* d'Aitken est très instable numériquement car le numérateur et le dénominateur sont proches de *0* et il faut donc calculer avec un bon paquet de décimales ! On utilisera de préférence le second membre de la formule, plus stable...

Démonstration

Formellement, si l'on construit t_n à partir de x_n, cette dernière convergeant vers L, on dit qu'il y a accélération de la convergence si on a :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{t_n - L}{x_n - L} = 0$$

ce qui, intuitivement, se comprend fort bien...
Nous allons construire le *Delta2* et montrer qu'il vérifie bien cette propriété...
Dotons nous donc d'une suite x_n convergeant vers l avec une erreur $e_n = x_n - L$ vérifiant $\lim_{n \to \infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = e \neq 0$ (1)

Nous allons construire une suite t_n à partir de x_n qui convergera plus vite vers sa limite. Ca n'est pas très long, et sacrément constructif vous verrez !

Construction :

Supposons pour cela que (1) est exact pour tout n (sans passage à la limite...) c'est à dire que $e_{n+1} = Ae_n$ (2)
*Or, on a $e_n = x_n - L$ par définition donc immédiatement, on obtient :

$$x_{n+2} - x_{n+1} = A.(x_{n+1} - x_n) \quad (3)$$

*Posons maintenant $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$. (4)
D'après (2) et la définition de e_n, il vient $x_{n+1} - L = A(x_n - L)$ et donc $L(1-A) = x_{n+1} - Ax_n$ et enfin :

$$L = \frac{x_{n+1} - Ax_n}{1 - A} = x_n - \frac{\Delta x_n}{1 - A} \quad (5)$$

*Calculons $\Delta^2 x_n=\Delta(\Delta x_n)=\Delta x_{n+1}-\Delta x_n=x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n$. (6)

Or, on a $1-A=1-\frac{x_{n+2}-x_{n+1}}{x_{n+1}-x_n}=\frac{2x_{n+1}-x_n-x_{n+2}}{x_{n+1}-x_n}$ donc, on en déduit :

$$L=x_n-\frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n}$$

Mais puisque l'hypothèse de départ (1) n'est vraie qu'à la limite, on introduit une nouvelle suite :

$$t_n=x_n-\frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n} \quad (7)$$

avec t_n tendant vers L en l'infini

Preuve du théorème :

En bons architectes, après avoir construit cette suite, vérifions qu'elle tient debout et converge effectivement plus rapidement !
Puisque l'on n'est plus à la limite, posons $e_{n+1}=(A+ß_n)e_n$ où $ß_n$ tend vers 0
*Un petit calcul rapide donne :

$$\Delta e_n=x_{n+1}-L-x_n+L=\Delta x_n$$
$$\Delta^2 e_n=e_n+2-2e_{n+1}+e_n=x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n=\Delta^2 x_n$$

Exprimons donc Δe_n et $\Delta^2 e_n$ ce qui donnera Δx_n et $\Delta^2 x_n$:

*D'une part, $e_{n+2}=(A+ß_{n+1})e_{n+1}=(A+ß_{n+1})(A+ß_n)e_n$
et donc

$$\Delta^2 e_n=e_{n+2}-2e_{n+1}+e_n=(A+ß_{n+1})(A+ß_n)e_n-2(A+ß_n)e_n+e_n=(A-1)^2 e_n+ß_n' e_n$$

où $ß_n'=A\,ß_n+A\,ß_{n+1}+ß_{n+1}\,ß_n-2ß_n$ tend vers *0* en l'infini

*D'autre part,

$$\Delta e_n=e_{n+1}-e_n=(A+ß_n)e_n-e_n=(A-1+ß_n)e_n$$

On remplace maintenant dans (5) et on obtient :

$t_n=x_n-\dfrac{(A-1+ß_n)^2e_n^2}{((A-1)^2+ß_n')e_n} \Leftrightarrow t_n-L=x_n-L-\dfrac{(A-1+ß_n)^2e_n}{(A-1)^2+ß_n'}$ et en divisant par $x_n-L=e_n\#0$:

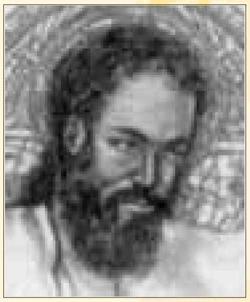
$$\frac{t_n-L}{x_n-L}=1-\frac{(A-1+ß_n)^2}{(A-1)^2+ß_n'}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0 \quad car \quad \lim_{n\to\infty} ß_n=\lim_{n\to\infty} ß_n'=0$$

et le théorème est bien démontré, il y a accélération de la convergence !
Il ne reste qu'à exprimer Δx_n et $\Delta^2 x_n$ dans t_n comme au (4) et (6) pour retrouver la formule du *Delta2* d'Aitken ! Après cette démo, j'espère qu'il n'aura échappé à personne la provenance du nom *Delta2* de la méthode !

Avec la participation de David Jelgersma

retour à la page d'accueil

page d'accueil



Al Kashi
(? - 1429)

Une chouette formule

$$C_0 = 1 \qquad C_{n+1} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - C_n^2}}$$

$$3.2^n . C_n \xrightarrow{n \to \infty} \pi$$

Tranches de vie

Son véritable nom était "ghiyat al-dîn djamashîd b.mahs'ûd b.mahmûd al Kashi" (rien que ça !) mais il est plus connu sous le nom écourté d'Al Kashi, du lieu de naissance Kachan entre Ispahan et Téhéran. Mathématicien célèbre à son époque, il est mort à Samarkand en *1429*. Son oeuvre majeure, *le traité du cercle (Risala a-muhitiyya)*, a été écrite en *1424* en arabe.

Autour de π

Dans celui-ci, bien qu 'il n'y ait rien de véritablement neuf depuis Archimède, sa virtuosité calculatoire l'incite à se lancer un défi : calculer une bonne approximation de *2*π (rapport entre la circonférence du cercle et son rayon). "Bonne" signifie pour lui que pour un cercle *600 000* fois plus grand que l'équateur terrestre, l'incertitude doit être inférieure à "un crin de cheval". Ce qui représente *16* décimales exactes de π ou, dans la base *60* qu 'utilise Al Kashi, *10* places sexagésimales. Celui-ci exhibe en effet dans son ouvrage $6^{0} 16^{I} 59^{II} 28^{III} 1^{IV} 34^{V} 51^{VI} 46^{VII} 14^{VIII} 50^{IX}$!

Démonstration

La méthode est, comme toujours à cette époque, celle d'Archimède, puisque Al Kashi part d'un hexagone et donc d'un côté de longueur $2\sin(\pi/6)=1$. On pose

$$C_n = 2\sin\left(\frac{\pi}{6.2^n}\right)$$

Par équivalence de x et $\sin(x)$ si x tend vers 0, $3.2^n.C_n$ tend vers π lorsque n tend vers l'infini.
La relation de récurrence se trouve alors en utilisant la formule de trigonométrie $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$, et $\cos(x)=1-2\sin^2(x/2)$. On a immédiatement $\left(2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 = 2-\sqrt{4-(2\sin(x))^2}$. Ce qui donne en remplaçant x par $\pi/(6.2^n)$ la formule demandée en C_n.

Essais

La formule étant presque la même que celle d'Archimède à un facteur *2* près, les essais et performances sont parfaitement similaires ! Il en est de même pour l'accélération de la convergence par le *Delta2* d'Aitken.

---

retour à la page d'accueil

page d' accueil

François Viete
(1540 - 1603)

Un premier produit infini concenant Pi

$$U_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad U_n = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} U_{n-1}}$$

$$\pi = \frac{2}{\prod_{k=0}^{\infty} U_k}$$

$$U_0 = 0 \qquad V_0 = 2$$

$$U_n = \sqrt{2 + U_{n-1}} \qquad V_n = \frac{2 V_{n-1}}{U_n}$$

$$V_n \xrightarrow{n \to \infty} \pi$$

soit :

$$\pi = 2 \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \cdots$$

Tranches de vie

François Viete, né à Fontenay-le-comte en *1540* est tout d'abord diplomé de droit en *1560*. Mais parallèlement à sa carrière juridique, il s'intéresse aux sciences. Il écrit ainsi un traité d'astronomie (*Principes de cosmographie*); mais banni en *1584* pour *5* ans, il commence, ayant du "temps libre", à s'intéresser aux mathématiques !
C'est sa période la plus féconde. Travaillant sur l'algèbre et principalement sur les polynômes, il simplifie quelque peu les notations et trouve une méthode de résolution des équtions du

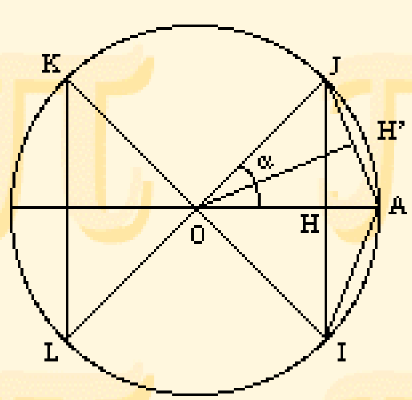
troisième degré.
Il s'intéresse également à l'expression de *cos(nx)* et *sin(nx)* en fonction de *cos(x)* et *sin(x)*, ce qui donne ce que nous appelons maintenant les polynômes de Tchebychev.

Autour de π

Ses recherches en trigonométrie l'amènent à calculer neuf décimales de *Pi* (et pas sept comme c'est écrit dans l'*Encyclopédie Universalis* !). Mais surtout, Viete énonce le premier produit infini connu valant *Pi* ! Malheureusement, il ne se soucie pas de la convergence effective de son produit. Celle-ci ne sera prouvée qu'au *XIXe* siècle en *1892* par Rudio. Viète utilise non pas les périmètres comme Archimède mais les aires des polygones.

Démonstration

Les deux algorithmes du haut de la page sont équivalents, ce qui est immédiat par récurrence.
Ensuite, il y a deux méthodes. Celle du paresseux qui consiste à remarquer que les deux algorithmes sont équivalents à la suite d'Archimède où $U_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - U_n^2}\right)}$ aura été multiplié par son conjugué (+ à la place du premier moins) puis où l'on aura simplifié.
Et puis il y a la construction géométrique, lourde mais intéressante car proche de l'inspiration originale du mathématicien, et que je présente ici :



Viete s'intéresse à l'aire des polygones réguliers inscrits dans un cercle de rayon unité dont on doublerait à chaque fois le nombre de côtés (tiens comme c'est étonnant !)

Cette aire finirait par tendre vers celle du cercle soit π.

Pour ce faire, il divise un polygone à n côtés en n triangles dont il calcule l'aire.

On a : *OH=Rcos(α) et IJ=2JH=2Rsin(α)*
Bien...
Puis on note A_n l'aire du polygone à n côtés :

$$A_n = n\frac{2R\sin(\alpha).R\cos(\alpha)}{2} = nR^2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$$

Si on double le nombre de côtés du polygone, on divise α par *2* et cette nouvelle aire vaut :

$$A_{2n} = 2n\frac{1}{2}\left(2R\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)R\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) = nR^2 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \text{ donc on peut écrire:}$$

$$\frac{A_n}{A_{2n}} = \cos(\alpha) \quad \frac{A_{2n}}{A_{4n}} = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad \frac{A_{4n}}{A_{8n}} = \cos\left(\frac{\alpha}{4}\right) \quad \ldots$$

Posons maintenant :

$$P = \frac{A_n}{A_{2n}}\frac{A_{2n}}{A_{4n}}\frac{A_{4n}}{A_{8n}}\ldots\frac{A_{(k-2)n}}{A_{kn}}\frac{A_{kn}}{A} \quad \text{A étant l' aire totale du cercle}$$

$$\text{Il vient } P = \frac{A_n}{A} \Rightarrow A = \frac{A_n}{P}$$

or l'aire A d'un cercle est donnée par $A=\pi R^2=\pi$ donc $\pi=A_n/P$.
Mais si l'on fait tendre *k* vers l'infini, *P* s'écrit comme un produit de *cos* (car dans ce cas, A_{kn} -> *A*), donc on peut écrire :

$$\frac{A_n}{\cos(\alpha)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{4}\right)\ldots} \xrightarrow{k\to\infty} \pi$$

Or, on sait que :

$$\cos^2(\theta) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2\theta) \quad \text{donc on pose } U_0 = \cos(\alpha)$$

$$U_1 = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(\alpha)} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}U_0} \quad \text{et} \quad U_n = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}U_{n-1}}$$

$$\text{soit } \cos(\alpha)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{4}\right)\ldots = \prod_{i=0}^{\infty} U_i$$

A_n étant l'aire du premier polygone avec $n=4$ (carré $\alpha=p/4$), on a $A_n=n.\sin(\alpha)\cos(\alpha)=2$ et $U_0=2^{-1/2}$

Donc finalement on obtient :

$$U_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad U_n = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}U_{n-1}}$$

$$\pi = \frac{2}{\prod_{k=0}^{\infty} U_k}$$

Notons que si l'on part d'un autre polygone, on arrive à une autre expression (comme le diraient les profs de facs dans leurs polys, je laisse cela à l'attention du lecteur !)

Convergence du produit :

Ce résultat est assez simple mais indispensable :

$$\ln\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \ln\left(1-\frac{\alpha^2}{4^n}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{\alpha^2}{4^n} \text{ donc}$$

$$\ln\left(\prod_{n=0}^{\infty}\cos\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\ln\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)\right) \text{ converge}$$

(Evidemment, cela n'aurait pas de sens normalement de noter la somme si elle n'existait pas, mais l'étude des probabilités m'a montré qu'il n'y avait pas de problèmes à écrire cela notamment dans cette discipline puisque la somme peut être égale à l'infini, tout simplement... et il n'y a pas de gêne à l'écrire si c'est compréhensible)
le produit converge également, donc la suite a bien un sens.

Essais

Bah, si le produit infini de Viète descend de celui d'Archimède, normalement nous allons être confronté à une convergence linéaire :

n=5	*3,141277 (3)*
n=10	*3,1415923 (6)*
n=50	*30* décimales justes
n=100	*60* décimales justes

Pas de problèmes ! Une belle convergence en *3n/5* comme pour Archimède.

Accélération de la convergence

Et comme pour ce bon vieux Archimède, il y a une très efficace accélération de la convergence par le *Delta2* d'Aitken :

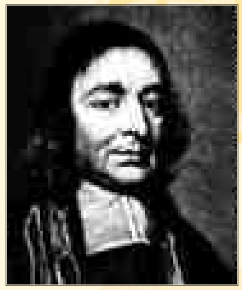
n=5	*3,14159280 (6)*
n=10	*3,14159265358993 (12)*
n=50	*60* décimales justes

Eh bien, rien de moins qu'un doublement de la rapidité de convergence !!

Avec la participation de David Jelgersma

retour à la page d' accueil

page d'accueil



John Wallis
(1616 - 1703)

Un autre produit infini concernant Pi

$$\pi = 2\prod_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2}{4n^2-1} \qquad \frac{2^{4n+2}\,n(n!)^4}{((2n+1)!)^2} \xrightarrow{n\to\infty} \pi$$

$$\frac{2^{4n+2}\left(n+\frac{3}{4}\right)(n!)^4}{((2n+1)!)^2} \xrightarrow{n\to\infty} \pi$$

Tranches de vie

John Wallis est né à Ashford, c'est le fils du recteur de la ville. Assez précoce, il se tourna vers les mathématiques à *15* ans, mais il ne dédaigna pas non plus la physique où il donna des lois sur les chocs des corps durs... Il est le premier à utiliser correctement l'infini (le fameux symbole est une de ses créations), les exposants négatifs nuls et fractionnaires. Passionné par les formules et approximations infinies qui en découlent (*Arithmética infinitorum 1656*), il entrevit la représentation géométrique des complexes et la réciprocité de l'exponentielle et du logarithme népérien. Cet esprit fertile s'intéressa également à l'astronomie, la musique, la botanique et fut l'un des membres fondateurs de la Royal Society (*1663*). Un homme d'importance donc !

Autour de π :

Bien sûr, Wallis tient une part importante dans la légende de *Pi* puisque ce fut le premier à découvrir le développement de la fameuse constante en un produit infini de fractions rationnelles. La convergence est exécrable, bien sûr, mais quel beau résultat !

Démonstration

Une démo très classique, mais un modèle de simplicité.
La méthode originale de Wallis consistait à utiliser les intégrales $\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx$ dont Wallis connaissait le résultat. Il généralisa à *n=1/2* ce qui donne l'aire du quart de cercle de rayon *1*, soit $\pi/4$.
En notations modernes, introduisons les intégrales équivalentes (changement de variable *x=sin(u)* et *x=cos(u)*) dites de Wallis :

$$\forall n \in N \quad I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\,dx \text{ et } J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,dx$$

Ces intégrales sont en fait égales (changement de variable $x=\pi/2-t$) donc, on ne s'intéressera qu'à I_n...
Effectuons une petite intégration par partie pour *n>1* :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1}(x)\cos(x)\,dx = \left[\cos^{n-1}(x)\sin(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}(x)\sin^2(x)\,dx$$

or $\left[\cos^{n-1}(x)\sin(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 \quad et \quad \sin^2(x) = 1-\cos^2(x)$ donc on obtient :

$I_n = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}(x) - \cos^n(x)\,dx = (n-1)\left(I_{n-2} - I_n\right)$ et finalement :

$$I_n = \frac{(n-1)}{n} I_{n-2} \quad (1)$$

Cette relation de récurrence permet de ramener le calcul de I_n à celui de I_0 et I_1 pour *n* pair puis impair.
On a immédiatement $I_0=\pi/2$ et $I_1=1$ ce qui donne :

$$I_{2n+1}=\frac{2n}{2n+1}I_{2n-1}=\frac{2.4.6\ldots(2n)}{1.3.5\ldots(2n+1)}I_1=\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}\quad(2)$$

par récurrence immédiate, puis par un calcul hyper-classique ! (procéder par récurrence par exemple)
Et de même, on a :

$$I_{2n}=\frac{2n-1}{2n}I_{2n-2}=\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}I_0=\frac{(2n)!\pi}{2^{2n+1}(n!)^2}\quad(3)$$

Or, sur *]0,π/2[*, $\cos(x)<1$ donc $\cos^n(x)<\cos^{n-1}(x)$, donc $n \to \cos^n(x)$ est décroissante et $n \to I_n$ est décroissante.
On en conclut que pour $n>1$, on a :

$$I_{2n+1}<I_{2n}<I_{2n-1}$$

D'après (2) on a :

$$\frac{I_{2n+1}}{I_{2n-1}}=\frac{2n}{2n+1}\xrightarrow{n\to\infty}1$$

donc d'après le théorème des gendarmes,

$$I_{2n}\overset{n\to\infty}{\sim}I_{2n+1}\quad donc\quad \frac{(2n)!\pi}{2^{2n+1}(n!)^2}\overset{n\to\infty}{\sim}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

et finalement :

$$\frac{2^{4n+2}n(n!)^4}{((2n+1)!)^2}\overset{n\to\infty}{\sim}\frac{2^{4n+1}(n!)^4}{(2n)!(2n+1)!}\xrightarrow{n\to\infty}\pi\quad(4)$$

Chouette, non ?

La première formule proposée en haut de la page est en fait la même, nous allons le voir :

$$2\prod_{n=1}^{k}\frac{4n^2}{4n^2-1}=2\frac{\left(\prod_{n=1}^{k}4\right)\left(\prod_{n=1}^{k}n\right)^2}{\prod_{n=1}^{k}(2n-1)\prod_{n=1}^{k}(2n+1)}=2\frac{4^k(k!)^2}{(2k)(2k+1)\left(\prod_{n=1}^{k}(2n-1)\right)^2}$$

et, j'espère que vous en conviendrez aisément, $\prod_{n=1}^{k}(2n-1)=\frac{(2k-1)!}{2^{k-1}(k-1)!}$ par une récurrence évidente (que j'ai d'ailleurs la flemme d'écrire...).
On obtient alors finalement :

$$2\prod_{n=1}^{k}\frac{4n^2}{4n^2-1}=2\frac{2^{2k-2}4^k(k!)^2((k-1)!)^2}{(2k+1)((2k-1)!)^2}=\frac{2^{4k-1}(k!)^2(k!)^2(2k)(2k)}{k^2(2k+1)!(2k)!}=\frac{2^{4k+1}(k!)^4}{(2k)!(2k+1)!}\xrightarrow{n\to\infty}\pi$$

d'après (4), et voilà. Le tour est joué !

A noter que l'on aura besoin de la formule de Wallis pour la démonstration de la formule de Stirling, et que réciproquement, cette dernière donne directement la formule de Wallis en faisant :

$$\frac{(n!)^2}{(2n)!}\overset{n\to\infty}{\sim}\frac{n^{2n}e^{-2n}2\pi n}{(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{4\pi n}}\overset{n\to\infty}{\sim}\frac{\sqrt{\pi n}}{2^{2n}}\Leftrightarrow\pi\xleftarrow{n\to\infty}\frac{2^{4n}((n!))^4}{n((2n)!)^2}\overset{n\to\infty}{\sim}\frac{2^{4n+2}n(n!)^4}{((2n+1)!)^2}$$

Ah ! Wallis et Stirling, quelle liaison intime et légendaire...

Essais

Bon, je l'ai déja dit, la convergence est éxécrable, logarithmique...

n=10	*3,0677 (0)*
n=1000	*3,1408 (2)*
n=10 000	*3,141511402 (4)*
n=100 000	*3,1415847 (4)*

Environ *Log(n)*, pas très heureuse...

Note d'optimisme...

Rien n'empêche en effet d'ajouter un petit quelque chose dans la suite ! Le *3/4* de la *3*e formule en haut de la page provient d'une observation empirique. On a déjà :

n=10	*3,1407 (2)*
n=100	*3,1415829 (4)*
n=1 000	*3,141592555 (6)*
n=3 000	*3,141592642 (7)*

Environ *2Log(n)* en convergence, presque honorable vu la simplicité de la suite !

Et le *Delta2* d'Aitken fonctionne bien, on a en effet :

n=10	*3,1008 (1)*
n=100	*3,1376(1)*
n=1 000	*3,14119 (3)*

et encore mieux si l'on ajoute ce fameux *3/4* :

n=10	*3,14125 (2)*
n=100	*3,141589 (4)*
n=1 000	*3,14159262084 (7)*

Finalement, il y a bien des moyens de faire quelque chose pour cette suite !

---

retour à la page d'accueil

page d'accueil

John Machin
(1680 - 1751)

A retenir !

$$\pi = 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}\left(4\left(\frac{1}{5}\right)^{2n+1}-\left(\frac{1}{239}\right)^{2n+1}\right)$$

Tranches de vie

John Machin est un mathématicien assez peu connu. Il est né en *1680* et fut professeur d'astronomie à Londres. Il découvre en *1706* la formule π*=16arctan(1/5)-4arctan(1/239)*, ce qui, grâce au développement en série entière de *arctan* connu depuis Grégory, lui permet d'obtenir la formule ci-dessus... Mais pour les connaisseurs de l'histoire de *Pi*, Machin a joué un grand rôle, d'abord parce que ce fut le premier à calculer *100* décimales au moyen de sa formule, mais surtout parce qu'il a ouvert la voie à la recherche de formules d'*arctan*...

Autour de π

Les formules d'*arctan* sont un moyen simple et rapide de calculer des décimales de *Pi*. Connaissant le développement *arctan(x)*$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ pour *x* entre *-1* et *1*, il suffit alors de trouver des combinaisons d'arctan donnant π*/4=arctan(1)*. Plus le terme à l'intérieur de la parenthèse d'*arctan* est petit, plus la série associée converge vite. Aujourd'hui encore, on vérifie parfois les calculs des décimales de *Pi* grâce à ce type de formule... Il est vrai que l'extraction de racines carrées est toujours fastidieux et qu'une suite de rationnels est bien

utile...
Un des derniers records en date (*51* milliards de décimales) a été vérifié avec la formule de Gauss.
Les autres formules d'arctan célèbres dont la combinaison est égale à π (voir historique) :
(convention *x.arctan(1/y)->x*y*)

*16*5-4*239*	donc, on l'aura retenu, elle est de Machin *1706*
*20*7+8arctan(3/79)*	Euler *1755*
*4*2+4*3*	Euler ou Hutton *1776* tout le monde n'est pas d'accord...
*16*5-4*70+4*99*	Euler, encore lui ! *1764*
*4*2+4*5+4*8*	L. von Strassnitzky
*8*3+4*7*	Charles Hutton *1776* puis Euler *1779*
*8*2-4*7*	Hermann
*12*4+4*20+4*1985*	S. Loney *1893* puis Störmer *1896*
*32*10-4*239-16*515*	S Klingenstierna *1730*
*48*18+32*57-20*239*	du grand Gauss lui-même !
*48*38+80*57+28*239+96*268*	Gauss à nouveau...
*24*8+8*57+4*239*	Störmer *1896*

Et par ordre d'efficacité...	en facilité de Calcul
*44*57+7*239-12*682*	*85,67%*
*22*28+2*443-5*1393-10*11018*	*88,28%*
*17*23+8*182+10*5118+5*6072*	*92,41%*
*88*172+51*239+32*682+44*5357+68*12943*	*93,56%*
*100*73+54*239-12*2072-52*2943-24*16432*	*96,38%*
*12*18+8*57-5*239*	*96,51%*
*8*10-1*239-4*515*	*96,65%*
*44*53-20*443-5*1393+22*4443-10*11018*	*97,09%*
*17*22+3*172-2*682-7*5357*	*97,95%*
*16*20-1*239-4*515-8*4030*	*99,13%*
*61*38-14*557-3*1068-17*3458-34*27493*	*99,14%*
*227*255-100*682+44*2072+51*2943-27*12943+88*16432*	*99,32%*
*24*53+20*57-5*239+12*4443*	*99,61%*
*127*241+100*437+44*2072+24*2943-12*16432+27*28800*	*99,92%*
*4*5-1*239*	*100%*

On mesure le coût de calcul d'une formule telle que celle de Machin par *1/log(5)+1/log(239)*.
C'est le sens des pourcentages ci-dessus...

Je me suis moi-même amusé à chercher quelques formules et ai trouvé entre autres

*128*107+128*122+28*239+96*268+48arctan(19/2167) et*

*732*530+732*563+128arctan(3/2611)+332arctan(27/64589)+48arctan(53/55479)+ +64arctan(6/15617)+28arctan(6/15617)+28*9703+100*14633*

qui sont d'un coût de calcul important mais à convergence rapide.

Le site le plus complet sur les *arctan* (et qui étudie l'efficacité de ces formules...) est www.ccsf.caltech.edu/~roy/pi.formulas.html

Précision

Cherchons à estimer environ le nombre de termes qu'il faut calculer dans la série pour obtenir *d* décimales justes de *Pi*. On peut observer d'après le développement de arctan en série qu'il va falloir estimer *n* tel que $\frac{a}{(2n+1)b^{2n+1}} < 10^{-d}$, ce qui revient après simplifications à $n > \frac{d}{2\log(b)}$. Etant donné que, dans la combinaison des *arctan*, c'est le terme où *b* est le plus petit qui prédomine, pour la formule de Machin, on a alors $n>0{,}72d$, ce qui est à peu près bien respecté d'après les essais...

Démonstration

Il serait fastidieux - et pour tout dire inutile ! - de démontrer entièrement la formule de Machin alors que le principe est surtout important... Il suffit de connaître quelques résultats pour entrevoir la démonstration complète ou le moyen de trouver des formules similaires... Les voici :

1) $\arctan(a)+\arctan(b)=\arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$ (par composition de *tan* et en évitant $ab=1$...)

2) $\arctan\left(\frac{1}{n}\right)=\arctan\left(\frac{1}{n+p}\right)+\arctan\left(\frac{p}{n^2+np+1}\right)$ (immédiat par la formule précédente (1))

3) $\frac{\pi}{4}=\arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right)+\arctan(x)$ (toujours évident avec (1))

4) $k\pi=\arctan\left(\frac{b_1}{a_1}\right)+\arctan\left(\frac{b_2}{a_2}\right)+\ldots+\arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$ avec a_i ,b_i ,k entiers si et seulement si $(a_1+ib_1)(a_2+ib_2)\ldots(a_n+ib_n)$ a une partie imaginaire nulle.
(on remarquera que c'est le cas pour la formule de Machin avec $a_i=5$, $b_i=1$ pour $i=1,\ldots,16$ et $a_i=239$, $b_i=-1$ pour $i=17,\ldots 20$ puisque $(5+i)^{16}(239-i)^4=-6813866078035761571 84$)

La formule provient du fait que le logarithme néperien est défini en complexe par

$ln(a+ib)=\frac{\ln(a^2+b^2)}{2}+i\left(\arctan\left(\frac{b}{a}\right)+p\pi\right)$ où *p* est entier relatif, et la propriété

ln(ab)=ln(a)+ln(b) fait le reste...

5) du même genre : $m.\arctan\left(\frac{1}{a}\right)+n.\arctan\left(\frac{1}{b}\right)=k\frac{\pi}{4}$ avec *k, a, b* entiers

si et seulement si $(1-i)^k(a+i)^m(b+i)^n$ est un réel.

Essais

n remplace l'infini dans la série en haut...

n=2 : on obtient *3,14182* (3)
n=10 : *3,141592653589793294* (16)
n=50 : *72* décimales justes

on a donc une convergence d'environ *1.4n* (proche de *1/0.72=1,388...* trouvé au dessus)

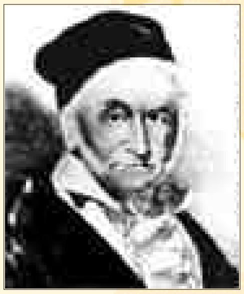
Accélération de la convergence

Bizarrement, si le bon vieux *Delta2* d'Aitken fonctionnait bien sur la série de Leibniz de même type, il semble que les termes de puissance *(2k+1)* désorientent un peu le *Delta2*. Son utilisation est donc moins rentable que le calcul d'un rang supplémentaire dans la série.

---

retour à la page d'accueil

page d'accueil



Carl Friedrich Gauss
(1777 - 1855)

Quelques formules d'arctan

$$\pi = 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}\left(12\left(\frac{1}{18}\right)^{2n+1}+8\left(\frac{1}{57}\right)^{2n+1}-5\left(\frac{1}{239}\right)^{2n+1}\right)$$

$$\pi = 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}\left(12\left(\frac{1}{38}\right)^{2n+1}+20\left(\frac{1}{57}\right)^{2n+1}+7\left(\frac{1}{239}\right)^{2n+1}+24\left(\frac{1}{268}\right)^{2n+1}\right)$$

Tranches de vie

Ah, Gauss, sans doute l'un des plus grands mathématiciens de tous les temps... Il est né en *1777* à Brunswick et attribue son génie à sa mère. C'est en effet un enfant prodige et ses capacités sont vite reconnues. Il aime d'ailleurs raconter comment il fut le seul dans sa classe, un jour où le professeur voulait être tranquille, à trouver la solution du problème que ce dernier leur avait posé, à savoir la somme des *100* premiers entiers. Comme *1+100=2+99=3+98=...=101*, Gauss en déduit le résultat *50*101=5050* et pose son ardoise sur le bureau du prof avant même que celui-ci ait fini de parler... Gauss a moins de dix ans... Il aimera raconter plus tard ces anecdotes dans un souci de notoriété... Avait-il vraiment peur d'en manquer ? Il n'avait pas *16* ans lorsqu'il imagina une méthode de calcul de l'orbite d'une planète et de résolution des systèmes, son fameux pivot de Gauss...
Devenu directeur de l'observatoire de Göttingen après ses travaux en

mécanique céleste, il publie en *1801* *Disquisitiones arithmeticae* dans lequel il crée les congruences et étudie les formes quadratiques et diverses propriétés d'algèbre. Travaillant ensuite sur la géométrie non euclidienne il s'intéresse alors de plus en plus à la physique et accepte (c'est la seule fois!) la collaboration de Wilhelm Weber jusqu'en *1837*.
Les domaines qu'il aborde sont le magnétisme, l'optique et l'électricité... Il forme vers la fin de sa vie des élèves brillants comme Riemann, Dedekind, Eisentein. Il dira d'ailleurs sans doute un peu vite de ce dernier, étonné par ses capacités, qu'il n'y a eu que 3 mathématiciens qui ont forgé leur époque : Archimède, Newton et Eisenstein... Celui-ci est, malheureusement pour les mathématiques, mort prématurément... Gauss, lui, disparaît en *1855* après une vie bien remplie...

Autour de π

Malheureusement, si son apport aux mathématiques est complètement fondamental, il a laissé peu de formules faisant intervenir π. Il est vrai qu'il était surtout spécialiste d'arithmétique et de géométrie, mais c'est presque décevant !!! Enfin, n'oublions pas que c'est lui qui a mené l'étude de la suite arithmético-géométrique utilisée par Brent/Salamin sans, pour une fois, en voir toute les retombées possibles concernant le calcul de π.
A noter que le résultat de l'intégrale sur *R* des courbes type $exp(-x^2)$ comme la cloche de Gauss fut trouvé pour la première fois par Abraham de Moivre et la démonstration est donc sur sa page.

Démonstrations

Inutile d'encombrer cette page pour la remplir d'égalités alors que le principe est si simple. Il suffit en effet d'utiliser les règles énoncées dans la partie démonstration de la page consacrée à Machin. La règle 4) est par exemple vérifiée pour la première formule ci-dessus avec $k=1$, $m=12$, $a=18$, $n=8$, $b=57$, et on ajoute un $p=5$, et $c=-239$ sur le même modèle. On obtient en effet $(1-i)^k(a+i)^m(b+i)^n(c+i)^p=-144996366690679927359016418457031250000000$! et la partie imaginaire est bien nulle...
Pour raisons de paresse, je ne retranscris pas le calcul pour la seconde

formule qui est parfaitement similaire ...
Ah, passons aux essais !

Essais

Première série : (infini est remplacé par *n* dans la série)

n=0	*3,144 (2)*
n=3	*3,1415926535629 (10)*
n=10	*27* decimales exactes

Deuxième série :

n=0	*3,1420 (2)*
n=3	*3,14159265358975 9 (13)*
n=10	*35* décimales exactes

On constate une convergence d'environ *2.5n+2* pour la première série et *3.2n+3* pour la seconde ce qui devient très intéressant. La première formule a d'ailleurs été utilisée pour vérification du calcul lors du record de *51* milliards de décimales de π.

---

retour à la page d'accueil

page d' accueil

Abraham de Moivre (1667-1754) / James Stirling (1692-1770)

Fondamental...

$$\frac{(n!)^2 e^{2n}}{2n^{2n+1}} \xrightarrow{n \to \infty} \pi$$

$$\forall r \in N^* \quad \frac{(n!)^2 e^{2n}}{2n^{2n+1} e^{2\sum_{k=1}^{r} \frac{|Ber_{2k}|}{2k(2k-1)n^{2k-1}}}} \xrightarrow{n \to \infty} \pi$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Tranches de vie

Abraham de Moivre est né en *1667* à Vitry-le-François, mais s'installe à Londres à *18* ans. L'édit de Nantes vient en effet d'être révoqué et Abraham est fils de huguenots. Il gagne alors sa vie en utilisant son esprit vif et brillant dans les pubs. Il se met ensuite à étudier les mathématiques après la lecture des *Principia* de Newton qu'il dévore ! Amis de Newton justement et membre des principales académies européennes (Royal Society, Paris, Berlin...), il doit cependant se contenter de cours particuliers car, Français, il ne peut enseigner en Angleterre dans les universités...

De Moivre est sans doute un des premiers à s'intéresser aux mathématiques appliquées dans de nombreux domaines. Probabilités, bien sûr, avec son étude de la densité d'une loi normale ($exp(-ax^2)$ et la célèbre formule $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ qui y est associée), mais aussi finance et démographie !

Un mathématicien très complet dont la découverte en *1730* de ce qui est appelée communément la formule de Stirling (eh oui, encore un abus de notation !) n'est pas le moindre de ses succès !
De Moivre s'est aussi intéressé aux nombres complexes avec la célèbre formule qui porte son nom.

Mais j'ai également choisi de faire figurer Stirling sur cette page car c'est tout de même lui qui a popularisé la formule qui porte donc son nom. Il l'a d'ailleurs découverte sous la forme de *ln(n!)* la même année que De Moivre et l'a généralisée en poussant le développement aussi loin que l'on veut (par la série dans la deuxième formule). Il ne reste aucun portrait de ce pauvre Stirling qui est né en *1692* à Garden (Ecosse) et fit ses études à Oxford. Il enseigna à Venise de *1715* à *1725*, puis à Londres à partir de *1726*, et s'intéressa principalement aux courbes et calculs asymptotiques.
Le dessin en haut de la page est son écusson.

Ces deux mathématiciens nous prouvent d'ailleurs combien l'idée souvent répandue qu'à cette époque, les mathématiciens ne quittaient pas leur antre et ne connaissaient rien des travaux de leurs voisins européens, est fausse !

Autour de π

Abraham de Moivre et Stirling ont donc, comme je l'ai dit plus haut, tous les deux trouvé la célèbre formule du haut en *1730*, De Moivre y ajoutant le calcul de la densité d'une loi normale.
Ces deux résultats sont fondamentaux dans bien des domaines et je les utilise un peu partout dans ces pages. Il est facile de remarquer d'ailleurs que dans une certaine mesure, il y a une sorte d'équivalence entre la formule de Stirling et celle de Wallis et que le lien entre les deux formules du haut s'appelle tout simplement la fonction Gamma !

J'aime d'ailleurs tant ce résultat $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$, qui, finalement est preque aussi beau que *exp(i*π*)=-1*, que j'en propose ici pas moins de trois démonstrations !!

Démonstrations

Mais commençons par la formule de Stirling pour liquider ce résultat d'analyse classique en prépa...

Introduisons pour cela la suite $s_n=(n+1/2)Ln(n)-n-Ln(n!)$.

Etudions la convergence de cette dernière en posant $u_n=s_n-s_{n-1}$. On obtient en simplifiant :

$$u_n = -\left(n-\frac{1}{2}\right)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)-1 = -\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{3n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)-1$$

$$= \frac{1}{12n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc la série de terme u_n est convergente donc par là même, la suite s_n (car les termes s_{n-1}, s_{n-2}... s'annulent deux à deux lorsque l'on somme u_n).

Donc :

$$s_n \xrightarrow{n\to\infty} L \text{ et en passant à l' exponentielle pour } s_n,\ n! \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}{e^L} \text{ donc}$$

$$(n!)^2 \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^{2n+\frac{1}{2}}e^{-2n}}{e^{2L}} \text{ et } (2n!) \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}e^{-2n}}{e^L} \text{ et on isole : } e^L = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!\,n^{\frac{1}{2}}}{(n!)^2\,2^{2n+\frac{1}{2}}}$$

Mais d'après la formule de Wallis, on a : $\frac{2^{4n+2}\,n(n!)^4}{((2n+1)!)^2} \xrightarrow{n\to\infty} \pi$ soit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!\,n^{\frac{1}{2}}}{(n!)^2\,2^{2n+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{ donc finalement } L = -\ln(\sqrt{2\pi}) \text{ et } n! \overset{n\to\infty}{\sim} n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$$

Cool ! c'est bien ce que l'on voulait !

Néanmoins, je n'ai pas trouvé la démonstration de la formule générale. Je sais seulement qu'elle provient de l'application au logarithme d'un développement de fonction (voir *Encyclopédie Universalis*, il me semble)

Passons maintenant à la densité de la loi normale ou, ce qui revient au même, l'aire sous la "cloche de Gauss". Notons de plus qu'avec le changement de variable sur R^+, $x=t^{1/2}$, on remarque que cela revient à déterminer $\Gamma(1/2)$ où Γ est la célèbre fonction gamma d'Euler définie par : $\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$.

1) Première démonstration : Laissons la parole à Camille Jordan (cours d'analyse à Polytechnique, *1*ère année *1892-1893*) :

Détermination de quelques intégrales définies remarquables.

1° $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$. — Cette intégrale est finie et déterminée.
Soit I sa valeur.
Posons $x=\alpha y$, α étant une constante >0.

$$I=\int_0^\infty e^{-\alpha^2y^2}\alpha\,dy$$

Multiplions par $e^{-\alpha^2}$ et intégrons par rapport à α. de 0 à ∞,

$$I\int_0^\infty e^{-\alpha^2}d\alpha=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\alpha^2(1+y^2)}\alpha\,dy\,d\alpha$$

ou :

$$I^2=-\int_0^\infty\left[\frac{e^{-\alpha^2(1+y^2)}}{2(1+y^2)}\right]_0^\infty dy$$

$$=\int_0^\infty\frac{dy}{2(1+y^2)}=\frac{1}{2}\left[\text{arc tg } y\right]_0^\infty$$

$$=\frac{\pi}{4}$$

donc

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

2° $\int_0^\infty e^{-\alpha y^2}y^{2n}.dy$. — De cette intégrale se déduisent plusieurs autres.
Posons $x=y\sqrt{\alpha}$

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\sqrt{\alpha}\int_0^\infty e^{-\alpha y^2}dy\quad\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

donc :

$$\int_0^\infty e^{-\alpha y^2}dy=\frac{1}{2}\alpha^{-\frac{1}{2}}.\sqrt{\pi}.$$

2) Deuxième méthode : un grand classique de changement de variables !

On considère l'ensemble $C_a=\{(x,y)\in R^{+2}\mid x^2+y^2\leq a^2\}$ et le pavé de R^2 $K_a=[0,a]^2$.
Maintenant, introduisons l'intégrale parfaitement définie (est-ce nécessaire de le montrer ?) :

$$I_a = \int_0^a e^{-x^2}dx.\ \text{On a } I_a^2 = \left(\int_0^a e^{-x^2}dx\right)\left(\int_0^a e^{-y^2}dy\right) = \int_{K_a} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

(désolé, l'intégrale n'est pas très esthétique, mais le copier-coller de l'éditeur d'équations ne fonctionne visiblement pas très bien !)

L'exponentielle est positive et puisque $C_a \subset K_a \subset C_{a\sqrt{2}}$ on obtient $\iint_{C_a} e^{-(x^2+y^2)}dxdy \le I_a^2 \le \iint_{C_{a\sqrt{2}}} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$

Ensuite, on considère le difféomorphisme $\varphi(r,\theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ dont le jacobien très connu vaut *r*.
En appliquant ce changement de variable à l'intégrale double, on écrit :

$$\iint_{C_a} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a re^{-r^2}dr = \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^a = \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-a^2}\right)$$

donc l'encadrement donne :

$\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-a^2}\right) \le I_a^2 \le \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-2a^2}\right)$ donc $\lim_{n\to\infty} I_a = \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ce qui donne bien le résultat du haut de la page. A noter que les deux écritures du résultat, comme précédemment (intégrale sur R^+), et comme en haut de la page (intégrale sur *R*) sont équivalentes puisque le terme en exponentielle est pair)

3) Troisième démonstration : Je suis en train de l'écrire !!

Essais

La formule de Moivre/Stirling n'est pas un modèle de performance... mais elle est tellement utile en probabilité et analyse qu'on ne va pas lui en vouloir ! Et puis la généralisation de la formule améliore un peu les performances en poussant *k* plus loin que *0* dans la somme.
Cela donne ainsi pour *k=5* :

$$\frac{(n!)^2 e^{2n-\frac{1}{6n}+\frac{1}{180n^3}-\frac{1}{630n^5}+\frac{1}{840n^7}-\frac{1}{594n^9}}}{2n^{2n+1}} \xrightarrow{n\to\infty} \pi$$

Voyons plutôt les essais :

n/k	*k=0*	*k=1*	*k=2*	*k=3*	*k=4*	*k=5*
n=5	*3,247 (0)*	*3,1414 (3)*	*3,141594 (5)*	*7* déc.	*8* déc.	*9* déc.
n=10	*3,1943 (1)*	*3,14157 (4)*	*3,1415927 (6)*	*9* déc.	*10* déc.	*12* déc.
n=50	*3,152 (1)*	*7* déc.	*9* déc.	*13* déc.	*16* déc.	*20* déc.
n=100	*3,1468 (2)*	*7* déc.	*10* déc.	*16* déc.	*20* déc.	*23* déc.
n=200	*3,144 (2)*	*8* déc.	*12* déc.	*18* déc.	*22* déc.	*26* déc.

Bien que les termes supplémentaires apportent une certaine efficacité au début, rapidement les suites s'essoufflent et rien n'empêche la convergence logarithmique.

On peut estimer cette convergence :

k=0	*k=1*	*k=2*	*k=3*	*k=4*	*k=5*
Log(n)	*3.9Log(n)*	*5.2Log(n)*	*8Log(n)*	*9,6Log(n)*	*11.5Log(n)*

Mouais, pas terrible... Et pour ne rien arranger, le *Delta2* d'Aitken n'est pas du tout efficace, bon, tant pis !

A noter qu'on le sait, somme et intégrale ne sont guères éloignées mathématiquement (c'est d'ailleurs un même objet en théorie de l'intégrale de Lebesgue, puisque l'intégrale de Riemann correspond à peu près à celle obtenue avec la mesure de Lebesgue, et la somme à celle obtenue avec la mesure de comptage !)
Il n'est donc guère difficile de comprendre que lorsque l'on considère :

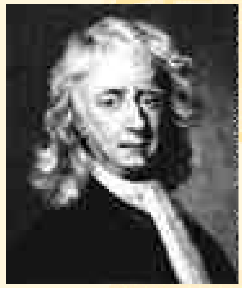
$$\left(\frac{1}{10^5}\sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{n^2}{10^{10}}}\right)^2 = p$$

p est un nombre proche de π. Eh bien, très proche même puisque *p* et π sont égaux sur les *42* premiers milliards de décimales d'après une démonstration des Borwein. Comme quoi, il ne faut pas toujours conclure trop vite lorsque l'on a calculé quelques décimales d'une formule ! Néanmoins, on peut penser que ce genre de formules, s'il n'y avait pas l'exponentielle, pourrait être intéressante à exploiter puisqu'il suffit de faire un calcul approché d'intégrale pour tomber sur des décimales de *Pi*.

---

retour à la page d' accueil

page d' accueil



Isaac Newton
(1642 - 1727)

Formules de Newton

$$\pi = 6\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{4n+1}(n!)^2\,(2n+1)} \quad (1) \qquad \pi = 24\left(\frac{\sqrt{3}}{32} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{4n+2}\,(n!)^2\,(2n-1)(2n+3)}\right) \quad (2)$$

Une suite similaire :

$$\pi = 4 - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-2)!\,k}{2^{2k-3}(k!)^2(2k+1)} \quad (3)$$

Tranches de vie

Isaac Newton naquit le jour de Noël *1642*. De famille humble, il se montra très inventif dès son enfance. Entrant à l'université de Cambridge en *1660*, il rencontra un professeur et ami qui sera déterminant dans sa formation, Isaac Barrow.
Newton maîtrise rapidement les mathématiques de son époque. Mais la grande peste (*1665-1666*) l'oblige à retourner dans son village natal de Woolsthorpe, ce qui lui donne du temps pour ses recherches mathématiques et physiques.
Et quelles recherches ! Lois du mouvement des astres (attraction universelle), loi de l'optique sont brillament abordées et Newton découvre le calcul différentiel (rien que ça) grâce à sa méthode des fluxions ($x+x\cdot o$

ou $x+dx$ en notation moderne, enfin si l'on veut, puisqu'elle a été inventée par son grand rival Leibniz !)
Grand rival car celui-ci et Newton se querelleront violemment sur la paternité de l'invention de l'analyse différentielle jusqu'à la fin de leur vie. Les notations $\dot{x}$ ou $\ddot{x}$ de Newton ont tout de même perduré en physique...
La disparition de Newton le *20 mars 1727* provoque un deuil scientifique rarement égalé en Angleterre. Il est d'ailleurs inhumé à l'abbaye de Westminster.

Autour de π

Ce qui nous intéresse ici, c'est bien sûr π et ces deux formules découlant d'une analyse ingénieuse qui est en fait un cas particulier du DL d'*arcsin* :

Démonstration

Démontrons la première formule de façon "moderne" et rapide avant de laisser place à l'ingéniosité de la méthode originelle de Newton pour la seconde formule !

Si l'on pose $y=Arcsin(x)$, c'est à dire $x=sin(y)$ pour $-1<x<1$, on obtient facilement :
$dx=cos(y)dy=(1-sin^2(y))^{-1/2}dy$ donc :

$$\frac{d\mathrm{Arcsin}(x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{or pour } -1<x<1 \text{ on a :}$$

$$(1+x)^a = 1 + ax + a(a-1)\frac{x^2}{2} + \ldots + a(a-1)\ldots(a-n+1)\frac{x^n}{n!} + \ldots \quad \text{donc}$$

$$\frac{d\mathrm{Arcsin}(x)}{dx} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-k+1\right)(-1)^k\,\frac{(x^2)^k}{k!}$$

Par une récurrence que je qualifierai de "presque" immédiate, on transforme :

$$\frac{(-1)^k\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)..\left(-\frac{1}{2}-k+1\right)}{k\,!}=\frac{(2k)!}{2^{2k}(k\,!)^2}\quad \text{d'où on a :}$$

$$\frac{d\mathrm{Arc}\sin(x)}{dx}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k)!}{2^{2k}(k\,!)^2}x^{2k}$$

Comme c'est une série entière de rayon de convergence *1* (immédiat également par le critère de d'Alembert), on peut intégrer entre *0* et *x* sur un compact inclus dans *]-1,1[* et on obtient alors :

$$\mathrm{Arc}\sin(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k)!}{2^{2k}(k\,!)^2(2k+1)}x^{2k+1}$$

Et là, toutes les fantaisies sont permises !
On peut remplacer *x* par n'importe quoi, pourvu que *-1<x<1*...
Pour *x=1/2*, on a :

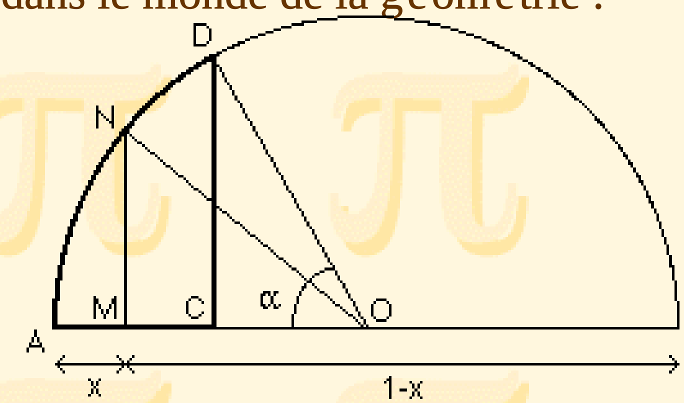
$$\pi=6\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k)!}{2^{4k+1}(k\,!)^2(2k+1)}$$ ce qui est bien la première formule !

Ou bien on peut choisir

$$x=\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)\sqrt{2}}{4}\quad \text{et}\quad \mathrm{Arcsin}(x)=\frac{\pi}{12}\quad \text{on obtient :}$$

$$\pi=12\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k)!\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)^{2k+1}}{2^{5k+2}(k\,!)^2(2k+1)}$$

Pour la deuxième formule, repassons dans le monde de la géométrie :



Newton a entrepris une démarche assez originale que nous retranscrivons ici :
Considérons le cercle de diamètre *AB=1* et *OC=1/4* (donc $\alpha=\pi/3$) :
Newton cherche à calculer l'aire du domaine en gras *ACD* (Notée *a(ACD)*, notation tout à fait personnelle)

1. D'une part, $\alpha=\pi/3$ donc $6a(AOD)=\pi R^2=\pi/4$ car $R=1/2$
D'où $a(AOD)=\pi/24$ or ,

$$a(ODC)=\frac{OC*OD}{2}=\frac{OC*\sqrt{OD^2-OC^2}}{2}=\frac{1}{2}\frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{16}}=\frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{16}}=\frac{\sqrt{3}}{32}$$

$$\text{d'où}\quad a(ACD)=a(AOD)-a(ODC)=\frac{\pi}{24}-\frac{\sqrt{3}}{32}$$

2. D'autre part, Newton considère que $a(ACD)$ est égale à l'aire balayée par le segment $[MN]$ entre le point A et le segment $[CD]$, ce qui se conçoit aisément !!
On a par pythagore $AN^2+NB^2=AB^2$ or $AN^2=AM^2+MN^2$ et $NB^2=MB^2+MN^2$
d'où $AM^2+MN^2+MB^2+MN^2=AB^2$
et l'on obtient alors $2MN^2=AB^2-AM^2-MB^2=1-x^2-(1-x)^2=2x(1-x)$
On en conclut donc que :

$$a(ACD)=\int_0^{\frac{1}{4}} MN\,dx=\int_0^{\frac{1}{4}}\sqrt{x}\sqrt{1-x}\,dx\quad \text{or on a bien } -1<x<1 \text{ ici donc}$$

$$(1-x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{\frac{1}{2}}{1!}(-x)+\frac{\frac{1}{2}\,\frac{-1}{2}}{2!}(-x)^2+\ldots+\frac{\frac{1}{2}\,\frac{-1}{2}\ldots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!}(-x)^k+\ldots$$

$$\text{or}\quad (-1)^k\frac{\frac{1}{2}\,\frac{-1}{2}\ldots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!}=-\frac{(2k)!}{(2k-1)2^{2k}(k!)^2}\quad \text{(récurrence hyperclassique !)}$$

$$\text{donc :}\quad \sqrt{x}\sqrt{1-x}=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k)!}{(2k-1)2^{2k}(k!)^2}x^{k+\frac{1}{2}}$$

Comme on s'en prend à une série entière, on a parfaitement le droit de l'intégrer terme à terme. On trouve alors :

$$\int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{x}\sqrt{1-x}\,dx = \left[-\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{\left(k+\frac{3}{2}\right)(2k-1)2^{2k}(k!)^2} x^{k+\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{1}{4}} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{(2k+3)(2k-1)2^{4k+2}(k!)^2}$$

donc $\frac{\pi}{24} - \frac{\sqrt{3}}{32} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{(2k+3)(2k-1)2^{4k+2}(k!)^2}$ et finalement :

$$\pi = 24\left(\frac{\sqrt{3}}{32} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{(2k+3)(2k-1)2^{4k+2}(k!)^2}\right)$$

Chouette, non ?

En prenant en compte l'équation du quart de cercle $(1-x^2)^{1/2}$ pour x variant entre *0* et *1*, on obtient de même :

$$\pi = 4 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-2)!k}{2^{2k-3}(k!)^2(2k+1)}$$

Essais

Ces suites ont une convergence quasi linéaire reconnaissable au premier coup d'oeil... Les essais ne sont donc a priori guère surprenants !

n=...	Suite 1	Suite 2	Suite 3
5	*3,1415767 (4)*	*3,1415950 (5)*	*3,170 (1)*
10	*3,141592646 (7)*	*3,1415926541 (8)*	*3,15256 (1)*
50	*33* décimales justes	*34* décimales justes	*3,1426 (2)*
100	*63* décimales justes	*65* décimales justes	*3,141965 (3)*

Les deux premières répondent bien aux attentes avec des convergences respectives d'environ *0,63n* et *0,65n* (les ajouts logarithmiques sont négligés !). Par contre, la suite *3* est très décevante. Tiens, voyons pourquoi...

L'équivalence de Stirling nous donne :

$$\pi = 4 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-2)!\,k}{2^{2k-3}(k!)^2(2k+1)}$$

$$\frac{(2k-2)!\,k}{2^{2k-3}(k!)^2(2k+1)} \underset{\sim}{\overset{n\to\infty}{}} \frac{1}{(k-1)^2\sqrt{k}\sqrt{\pi}} \text{ et avec } \frac{1}{(k-1)^2\sqrt{k}\sqrt{\pi}} = 10^{-n}$$

on obtient $n \approx \frac{5}{2}\log(k) + a$ au contraire pour la suite2, on a :

$$\frac{(2k)!}{2^{4k+2}(k!)^2(2k-1)(2k+3)} \underset{\sim}{\overset{n\to\infty}{}} \frac{1}{16.4^k(k-1)^2\sqrt{k}\sqrt{\pi}} \text{ et } \frac{1}{16.4^k(k-1)^2\sqrt{k}\sqrt{\pi}} = 10^{-n}$$

$$\Rightarrow n \approx k\log(4) + \frac{5}{2}\log(k) + b$$

Ce qui confirme bien l'extrême lenteur de la suite *3* (convergence logarithmique) et la relative rapidité des suites *1* et *2* (convergence linéaire !). De plus, *Log(4)=0,60...* ce qui est également conforme aux observations !
Méfions-nous donc des séries en factorielles, certaines peuvent avoir une convergence logarithmique s'il n'y a plus de puissance au dénominateur dans l'équivalent du terme de la série... Heureusement, c'est assez rare...

A noter que le *Delta2* d'Aitken est pratiquement inefficace sur ce genre de suites (on ne gagne qu'une décimale au maximum pour $n \leq 100$). Ca ne vaut pas le coup... Donc, pas de chapitre "Accélération de la convergence"!

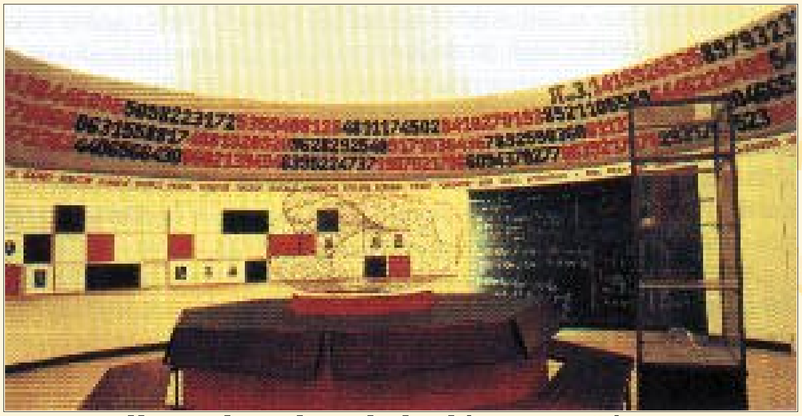
---

retour à la page d' accueil

page d' accueil

Et pour quelques décimales de plus...

Historique des records



Salle Pi du palais de la découverte à Paris

Les meilleurs calculs de décimales de Pi à travers les âges... :

(en notations modernes, bien sûr...)

note : *4*2+4*3* veut dire *Pi=4 arctan(1/2)+4arctan(1/3)*, c'est la formule qui sert à calculer les décimales (au moyen du DL d'arctan)

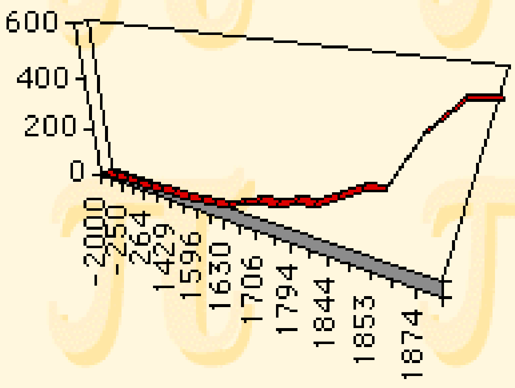
NOM	DATE	Approx. ou méthode utilisée	Décimales justes
Babyloniens	-2000	3+1/8=3,125	*1*
Egyptiens (scribe Ahmès)	-1650	$(16/9)^2$=3,16045	*1*
Chinois	-1200	3	*0*
Bible	-550	3	*0*
Archimède	-250	3,14185	*3*
Hon Han Shu	130		*1*
Ptolémée	150	377/120=3,14166	*3*
Chung Hing	250		*1*
Wang Fau	250	142/45=3,155	*1*
Liu Hui	264	3,14159	*5*
Siddhanta	380	3+177/1250=3,1416	*3*
Tsu Chung Chih	480?	355/113=3,141592	*6*
Aryabhata	499	3,14156	*4*
Brahmagupta	640	$10^{1/2}$=3,1622	*1*

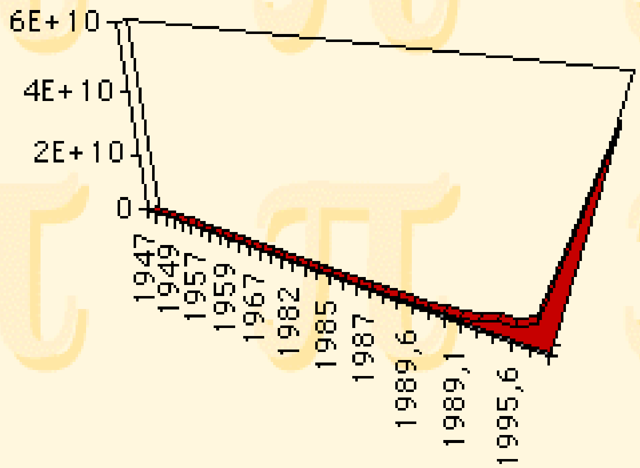
Al-Khowarizmi	800	3,1416	*3*
Fibonacci	1220	3,141818	*3*
Al-Kashi	1429	$6^{0}16^{I}59^{II}28^{III}1^{IV}34^{V}51^{VI}46^{VII}14^{VIII}50^{IX}$	*14*
Otho	1573	3,1415929	*6*
Viete	1593	3,1415926536	*9*
Romanus	1593		*15*
Van Ceulen	1596	méthode d' Archimède	*20*
Van Ceulen	1609	"	*34*
Grienberger	1630	"	*39*
Newton	1665	"	*16*
Sharp	1699	"	*71*
Seki	1700	"	*10*
Machin	1706	16*5-5*239 (Machin)	*100*
De Lagny	1719	4*2+4*3 (Euler)	*112 (sur 127 calculées)*
Takebe Katahiro	1723	polygone 1024 côtés	*41*
Matsunaga	1739		*50*
Vega	1794	20*7+8arctan(3/79) (Euler 1755)	*140*
Rutherford	1824	16*5-4*70+4*99 (Euler 1764)	*152 (sur 208)*
Strassnitsky, Dahse	1844	4*2+4*5+4*8 (Strassnitsky 1844)	*200*
Clausen	1847	8*3+4*7 (Hutton 1776)	*248*
Lehmann	1853	8*3+4*7	*261*
Rutherford	1853	formule de Machin	*440*
Shanks	1874	formule de Machin	*527 (sur 707)*
Ferguson	1945	12*4+4*20+4*1985 (Loney 1893)	*539*
Ferguson	1947		*620*
Ferguson	1948		*710*
Ferguson et wrench	1948		*808*
Smith et Wrench	1949		*1 120*
Reitwiesner sur l' ENIAC	1949	formule de Machin	*2 037*
Nicholson et Jeenel	1954	formules d'arctan	*3 092*
Felton	1957	32*10-4*239-16*515 (Klingenstierna 1730)	*7 480*
Genuys	01-1958		*10 000*
Felton	05-1958	48*18+32*57-20*239 (Gauss 1863)	*10 021*
Guilloud	1959		*16 157*

Shanks et Wrench	1961	24*8+8*57+4*239 (Störmer 1896) + formule de Gauss	*100 265*
Guilloud et Filliatre	1966		*250 000*
Guilloud et Dichampt	1967		*500 000*
Guilloud et Bouyer	1973	formules Störmer+ Gauss	*1 001 250*
Miyoshi et Kanada	1981		*2 000 036*
Guilloud	1982		*2 000 050*
Tamura	1982		*8 388 576*
Kanada, Yoshino et Tamura	1982		*16 777 206*
Gosper	1985	suite de Ramanujan	*17 526 200*
Bailey	01-1986	algorithmes d' ordre 2+ d' ordre 4 des Borwein	*29 360 111*
Kanada et Tamura	10-1986	algo d 'ordre 2 et 4 des Borwein	*67 108 839*
Kanada, Tamura, Kobo	01-1987	"	*134 217 700*
Kanada et Tamura	01-1988	"	*201 326 551*
Chudnovsky et Chudnovsky	05-1989	Suites de type Ramanujan	*480 000 000*
Chudnovsky et Chudnovsky	06-1989	Suites de type Ramanujan	*525 229 270*
Kanada et Tamura	07-1989	algo d 'ordre 2 et 4 des Borwein	*536 870 898*
Chudnovsky et Chudnovsky	08-1989	Suites de type Ramanujan	*1 011 196 691*
Kanada et Tamura	11-1989	algo d 'ordre 2 et 4 des Borwein	*1 073 741 799*
Chudnovsky et Chudnovsky	08-1991	Suites de type Ramanujan	*2 260 000 000*
Chudnovsky et Chudnovsky	05-1994	Suites de type Ramanujan	*4 044 000 000*
Kanada	06-1995	algo d 'ordre 2 et 4 des Borwein	*4 294 967 286*
Kanada	10-1995	algo d 'ordre 2 et 4 des Borwein	*6 442 450 938*
Takahashi-Kanada	08-1997	algo d 'ordre 2 et 4 des Borwein	*51,539,600,000*
Takahashi-Kanada	04-1999	algo de Brent/Salamin et ordre 4 des Borwein	*68,719,470,000*
Takahashi-Kanada	20-09-1999	algo de Brent/Salamin et ordre 4 des Borwein	***206,158,430,000*** *soit environ* 3.2^{36}

d'après D. Bailey, J. et P. Borwein, S. Plouffe et moi-même

Décimales calculées à la main puis sur des ordinateurs





Position calculée (digit en base 2 sans les digits précédents)

Bailey-Borwein-Plouffe	1996	40 000 000 000
Bellard	6-7-1996	50 000 000 000
Bellard	7-10-96	100 000 000 000
Bellard	22-9-97	1 000 000 000 000
Colin Percival - Project Pihex	21-8-98	5 000 000 000 000
Colin Percival - Project Pihex	9-2-99	40 000 000 000 000

A noter que la position *250 000 000 000 000* est en cours de calcul (250 000 milliardième position !)

Fraction continue de Pi

Pas mal de termes de la fraction continue de Pi ont été calculés. Voici les deux principaux records en date :

Gosper	1977	17,001,303
H. Havermann	Juin 1999	20,000,000

Les échos du record de Takahashi-Kanada datant d'avril 1999 :

Deux calculs sur un HITACHI SR8000 basés sur deux algorithmes indépendants (méthode de Brent/Salamin et algorithme d'ordre *4* des frêres Borwein) ont généré *68,719,476,736* ($=2^{36}$) décimales de Pi. En comparant les deux résultats, on a trouvé *68,719,476,693* décimales communes. Le nouveau record mondial a donc été proclamé pour *68,719,470,000* décimales de Pi calculées.

Programme principal :
Début : 2 Avril 1999 *20:14:38*
Fin : 4 Avril 1999 *05:08:41*
Temps total : *32:54:02*
Mémoire utilisée : *296* GB
Algorithme : Gauss-Legendre (Brent-Salamin)

Programme de vérification :
Début : 4th April 1999 *05:08:48*
Fin : 5th April 1999 *20:29:25*
Temps total : *39:20:37*
Mémoire utilisée : *280* GB

Algorithme : ordre *4* des Borwein

Statistiques sur Pi

Fréquence de distribution des décimales sur les 50 000 000 000 premières:

'0' : 5000012647
'1' : 4999986263
'2' : 5000020237
'3' : 4999914405
'4' : 5000023598
'5' : 4999991499
'6' : 4999928368
'7' : 5000014860
'8' : 5000117637
'9' : 4999990486
Chi deux = 5.60

Fréquence de distribution des décimales de *1/Pi* sur les *50,000,000,000* premières:

'0' : 4999969955
'1' : 5000113699
'2' : 4999987893
'3' : 5000040906
'4' : 4999985863
'5' : 4999977583
'6' : 4999990916
'7' : 4999985552
'8' : 4999881183
'9' : 5000066450
Chi deux = 7.04

Et nouvelles statistiques sur le record de septembre 1999 (206,158,430,000 décimales) :

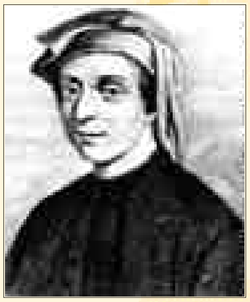
Deux calculs sur un HITACHI SR8000 basés sur deux algorithmes indépendants (méthode de Brent/Salamin et algorithme d'ordre *4* des frêres Borwein) ont généré *206,158,430,208* (*=3.2^36*) décimales de Pi. En comparant les deux résultats, on a trouvé *206,158,430,163* décimales communes. Le nouveau record mondial a donc été proclamé pour *206,158,430,000* décimales de Pi calculées.

Programme principal :
Début : 18 Septembre 1999 *19:00:52* (heure du Japon)
Fin : 20 Septembre 1999 *08:21:56*
Temps total : *37:21:04*
Mémoire utilisée : *865* GB (*=6.758*128*)
Algorithme : Gauss-Legendre (Brent-Salamin)

Programme de vérification :
Début : 26 Juin 1999 *01:22:50*
Fin : 27 Juin 1999 *23:30:40*
Temps total : *46:07:10*
Mémoire utilisée : *817* GB (*=6,383*128*)
Algorithme : ordre *4* des Borwein

---

retour à la page d' accueil



Léonard de Pise - Fibonacci
(1180 - 1250)

Des résultats assez étonnants concernant la suite de Fibonacci

U_0 et U_1 quelconques strictement positifs (si égaux à 1 on retrouve la suite de Fibonacci !)

$U_n = U_{n-1} + U_{n-2}$

$$\forall n \in N \qquad \pi = 4\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)} \left(\left(\frac{U_{n+1}}{U_{n+2}} \right)^{2k+1} + \left(\frac{U_n}{U_{n+3}} \right)^{2k+1} \right)$$

Avec $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ *le nombre d'or,*

$$\pi = 4\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \left(\phi^{-2k-1} + \phi^{-6k-3} \right) = 4\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \left((\phi-1)^{2k+1} + (2\phi-3)^{2k+1} \right)$$

Tranches de vie :

Fibonacci est né à Pise en *1180*. Fils d'un commerçant toscan (Bonaccio, d'où son surnom), il est amené à voyager beaucoup, notamment au Proche-Orient. Fasciné par la numérotation arabe qu'il découvre, il l'introduit dans le monde occidental en rédigeant un ouvrage d'explication à son retour *(Liber abaci)*. Ceci lui permet d'étudier plus facilement les équations d'ordre *1* et *2* et, comme on le

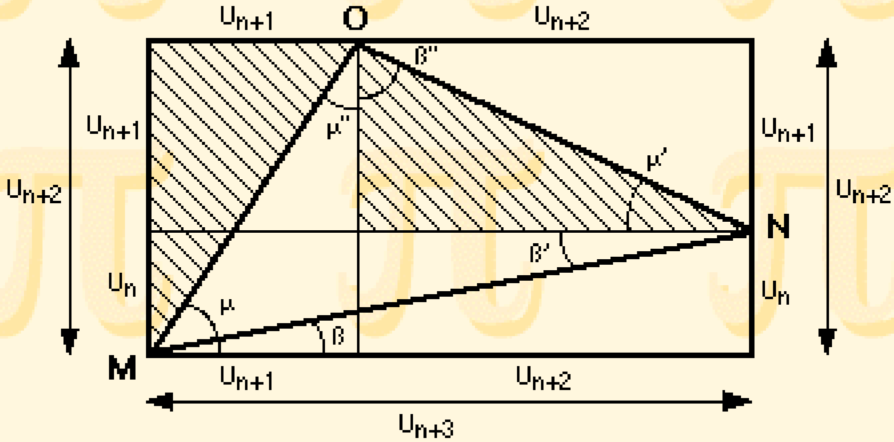
voit dans l'historique des records, de calculer quelques décimales de *Pi* !!
Fibonacci est resté très célèbre grâce à sa suite et au fait qu'il soit preque le seul mathématicien occidental de talent à cette époque.
Sa suite était censée résoudre le problème suivant :
*On considère un couple de lapins qui se reproduit. Combien obtiendrons-nous de couples de lapins après un nombre donné de mois sachant que chaque couple produit chaque mois un nouveau couple, lequel ne devient productif qu'après deux mois (*1202*, d'après *Des mathématiciens de A à Z,* voir Biblio)

Autour de π

Fibonacci n'a évidemment jamais écrit le résultat précédent, mais sa suite et ses dérivées sont au coeur de cette formule, et il a entrepris un calcul des décimales de *Pi* (*3,14188*); son intérêt pour cette constante méritait donc de toutes façons une place sur ce site !

Démonstration

Elle est essentiellement géométrique...
Soit une suite récurrente du type : $U_n=U_{n-1}+U_{n-2}$
On considère *4* termes consécutifs de cette suite : U_n, U_{n+1}, U_{n+2}, U_{n+3}
Soient les *6* angle aigus *ß*, *ß'*, *ß''*, *µ*, *µ'*, *µ''*contenus dans la figure suivante, un rectangle de côtés $U_{n+3}=U_{n+2}+U_{n+1}$ et $U_{n+2}=U_{n+1}+U_n$



On a d'après le schéma *OM=ON* car *[OM] et [ON]* sont les hypoténuses du même triangle rectangle de base U_{n+2} et hauteur U_{n+1}.

Les triangles hachurés sont les mêmes par rotation d'angle $\pi/2$ donc $\mu''=\mu'$ or $ß''+\mu'=\pi/2$ donc $ß''+\mu''=\pi/2$ et le triangle est rectangle isocèle en *O* (bon, d'accord, ce n'est pas flagrant sur le schéma !)

Les autres angles intérieurs du triangle ont donc pour mesure $\pi/4$ donc $\mu-ß=\pi/4$ et $ß'+\mu'=\pi/4$

or $\tan(ß)=U_n / U_{n+3}$, $\tan(\mu)=U_{n+2}/U_{n+1}$

et $\tan(ß')=U_n / U_{n+3}$, $\tan(\mu')=U_{n+1} / U_{n+2}$

D'où $\pi/4=\mathrm{Arctan}(U_{n+2} / U_{n+1})-\mathrm{Arctan}(U_n / U_{n+3})$

et $\pi/4=\mathrm{Arctan}(U_{n+1}/U_{n+2})+\mathrm{Arctan}(U_n/U_{n+3})$

La suite de Fibonacci étant croissante, la seconde équation est une somme d'*arctan* de nombres ≤ 1. En appliquant le développement limité d'*arctan* en *0* (qui est valable jusqu'à *1*) à la deuxième des deux égalités précédentes, on a le résultat :

U_0 et U_1 quelconques strictement positifs (si égaux à 1 on retrouve la suite de Fibonacci !)

$U_n = U_{n-1} + U_{n-2}$

$$\forall n \in N \quad \pi = 4\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)}\left(\left(\frac{U_{n+1}}{U_{n+2}}\right)^{2k+1} + \left(\frac{U_n}{U_{n+3}}\right)^{2k+1}\right)$$

Encore plus fort !

Chacun sait que le quotient U_{n+1}/U_n tend vers le nombre d'or $\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ donc il est facile de voir que U_n/U_{n+3} tend vers $1/\phi^3$. En passant à la limite pour n dans la somme précedente, on a donc :

$$\pi = 4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\left(\phi^{-2k-1}+\phi^{-6k-3}\right) = 4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\left((\phi-1)^{2k+1}+(2\phi-3)^{2k+1}\right)$$

$$car \quad \phi^2-\phi-1=0 \iff \phi-1=\frac{1}{\phi} \implies 2\phi-3=\frac{1}{\phi^3}$$

Après e et π, voilà que ϕ et π se trouvent passionnément liés !!

Essais

On connaît bien la convergence linéaire des suites d'arctan, donnons plutôt quelques unes des égalités que l'on peut obtenir grâce à cette formule :

$\pi/4=Arctan(U_{n+1}/U_{n+2})+Arctan(U_n/U_{n+3})$ noté ci-dessous $U_{n+1}/U_{n+2}+U_n/U_{n+3}$ par simplicité !

n=0	*1/2+1/3* (Formule d'Euler)
n=1	*2/3+1/5*
n=2	*3/5+1/4*
n=3	*5/8+3/13*
n=4	*8/13+5/21*
n=5	*13/21+4/17*
n=6	*21/34+13/55*
n=10	*144/233+89/377*

On obtient ainsi un ensemble parfaitement dénombrable de suites convergeant vers π...

retour à la page d'accueil

page d'accueil

Takebe Katahiro
(1664 - 1739)

Un bel algorithme

$$\forall r > 1 \quad U_0 = 4\sin^2\left(\frac{\pi}{2r}\right) \qquad U_n = \frac{U_0\, U_{n-1}(2n)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{{U_0}^{n+1}\, 2(n!)^2}{(2n+2)!}$$

$$\pi = r\sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} U_n}$$

Tranches de vie

Ce nom n'évoque sans doute rien à la plupart des gens car Takebe Katahiro fut un mathématicien japonais, ce qui est assez peu commun, surtout à cette époque. En effet, né en *1664* d'une famille de samouraï, la mutation d'un Japon encore féodal ne peut qu'encourager Takebe à compléter une formation de samouraï devenue très incomplète... Il assimile rapidement l'enseignement de Seki Takakazu (*? - 1708*), le plus brillant mathématicien du Japon !

Les mathématiques de ce pays ne connaissent pas la science occidentale. Utilisant des batonnets en place des chiffres et sans trigonométrie (!), Seki et son disciple vont construire une nouvelle science au Japon, développant l'algèbre et l'analyse. Takebe meurt en *1739*.

Autour de π :

Takebe s'intéresse à *Pi*, et en calcule même *41* décimales à l'aide de la méthode d'Archimède et un polygone à *1024* côtés, ce qui est un exploit vu le système numérique utilisé !
Cela n'empêche pas Takebe de nous proposer par ailleurs une formule vraiment très intéressante, puisque notre ami japonais est le premier à avoir réussi à exprimer le carré de l'arc d'un cercle sous la forme d'une somme infinie dans son *Classique de Tetsujutsu* (*1722*) .
Les démonstrations n'étant pas encore de rigueur (malheureusement !), il nous est parvenu seulement la méthode numérique qu'il a utilisée pour arriver à sa formule...
On en tire facilement un algorithme en notations modernes puis une somme qui a des performances intéressantes. N'ayant pu dénicher nulle part de démonstration, j'ai cherché moi-même et en ai trouvé une pas trop difficile, mais suis toujours à la recherche d'une méthode plus élégante !

Démo

Posons $f(u)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2\,2^{2n}\,u^{2n+2}}{(2n+2)!}$ et $U_n=\frac{(n!)^2\,2^{2n}\,u^{2n+2}}{(2n+2)!}$. On a :

$\frac{U_{n+1}}{U_n}=\frac{(n+1)^2\,2^2\,u^2}{(2n+4)(2n+3)} \xrightarrow{n\to\infty} u^2$ donc d'après le critère de D'Alembert, la série converge pour $u<1$. (En passant, avec la formule de Moivre/Stirling, on montre facilement que la série n'est pas convergente pour $u=1$)
La fonction étant paire, elle est donc définie sur $]-1,1[$.
Nous allons chercher l'expression exacte de f par un processus classique

mais que l'on pourrait qualifier de "bourrin, typique prépa" !
Cherchons en effet l'équation différentielle que vérifie *f* !
On a :

$$f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2 2^{2n} u^{2n+2}}{(2n+2)!} \quad f'(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2 2^{2n} u^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad f''(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2 2^{2n} u^{2n}}{(2n)!}$$

donc calculons pour $u \in [0,1[$:

$$-uf'(u) + \left(1-u^2\right) f''(u) = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{(n!)^2 2^{2n} u^{2n+2}}{(2n+1)!} + \frac{(n!)^2 2^{2n} u^{2n+1}}{(2n)!} - \frac{(n!)^2 2^{2n} u^{2n+2}}{(2n)!}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{((n-1)!)^2 2^{2n-2} u^{2n}}{(2n-1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2 2^{2n} u^{2n}}{(2n)!} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((n-1)!)^2 2^{2n-2} u^{2n}}{(2n-2)!}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{((n-1)!)^2 2^{2n-2} u^{2n}}{(2n-2)!} \left(\frac{-1}{(2n-1)} + \frac{4n^2}{(2n)(2n-1)} - 1 \right)$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{((n-1)!)^2 2^{2n-2} u^{2n}}{(2n-2)!} \left(\frac{-(2n) + 4n^2 - (4n^2 - 2n)}{(2n)(2n-1)} \right) = 1$$

donc $y=f(u)$ vérifie :

$$-uy' + (1-u^2)y'' = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-u}{\sqrt{1-u^2}} y' + y'' \sqrt{1-u^2} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$$

On intègre entre 0 entre $x \in]0,1[$:

$$\int_0^x \frac{-u}{\sqrt{1-u^2}} y' + y'' \sqrt{1-u^2}\, du = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\, du$$

$$\Leftrightarrow \quad y' \sqrt{1-x^2} - y'(0) = \operatorname{Arcsin}(x) - \operatorname{Arcsin}(0)$$

or, $y'(0)=0$ ($u=0$ dans la série entière de limite $f'(u)$) donc on intègre encore :

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{Arcsin}(x) \;\Rightarrow\; y(u) - y(0) = \int_0^u \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{Arcsin}(x)\,dx$$

$$\Rightarrow\; y(u) - 0 = f(u) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Arcsin}(u)\right)^2 - 0 \quad car \quad y(0) = 0 \;\; (f(0) = 0)$$

Posons enfin pour $r>1$: $U_0=4\sin^2\left(\frac{\pi}{2r}\right)$. On a :

$$\frac{\pi^2}{r^2} = 4\left(\mathrm{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2r}\right)\right)\right)^2 = 8\,f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2r}\right)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} 8\,\frac{(n!)^2\,2^{2n}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2r}\right)\right)^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

$$\Leftrightarrow\quad \pi = r\sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} 2\,\frac{(n!)^2\left(4\sin^2\left(\frac{\pi}{2r}\right)\right)^{n+1}}{(2n+2)!}} = r\sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} U_n} \quad avec \quad U_n = \frac{2(n!)^2\,U_0^{n+1}}{(2n+2)!}$$

ce qui achève la démonstration ! Il va sans dire que les deux formes de U_n se déduisent facilement l'une de l'autre par récurrence immédiate (tellement immédiate d'ailleurs que je ne l'écris même pas !)

Essais

Non seulement la formule est assez belle mais ses performances sont loin d'être ridicules ! Il faut dire que la convergence linéaire est assez évidente d'après la forme du rapport $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(n+1)^2\,2^2\,u^2}{(2n+4)(2n+3)} \xrightarrow{n\to\infty} u^2 = \sin^2\left(\frac{\pi}{2r}\right)$ dans notre cas ici. Cela veut dire en effet qu'avec n assez grand, la suite U_n se comporte presque comme une suite géométrique de raison $\sin^2\left(\frac{\pi}{2r}\right)$.

L'équivalence de Moivre/Stirling nous donne d'ailleurs :

$$U_n \;\underset{n\to\infty}{\sim}\; \frac{U_0^{\,n+1}\,2\,n^{2n}\,e^{-2n}\,2\pi n}{(2n+2)^{2n+2}\,e^{-2n-2}\,\sqrt{2\pi(2n+2)}} \;\underset{n\to\infty}{\sim}\; \frac{\left(\sin^2\left(\frac{\pi}{2r}\right)\right)^{n+1} 2\,e^2\sqrt{\pi}}{n^{\frac{3}{2}}}$$

$$donc\quad -\log(U_n) \;\underset{n\to\infty}{\sim}\; n\log\left(\sin^{-2}\left(\frac{\pi}{2r}\right)\right) + \frac{3}{2}\log(n)$$

donc la convergence est un petit peu plus rapide que la convergence linéaire...
Théoriquement, on peut même construire grâce aux différentes valeurs de r des suites convergeant presque linéairement aussi vite que l'on veut !
Vérifions tout cela par des petits essais (pour *r=2*) :

n=1	*3,055050*
n=5	*3,1399 (1)*
n=10	*3,141568 (4)*
n=20	*3,141592643 (7)*
n=50	*17* décimales justes
n=100	*33* décimales justes
n=200	*64* décimales justes

ce qui donne une convergence d'environ *n / 3*, pas trop mal...

Maintenant pour *r=3* :

n=5	*3,14157 (4)*
n=10	*3,141592644 (7)*
n=50	*33* décimales justes
n=100	*63* décimales justes

Convergence d'environ *2n/3*

Et ensuite pour *r=6* :

n=5	*3,141592646 (7)*
n=10	*13* décimales justes

n=50	*61* décimales justes

Convergence *1.2n* ?

Enfin, pour s'amuser un peu, *r=12*

n=5	*11* décimales justes
n=10	*20* décimales justes
n=50	*92* décimales justes

On flirte avec la convergence *2n*, mais il est assez étonnant que la convergence ait l'air de s'essoufler alors qu'elle devrait être un peu meilleure que la convergence linéaire...

On remarquera que pour *r=2* ou *r=3*, on obtient une série de rationnels qui ne demandent qu'une extraction de racine à la fin, intéressant !

Accélération de la convergence

Comme d'habitude avec les convergence linéaires (c'est-à-dire que les suites ressemblent de plus en plus à une suite géométrique), le *Delta2* d'Aitken devrait être terriblement efficace. Mais c'est en fait un peu décevant...

Pour *r=2* :

	Sans Aitken	*Avec Aitken*
n=2	*3,112 (1)*	*3,132 (1)*
n=5	*3,1399 (1)*	*3,141428 (3)*
n=10	*3,141568 (4)*	*3,14159179 (5)*

n=20	*3,14159264 3 (7)*	*3,141592653479 (9)*
n=50	*17* décimales justes	*19* décimales justes
n=100	*33* décimales justes	*35* décimales justes
n=200	*64* décimales justes	*66* décimales justes

inutile de pousser la démonstration plus loin, le *Delta2* ajoute *2* décimales au résultat, ce qui n'est guère concluant !

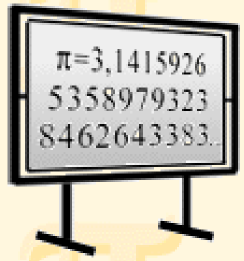
Pour *r=6*

n=5	*3,14159264 6 (7)*	*3,14159265325 (9)*
n=10	*13* décimales justes	*15* décimales exactes
n=50	*61* décimales justes	*65* décimales exactes

A peine mieux, même si *4* décimales supplémentaires pour *n=50*, cela commence à devenir un peu plus intéressant.. Je ne peux malheureusement pousser les calculs plus loin pour l'instant...

[retour à la page d'accueil]

page d' accueil



Approximations et bizarreries sur Pi

Cette page est ainsi consacrée aux approximations rationnelles et irrationnelles qui se rapprochent le plus de Pi. Et il y en a de fameuses !
Sans oublier quelques curiosités approximatives concernant Pi.

En effet, depuis que l'on s'est rendu compte de l'existence d'une constante définissant le rapport du périmètre d'un cercle sur son diamètre, ce qui se situe à l'époque des Egyptiens et Babyloniens, les mathématiciens ont tenté de donner une valeur exacte de Pi, ou ont ensuite donné des approximations simples de Pi après le XVIIIe siècle.

Dans l'antiquité

Bien sûr, dans l'antiquité, ces mathématiciens ne savaient pas que Pi était irrationnel, ni même transcendant ! Alors on tenait certaines valeurs estimées de Pi pour exactes !
Tout ce cheminement dans l'antiquité est relaté sur la page de l'ère géométrique, je rappelerai seulement ici les valeurs :
Donc, les Babyloniens avaient estimé :

$$3+\frac{7}{60}+\frac{30}{3600}=3+\frac{1}{8}=3,125$$

ce qui est assez remarquable pour l'époque.
Le scribe Ahmès chez les Egyptiens avait obtenu :

$$\pi=(16/9)^2=3{,}16...$$

La Bible est resté célèbre pour son estimation hasardeuse de Pi : 3 !!

On se rappelle qu'Archimède avait encadré Pi, ce qui prouve qu'il avait conscience de ne pas être tombé sur la bonne valeur !

$$3+\frac{10}{71}<\pi<3+\frac{1}{7}$$

En Chine, Tsu Chung Chih devance les occidentaux et propose :

355/113 = 3,14159292...

Mais revenons en Occident. Tentant toujours d'obtenir une valeur exacte pour Pi, Nicolas de Cues propose :

$$\pi=\frac{3}{4}\left(\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)\approx 3{,}136$$

Le plus fort reste sans aucun doute Edward Johnston Goodwin (1828-1902) qui déposa, en 1897 dans l'Indiana aux Etats-Unis, un projet de loi où diverses formules appliquées auraient conduit à assigner pour valeur à Pi : 4, puis 3,1604, puis 3,2 et enfin 3,232 !
Bien sûr, cet auteur ingénieux avait résolu la quadrature du cercle, la trisection de l'angle et la duplication du cube, démontrées insolubles quelques années auparavant, et avait accepté que ses découvertes soient utilisées gratuitement !
Même la prestigieuse revue American Mathematical Monthly, alors jeune, avait accepté deux de ses articles !
Heureusement, ce projet, qui faillit être adopté, fut repoussé finalement car on considérait alors que la loi ne devait pas décider de la vérité scientifique... encore heureux !

Après la renaissance

La démonstration de l'irrationnalité en 1761 puis de la transcendance en 1882 ont tout de même, à l'exception donc de ce farfelu de l'Indiana, miné les espoirs des amateurs et mathématiciens de proposer une valeur exacte pour Pi. A ce moment, les amusements vont commencer puisque l'on va rechercher des approximations rationnelles ou irrationnelles de Pi sous une forme simple. Et l'imagination et la patience des mathématiciens est fertile !
Jugez plutôt :

Quelques approximations :

Formules	**Valeur approchée**	**Décimales de Pi exactes**
$\left(1+\frac{1}{\pi}\right)^{\pi+1}$	3,1409	2
Approximation de Kochansky		
$\sqrt{\frac{40}{3}-\sqrt{12}}$	3,141533	4
Approximations de [Ramanujan]		
$\frac{6}{5}\phi^2=\frac{3}{5}\left(3+\sqrt{5}\right)=\frac{6}{5}\left(1+\phi\right)$	3,14164	3
$\frac{19\sqrt{7}}{16}$	3,14182	3
$\frac{7}{3}\left(1+\frac{1}{5}\sqrt{3}\right)$	3,141623	3
$\frac{9}{5}+\sqrt{\frac{9}{5}}$	3,14164	3
$\left(9^2+\frac{19^2}{22}\right)^{\frac{1}{4}}=\left(102-\frac{2222}{22^2}\right)^{\frac{1}{4}}$	3,14159265258	8
$\left(97+\frac{1}{2}-\frac{1}{11}\right)^{\frac{1}{4}}=\left(97+\frac{9}{22}\right)^{\frac{1}{4}}$	3,14159265258	8
$\frac{63}{25}\left(\frac{17+15\sqrt{5}}{7+15\sqrt{5}}\right)$	3,14159265380	9
$\frac{355}{113}\left(1-\frac{0,0003}{3533}\right)$	3,14159265358979432	14
$\frac{12}{\sqrt{130}}\ln\left[\frac{\left(3+\sqrt{13}\right)\left(\sqrt{8}+\sqrt{10}\right)}{2}\right]$	3,14159265358979265	14
$\frac{24}{\sqrt{142}}\ln\left[\frac{\sqrt{10+11\sqrt{2}}+\sqrt{10+7\sqrt{2}}}{2}\right]$	3,14159265358979312	15

$\frac{12}{\sqrt{190}}\ln\left[\left(3+\sqrt{10}\right)\left(\sqrt{8}+\sqrt{10}\right)\right]$	3,1415926535897932384190	19
$\frac{12}{\sqrt{310}}\ln\left[\frac{\left(3+\sqrt{5}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)}{4}\left(5+2\sqrt{10}+\sqrt{61+20\sqrt{10}}\right)\right]$	3,1415926535897932384626422088	23
$\frac{4}{\sqrt{522}}\ln\left[\left(\frac{5+\sqrt{29}}{\sqrt{2}}\right)^3\left(5\sqrt{29}+11\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{\frac{9+3\sqrt{6}}{4}}+\sqrt{\frac{5+3\sqrt{6}}{4}}\right)^6\right]$	3,1415926535897932384626433383279	30

Approximations de Castellanos (1988)

$(2e^3+e^8)^{1/7}$	3,14171	3
$\left(\frac{553}{312}\right)^2$	3,141529	4
$\left(\frac{3}{14}\right)^4\left(\frac{193}{5}\right)^2$	3,141575	4
$\left(\frac{296}{167}\right)^2$	3,14159704	5
$\left(\frac{66^3+86^2}{55^3}\right)^2$	3,141592452	6
$\frac{47^3+20^3}{30^3}-1$	3,14159259259	6
$2+\sqrt{1+\left(\frac{413}{750}\right)^2}$	3,141592649	7
$\left(\frac{77729}{254}\right)^{\frac{1}{5}}$	3,141592654111	8
$\left(31+\frac{62^2+14}{28^4}\right)^{\frac{1}{3}}$	3,14159265363	9
$\frac{1700^3+82^3-10^3-9^3-6^3-3^3}{69^5}$	3,14159265358817	11
$\left(95+\frac{93^4+34^4+17^4+88}{75^4}\right)^{\frac{1}{4}}$	3,14159265359037	10

$\left(100-\dfrac{2125^3+214^3+30^3+37^2}{82^5}\right)^{\frac{1}{4}}$	3,14159265358980419	13

Approximations de Plouffe

$43^{7/23}$	3,1415398	4
$\dfrac{\ln(2198)}{\sqrt{6}}$	3,1415943	5
$\left(\dfrac{13}{4}\right)^{\frac{1181}{1216}}$	3,14159267809	7
$\dfrac{689}{396\ln\left(\dfrac{689}{396}\right)}$	3,14159259508	6
$\left(\dfrac{2143}{22}\right)^{\frac{1}{4}}$	3,14159265258	8
$\sqrt{\dfrac{9}{67}}\ln(5280)$	3,14159265297	8
$\left(\dfrac{63023}{30510}\right)^{\frac{1}{3}}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{5}+1\right)$	3,141592653492	9
$\dfrac{48}{23}\ln\left(\dfrac{60318}{13387}\right)$	3,1415926535949	10
$\left(228+\dfrac{16}{1329}\right)^{\frac{1}{41}}+2$	3,141592653586778	11
$\dfrac{125}{123}\ln\left(\dfrac{28102}{1277}\right)$	3,1415926535912	10
$\left(\dfrac{276694819753963}{226588}\right)^{\frac{1}{158}}+2$	3,1415926535897932384626 49201	23
$\dfrac{\ln(262537412640768744)}{\sqrt{163}}$	3,141592653589793238462643383279 7	30

Approximation de Stoschek

$\dfrac{2^9}{163}$

	3,141104	3

Et quelques autres

$3+\frac{16}{113}$	3,141592920	6
$\sqrt{4+[3-\tan(30°)]^2}=\sqrt{4+\left[3-\frac{1}{\sqrt{3}}\right]^2}$	3,1415333	4
103993/33102 (Euler)	3,14159265301	9

A noter que Ramanujan (1913) et Olds (1963) ont donné une justification géométrique de l'approximation 355/113. Gardner (1966) s'est occupé de celle de $3+\frac{16}{113}$. Dixon (1991) s'est quant à lui intéressé à $\sqrt{4+[3-\tan(30°)]^2}$ et $\frac{6}{5}\phi^2=\frac{3}{5}(3+\sqrt{5})=\frac{6}{5}(1+\phi)$.

Curiosités

Toutes les formules précédentes sont en elles-même des bizarreries, puisqu'il suffit de retourner la formule pour qu'une expression incluant Pi donne presque un entier ou une fraction rationnelle ou irrationnelle.

L'exemple le plus fameux est celui des expressions de Roy Williams en $e^{\pi\sqrt{n}}$ avec n entier naturel :
Pour certaines valeurs de n (notamment parmi les nombres de Heegner 1,2,3,7,11,19,43,67 et 163), on trouve presque un entier :

n	Valeur de $e^{\pi\sqrt{n}}$
25	6635623,999341134233266067
37	199148647,999978046551856766

43	884736743,999777466034906661
58	24591257751,999999822213241469
67	147197952743,999998662454224506
74	545518122089,999174985664301733
148	39660184000219160,000966674358575246
163	262537412640768743,999999999999250072
232	604729957825300084759,999992171526856431
268	21667237292024856735768,000292038842412959
522	14871070263238043663567627879007,999848772648279480
652	68925893036109279891085639286943768,000000000163738644
719	3842614373539548891490294377805829192,999987249566012187

En 1975, nous raconte *le Fascinant Nombre Pi*, Martin Gardner avait utilisé le cas n=163 pour faire un poisson d'avril en avançant que exp($\pi 163^{1/2}$) était un entier, ce qui, à l'époque, n'était pas facile à contredire ! En fait, ce cas particulier extraordinaire proviendrait du fait que le corps de nombres algébriques engendré par $163^{1/2}$ possède une propriété de factorisation unique, les nombres de Heegner ayant des qualités arithmétiques particulières.

Une autre curiosité est le nombre :

$$e^{\pi} - \pi \approx 19{,}999099979 \quad \text{donc } (\pi + 20)^{i} = -0{,}9999999992 - 0{,}0000388927 i \approx -1$$

$$\text{soit encore} \quad \cos(\ln(\pi + 20)) = -0{,}9999999992$$

$$\text{et} \quad \cos(\pi \cos(\pi \cos(\ln(\pi + 20)))) \approx -1 + 3{,}9321609261.10^{-35}$$

Moins de 1 millième d'erreur avec 20 pour un nombre aussi simple, voilà qui est étonnant, n'est-ce pas ?

---

retour à la page d' accueil

page d'accueil



Simon Plouffe / David Bailey

Formule dite de BBP, Bailey-Borwein-Plouffe

$$\pi = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i}\left(\frac{4}{8i+1} - \frac{2}{8i+4} - \frac{1}{8i+5} - \frac{1}{8i+6}\right)$$

Formules dérivées

Formule d'Adamchik-Wagon

$$\forall r \in C \quad \pi = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i}\left(\frac{4+8r}{8i+1} - \frac{8r}{8i+2} - \frac{4r}{8i+3} - \frac{2+8r}{8i+4} - \frac{1+2r}{8i+5} - \frac{1+2r}{8i+6} + \frac{r}{8i+7}\right)$$

Autres formules :

$$\pi = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{4^i}\left(\frac{2}{4i+1} + \frac{2}{4i+2} + \frac{1}{4i+3}\right)$$

$$\pi^2 = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i}\left(\frac{16}{(8i+1)^2} - \frac{16}{(8i+2)^2} - \frac{8}{(8i+3)^2} - \frac{16}{(8i+4)^2} - \frac{4}{(8i+5)^2} - \frac{4}{(8i+6)^2} - \frac{2}{(8i+7)^2}\right)$$

$$\pi\sqrt{2} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{8^i}\left(\frac{4}{6i+1} + \frac{1}{6i+2} + \frac{1}{6i+3}\right)$$

$$\pi^2 = \frac{9}{8}\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{64^i}\left(\frac{16}{(6i+1)^2} - \frac{24}{(6i+2)^2} - \frac{8}{(6i+3)^2} - \frac{6}{(6i+4)^2} - \frac{1}{(6i+5)^2}\right)$$

Tranche de Vie

Le mieux pour David Bailey, c'est d'aller voir sa page personnelle.
Concernant Simon Plouffe, son site est de même assez instructif.
Néanmoins, ajoutons que Plouffe est un cas assez extraordinaire car j'ai lu qu'il ne possédait initialement comme seul diplôme d'études qu'un équivalent de maîtrise de mathématiques !
Ce qui, heureusement, n'enlève rien à son intuition...

Autour de π

Vous avez d'ailleurs peut-être déja lu le nom de Simon Plouffe sans vous en rendre compte... Il figurait en effet dans le Guinness des Records en *1975* pour avoir réussi à mémoriser *4096* décimales de... *Pi* (tiens, comme c'est étonnant !). Après avoir atteint *4400* et s'être arrêté, il a continué ses recherches sur *Pi* jusqu'à ce *19/09/95, 0h29* où cette célèbre et fameuse formule BBP (Bailey-Borwein-Plouffe) lui est apparue sur son ordinateur...
Le fascinant nombre Pi de J.P. Delahaye explique bien mieux que je ne pourrais le faire ici les procédés assez simples où interviennent les congruences, les divisions euclidiennes et transformées de Fourier rapides qui permettent d'atteindre en base *16* ou, plus généralement en base 2^n, n'importe quel "décimale" de *Pi*. (Ce ne sont alors plus des décimales, mais des digits...) En fait, si on imagine vouloir obtenir le milliardième digit en base *16*, il suffit de savoir calculer le milliardième digit de $1/(16^i)$, ce qui est simple avec les congruences, et de gérer habilement les retenues qui peuvent apparaître dans les termes en $a/(b+c*i)$ en calculant quelques termes avant et après.
Malheureusement, une série permettant le calcul du n-ième chiffre en base *10* et rapidement est toujours introuvable... Avis aux amateurs !

Démonstration

Par contre, je ne passerai pas outre la démonstration de cette merveille.
Elle est d'ailleurs étonnamment simple mais l'imaginer fut certainement le plus difficile... :
Calculons tout d'abord un petit résultat général :

$$\forall n \in N,\ \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i(8i+n)} = \sqrt{2}^n \sum_{i=0}^{\infty} \left[\frac{x^{n+8i}}{8i+n}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}^n \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x^{n-1+8i}\,dx$$

$$= \sqrt{2}^n \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x^{n-1}}{1-x^8}\,dx$$ (l'inversion somme-intégrale est parfaitement justifiée puisqu'il y a convergence uniforme de la série sur *[0,2*$^{-1/2}$*]*)

Donc, si l'on applique ce résultat à la suite BBP, on a :

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i}\left(\frac{4}{8i+1} - \frac{2}{8i+4} - \frac{1}{8i+5} - \frac{1}{8i+6}\right) = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{4\sqrt{2} - 8x^3 - 4\sqrt{2}x^4 - 8x^5}{1-x^8}\,dx$$

on fait un petit changement de variables $y=2^{1/2}x$ pour y voir plus clair...

$$=16\int_0^1 \frac{y-1}{y^4-2y^3+4y-4}\,dy = 4\int_0^1 \frac{2-y}{y^2-2y+2}\,dy + 4\int_0^1 \frac{y}{y^2-2}\,dy$$ par décomposition en éléments simples...

$$=\int_0^1 \frac{4-4y}{y^2-2y+2}\,dy + 4\int_0^1 \frac{1}{1+(y-1)^2}\,dy + 4\int_0^1 \frac{y}{y^2-2}\,dy$$ en bidouillant un peu...

$$=\left[-2\ln\left(y^2-2y+2\right) + 4\arctan(y-1) + 2\ln\left(2-y^2\right)\right]_0^1 = \pi$$

Essais

Cette suite n'a pas été créée pour calculer les décimales de *Pi* en partant des premières, mais procédons à quelques essais néanmoins... La forme elle-même donne directement les performances en vertu de la petite inégalité écrite dans la rubrique précision de la page consacrée à Machin.

A savoir donc, une précision de *2+log(8n)+n*log(16)*, ce qui est honorable mais pas exceptionnel :

n=1	*3,14142 (3)*
n=5	*3,141592653228 (9)*
n=10	*15* décimales justes
n=50	*64* décimales justes

Accélération de la convergence

Comme il fallait s'en douter après ses médiocres performances auprès de la suite de Machin, le *Delta2* d'Aitken n'est pas vraiment efficace ici...

n=5	*3,1415926535630*
n=10	*17* décimales justes

Le nombre de décimales avec lequel on calcule la suite d'Aitken est très élevé à cause de la sensibilité du *Delta2*, donc il vaut mieux ici pousser la série BBP quelques termes plus loin...

---

retour à la page d'accueil

page d' accueil

Grégory et David Chudnovsky

Formules importantes

$$\pi = \frac{1}{12}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n (6n)!(13591409+545140134n)}{(3n)!(n!)^3 (640320^3)^{n+\frac{1}{2}}}\right)^{-1}$$

Tranches de vie

Les frères Chudnovsky ont une histoire personnelle complètement extraordinaire ! Puisse cette trop courte page et quelques autres rendre hommage à ces grands passionnés de *Pi*...
Ils sont Ukrainiens, vivent depuis *1977* à New York près de l'université de Columbia et...
Mais commençons par le commencement, sinon, comment pourrait-on appréhender cet extraordinaire parcours qu'est le leur ?
David, le grand frère de Grégory, a découvert les mathématiques assez jeune à Kiev en dévorant un livre *Qu'est ce que les mathématiques ?* par R. Courant et H. Robbins. Ce bouquin était très populaire malgré son illégalité dans la Russie et la Chine d'alors...
David décida après cette lecture de devenir un mathématicien et son cadet emboîta le pas rapidement. Grégory se mit très vite à publier dès *16* ans dans *Soviet mathematics (Quelques résultats en théorie des*

expressions infiniment longues), encouragé par son frère qui sentait son génie. Et pour cause, il résolut à *17* ans (*1970*) le dixième problème de Hilbert en prouvant l'indécidabilité des équations diophantiennes, et ce juste un peu après Matyasevitch, un autre jeune mathématicien qui reconnut néanmoins que la méthode de Grégory était meilleure que la sienne !

Les deux frères firent leurs études à l'université d'état de Kiev et passèrent leur thèse à l'académie des sciences d'Ukraine.

Dès le milieu des années *70*, ils se mirent à publier ensemble. Mais il y avait tout de même un gros problème... Grégory est en effet atteint d'une maladie assez rare de dégénerescence des muscles qui l'oblige à rester couché la plupart du temps et à passer quelques fréquents séjours à l'hopital... Sa santé est donc très fragile...

C'est pourquoi en *1976*, les parents de Grégory, Volf et Malke, demandèrent aux autorités de les laisser émigrer pour le soigner. Mal leur en prit puisque le KGB commença à les harceler, Volf perdit son travail, et David et Malka furent attaqués par la suite...

Edwin Hewitt, un mathématicien de l'université de Seattle collabora avec Grégory en *1976* et, en apprenant les problèmes de sa famille, persuada un sénateur influent de faire pression sur les Soviétiques. Une délégation parlementaire française rendit visite secrètement aux Chudnovsky, et deux mois plus tard, fin *77*, le gouvernement russe céda et laissa la famille partir. David épousa une des femmes de la délégation (fort jolie paraît-il...) et avec sa famille, émigra vers la France, puis aux Etats-Unis. Les Chudnovsky s'installèrent à New York, près de l'université de Columbia.

Seulement, Grégory ne put accepter de poste à cause de son infirmité et David ne voulut pas travailler sans son frère... Résultat, les deux frères n'ont pas de poste réel et sont simplement membres (senior research) de l'université. Ils sont donc un peu isolés, David ayant par ailleurs un mauvais caractère paraît-il... La communauté mathématique américaine est fort embêtée avec ces deux frères qui n'ont pas de place précise, avec toutes les conséquences financières que l'on peut imaginer...

Les Chudnovsky travaillent donc de leur côté, et ce n'est pas du temps perdu. Car David est un très bon mathématicien et Grégory (*46* ans)

est considéré tout simplement comme un des meilleurs, ayant reçu nombre de distinctions honorifiques et maîtrisant toutes les branches des mathématiques, comme il y a un siècle un certain... Hilbert ! Voyez la comparaison !
Et de plus, ces deux garçons travaillent sur la théorie des nombres, leur spécialité, mais outre cela, sur Pi, ce qui rajoute encore de l'intérêt à celui que n'importe quel étudiant en maths pourrait déja porter à ces deux figures des mathématiques.
Les Chudnovsky vivent dans un petit appartement où s'entassent papiers et ordinateurs dans un désordre incroyable... Ils ont d'ailleurs construit eux mêmes plusieurs "supercomputers" dont le mythique m-zéro, bénéficiant d'une architecture personnelle qui lui confère une puissance supérieure à certains Cray. C'est avec lui qu'ils ont calculé des milliards de décimales de *Pi* (un bon moyen de le tester !) et ils ne peuvent l'éteindre, sinon il ne redémarrerait pas tant son architecture est complexe et certains composants parfois fragiles ! Il contenait, en *1993*, *16* microprocesseurs en parallèle.
L'appartement des Chudnovsky est ainsi chauffé aux microprocesseurs, atteignant en été une chaleur insupportable !
Notons pour finir que les Chudnovsky n'ont pas de site personnel et qu'il n'est donc pas facile d'obtenir des informations. Néanmoins, on trouvera un article fort complet et très long (anglophobes s'abstenir) sur les Chudnovsky à la page suivante (hébergée par Simon Plouffe):
http://www.lacim.uqam.ca/plouffe/Chudnovsky.html
Je n'ai pas de nouvelles d'eux depuis *1994* et leur dernier record...

Autour de Pi

Leur besoin de calculer des décimales de *Pi* est lié à leur conviction qu'il existe une certaine organisation dans ces décimales. Car *Pi* est parfaitement déterminé. Et comme l'on ne sait à peu près rien des propriétés des nombres transcendants... L'on n'a même pas prouvé que *Pi* était normal, c'est à dire que chaque chiffre apparaît une fois sur dix, chaque couple une fois sur cent, etc... Mais comme avec les 10^{79} atomes qu'il y a dans l'univers représentant l'ensemble des ressources théoriquement exploitables, on ne pourra jamais calculer plus de 10^{77} décimales de *Pi*, il y a intérêt à ce que notre constante favorite montre quelques signes avant cette ultime limite ! Sinon, "ce serait terrifiant !" comme le dit Grégory...

La formule du haut de la page est une série du type Ramanujan, donc à convergence linéaire, mais ne comportant dans la somme que des rationnels, ce qui améliore la rapidité des calculs. Ajoutons que les deux frères programment soigneusement leurs algorithmes et on explique par là le fait que le champion Kanada et ses gros moyens se soit trouvé dépassé en *1989* et *1994* par les Chudnovsky avec leur simple superordinateur dans la course aux décimales! (voir historique des records)

Bien sûr, comme pour Ramanujan et Borwein, je n'ai pas la démonstration exacte de cette formule, donc reportez vous à ces deux sites pour les explications sur ce type de somme et leur loi de formation générale.

Essais

Bon, tout cela ne va pas nous empêcher de l'essayer !

A priori, si l'on applique l'équivalent de Stirling au terme de la somme, on obtient :

$$\frac{6^{6n} 545140134}{3^{3n} 2 \pi^{3/2} \sqrt{n}\, 640320^{3n}}$$

soit en passant au *-log* pour obtenir le nombre de décimales par itération :

$$(6\log(6)-3\log(3*6403320))n=14{,}18n$$

Pas mal !

Mais vérifions tout cela (attention, l'équivalence de Stirling est asymptotique, on peut ne pas trouver *14* décimales par itération pour n faible) :

Evidemment, mon calculateur est un peu minable, mais dans quelques mois, il y aura mieux, c'est promis...

n=0	*13* décimales exactes
n=1	*27* décimales exactes
n=2	*41* décimales justes
n=3	*55* décimales justes
n=4	*69* décimales justes
n=5	*84* décimales exactes
n=6	*98* décimales justes !

Eh bien, une telle linéarité est assez remarquable.

---

retour à la page d' accueil

page d' accueil

William Gosper

Quelques séries

$$\pi = 3 + \frac{1}{60}\left(8 + \frac{2.3}{7.8.3}\left(13 + \frac{3.5}{10.11.3}\left(18 + \frac{4.7}{13.14.3}(\ldots)\right)\right)\right)$$

$$= 3 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(5n+3)(2n-1)!(n!)}{2^{n-1}(3n+2)!}$$

On a la formule générale pour *x* inférieur à *1* :

$$\frac{\sin^{-1}(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^{2n+1}(n!)^2}{2(2n+1)!} = {}_2F_1\left(1,\ 1;\ \frac{3}{2};\ x^2\right)x$$ où ${}_2F_1$ est une série hypergéométrique, qui nous éloigne un peu de notre sujet, je n'en parlerai donc pas...

Pour $x=1/2$, on obtient :

$$\pi = \frac{9}{2\sqrt{3}}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$$ qui connait une convergence en $2n$

Pour $x = \sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$ on peut écrire :

$$\pi = \frac{5\sqrt{2+\phi}}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{\phi^{2n+1}(2n+1)!}$$ de convergence $3.39n$

William Gosper est aussi un habitué des formules un peu bizarres faisant intervenir π, ne me demandez pas leur intérêt !
Par exemple :

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{i=n}^{2n}\frac{\pi}{2Arc\tan(i)}=4^{\frac{1}{\pi}}\approx 1,554682275$$

$$\pi^2=-12e^3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\left(\frac{9}{n\pi+\sqrt{n^2\pi^2-9}}\right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n^2+7n+11)\left((-1)^n\cot\left(\frac{5\pi}{8n+28}\right)+1\right)}=\frac{\pi\cot(\phi\pi)(\csc(\phi\pi)-1)}{2\sqrt{5}}-\frac{3}{5\pi}-\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{1}{10}$$

et en généralisant : $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tan\left(\frac{\pi a^2(-1)^n}{2n+1}+\frac{\pi}{4}\right)}{\left(n-a+\frac{1}{2}\right)\left(n+a+\frac{1}{2}\right)}=\frac{\pi\sin(a\pi)}{2a\cos^2(a\pi)}$$

Tranches de vie

William Gosper fait partie des passionnés de *Pi* et du petit groupe d'irréductibles qui font souffrir les ordinateurs ! Gosper avait en effet déjà calculé *17,001,303* de termes de la fraction continue de *Pi* en *1977*. Et il a ensuite programmé la série de Ramanujan (celle avec *1103*) pour obtenir *17* millions de décimales. On ne savait pas alors si cette série convergeait, mais le calcul était juste et seul le nombre *1103* n'était pas justifié. Alors, comme le disent les Borwein, de même que deux entiers différent de moins d'une unité doivent être égaux, le nombre *1103* de trouvait vérifié. Car tout autre nombre aurait débouché sur des décimales parfaitement fausses à cause de la sensibilité aux erreurs...
Eh oui, aujourd'hui, on doit parfois se contenter de preuves empiriques ! N'enlevons rien néanmoins à la force scientifique de William Gosper, travaillant sur l'intelligence artificielle, et sur un petit paquet de propriétés concernant les séries factorielles convergeant vers *Pi* avec

R. Schroeppel. D'où celle du dessus d'ailleurs dont je n'ai pas la démonstration malheureusement, mais qui doit ressembler à la démo ci-dessous.
Je ne sais pas non plus si c'est lui avec Schroeppel qui a trouvé :

$$\pi = \frac{9\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{4}{3} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}\right)$$

ce qui me paraît bizarre compte tenu de la relative simplicité de la suite et de la preuve !

Autour de π

En premier lieu, notons que la série factorielle du haut de la page serait parfaite pour un algorithme compte-goutte donnant *Pi*, sujet que je développerai prochainement sur une nouvelle page.
Mais puisque l'on parle d'un spécialiste des factorielles, profitons en pour aborder les autres séries factorielles tournant autour de *Pi* !
On notera $\binom{2n}{n} = C_{2n}^{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ pour plus de simplicité...

On a ainsi :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{n(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\binom{2n}{n}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{9} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\binom{2n}{n}} = \frac{2}{27}\left(\pi\sqrt{3}+9\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^n}{\binom{2n}{n}} = \pi + 3 \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\binom{2n}{n}} = \frac{4\pi}{\sqrt{3}} + 3 \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{(2n+1)16^n} = \frac{\pi}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2\binom{2n}{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad (1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{36}{17n^4\binom{2n}{n}} = \frac{\pi^4}{90} \quad (2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2\binom{2n}{n}} = \frac{2\pi^2}{9}$$

La formule (1) provient du grand Euler tandis que la (2) provient de Comtet en *1974*.
La similitude de ces deux suites avec la somme des inverses de

puissance est assez frappante...

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}=\frac{\pi^4}{90}\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^6}=\frac{\pi^6}{945}\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^8}=\frac{\pi^8}{9450}\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{10}}=\frac{\pi^{10}}{93555}$$

Et bien sûr, il n'existe pas de resultat pour les puissances impaires !

Démonstration

La demonstration des séries factorielles est une simple et même méthode, typique de classe prépa, que j'expose ici rapidement pour le cas de la formule : $\pi=\frac{9\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{4}{3}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}\right)$. C'est d'ailleurs le même procédé que j'ai utilisé pour retrouver la démonstration de la formule de Katahiro...

On considère ainsi $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(n!)^2}{n(2n)!}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{((n-1!))^2}{(2n-1)(2n-2)!}x^n$.

Cette série entière a *4* pour rayon de convergence. En effet, si on note $U_n=\frac{2(n!)^2}{n(2n)!}x^n$ on a $\frac{U_{n+1}}{U_n}=\frac{n(n+1)^2x}{(n+1)(2n+2)(2n+1)}\underset{\sim}{\overset{n\to\infty}{}}\frac{x}{4}$ donc le résultat est immédiat par le critère de D'Alembert.

Comme c'est une série entière on peut dériver sans problème, et on a donc :

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(n!)^2}{(2n)!}x^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n((n-1!))^2}{(2n-1)(2n-2)!}x^{n-1}\quad \text{donc on a}$$

$$2xf'(x)-f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)((n-1!))^2}{(2n-1)(2n-2)!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^{n+1}=x+\frac{1}{2}x^2f'(x)$$

$$\text{donc}\quad (x^2-4x)f'(x)+2f(x)=-2x$$

La résolution de l'équa diff est classique, je ne m'étends pas dessus...
On obtient comme solutions générales et particulières respectives :

$f_g(x) = \alpha \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{4-x}}$ $\quad f_p(x) = 2\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{4-x}} \operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{x-2}{2}\right)$ donc la solution est :

$$f(x) = \left(2\operatorname{Arcsin}\left(\frac{x-2}{2}\right) + \alpha\right)\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4-x}} \quad \text{or} \quad f(0) = 0 \;\Rightarrow\; \alpha = \pi$$

On en déduit le premier résultat $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{n(2n)!} = \frac{1}{2}f(1) = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}$.

Puis on dérive *f* et on obtient :

$$f'(x) = \frac{2}{4-x}\left(2\frac{1}{\sqrt{x(4-x)}}\left(\operatorname{Arcsin}\left(\frac{x-2}{2}\right) + \pi\right) + 1\right) \quad \text{donc finalement}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} = 1 + \frac{1}{2}f'(1) = \frac{4}{3} + \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$$

ce qui clot la démonstration...

Ainsi, pour obtenir la formule générale :

$\displaystyle\frac{\sin^{-1}(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^{2n+1}(n!)^2}{2(2n+1)!} = {}_2F_1\left(1,\ 1;\ \frac{3}{2};\ x^2\right)x$, on pourra remarquer que les membres de droite et de gauche de la première égalité vérifient l'équation différentielle :

$$(1-x^2)f'(x)-xf(x)=1 \text{ pour } |x|<1$$

Essais

Toutes ces suites ont des convergences linéaires ou très proche du linéaire (genre *a.n+b.Ln(n))* car les termes des séries décroissent en c^{-n}.
Vérifions donc cela !

	Suite de Gosper	Suite de la démo	Suite (2) Comtet
n=5	*3,14159249 (6)*	*3,1306 (1)*	*3,141591l (5)*

n=10	*12* décimales exactes	*3,14157 (4)*	*3,1415926534*0 *(9)*
n=50	*57* décimales exactes	*28* décimales exactes	*35* décimales exactes
n=100	*?*	*58* décimales exactes	*66* décimales exactes

Plutôt concluant, non ?
La suite de Gosper a une convergence d'environ *1,2n*, assez bien, pour ce genre de suites !
La suite de la démonstration s'en sort avec un *0,58n* et la suite de Comtet (2) avec un *0,66n*.
Tout cela est on ne peut plus correct !

Accélération de la convergence

Comme d'hab avec les suites à convergence linéaire, le *Delta2* d'Aitken se veut efficace, mais beaucoup moins que l'on aurait pu espérer :

	Suite de Gosper	Suite de la démo	Suite (2) Comtet
n=5	*3,141592650*7 *(8)*	*3,14195 (3)*	*3,1415924 (6)*
n=10	*14* décimales exactes	*3,14159277 (6)*	*11* décimales justes
n=50	*61* décimales exactes	*31* décimales exactes	*38* décimales exactes
n=100	*?*	*62* décimales exactes	*69* décimales exactes

3-4 décimales en plus, ce n'est pas terrible, donc contentons nous de pousser les séries un ou deux crans plus loin !

---

retour à la page d' accueil

page d'accueil

Bonjour !

Allons bon, je m'étais promis de me présenter, mais voilà que je ne sais plus quoi dire...
Au fait, désolé pour le reflet dans les lunettes !
Déjà, vous l'aurez sans doute remarqué, une certaine passion pour Pi m'a envahi depuis quelques années !
Promis, je ne vais pas vous sortir une banalité du genre "Pi est le nombre le plus merveilleux du monde mathématique !"; tous les fondus de Pi - et ils sont nombreux de par le monde... - comprendront sans problème mon attachement à cet irrationnel transcendant. Oui, je tenais à le dire car figurez-vous que nous sommes vus comme une espèce à part entière, toute droit sortie de l'asile mathématique !

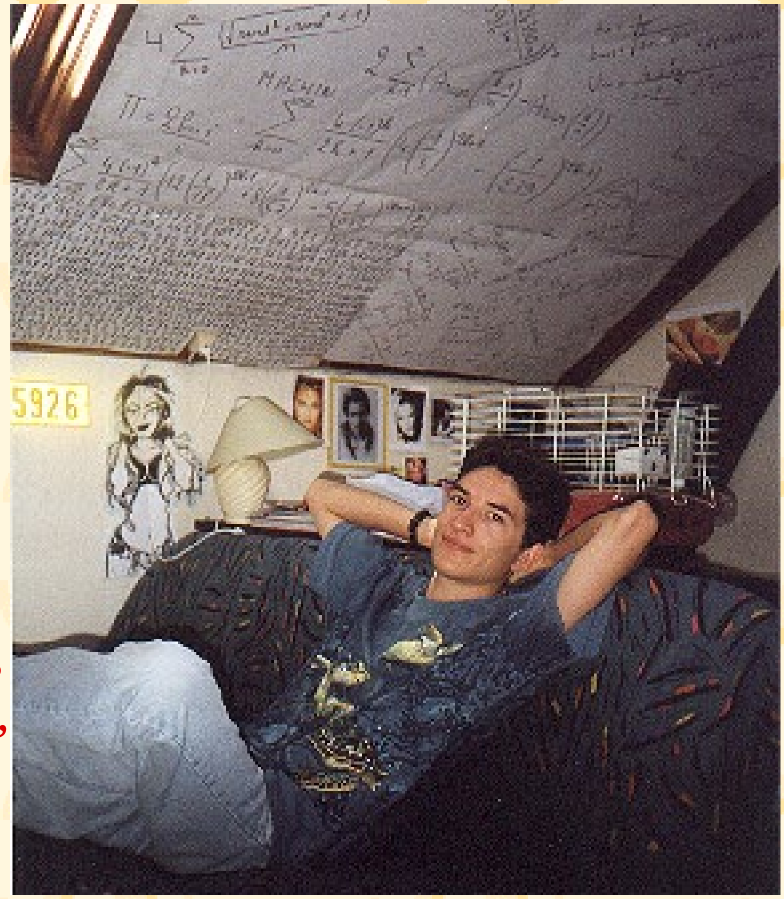
Bon, à part cela, j'ai fait 2 ans de prépa à Orléans et suis maintenant étudiant en deuxième année à l'ENSAI qui est une Grande Ecole de Statistique. Au passage,

admirez l'architecture ! Oui, oui, je sais, on nous envie...
Et cette belle région de Bretagne (Rennes) dans laquelle nous sommes installés n'est pas aussi pluvieuse qu'on le dit ! (bon, j'exagère quelque peu...)

Un peu d'histoire de ce site :

Tout a commencé en novembre 96 lorsque mon meilleur ami et moi avons retrouvé la suite d'Archimède par hasard en traçant des polygones dans un cercle (ça vous rappelle quelque chose ?). Nous avons plus tard construit une petite suite nous-même et avons décidé alors qu'il serait amusant de rechercher l'ensemble des suites convergeant vers Pi... (C'est malheureusement pour nous un ensemble infini...).
Ensemble, puis en solo, un grand dossier de 300 pages avec toutes les démos naquit et fut achevé en juin 97. J 'ai d'ailleurs présenté les suites d'Archimède et Salamin en TIPE (travail personnel présenté oralement aux concours de prépas...). Comme quoi, Pi, ça peut servir !
Même si je m'en étais un peu éloigné en maths spé (concours obligent !), ma passion pour Pi ne m'a jamais quitté et dès mon entrée à l'ENSAI et l'accès à Internet, l'idée d'en faire un site se présenta naturellement. D'autant que lors de mes recherches pour le dossier, les démos sur Internet étaient rares, il fallait donc y remédier dans la mesure de mes modestes moyens...
J'ai travaillé toute l'année 99 sur ce site, j'espère qu'il vous plaira (oui, ça fait un peu cliché, mais bon, je l'espère tout de même vraiment...). Il y a peut-être encore quelques fautes, mais je ne suis pas mathématicien, alors pardonnez-moi (et signalez-les-moi par la même occasion !)

Rien que pour le plaisir personnel d'avoir vécu pendant la prépa dans un appartement cher à mon coeur (je suis un grand sentimental...), je n'ai pu résister



à l'envie d'en mettre une photo... pardon pour la lenteur de chargement...
La décoration (surtout le papier peint !) et le rangement sont un peu personnels, il est vrai...
Dites bonjour à celle qui m'accompagne depuis deux ans...

Elle s'appelle Toupie (2Pi en Anglais, normal...) et je l'entends d'ici réclamer sa salade...
Bon, je ne vais pas vous ennuyer plus longtemps, je tenais simplement encore à mettre la photo de quelques uns des amis qui me sont chers avec mention spéciale pour le grand au premier rang, David, avec qui je converse toujours quotidiennement sur le net et qui a partagé au début ma passion pour Pi...
De gauche à droite en oubliant le premier... :
Aurélie, Delphine, Nathalie, Grégoire, et David et Anne devant...

N'hésitez pas à m'envoyer un petit mail si vous avez des remarques sur le site (même si vous n'en avez pas!), cela fait toujours infiniment plaisir... et permet la constante amélioration de ces pages web ! Je serais de plus très heureux de faire la connaissance d'autres passionnés de Pi... (oui, car je sais qu'il en existe beaucoup, ne vous cachez pas !)
Pour finir, si vous connaissez une suite, une démonstration ou une anecdote concernant Pi qui n'est pas sur ce site, vite, faites-le moi savoir !

---

boris.gourevitch@ensai.fr

page d' accueil

Suites convergeant vers π
Construites par des méthodes géométriques

(Par ordre chronologique des auteurs ou inspirateurs)

Archimède : (287 AVJC - 212 AVJC)

$$U_0 = \frac{1}{2} \qquad V_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$U_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - U_n^2}\right)} \qquad V_{n+1} = \frac{-1 + \sqrt{1 + V_n^2}}{V_n}$$

$$6.2^n\,U_n \xrightarrow{n \to \infty} \pi \qquad 6.2^n\,V_n \xrightarrow{n \to \infty} \pi$$

Fibonacci : (1180 - 1250)

Application géométrique de la suite de Fibonacci :

U_0 et U_1 quelconques strictement positifs (si égaux à 1 on retrouve la suite de Fibonacci !)

$$U_n = U_{n-1} + U_{n-2}$$

$$\forall n \in N \qquad \pi = 4\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)}\left(\left(\frac{U_{n+1}}{U_{n+2}}\right)^{2k+1} + \left(\frac{U_n}{U_{n+3}}\right)^{2k+1}\right)$$

Avec $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ le nombre d'or,

$$\pi = 4\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}\left(\phi^{-2k-1} + \phi^{-6k-3}\right) = 4\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}\left((\phi-1)^{2k+1} + (2\phi-3)^{2k+1}\right)$$

Al Kashi : (? - 1429)

$$C_0 = 1 \qquad C_{n+1} = \sqrt{2-\sqrt{4-C_n^2}}$$

$$3.2^n.C_n \xrightarrow{n\to\infty} \pi$$

De Cues : (1401 - 1464)

$$a_1 = 0 \qquad b_1 = \frac{1}{4} \qquad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}b_n}$$

$$\frac{1}{2a_n} \xrightarrow{n\to\infty} \pi \qquad \frac{1}{2b_n} \xrightarrow{n\to\infty} \pi$$

Viete : (1540 - 1603)

$$U_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad U_n = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}U_{n-1}}$$

$$\pi = \frac{2}{\prod_{k=0}^{\infty} U_k}$$

$$U_0 = 0 \qquad V_0 = 2$$

$$U_n = \sqrt{2+U_{n-1}} \qquad V_n = \frac{2V_{n-1}}{U_n}$$

$$V_n \xrightarrow{n\to\infty} \pi$$

Descartes : (1596 - 1650)

$$\forall L \in R^* \qquad r_0 = \frac{L}{8} \qquad r_{n+1} = \frac{r_n + \sqrt{r_n^2 + \frac{r_0^2}{4^n}}}{2}$$

$$S_n = \frac{L}{2r_n} \qquad S_n \xrightarrow{n\to\infty} \pi$$

Wallis : (1616 - 1703)

$$\pi = 2\prod_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2}{4n^2-1} \qquad \frac{2^{4n+2}\,n(n!)^4}{((2n+1)!)^2} \xrightarrow{n\to\infty} \pi \qquad \frac{2^{4n+2}\left(n+\frac{3}{4}\right)(n!)^4}{((2n+1)!)^2} \xrightarrow{n\to\infty} \pi$$

(la troisième est simplement une version améliorée de la seconde)

Autres suites : (voir le Grenier)

1) $x_1 = 2 \quad x_2 = 2\sqrt{2} \quad x_{k+1} = x_k\sqrt{\frac{2x_k}{x_k + x_{k-1}}}$

$$x_k \xrightarrow{k\to\infty} \pi$$

2) Petite suite perso

$$\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\left(\sqrt{4n^2-k^2}-\sqrt{4n^2-(k-1)^2}\right)^2} \xrightarrow{n\to\infty} \pi$$

3) Application de la loi des grands nombres

Soit $(M_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une suite aléatoire de n points du carré $[0,1]\times[0,1]$ et D_n le cardinal de l' ensemble de ces points appartenant au cercle de centre 0 et de rayon 1, c' est à dire :

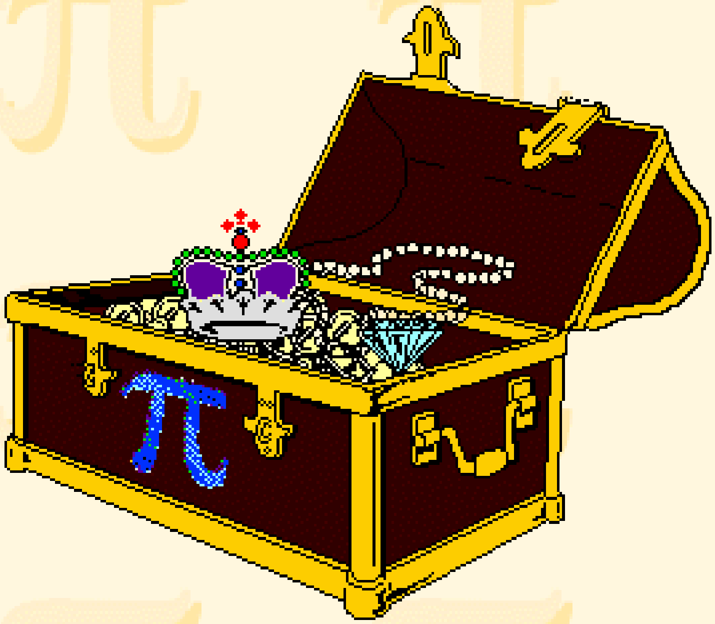
$$D_n = card\left\{(a,b)\in(M_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \,/\, \sqrt{a^2+b^2}\leq 1\right\}$$

alors $g_n = \frac{4D_n}{n} \xrightarrow{n\to\infty} \pi$

---

retour à la page d' accueil

page d'accueil



LE GRENIER

SUITES ORIGINALES ET INEFFICACES...

Quelques suites totalement inefficaces...

Par la méthode des sommes de Riemann :

(1) $$4\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2} \xrightarrow{n\to\infty} \pi$$

(2) $$\frac{4}{n}\sum_{k=0}^{n}\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2} \xrightarrow{n\to\infty} \pi$$

(3) $$4\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}} \xrightarrow{n\to\infty} \pi$$

Petite suite perso trouvée par mon pote David et moi

$$\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\left(\sqrt{4n^2-k^2}-\sqrt{4n^2-(k-1)^2}\right)^2} \xrightarrow{n\to\infty} \pi$$

(elle se construit en considérant un cercle où l'on inscrit des trapèzes verticaux. En calculant l'aire de ces trapèzes d'une certaine manière, on tombe sur la suite que voilà !)

Suite isolée !

$$x_1 = 2 \qquad x_2 = 2\sqrt{2} \qquad x_{k+1} = x_k \sqrt{\frac{2x_k}{x_k + x_{k-1}}}$$

$$x_k \xrightarrow{k \to \infty} \pi$$

c'est une suite archimédienne (polygones dans un cercle), démonstration prochainement !

Statistique/dénombrement

1) voir Cesàro

2) Triangle des c(n,k)

3) Application de la loi des grands nombres

Soit $(M_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une suite aléatoire de n points du carré $[0,1]\times[0,1]$ et D_n le cardinal de l' ensemble de ces points appartenant au cercle de centre 0 et de rayon 1, c' est à dire :

$$D_n = card\left\{(a,b) \in (M_i)_{i \in [\![1,n]\!]} \Big/ \sqrt{a^2+b^2} \le 1\right\}$$

alors $g_n = \dfrac{4D_n}{n} \xrightarrow{n \to \infty} \pi$

Un peu de géométrie

Le volume d'une boule dans R^n est donné par la formule :

$$V_m = \frac{\left(\pi R^2\right)^m}{m!}$$

où $n=2m$. Remarquons que cela marche bien pour $m=1$, $n=2$ mais en plus cela marche aussi pour n impair! En effet, pour $n=1$, la longueur du segment est $2R$ donc :

$$2R = \frac{(\pi R^2)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{2}\right)!} \quad \text{soit} \quad \left(\frac{1}{2}\right)! = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

Et ce n'est pas du pipeau ! Rappelons nous en effet que la fonction Γ d'Euler vérifie pour n entier $\Gamma(n)=(n-1)!$ et plus généralement pour x réel positif, $\Gamma(x)=(x-1)\Gamma(x-1)$

Donc $\left(\frac{1}{2}\right)! = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ d'après la remarque sur la page d'Euler et en considérant la fonction gamma comme un prolongement de la fonction factorielle sur R^+.
Essayez $n=3$, on retrouve bien $4/3\pi R^3$!

De même, pour les surfaces, on peut considérer qu'en dimension n, le volume de la sphère de rayon R peut être donné en fonction de sa surface par :

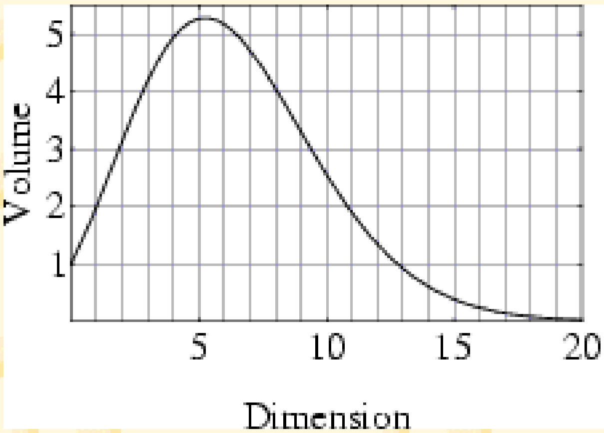
$$V_n = \int_0^R S_n r^{n-1} dr = \frac{S_n R^n}{n}$$

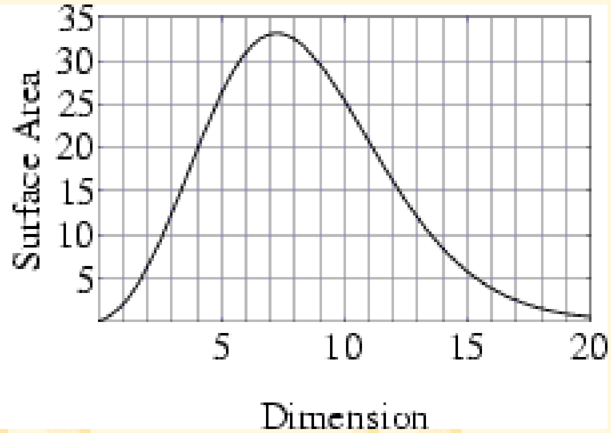
ce qui donne :

$$S_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{2\pi S_{n-2}}{n}$$

Ce qu'il y a d'amusant, c'est que ces formules valables pour tout n peuvent nous amener à la question : Le volume et la surface d'une sphère ont-elles un maximum pour une dimension donnée ?
La réponse semble oui dans la mesure où V_n et S_n tendent vers 0 si n tend vers l'infini (eh oui, la fonction gamma en n croit comme $(n-1)!$ et donc beaucoup plus vite que la puissance du numérateur.
En dérivant les expressions de V_n et S_n par rapport à n, on trouve numériquement que le maximum pour la surface est en $n=7{,}25695$... et pour le volume en $n=5{,}25695$... !

Donc la sphère a un volume maximal en dimension *5* et une surface maximale en dimension *7* !
Voici d'ailleurs les graphiques du volume et de la surface en dimension n de ces "hypersphères", empruntés à la fabuleuse encyclopédie d'Eric Weisstein.





Si, si, c'est très sérieux...

Fagnano et les complexes

On peut s'amuser éternellement avec les nombres complexes... Il paraît qu'un certain Fagnano nous a gratifiés des deux formules suivantes :

$$\pi = -2i\ln(i) = 2i\ln\left(\frac{1-i}{1+i}\right) \quad \text{(trivial avec } i = e^{i\frac{\pi}{2}}\text{)}$$

Notons tout de même qu'en utilisant le DL $\ln(1+z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} z^k}{k}$ pour z complexe avec la deuxième formule, on finit par retrouver :
$\pi = 4\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)}$ ce qui n'est rien d'autre que la formule de Leibniz !

Pi et les espaces euclidiens

Lors de l'épreuve du Capes externe de mathématique en *1994*, consacré à l'étude du rayon minimum des disques d'un plan affine euclidien contenant k points à coordonnées entières, les candidats devaient montrer le résultat suivant :

Soit D le disque de centre z_0 et rayon r :

$D(z_0,r)=\{z\in C \mid |z-z_0|\leq r\}$

et $r_k=\min\{r>0,\ \exists z_0\in C,\ card(Z[i]\cap D(z_0,r))\geq k\}$

alors $\lim_{k\to\infty} \frac{r_k^2}{k} = \pi$

---

retour à la page d'accueil

page d'accueil

Ernesto Cesàro
(1859 - 1906)

Proba et Pi-toresque (1881)

La probabilité que deux entiers choisis au hasard soient premiers entre eux est $\frac{6}{\pi^2}$...
Si l'on veut pouvoir utiliser ce résultat, il convient de reformuler : Si l'on choisit deux entiers inférieurs à *n*, la probabilité P_n qu'ils soient premier entre eux tend vers $\frac{6}{\pi^2}$ lorsque n tend vers l'infini.

Tranches de vie

Cesàro est né à Naples en *1859*. Après des études à l'école des Mines de Liège, il enseigne à l'université de Naples à partir de *1883*. S'intéressant à l'arithmétique et les séries, il meurt néanmoins prématurément en essayant de sauver son fils de la noyade...

Autour de π

Un grand résultat sur *Pi* dans le domaine des Probabilités ! Car la condition du théorème (*2* entiers au hasard) peut être retranscrite de façons très diverses et nombreux sont ceux qui ont eu là-dessus des idées brillantes ou peu sérieuses ! Pour la détente, je vous conseille un petit coup d'oeil à la rubrique Essais...

Démonstration

Fixons tout d'abord, comme dans la deuxième formulation du théorème, un entier *n*.
Nous allons faire un peu de dénombrement en comptant le nombre de couples *(i,j)* où *i* et *j* sont inférieurs à *n* et premiers entre eux...

1. La première condition pour qu'ils soient premiers entre eux est qu'ils ne soient pas tous les deux multiples de *2*. Comme un nombre sur deux est multiple de *2* (!), la probabilité que *i* **et** *j* soient divisibles par *2* est $1/2*1/2=1/2^2$.
Donc la probabilité que *i* et *j* ne soient pas multiples de *2* est $(1-1/2^2)$.

2. La deuxième condition est que *i* et *j* ne soient pas multiples de *3* tous les deux. De même que précédemment, cette probabilité vaut $(1-1/3^2)$.
Tiens, tiens, ça rappelle quelque chose !
Ces conditions étant indépendantes, la probabilité que *i* et *j* ne soient ni multiple de *2* ni de *3* est $(1-1/2^2)(1-1/3^2)$.
Or *i* et *j* seront premiers entre eux si ils ne sont multiples d'aucun entier tous les deux, c'est à dire d'aucun nombre premier tous les deux puisque tout nombre est décomposable en facteurs premiers. En continuant pour tous les nombres premiers les conditions précédentes, on obtient que la probabilité *P* que *i* et *j* soient premiers entre eux vaut lorsque *n* tend vers l'infini :

$$\prod_{p=2,\ premier}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)$$

Mais, mais ! D'après la section 4) de la partie Démonstration de la page Euler, ceci veut dire que la probabilité cherchée est :

$$P = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right)^{-1} = \frac{6}{\pi^2}$$

Tout cela est un peu qualitatif, mais le principe est surtout important et la démonstration peut être rendue parfaitement rigoureuse dans le détail !

Essais

Le résultat est surtout important du point de vue arithmétique, et, bien sûr, comme toujours en probabilité, la convergence est extrêmement lente. On ne peut obtenir en pratique plus de *5* décimales avec cette méthode... Néanmoins, laissons courir notre imagination... La taille en millimètre d'un couple, les chiffres d'une loterie, les décimales d'un nombre normal sont autant de générateurs de couples d'entiers !
Par exemple, R. Matthews a utilisé les coordonnées des *100* plus brillantes étoiles de la voute céleste... Voilà des couples d'entiers qui lui ont donnés *Pi=3,12772*. C'est exact à *0,5%* près alors... *Pi* serait-il une composante cachée de l'univers ?
En utilisant les décimales de *Pi* en tranches de *8* chiffres, J. Chuan a obtenu *Pi=3,146634*. Alors là, *Pi* qui donne *Pi*, c'est extrêmement fort !
Si vous avez d'autres idées, n'hésitez pas à m'en faire part.

---

retour à la page d'accueil

[page d' accueil](#)
[retour au grenier](#)

Triangle des c(n,k)

Un résultat original

$$\forall n \in N, \quad soit \quad C_n = \frac{d^n f}{dx^n}(0) \quad où \quad f(x) = \frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\frac{(2n+2)C_n}{C_{n+1}} \xrightarrow{n \to \infty} \pi$$

Autour de π

La formule ci-dessus est l'expression analytique de la définition des c(n,k).
(dans ce cas, on a k=n)

Mais en 1966, Entringer fut le premier à construire le tableau ci-dessous qui résulte de la répartition des permutations up-down suivant les valeurs de leur premier terme.
Pour ce faire, formons le triangle des entiers c(n,k), ($0 \leq k \leq n$) dans lequel chacun des entiers c(n,k) (à ne pas confondre avec les combinaisons) est la somme des k derniers termes de la ligne n-1 :

c(n,k)	k=0	1	2	3	4	5	6	7	8

n=0	1								
1	0	1							
2	0	1	1						
3	0	1	2	2					
4	0	2	4	5	5				
5	0	5	10	14	16	16			
6	0	16	32	46	56	61	61		
7	0	61	122	178	224	256	272	272	
8	0	272	544	800	1024	1202	1324	1385	1385

Les nombres cn semblent être connus depuis Euler et admettent comme définition celle du haut de la page.
En 1879, Désiré André leur a trouvé la propriété d'être également le nombre de permutations up-down des entiers de 1 à n (cela signifie que les n-1 différences successives de deux termes consécutifs de la permutation sont alternativement positive, négative positive, etc...). On appelle aussi cela dans notre bonne vieille langue de Molière les "alternantes" ou "alternances d'André" ce qui est bien mérité ! (merci pour cette précision de Serge Bouc)
Par exemple, c_4=5 et l'on a en effet 5 permutations up-down de {1,2,3,4} :
1 3 2 41 4 2 32 3 1 42 4 1 33 4 1 2

Pour 1 3 2 4, on a bien 3-1=2, 2-3=-1, 4-2=2

Notons ensuite c_n=c(n,n). on a alors $\frac{(2n+2)c_n}{c_{n+1}} \xrightarrow{n\to\infty} \pi$

Principe de la démo

En fait, on peut montrer que la série entière de terme général $c_n \frac{z^n}{n!}$ admet π/2 pour rayon de convergence, (ce qui semble logique si l'on considère la validité du développement de Taylor de la fonction f définie comme en haut).
Donc, le rapport des coefficients devant z^n tend alors forcément vers π/2.

Essais

La fraction donne une valeur approchée de Pi par défaut si n est pair et par excès sinon :

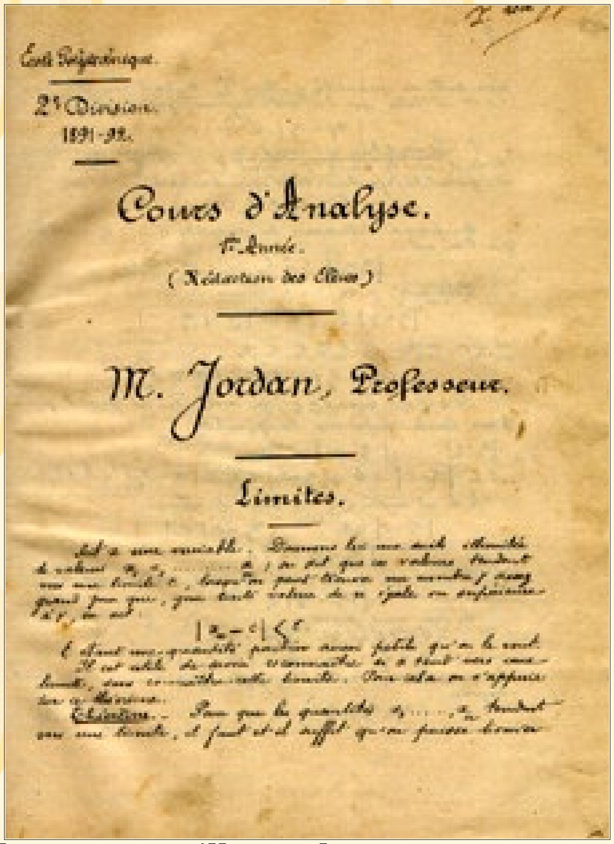
n=0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	3	3,2	3,125	3,147	3,1397	3,1422	3,14138	3,1416	3,141569

On dirait une convergence logarithmique, mais je n'en ai pas la preuve...

---

retour au grenier
retour à la page d' accueil

page d' accueil


École Polytechnique.
2e Division
1891-92.
Cours d'Analyse.
1re Année.
(Rédaction des Élèves)
M. Jordan, Professeur.
Limites.

cours d'analyse à l'X par Camille Jordan, 1891-1892, archive personnelle !

Ah, enfin l'analyse !
XVIIIe siècle - fin XIXe siècle

Le temps des querelles

Comme d' habitude à cette époque, de violentes querelles apparaissent : Leibniz (1646-1727) et Newton (1642-1727) se disputent la paternité de la découverte du calcul différentiel et perdent beaucoup d'énergie... Il n'en reste pas moins que malgré le scepticisme de certains (Rolle, par exemple, qui ne croit pas en cette révolution et va se fâcher avec Varignon, mais n'en fournit pas moins un des théorèmes les plus célèbres de cette théorie), le calcul différentiel va bouleverser les mathématiques... Les résultats apparaissent rapidement et la recherche sur Pi va en bénéficier comme aucune autre !

Et la prime à la recherche d'une solution concernant le fameux problème de la quadrature du cercle offerte par l'académie des Sciences engendre un intérêt toujours grand sur la géométrie.
Mais tout cela ne s'est pas fait en un jour :

Les prémices de l'analyse...

Si il y a un mathématicien qui symbolise un peu ce passage de la géométrie à l'infinitésimal, c'est Wallis (1616-1703).
Ses manipulations de suites infinies et ses recherches sur l'aire d'un quart de cercle (en partant de l'intégrale de $(1-x^2)^n$ pour arriver à n=1/2) le poussent vers des horizons encore inconnus jusqu'alors. Il trouve ainsi une très belle formule, le premier produit infini convergeant vers Pi !
Lui succède alors Lord Brounker (1620-1684), un ami de Wallis, qui, sur sa demande, continue les recherche vers les fractions continues et trouve le célèbre développement de 4/Pi...
Tout cela tourne beaucoup autour de l'infinitésimal mais ce n'est qu'avec le calcul différentiel que vont vraiment s'épanouir ces techniques.

L'envol de l'analyse :

Newton et ses fluxions contre Leibniz et ses *dy/dx*... L'un comme l'autre ont au moins le mérite d'avoir eu la vision d'un des bouleversement des mathématiques.
Newton applique cette théorie aux séries infinies (développements limités) et en déduit le développement d'arcsin et donc de belles formules sur Pi. A la même époque, Grégory n'est pas en reste et s'intéresse lui plutôt à celui d'arctan. Mine de rien, et même si il est bien connu que la formule de Leibniz est un corollaire immédiat de ce résultat mais ne figure pas dans les oeuvres de Grégory, le développement d'arctan va jouer par la suite un rôle éminemment primordial dans le calcul des décimales de Pi, via la formule de Machin par exemple. On a en effet :

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

pour x entre -1 et 1, ce qui est un résultat assez fort. (encore plus si l'on considère la complexité du développement limité de tan !)
Continuons le chemin chronologique de la grande histoire des mathématiques...
Après que la prédominance mathématique se soit installée en Angleterre sous l'impulsion de Newton, celle-ci revient sur le vieux continent, en Suisse notamment avec les Bernoulli et Euler. C'est la grande époque de l'analyse. Euler fouille partout et défriche inlassablement pour nous fournir d'innombrables formules.
La plus belle est certainement :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

qui n'apporte guère au cacul des décimales mais dont la simplicité est tout à fait remarquable....

La diversification

Pi, ce n'est pas seulement la géométrie et l'analyse ! Buffon (1707-1788) nous prouve avec son célèbre problème de l'aiguille que Pi intervient aussi dans le domaine des probabilités. Bien sûr, ce résultat est dû à la définition de Pi comme composante de l'aire et du périmètre du cercle, mais d'autres résultats viendront qui confirmeront la présence de Pi dans toutes les branches des mathématiques... (voir Cesàro)
Et un gros problème tracassait de plus les mathématiciens depuis l'Antiquité : celui de l'irrationnalité. Ils la soupçonnaient vraie mais n'avaient jamais réussi à la prouver. Euler avait montré celle de e et Lambert apporta une réponse au problème pour Pi en 1761. Pi était bien irrationnel !
Voilà en fait le résultat peut-être paradoxalement le plus important que l'on ait trouvé sur la répartition des décimales de Pi tant cette dernière

demeure un mystère encore de nos jours. L'irrationnalité indique ainsi qu'elles ne sont pas périodiques...
Restait la transcendance. Malgré les efforts de beaucoup de mathématiciens (et amateurs qui cherchent toujours à résoudre la quadrature du cercle !), cette citadelle reste imprenable encore pour un siècle!
Un des mathématiciens qui selon moi va apporter le plus indirectement à la recherche sur Pi est Joseph Fourier (1768-1830). Sa théorie sur la décomposition d'une fonction périodique en série, encore à finaliser mais qui va faire l'objet d'un passage à la rigueur tout au long du XVIIIe siècle, est véritablement révolutionnaire (tant d'ailleurs que certains mathématiciens de l'époque s'élèveront contre avec beaucoup d'énergie !!). Ce résultat permet en effet de redémontrer simplement à peu près toutes les formules de ce bon vieux Euler ! Et bien sûr d'en trouver de nouvelles assez intéressantes !

Pi tombe dans l'ombre...

Le XIXe siècle arrive... Bizarrement, le plus brillant représentant du génie scientifique de ce siècle, Maître Gauss (1777-1855), malgré son talent incomparable, n'est pas celui qui apportera le plus à la recherche sur Pi. On lui doit quelques petites formule d'arctan, mais pas de quoi se rouler par terre !
Bien que Pi continue à apparaître dans de nombreux résultats, le XIXe siècle se tourne plutôt vers l'algèbre et l'arithmétique avec Galois, Abel, Sophie Germain et les tout nouveaux théoriciens de la géométrie non euclidienne tels Gauss, Beltrami, Lobatchevski et Bolyai.
Le calcul des décimales semble aussi s'essoufler après la deuxième moitié du XIXe siècle. Tout cela malgré le talent extraordinaire de Zacharias Dase, annonciateur des ordinateurs modernes par ses fantastiques capacités de calcul(il pouvait multiplier de tête deux nombres de 100 chiffres en 8h, en faisant des pauses, ou bien dormant une nuit entière, et reprenant plus tard !!!) et l'ardeur de quelques passionnés comme Shanks. Il faut dire que l'on est arrivé à ce qui était humainement possible de calculer à la main avec Shanks qui obtient 707 décimales en 1852 alors qu'au siècle suivant, en 1944, on

démontrera que seules 527 étaient bonnes !!! Une erreur qui aura donc durée 92 ans !!!
Et depuis les formules d'arctan, on n'a toujours pas trouvé un moyen d'aller plus vite et plus loin en théorie comme en pratique...
De plus, le plus vieux problème mathématique se trouve résolu par Lindemann en 1882 lorsqu'il démontre la transcendance de Pi. La quadrature du cercle est donc impossible...
Comment va-t-on sortir de cette impasse et se remotiver ?...
C'est qu'au fin fond de l'Inde grandit en cette fin de XIXe siècle un personnage qui va tout bouleverser et révolutionner le siècle à venir...
L'ère des algorithmes et de l'informatique va commencer... Suite à la section "Les ordis au travail"

---

retour à la page d' accueil

page d'accueil

Lord William Brounker
(1620 - 1684)

Formule importante

$$\pi = 4\cfrac{1}{1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\ldots}}}}$$

autres fractions continues...

Tranches de vie

De formation linguistique et philosophique (doctorat en *1647* à Oxford) et fondateur avec Wallis de la Royal Society, William Brounker se passionne néanmoins pour les mathématiques. Sur la demande de son ami Wallis, il entreprend des recherches sur π et les fractions continues, ce qui lui permet de proposer le développement de $\pi/4$ sous cette forme d'après la formule de Wallis.

Autour de π

Il existe de nombreuses autres fractions continues faisant intervenir π. Malheureusement, leur convergence n'est pas très rapide, elles sont inutilisables en pratique, mais proposent une autre façon de représenter les nombres que les décimales classiques. D'après certains, Ramanujan avait peut-être le don de penser les nombres en terme de fractions continues, ce qui expliquerait en partie ses étonnants résultats...

Démonstration

Un peu de théorie sur les fractions continues qui ont totalement disparu de l'enseignement ! La fraction réduite d 'une fraction continue généralisée s'écrit : $\frac{P_n}{Q_n}=a_0+\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\dots+\cfrac{a_n}{b_n}}}$.

On peut calculer les réduites P_n et Q_n par les formules de récurrence : $P_{n+1}=b_{n+1}P_n+a_{n+1}P_{n-1}$ *et* $Q_{n+1}=b_{n+1}\, Q_n+a_{n+1}\, Q_{n-1}$ (notées (1) et (2)).

On a dans notre cas $a_0=0$, $a_1=1$, $a_n=(2n-3)^2$ pour $n>1$, $b_0=1$, $b_n=1$ pour n>1.

Une autre formule très utile est $P_nQ_n-Q_nP_{n-1}=(-1)^n a_1.a_2.....a_n$ (3) et enfin, la fraction converge ou non en même temps que la série $a_0+\sum\left(\frac{P_n}{Q_n}-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right)=a_0+\sum\left(\frac{(-1)^n a_1a_2\dots a_n}{Q_nQ_{n-1}}\right)$ (4) et a même limite en cas de convergence.

Bon, passons à la pratique et appliquons ces formules à la fraction de Lord Brounker... Montrons par récurrence, (c'est le plus pénible !) que la proposition A_n : $Q_nQ_{n-1}=(2n-1)\prod_{k=0}^{n-1}(2k-1)^2$ (H1) et $\frac{Q_n}{Q_{n-1}}=(2n-1)$ (H2) est vraie pour tout $n>2$.

Pas de problèmes pour $n=2$ puisque $\frac{P_1}{Q_1}=\frac{1}{1}$ *et* $\frac{P_2}{Q_2}=\frac{2}{3}$ *donc* $\frac{Q_2}{Q_1}=3$ et $Q_2Q_1=3$.

Après, c'est un peu plus lourd... Supposons le résultat pour un certain $n>2$.

On a d'après (2) $Q_{n+1}Q_n=2Q_n^2+(2n-1)^2Q_{n-1}=2\frac{Q_n}{Q_{n-1}}Q_nQ_{n-1}+(2n-1)^2$ $(2n-1)\prod_{k=0}^{n-1}(2k-1)^2=(2\frac{Q_n}{Q_{n-1}}+(2n+1)^2)(2n-1)\prod_{k=0}^{n-1}(2k-1)^2=(2n+1)(2n-1)$

$(2n-1)\prod_{k=0}^{n-1}(2k-1)^2$ d'après (H2)

$= (2n+1)\prod_{k=0}^{n}(2k-1)^2$ et c'est bien (H1) au rang suivant que l'on notera d'ailleurs (H3).

D'autre part, $\frac{Q_{n+1}}{Q_n} = \frac{[Q_{n+1}Q_n]}{[Q_n Q_{n-1}]}\frac{Q_{n-1}}{Q_n} = \frac{(2n+1)\prod_{k=0}^{n}(2k-1)^2}{(2n-1)\prod_{k=0}^{n-1}(2k-1)^2}\frac{1}{2n-1}$ d'après (H1), (H2), et (H3)

donc finalement, $\frac{Q_{n+1}}{Q_n} = (2n+1)$ ce qui est bien (H2) au rang suivant. Le théorème de récurrence nous permet de conclure à la validité de A_n pour $n>2$.

Et avec (4) et la convergence de la série d'après Leibniz, on conclut que $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n a_1 a_2 \dots a_n}{Q_n Q_{n-1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$ est bien la valeur de la fraction continue proposée par Lord Brounker...

Essais

Malheureusement, si la formule est belle, le fait que la fraction réduite converge comme la série de Leibniz implique des résultats éxécrables... (n'ayons pas peur des mots...). Les résultats étant les mêmes, se reporter à Leibniz pour le détail des essais...

Autres fractions continues (toutes aussi belles !!)

$$\pi = 2 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{1}{\frac{1}{2} + \cfrac{1}{\frac{1}{3} + \cfrac{1}{\frac{1}{4} + \dots}}}} \qquad \pi = 2 + \cfrac{4}{3 + \cfrac{1 \times 3}{4 + \cfrac{3 \times 5}{4 + \cfrac{5 \times 7}{4 + \dots}}}}$$

$$\frac{\pi}{2} = 1 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{2\times 3}{1 - \cfrac{1\times 2}{3 - \cfrac{4\times 5}{1 - \cfrac{3\times 4}{3 - \cfrac{6\times 7}{1 - \dots}}}}}}$$

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1^2}{3 + \cfrac{2^2}{5 + \cfrac{3^2}{7 + \cfrac{4^2}{9 + \dots}}}} \qquad \pi = 3 + \cfrac{1^2}{6 + \cfrac{3^2}{6 + \cfrac{5^2}{6 + \cfrac{7^2}{6 + \dots}}}}$$

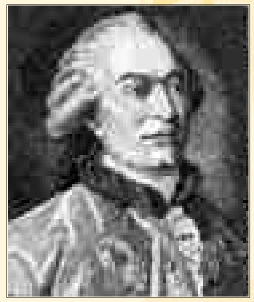
$$\frac{6}{\pi^2 - 6} = 1 + \cfrac{1^2}{1 + \cfrac{1\times 2}{1 + \cfrac{2^2}{1 + \cfrac{2\times 3}{1 + \cfrac{3^2}{1 + \cfrac{3\times 4}{1 + \dots}}}}}} \qquad \frac{12}{\pi^2} = 1 + \cfrac{1^4}{3 + \cfrac{2^4}{5 + \cfrac{3^4}{7 + \cfrac{4^4}{9 + \dots}}}}$$

$$\frac{16}{\pi} = 5 + \cfrac{1^2}{10 + \cfrac{3^2}{10 + \cfrac{5^2}{10 + \cfrac{7^2}{10 + \dots}}}}$$

---

retour à la page d'accueil

page d'accueil

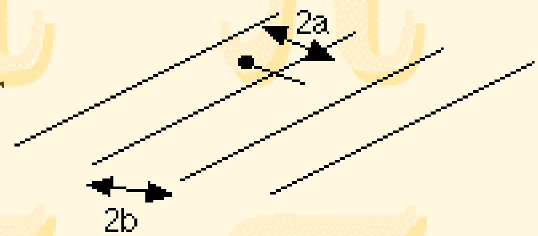


Georges-Louis Leclerc Comte de Buffon

(1707 - 1788)

Un élégant résultat

Si on laisse tomber une aiguille de longueur *2a* sur un parquet formé de lames de largeur *2b*, la probabilité pour que l'aiguille coupe l'une des raies de ce parquet est $\frac{2a}{\pi b}$



Tranches de vie

Georges Louis Leclerc est né en *1707*. Bien sûr, son oeuvre principale est celle d'un naturaliste. Ainsi, l'*Histoire naturelle générale et particulière* (*15* volumes !), l'*Histoire naturelle des oiseaux* (*9* vol.), le *Supplément à l'histoire naturelle* (*7* vol.) et autre *Histoire naturelle des minéraux et traité de l'aimant* (*5* vol.) lui vaudront la plus grande célébrité... D'autant plus que son style est très agréable... Mais, philosophe également, cet excellent administrateur fut membre de toutes les grandes académies européennes et s'intéressa aux mathématiques... Tiens, tiens !.. Dans son *Essai d'arithmétique morale* publié en *1777*, un volume intitulé *Mémoire sur le jeu du franc carreau* présente en effet le célèbre problème de l'aiguille...

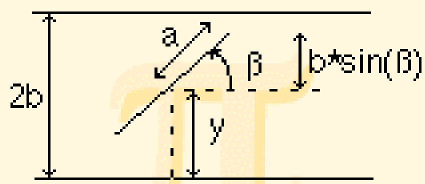
Autour de π

Ce problème est un des premiers à faire intervenir les probabilités et *Pi*. Encore une preuve de l'omniprésence de ce nombre en mathématiques. Evidemment, cette présence n'est pas étrangère à la définition géométrique originelle de *Pi* comme périmètre du cercle de diamètre *1*... Mais le mélange subtil avec l'analyse est très plaisant ! Tellement agréable d'ailleurs que deux preuves sont relatées ci-dessous. Bien sûr, le plancher est supposé plat (restons dans des espaces euclidiens !).
En fait, il ne faut pas espérer obtenir une bonne approximation de *Pi* en allant simplement acheter un paquet d'aiguilles au coin de la rue ! Une précision de 10^{-3} est obtenue avec une probabilité de *95%* à partir de *888 697* lancers.

Démonstrations

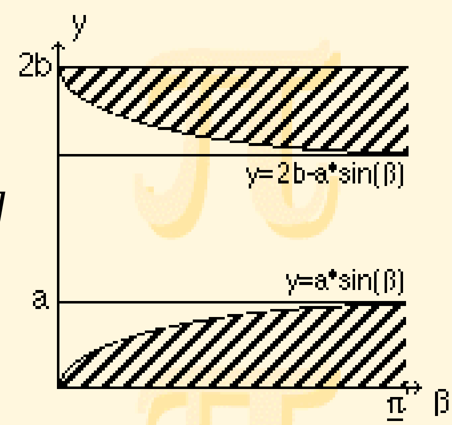
1) Un peu de géométrie...

Avec les hypothèses du haut de la page (longueur d'une aiguille *2a*, largeur des lames *2b*) :



Désignons par *y* la distance du milieu de l'aiguille ($0 \le y \le 2b$) à la raie du bas et par *ß* l'angle entre l'aiguille et la raie $\left(0 \le \beta \le \frac{\pi}{2}\right)$.

Si $y + a*\sin(\beta) \ge 2b$ ou $y - a*\sin(\beta) \le 0$ alors respectivement, l'aiguille coupe la raie du haut ou celle du bas...



Donc, il y aura intersection si le point *P* défini par ses coordonnées *(ß,y)* appartient à la zone hachurée du graphique ci-contre :
Or, la distribution de *y* sur *[0,2b]* et *ß* sur *[0,π/2]* est uniforme et donc la probabilité cherchée représente le rapport de l'aire de la surface hachurée à l'aire du rectangle *[0,2b]*[0,π/2]* (qui contient tous les cas possibles). Or l'aire du

rectangle est $A=\pi/2*2b=b\pi$.

Et l'aire de la surface hachurée est $B=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} a*\sin(\beta)d\beta$ (les 2 surfaces hachurées ont même aire car elles sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y=b$)

d'où la probabilité cherchée est $p=\frac{2\int_0^{\frac{\pi}{2}} a*\sin(\beta)d\beta}{\pi b}=\frac{2a[-\cos(\beta)]_0^{\frac{\pi}{2}}}{\pi b}=\frac{2a}{\pi b}$.

Si l'on a une grande patience, il suffit de lancer un grand nombre de fois n l'aiguille sur le sol et de compter le nombre d'intersections. En prenant $b=2$ et $a=1$, la loi des grands nombres nous permet de conclure que $\frac{n}{d} \overset{n\to\infty}{\sim} \pi$.

2) Emile Borel a aussi trouvé une démonstration astucieuse et rapide de ce résultat de Buffon... Quelque soit sa forme, le nombre d'intersections d'une aiguille avec le bord des lattes est proportionnel à sa longueur $2a$ et inversement proportionnel à la largeur $2b$ des lattes. Donc il peut s'écrire sous la forme Ka / b. Reste à trouver la constante K...

Et là, astuce ! Prenons une aiguille circulaire de diamètre $2b$. Son périmètre, donc sa longueur, est évidemment $2\pi b$. Quelle que soit la façon dont elle tombe, elle coupe exactement 2 fois les raies... donc on en déduit $2=Ka/b=K\pi b/b=K\pi$, d'où $K=2/\pi$ et la probabilité cherchée est $\frac{2a}{\pi b}$!

Essais

Quelques individus patients ont tenté leur chance au lancer d'aiguilles... Notamment Wolf en *1850* qui se munit de *5000* aiguilles avec $a=0.8b$ et observe *2532* intersections ce qui l'amène à l'approximation $\pi=3.1596$.

Pour ma part, je n'ai pas encore essayé. A mon sens, le principe est surtout intéressant, mais l'expérimentation est longue et peu efficace, ce qui limite l'intérêt. Mais rien n'empêche d'automatiser le processus !

---

retour à la page d'accueil

page d'accueil

Johann Heinrich Lambert
(1728 - 1777)

Ca, c'est du théorème...

π est irrationnel !!! (et en fait π^2 également d'après Legendre...)

Tranches de vie

De milieu modeste et quittant l'école à *12* ans, Johann Lambert est un autodidacte, et se forme un esprit complet et imaginatif. On raconte d'ailleurs que Frédéric le Grand lui demanda un jour dans quelle science il était le plus compétent. Très humblement, Lambert lui répondit "Toutes" !
Travaillant sur les prémices des géométries non euclidiennes, mais s'intéressant également aussi à la philosophie et la physique, Lambert reste célèbre pour avoir démontré en *1761* l'irrationnalité de *Pi*, ce que nous allons faire également !

Autour de π

En fait, l'irrationnalité de *Pi* est un résultat attendu mais fort utile car c'est à peu près le seul à donner des informations sur les décimales de *Pi* : Celles-ci ne sont pas périodiques !
Lambert démontre précisément le théorème suivant : si $x\#0$ est rationnel, alors $\tan(x)$ est irrationnel.
Or, par contraposée, $\tan(\pi/4)=1$ donc $\pi/4$ et finalement π sont irrationnels !

Démonstration

La démonstration de Lambert (*1761*) est un peu lourde mais donnons-en tout de même un résumé!
En effet, les autres preuves que j'ai pu trouver sur le net utilisent une autre méthode, toujours la même... (voir [Liens])
Donc, varions les plaisirs !

Le principe est de trouver un développement de $\tan(x)$ qui possède des propriétés particulières.

Lemme 1 :

Considérons la fraction continue x, convergente et illimitée :

$$x = \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \dots}}}$$

avec a_i et b_i entiers relatifs.
Si $|a_i|<|b_i|$ à partir d'un certain rang, alors x est irrationnel.

Démonstration :

Supposons que dès le rang $i=1$, on a $|a_i|<|b_i|$ (ce qui n'enlève pas de généralités...)
Pour $i \in N^*$, on a donc $b_i-1<b_i+\frac{a_{i+1}}{b_{i+1}}<b_i+1$ et donc puisque a_i et b_i sont

des entiers séparés d'au moins une unité, on obtient : $\left|b_i + \frac{a_{i+1}}{b_{i+1}}\right| > |a_i|$.

Le terme en plus $\frac{a_{i+1}}{b_{i+1}}$ par rapport à l'hypothèse initiale est de valeur absolue inférieure à *1* donc ne peut faire changer le signe de la fraction (car b_i est un entier).
Ceci nous indique que le signe n'a pas changé et donc, on en conclut que $\frac{a_i}{b_i + \frac{a_{i+1}}{b_{i+1}}}$ est du signe de $\frac{a_i}{b_i}$. Sa valeur absolue est de plus inférieure à *1* d'après l'inégalité ci-dessus.

De façon similaire, on obtient que $\frac{a_{i-1}}{b_{i-1} + \frac{a_i}{b_i + \frac{a_{i+1}}{b_{i+1}}}}$ est du signe de $\frac{a_{i-1}}{b_{i-1}}$ et de valeur absolue inférieure à *1*.

Par récurrence descendante immédiate, on peut écrire finalement que x est du signe de $\frac{a_1}{b_1}$,
et de module inférieur à *1* ($|x| \leq 1$).

Pour $|x| = 1$, le développement n'est pas intéressant à étudier car d'un type très particulier...
Supposons donc $|x| < 1$ avec x rationnel :

$$x = \frac{p}{q} = \frac{a_1}{b_1 + p_1} \quad \text{donc} \quad p_1 = \frac{qa_1 - pb_1}{p} = \frac{r}{p}$$

Comme dans l'étude précédente, p_1 a les mêmes propriétés que x, c'est à dire $|p_1| < 1$ et donc, on en conclut $|r| < |p|$.
Mézalors ! En itérant le procédé, on construit une suite infinie de fractions, leurs numérateurs étant des entiers de module strictement décroissant, ce qui est parfaitement absurde !
On conclut finalement à l'irrationalité de x.

Lemme 2 :

On a pour *x* tel que sa tangente soit définie : $\tan(x) = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \ldots}}}$

Démonstration :

On utilise pour cela les développements de *sin* et *cos* :

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}}{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}} = \cfrac{x}{\cfrac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}}{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}}}$$

Si l'on écrit tan(x) sous la forme

$$\tan(x) = \frac{x}{1 + R_1}, \quad \text{on reconnaît } R_1 = -x^2 \frac{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n)x^{2n-2}}{(2n+1)!}}{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}} = \cfrac{-x^2}{\cfrac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}}{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+2) x^{2n}}{(2n+3)!}}}$$

et de même, on peut alors écrire : $R_1 = \frac{-x^2}{3 + R_2}$. En itérant le procédé, on construit ainsi : $\tan(x) = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \ldots \cfrac{}{\ldots - \cfrac{x^2}{(2k-1) + R_k}}}}}$.

Par récurrence presque immédiate, on a par ailleurs

$$R_k = \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n+2)(2n+4)\ldots(2n+2k)x^{2n+2}}{(2n+2k+1)!}}{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}(2n+2)(2n+4)\ldots(2n+2k-2)x^{2n}}{(2n+2k-1)!}}$$ et donc on obtient finalement :

$$\tan(x) = \cfrac{x}{1-\cfrac{x^2}{3-\cfrac{x^2}{5-\cfrac{x^2}{7-\ldots}}}}$$

Réciproquement, on doit vérifier (ce que je n'ai pas du tout envie de faire !) que la fraction obtenue converge effectivement vers *tan(x)*. Le principe n'est pas exactement le même que celui exposé pour la démonstration de la fraction continue de Lord Brounker. Avec les notations de ce dernier site, dans notre cas, il faut montrer que les réduites P_n et Q_n convergent uniformément respectivement vers *sin(x)* et *cos(x)*.

Théorème de Lambert : π est irrationnel

Pour ce dernier résultat, je ne vais pas utiliser le traditionnel $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ considéré par Lambert. En effet je n'ai toujours pas compris comment ce résultat peut être exploité alors que l'on a exclu le cas *x=1* dans la démonstration initiale (mais je dois être bête...).

Pour simplifier, on va donc prendre $\tan(\pi)=0$, ce qu'a utilisé Legendre pour montrer que π^2 était irrationnel.
En prenant $x=\pi$, on a alors

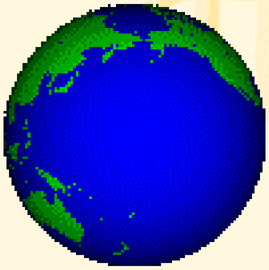
$$1-\cfrac{\pi^2}{3-\cfrac{\pi^2}{5-\cfrac{\pi^2}{7-\ldots}}} = +\infty \quad \text{donc} \quad 3-\cfrac{\pi^2}{5-\cfrac{\pi^2}{7-\cfrac{\pi^2}{9-\ldots}}} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{3}{\pi^2} = \cfrac{1}{5-\cfrac{\pi^2}{7-\cfrac{\pi^2}{9-\ldots}}}$$

Remarquons alors que $(2k+1)>\pi^2$ dès $k=5$ et donc qu'en vertu du lemme *1*, $3/\pi^2$ et donc π^2 est irrationnel (c'est le théorème de Legendre). On a finalement également : π est irrationnel.

---

retour à la page d'accueil

page d' accueil



Liens vers d'autres sites sur Pi / Pi links

Impossible d'être exhaustif !
Néanmoins, voici une liste de liens, que j'espère assez complète et descriptive, pour compléter notre vision de ce nombre universellement célèbre sans perdre trop de temps...
Cette page est inspirée de celle de Antreas Hatzipolakis traduite, mise à jour et complétée.
Cela ne donne certainement pas cette impression, mais faire une mise à jour d'une liste de liens, c'est un travail énorme car cela demande de vérifier chaque lien, sans compter les nouveaux sites que je trouve et qu'il faut archiver en vérifiant qu'ils ne sont pas déjà présents sous une autre adresse !
Et puisque vous avez peut-être déjà remarqué que celle-ci est particulièrement longue...
En conséquence, si vous trouvez un "Dead link", un lien qui ne fonctionne plus, je vous serai vraiment - mais alors vraiment - reconnaissant de me le signaler !

Je vous rappelle que le moyen le plus simple de trouver un mot sur cette page, ou mon site entier, est encore d'utiliser le moteur de recherche local sur la page d'accueil !

Dernières découvertes

Si vous venez souvent sur cette page (mes statistiques ne me l'indiquent pas vraiment, mais bon...) autant ne pas perdre son temps à chercher les nouveautés. Voici les dernières trouvailles en date. J'attends d'ailleurs vos suggestions !

FAQ du forum fr.sci.maths
Plein de pages consacrées à de nombreuses questions courantes sur les mathématiques. Bien sûr, une page sur Pi est indispensable, la voici ! Par Régis Décamps.

La spirale infernale
Un étonnant phénomène à explorer, pourtant bien expliqué mais peu connu. Concerne les nombres premiers et Pi bien sûr !

Pi et les probabilités
Un vaste sujet à explorer. Ici, une petite explication mathématique sur la probabilité de gagner plus que l'on ne joue !

PAGES sur Pi

Pi le film - Site officiel
Le film intitulé "Pi", une très belle et sombre ambiance sur le site...

Pi le film
Une page alternative très sympa avec critiques, et actualités concernant le film (livre tiré, vidéo...)

CECM : Why Pi?
Page consacrée à Pi et créée par l'équipe du CECM dont font partie les frères Borwein. Très complet (histoire, records, actualités, liens...) !

Page d'Eve Anderson

Une des grandes dans l'univers de Pi. Membre honoraire des "Amis de Pi", elle a contribué, grâce à son jeu (The Pi trivia Game, j'ai fait 23/25, puis 22/25 plus tard, à vous de jouer !) et à l'univers qui l'entoure, à célébrer l'esprit de Pi. A visiter de toute urgence (De plus, moi je trouve à Eve un certain charme !)

Olov Windelius : Pi Page

Clubs sur Pi (100 décimales connues, 1000...), liens, formules, un passionné !

Roy Williams Clickery : The Pi Page

Une étude fort complète des formules d'arctan, exp(Pi*sqrt(n)), et un programme en C

The Ridiculously Enhanced Pi Page

Une page très connue, avec liens, musique, et style un peu délirant !

The Uselessness de Pi et its irrational friends

Un must de pi sur le web. Toute une liste de liens vers cette constante "inutile" !

Neal Carothers : A Common Book de Pi

formules, méthode d'archimède, histoire...

Elia's Pi Page

Pi en binaire, Pi en musique, graphiques représentant Pi...

Exploratorium Pi Page

beaucoup de liens, le jour de Pi (Pi-day), une présentation originale...

Nick Johnson-Hill : Pi Page

anecdotes historiques sur Pi

Dara Hazeghi : Pi Page

histoire, liens, intéressante comparaison des performances de l'AGM sur divers ordis, des programmes rapides pour calculer Pi sur toutes les plates-formes

Page de Pi de Paul
plusieurs méthodes historiques de calcul de pi, musique

Pi Nerd's Page
histoire, décimales, musique

Ramon Llorens : Pi Page
liens, décimales, histoire, en espagnol...

Dale Winham : Pi Page
Programmes, anecdotes, histoires, poèmes, blagues et liens, pas mal du tout !

Akte Pi
page très complète en Allemand (pas tout compris..)

Givenchy, le parfum Pi
un bel hommage et toute une aventure à suivre... du web interactif en somme (il faudra un jour que je m'en achète un échantillon tout de même !)

Harry J. Smith : Pi Page
histoire, records, algorithmes et programmes...

Page de Jeremy Gilbert
Un Pi tournant et recherche dans les décimales de Pi

Le webring sur Pi
Webring à propos de Pi. Peu de sites encore, mais peut-être plus dans un proche avenir !

Page de Paul Johns

C'est l'administrateur du Webring cité au-dessus ! On y trouve des blagues (hum...), des liens, un poême, la mailing liste, les records sur Pi, et bien sûr le Webring.

Pi
Quelques digits bianaires sur Pi, le Pi-Day, mais surtout une très belle image sur Pi.

Page d'Heather
Définition, histoire, quelques décimales (en fait beaucoup !) et un journal du site, sans prétention, mais sympa !

Page de Da Ho
Histoire, décimales, records de mémorisation, chanson de Pi

Page de DigitConnection
Une très belle page, un peu peace and love, avec beaucoup d'images, des liens, des poêmes...

Page de J Borwein
Page personnelle de Jonathan Borwein (en général assez longue à charger...)

Page de P Borwein
Et celle de son frère...

Page de Richard Brent

Page de David Bailey au CECM

Page de David Bailey au NERSC

Page de Simon Plouffe
J'ai l'impression qu'elle a sauté il y a peu de temps, je ne sais pas pourquoi, il y a une vague page à la place...

[Page de Pi^2/6]
Une page entièrement consacrée à cette constante en rapport étroit avec Pi ! Il est vrai qu'elle apparait dans beaucoup de formules et l'on y retrouvera sur cette page les principales

---

PAGES FRANCAISES / FRANCOPHONES

FAQ du forum fr.sci.maths
Plein de pages consacrées à de nombreuses questions courantes sur les mathématiques. Bien sûr, une page sur Pi est indispensable, la voici ! Par Régis Décamps.

Dictionnaire de la Télématique et de l'Internet
Cette encyclopédie intéressante d'Yves Martin recense également quelques sujets parallèles comme cette page sur Pi assez complète historiquement. Il est vrai que la recherche sur Pi méritait bien une page, vu l'omniprésence des ordinateurs dans celle-ci !

Fermivista
Moteur de recherche mathématique

3.14 et la suite
Définitions, formules et programmes en c pour calculer Pi

Page de Fabrice Bellard
Quoi que, pas sûr qu'elle soit vraiment toujours en français...

Chronomaths
Très complet, sur les mathématiques en général

A propos de Pi
Quelques liens et lignes sur Pi. De 100 000 à 10 Millions de décimales

à récupérer

Le calcul de Pi
Pi en base 2, 500 000 décimales, et une intéressante étude sur les décimales de Pi (aléatoires ou non ?)

A propos de Pi
Ancien record de Kanada et le poids du papier qu'il faudrait pour imprimer ce record !

Calcul de Pi à travers les âges
Historique, Archimède et le papyrus de Rhind

Précision du calcul de Pi avec 10000 décimales
10 000 décimales dans le détail

Page de Benjamin Herzog
Algorithme compte-goutte, irrationnalité et programmes informatiques, très complémentaire de ma page !

Le projet Pi
Un projet qui consistait à approcher un milliard de décimales au moyen d'ordinateurs personnels et de la communauté Internet... consistait car, hélas, ce projet semble au point mort. Une belle charte graphique néanmoins.

Le nombre Pi
Algorithme compte-goutte et programme

Page d'Hugues Freyssinet
LE programme de 158 caractères et sa traduction en pseudo-langage - un passionné du Mac (comme votre humble serviteur...)

Page de Daniel Mihalcea
Une page assez complète et pas seulement sur Pi. Mathematiciens,

histoire, poêmes, records... Elle possède de plus vraiment son propre style.

Page de Guillemot
Histoire, décimales, démonstration de l'irrationnalité, pas mal de choses en fait...

Pi CLUBS / Pi DAY

Olle's 100-Club
Club des connaisseurs de 100 décimales de Pi

Olle's 1000-Club
Club des connaisseurs de 1000 décimales de Pi (y'a moins de monde déjà que pour les 100 !)

Club des amis de Pi!
Alors eux, ils sont géniaux! Plein d'événements et de célébrations de l'esprit de Pi !

The Pi Club Home Page
Un autre Pi-club plus ancien et moins festif d'apparence...

Pi Club
Plein de jolis dessins en couleurs et pas mal de liens !

Lukas Müller : Pi Day Page (in German)
Le jour de PI (3/14 bien sûr...). Quelques méthodes pour estimer Pi (mais c'est en allemand, je n'ai peut-être pas tout compris !)

"Pi Approximation Day Greeting Cards" Page (USA)
Quelques dessins sympas sur le jour de Pi et des liens sur cette page consacrée à Pi de 123greetings.com

Page de Shepler
Un peu d'histoire et quelques mots sur le Pi-Day dans cet article vivant

!

HISTOIRE

Archimedes' calculation de Pi

La méthode d'Archimède pour calculer Pi dans ce site conscré aux courbes et à la géométrie

Pi through the ages

Lorsque l'université de Saint Andrews, déjà auteur de la page de biographies de mathématiciens la plus fournie de l'internet, s'intéresse à Pi, cela donne cette page assez complète sur l'histoire de Pi. Un peu moins bien que le reste tout de même...

The Pi Trivia Game

Un remarquable questionnaire sur Pi, à essayer de toute urgence !

Historietas de Pi (en Espagnol)

Histoire de Pi, citations et articles à propos de Pi

The history de Pi (en Suédois)

Alors là, pardon, mais je ne comprends pas un traître mot de Suédois !

Notes on Pi

Comme le nom l'indique, quelques notes sur Pi pour un bref résumé de l'histoire de la constante. Un peu court !

Aryabhata's calculation de Pi

Courte page sur Aryabhata et son approximation de Pi

Indiana Pi

Sur l'incroyable constitution de l'Indiana en 1897 qui projetait d'assigner une valeur à Pi

Biblical Pi

Sur la valeur attribuée à Pi dans la bible et la polémique qui en suivit.

Peter pi-per Picked a Peck de Pickled Peppers (ne répond pas)

The approximation de Pi (ne répond pas...)

The story de Pi
Un peu d'histoire et quelques approximations trouvées par Ramanujan

Pi History (en Japonais)
Histoire des approximations de Pi (mais je ne maîtrise pas encore parfaitement le Japonais !)

Shigeru Jochi : Zu Chong-Zhi's Daming Almanac et Compute PI
Méthodes d'approximation de Pi dans l'extrême-orient

Ivo Rsssling : PI und seine Ermittlung (en Allemand)
Un historique et des formules. Intéressant.

Ilan Vardi : An episode in the history de pi.
Sur le projet de loi de l'Indiana

MATHEMATIQUES

Inverseur de Plouffe
Un grand moment et un must de l'Internet... Vous rentrez n'importe quelle nombre décimal et l'inverseur vous dit de quoi ce nimbre est fait (et notamment si il correspond à une constante connue !) Très très utile à tous les scientifiques...

Pi et les probabilités
Un vaste sujet à explorer. Ici, une petite explication mathématique sur la probabilité de gagner plus que l'on ne joue !

La spirale infernale
Un étonnant phénomène à explorer, pourtant bien expliqué mais peu

connu. Concerne les nombres premiers et Pi bien sûr !

Rarebit dreams
Page sur la fraction continue de Pi et les records de calculs (bien documenté)

Ilan's Page
Une preuve que Pi existe bien !

Brown's Pages
Le fameux Brown de la page d'accueil revient ici avec plein de choses ayant rapport avec Pi

Une suite qui concerne Pi
Nombres premiers dans les décimales de Pi
L'algorithme "Rounding-up"

Approximation expérimentale de Pi
On utilise un quart de cercle et des lancers de fêves !

Papyrus de Rhind
Rapide historique et photo (hum...) du papyrus

Equations modulaires de Ramanujan ou comment calculer un milliard de décimales de Pi
...ou comment rêver devant l'ingéniosité de la méthode et la force de la construction mathématique... Equations modulaires, sommes de Ramanujan...

Séries Cubique, fraudes mathématiques...
Toujours le travail des frêres Borwein...

Approximations de Pi via la Dedekind Fonction et les Theta fonctions
Fonction Alpha des Borwein, construction des algorithmes....

Simon Plouffe : The computation de certain numbers...

Calcul de certains nombres constructibles à la règle et au compas

Peter Borwein : Pi et Other Constants : Online Papers
Papiers de p. Borwein sur Pi et d'autres constantes

Page de Stan Wagon
Rappelez vous de la formule d'Adamchik-Wagon mentionnée sur la page de Simon Plouffe !

Pi et les Fibonacci Numbers
Un long et très intéressant article sur la géométrie, les formules d'arctan et Pi

Pi Mathematics
Une home page sur Pi avec l'histoire, les activitités du groupe de la page, des vidéos, des formules et applications... sympa, même si la maquette du site aurait peut-être pu être un peu plus joyeuse d'aspect !

wNet School
Visiblement des cours sur certains domaines des mathematiques, notamment Pi, mais il faut souscrire...

Problème de l'aiguille de Buffon
Analyse du problème et simulation (un super programme de simulation en applet Java !)

Ayo, Tchoukaitlon, et 1/pi
Un article sur un jeu dont les propriétés mathématiques ocnduisent à une approximation de 1/Pi

Useless Facts about Pi
Sur l'irrationnalité, la transcendance, le volume de la sphère en dimension n, et la relation d'Euler

Démonstration de l'irrationnalité de Pi
et uniquement cela !

[Pi est rationnel ou irrationnel ?]
Grande question avec une démonstration des deux conjectures !

[Hakmem page]
Théorie des nombres, formules d'arctan, complexes, formules de Ramanujan... A potasser

[Hakmem page]
Le même site, mais à propos des séries désormais... et des problèmes posés

[Nombre 27 et Pi]
Sur les relations bizarres entre le nombre 27 et Pi (réalisé visiblement par un fan du nombre 27 !)

[Page d'Al-Kashi]
Voilà une page exotique entièrement consacrée à ce mathématicien non moins exotique. L'auteur se propose ainsi entre autres de recenser les pages consacrées à Al-Kashi sur l'Internet (dont la mienne) en les recopiant totalement sur son site ! Plutôt gonflé !

ENCYCLOPEDIES MATHEMATIQUES

Encyclopédie d'Eric Weisstein

- Page sur Pi
- Bizarreries numériques autour de Pi
- Formules type Machin
- La constante de Ramanujan
- Sur les fractions continues de Rogers-Ramanujan
- Sur la fonction Theta de Ramanujan
- Identités de Ramanujan
- Identité cos-cosh de Ramanujan
- Sur la fonction de Ramanujan
- Fonctions g et G de Ramanujan

Identité hypergéométrique de Ramanujan
Conjecture sur la fonction Tau de Ramanujan
Identité de Ramanujan sur la fonction de partition
Identités de séries entières de Ramanujan
Intégrale de Ramanujan
Formule d'interpolation de Ramanujan
Grand théorème de Ramanujan

Mathsoft

Problèmes irrésolus de Mathématiques
Page sur Pi
Volume d'une boule de dimension n
L'algorithme Bailey-Borwein-Plouffe

PHILOLOGIE (Pages de Antreas Hatzipolakis à travers le monde...)

PiPhilology
La fabuleuse page de Antreas Hatzipolakis, souvent imitée, jamais égalée !

PiPhilology (in Topology Atlas)
PiPhilology (in ICMdeSC, Brazil)
PiPhilology (in F.Silva's Home Page, Portugal)

ARTICLES

Ivars Peterson : A Passion for Pi
Sur le record de mémorisation de Simon Plouffe

Steve Berlin : Pi's the Limit
Sur les poêmes en vogue sur le web...

Easy As Pi
Sur un poême créé par A. Volokh

Publications du CECM (et en particulier des Borwein)
y faut du temps pour tout regarder !

Mountain of Pi
Un long article en Anglais sur l'épopée fabuleuse des frêres Chudnovsky

Pour la Science !!!

Is Pi Normal?
Article de Stan Wagon concernant la normalité de Pi

Le Monde
Un article du Monde sur Pi et le record de Fabrice Bellard

MNEMONIQUE
(poêmes composés de mots de longueur suivant les décimales de Pi)

M. Keith's : Cadenza
Le jeux des nombres et des mots : poêmes sur Pi en particulier !

> M. Keith : Poe, E. : Near a Raven
> Le plus long poême : Poe E. Near a raven (3985 décimales !)
> M. Keith : décimales du cercle
> Un poême en cercle !

Pi poetry
Un autre poême sympa

Indian Pi mnemonic

Un poême en sanscrit, je crois !

Olle's pi mnemonic in Japanese
Est-il plus facile de mémoriser les décimales en Japonais ?

Kazuo Furukawa's Mnemonics Page
Hum, bon, je ne maitrise encore pas totalement le Japonais...

Ameta's Mnemonics Page
Un tout petit poême, mais une grande page sur les moyens mnémotechniques

C. Rieger's Mnemonics Page
Une page en Allemand avec un poême sur Pi

Benjamins und Werners Praktische Lerntips Page

POEMES
(pas de commentaires, à vous d'aller visiter !)

Wislawa Szymborska : Pi
Wislawa Szymborska : Pi
Robert Morgan : Pi
Eve's Pi
Eve's Beauty
Eve's My Poem
Olle's Piem
Pi song
Sanskrit Pi Poem

MOYENS MNEMOTECHNIQUES
Voir aussi : PHILOLOGIE

Technique de Olle

A mon avis, une bonne technique...

Méthode de Mark Dettinger

Le must, toutes les méthodesexpliquées et la décomposition des décimales...

Alphabet Phonetique de Prufrock's (à vérifier)

Pi Mémorama

Une méthode qui marche pour tout nombre et un programme pour le Mac

---

PARA-MATHEMATIQUES

Pi est rationnel

the "pi is rational page" ou comment tenter de prouver à tout prix l'irrationnalité de Pi... Un must parmi les blagues...

Vote on the Future Value de Pi

Et le vote a déjà eu lieu, résultat, Pi=..... allez voir !

LIVRES SUR PI

L. Berggren; J. Borwein; P. Borwein : Pi : A Source Book

La source de mon envie également... il faut que je me procure ce livre...

David Blatner : The Joy de Pi

Et pas mal de liens aussi...

Le Fascinant Nombre Pi

Jean-Paul Delahaye, pour LA référence en Français de tout ce qui touche à Pi

---

MEDAILLES SUR PI

[Bottoni : Italian Pi Medal]

PROGRAMMES DE CALCUL
(Prochainement une page sur tout ça !)

GENERAL (CODES,METHODES etc)

[Page de Xavier Gourdon]
Pifast.exe ou le programme le plus rapide du moment sur PC pour calculer Pi

[Jason Stratos Papadopoulos' Pi Programs Page]
Basic, C, plein de programmes et d'explications

[The HFLOAT package]
C'est une méthode pour des calculs avec de longs nombres décimaux. Contient aussi des programmes en c, pas mal de liens....

[Fun with Pi]
Programmes basés sur les arctan, séries de Gauss, Ramanujan, et algorithmes des Borweins

[How to find Pi slowly et painfully] (à tester...)

[Calculer Pi]
Entrez le nombre de décimales que vous souhaitez obtenir et... le tour est joué !
Malheureusement, d'après mes tests, le calculateur est limité à environ 5000 décimales...

[Pi Generator for the HP-28S]
Programme pour HP28, assez lent, mais ça marche !

[Armpi 3 (pour ARM proc.)]

Programmes (et page en Français !) pour processeurs ARM

Programme pour Calculer Pi avec TECO

Frank M. Siegert : Pi en PostScript
Oui, mais je n'arrive pas à ouvrir son fichier en postscript (Ghostview refuse !)

A Piece de Cake Er, Sorry, P !! (A tester...)

Dara's Pi page
Tous les programmes et les comparaisons, toutes les plates formes, un must !

David Bailey à la Nasa
méthode de la Transformée de Fourier Discrète et statistique sur son ancien record

Page de Stuart Lyster
Tous les programmes les plus rapides pour PC à télécharger

Amis de Pi à l'étranger
Ancienne page de Stuart Lyster (voir juste au-dessus !). Bibliothèques pour Atari/Falcon, programmes, liens...

Page d'Hugues Freyssinet
LE programme de 158 caractères et sa traduction en pseudo-langage - un passionné du Mac (comme votre humble serviteur...)

Page de Jason
Sur l'histoire récente des programmes sur Pi et des liens

AMIGA

Picalc
Amiga, toujours là....

ATARI

Gio_Pi

DOS

Calcpi

CalcPi
Quelques programmes sur une page sobre mais dynamique !

Pi

Programme Pi (utilisant XMS)
Sans oublier ln(2), e et des nombres premiers

MACINTOSH

Calculer PI

Calculer Pi (Site FTP Math. Archives)
CalculerPi (Site FTP WU) (à vérifier...)
Calculer Pi (UMichigan WWW)
Si on peut me trouver la page de l'auteur, ce serait chouette !

CALCUL PI & e

Calcul Pi&e (Math. Archives FTP site)
Calcul Pi&e (WU FTP site) (à vérifier...)

Programmes de calcul de e et Pi
(HFLOAT, sources en C)

PiPrimes

PiPrimes

OS/2

Pi

WINDOWS

PiW (Archive SimTel)
PiW (Archive Garbo)

Programme sur Pi, e et ln 2 (Utilisant DPMI)

WINDOWS NT- WINDOWS 95

Page de Xavier Gourdon
auteur de PiFast, le programme le plus rapide du monde

Super Pi
C'est le programme de Kanada qui a servi à calculer les 61 milliars de décimales du record actuel !!

Super Pi

Le nombre Pi
Algorithme compte-goutte et programme

DECIMALES
(Je vous rappelle que 10 Millions de décimales sont disponibles sur mon site à partir de la page d'accueil)

Projet Pihex
La page de Colin Percival qui se charge de battre régulièrement les records du digit le plus éloigné, calculé dans ceux de Pi !

Site FTP de Kanada
Tout sur les anciens records du monde et jusqu'à 4,200,000,000 décimales à télécharger

68,719,470,000 décimales : Record du monde (J. Borwein's Page)
Annonce du record

51,539,600,000 décimales : Record du monde (J. Borwein's Page)
Annonce du record et statistiques

50 Million de décimales de Pi et 30 Millions de 1/Pi
Site de l'inverseur de Plouffe

Pi 5,10 et 400 millions de décimales

La page de recherche dans Pi (50,000,000 décimales)
Cherchez n'importe quelle séquence de nombres dans les décimales de Pi !

Recherche dans 10 Million de décimales de Pi
Page de Jeremy Gilbert

500,002 décimales (à vérifier...)

100,000 décimales
Un très beau motif de fond d'écran !

10,000 décimales (Page d'Andres Magnusson)
Une page d'un bleu tout à fait reposant...

Jusqu'à 1 Million de décimales (Page de R. Llorens Moreno)
De chouettes illustrations

Pi à 100,000 décimales
Du texte, rien que du texte...

32,768 digits binaires de Pi

Classé à une époque dans les dix premières pages inutiles du web !

Recherche dans Pi
(50 millions de décimales)

1000 décimales
(aucun intérêt malheureusement...)

100 000 décimales
un peu plus d'intérêt car elle sont classées par milliers

Université d'Exeter
Jusqu'à 1 Million de décimales

LIENS
Alors cette page ne vous suffit pas !!

Bon, avant tout, il y a les nombreux moteurs de recherche et guides ou Pi apparaît (Si vous voulez essayer Pi tout seul sur Altavista, il doit y avoir environ 600 000 réponses pour très peu de pages en rapport avec Pi !). En fait, côté Guides, lorsqu'une page y est, elle est forcément aussi sur Yahoo, donc...

Petit coup de gueule en passant : il semble qu'Altavista, qui m'avait déja assez lentement référencé et de plus pas très bien, puisque l'on ne trouvait que la page d'accueil, m'ait tout simplement retiré de ses archives... A suivre...

Yahoo! Liens vers Pi
Une des plus complètes, et pour cause, tout le monde s'inscrit sur Yahoo ! Comme disent les autres pages, c'est un bon point de départ...

La même sur Yahoo France
Savez-vous qu'ils ont tout de même attendu et quelques dizaines de formulaires successifs pour m'inscrire ?

(enfin, je ne vais pas me plaindre, beaucoup de gens passent par Yahoo avant d'arriver ici !)

Nick Johnson-Hill : Pi Links
La plus grande sélection de liens vers Pi d'après l'auteur, mais malheureusement plus mise à jour, alors bon courage ! (je crois pouvoir dire que la mienne est maintenant plus fournie, tout de même...)

J. Carvalho e Silva : Pi Links
Beaucoup de liens aussi, et quelques commentaires

"The Joy of Pi" Pi Links
Pas mal du tout, un peu dans le même esprit que ma page, avec subdivisions et commentaires

D. Stott Parker : Pi Corner
Hum, pas grand chose, mais bon...

Alain Van Kerckhoven : Pi (à tester... le serveur de Compuserve ne fonctionne pas pour le moment...)

Go2Net
Un des musts du web, les pages inutiles du web ! (et en particulier les pages sur Pi). Je me demande si ce n'est pas le seul guide où je ne suis pas mécontent d'y être absent...

---

retour à la page d' accueil

Home
Linux
Math
Prépa
TIPE
Progs
Liens
e-mail

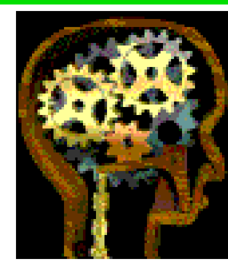
Le Chat

Voici quelques planches du célèbre Chat de Philippe Geluck ...
Si vous ne connaissez pas, allez y, c'est génial !

Linux

Arghl! Windows a encore planté ! pff y'en a marre ***.
Essayez Linux ... c'est tout gratos.

Math



Y a toujours ici la vétérante de ce site: ma page sur pi (faudrait peut-être que je la mette à jour ...). Et puis j'ai rajouté des petits trucs en attendant mieux.

Cadrans Solaires

C'est le sujet de mon TIPE. Donc, dès que je termine mes concours, j'expliquerai ici comment construire simplement un cadran solaire qui marche.

Prépa

Aaah la prépa ! ~~Deux~~ Trois années de réel bonheur pendant lesquelles on apprend tout en s'amusant.

C:\>

La défaite de l'internet

Vous voyez surement ce genre de lien partout en ce moment. Ce n'est pas une pub quelconque ! Il s'agit de s'informer de l'affaire altern.org et de réagir, car l'hébergement gratuit est en danger. Alors si vous ne connaissez pas encore, allez-y faire un tour.

Le Chat

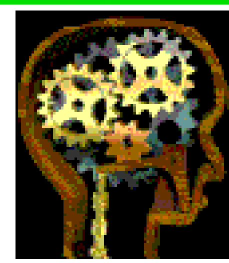
Voici quelques planches du célèbre Chat de Philippe Geluck ...
Si vous ne connaissez pas, allez y, c'est génial !

Linux

Arghl! Windows a encore planté ! pff y'en a marre ***. Essayez Linux ... c'est tout gratos.

Math

Y a toujours ici la vétérante de ce site: ma page sur pi (faudrait peut-être que je la mette à jour ...). Et puis j'ai rajouté des petits trucs en attendant mieux.



Cadrans Solaires

C'est le sujet de mon TIPE. Donc, dès que je termine mes concours, j'expliquerai ici comment construire simplement un cadran solaire qui marche.

Prépa

Aaah la prépa ! ~~Deux~~ Trois années de réel bonheur pendant lesquelles on apprend tout en s'amusant.

C:\>

007300

La défaite de l'internet

Vous voyez surement ce genre de lien partout en ce moment. Ce n'est pas une pub quelconque ! Il s'agit de s'informer de l'affaire altern.org et de réagir, car l'hébergement gratuit est en danger. Alors si vous ne connaissez pas encore, allez-y faire un tour.

Voici quelques planches bien choisies du Chat de Philipe Geluck.

IL EST TRES FORT
ICH BIN EIN HAMBURGER
POUR MOI CA MARCHE
ENCORE LUI !
PQ ET QI
PAS CON LE MEC
SANS ME VANTER
PUTAIN LE MEC ! (Ma préférée)


IL EST TRÈS FORT
PHILIPPE GELUCK
JE CONNAIS UN TYPE
QUI EST TELLEMENT FORT
QU'IL EST MÊME PLUS FORT
QUE CEUX QUI SONT PLUS FORTS QUE LUI
ENFIN...
JE CROIS ...


ICH BIN EIN HAMBURGER
PHILIPPE GELUCK
IL PARAÎT QU'ON EST
CE QU'ON MANGE
ALORS, MOI JE ME DIS
QUE SI C'EST VRAI
MON VOISIN DOIT SANS DOUTE MANGER
DU TROU-DE-CUL


POUR MOI, ÇA MARCHE
PHILIPPE GELUCK
ON DIT QUE UN CON QUI MARCHE
IRA PLUS LOIN QU'UN INTELLECTUEL ASSIS
MOI JE DIS : ÇA DÉPEND...


ENCORE LUI !
PHILIPPE GELUCK
JE CONNAIS LA BLAGUE !
SI JE TIRE SUR SON DOIGT...
IL VA PÉTER


PQ ET QI
PHILIPPE GELUCK
PROUST
ANNONCE KAFKA
C'EST AU FOND DU COULOIR À GAUCHE
JE PARLAIS DE LITTÉRATURE


PAS CON LE MEC !
PHILIPPE GELUCK
GRÂCE À CE PETIT AIDE-MÉMOIRE
1234 5678 90
JE SUIS EN MESURE DE RECONSTITUER
TOUS LES NUMÉROS DE TÉLÉPHONE DU MONDE
1234 5678 90
JE DEVRAIS DÉPOSER LE MODÈLE
1234 5678


SANS ME VANTER
PHILIPPE GELUCK
LES GROS M'AIMENT BIEN
PARCE QUE JE SUIS GROS
LES CONS M'AIMENT BIEN AUSSI
PARCE QU'IL M'ARRIVE D'ÊTRE UN PEU CON
LES GROS CONS NE M'AIMENT PAS
PARCE QUE CE SONT DES GROS CONS


PUTAIN LE MEC !
PHILIPPE GELUCK
IL Y A DES GENS QUI SE LÈVENT
PLUS TÔT QUE D'AUTRES
ET SUR LA TERRE, IL Y EN A FORCÉMENT UN
QUI DOIT COMMENCER
CE GARS-LÀ...
IL SE LÈVE LE PREMIER DU MONDE !

L I N U X

Ahhh ! Enfin une petite section Linux ! Si vous vous demandez ce qu'est Linux, à quoi ça sert, comment l'installer, comment l'utiliser ... et bien je vais tenter d'expliquer ici comment j'ai répondu (pour moi-même) à ces questions. (Pour ceux qui n'ont pas compris, ça veut dire que je ne prétend pas écrire une FAQ, mais juste raconter mes "exploits" personnels).

Qu'est-ce que Linux ?

Linux est un système d'exploitation GRATUIT offrant les mêmes (voire plus de) possibilités qu'une station de travail UNIX. (Si à ce stade je ne cause déja plus français pour vous, je vous propose de faire un tour à cette adresse). Grossièrement, ça veut dire que Linux est capable de gérer entièrement votre machine et qu'il n'a besoin de personne pour ça.

Linux vs Micro$oft

Bon, alors là, c'est la guerre :-) C'est une boutade bien sur ! Mais sérieusement, Linux est vraiment beaucoup mieux ! Ca c'était la partie, totalement objective bien sur, où je donnais mon avis. En fait, ça peut se discuter selon l'utilisation que l'on fait de son PC. C'est sur que quelqu'un qui passe ses journées à bidouiller des logiciels syntrillium, ou psp, pour arranger des supers graphismes, ou remodeler le dernier mp3 à la mode; il a plus de choix sous Win (peut-être aussi pour les inconditionnels du WYSIWYG). A part ça, Linux gagne sur tous les plans.

Comment installer Linux ?

MYTHE -->Linux c'est super dur<-- MYTHE
C'est peut-être pas aussi intuitif que window$, mais c'est pas dur. Et puis une fois qu'on est dedans, le jeu en vaut largement la chandelle !
Bon. Tout commence par l'acquisition de la bête. Cela peut se faire de plusieurs manières vu que c'est gratuit. (par ftp, ou cd-rom, et on a le choix des distributions). J'ai joué la carte sureté, et je vous conseille d'en faire autant: j'ai acheté (au prix du support et du carton autour = pas cher) un support CD-ROM qui a le merite d'etre complet et sans risque de perte de donnée. La distribution, c'est Red Hat (Version au moment où j'écris: 6.0), qui est idéale pour les débutants (puisque je l'ai expérimenté, vous pouvez me croire !).
Ensuite, c'est le manuel de la RedHat qui prend le relais, mais n'hésitez pas à me mailer vos questions !

Comment utiliser LaTeX ?

LaTeX est génial ! Tout scientifique, ou utilisateur de Linux devrait en connaitre au moins les bases. Je vous donne un excellent lien, et puis je vous raconterai mes aventures quand j'aurai le temps. Encore une fois, n'hésitez pas à me mailer vos questions.

Linux au quotidien

Linux au quotidien, ça veut dire imprimer, accéder à internet, éditer des fichiers, papoter sur irc ...
Imprimante: HP Deskjet 870Cxi (c'est la galère)
Carte son: Ensoniq
Carte éthernet(1): SN3200, ou toute compatible NE2000
Carte éthernet(2): NETGEAR FA 310 (TX)
ISP: Cybercable

Réponse à "où trouver ... ?"

La première chose à savoir lorsqu'on est administrateur système, c'est où trouver les logiciels et autres archives dont on peut avoir besoin. Pour cela, j'utilise essentiellement trois moteurs de recherche différents selon la nature de ce que je recherche:

Pour les sources de la dernière version stable d'un logiciel
freshmeat.net

Pour une recherche plus précise: une archive avec une extension précise (par exemple si vous désirez installer un rpm plutot que les sources).
tuxfinder.com

Si les deux précédentes n'ont pas marché, il reste la recherche bourrine qui cherche le nom précis de l'archive que vous tapez (ex: ssh-1.2.26.i386.tar.Z) à travers tous les serveurs ftp qu'il connait.
ftpsearch.com

Mathématiques

http://web.fdn.fr/~cbalmes/F_sup_leledy.html

C'est le site qui a été fait sur mon prof de maths de l'an passé (en sup4). L'auteur de ce site est un ancien élève de Condorcet qui a répertorié consciencieusement les petites blagues de M. Leledy.

http://www.i-france.com/mathster

Même chose que le précédent, mais version 98/99. Donc je décline toute responsabilité quand à ce qu'a écrit ce vil mathster. Par ailleurs, je suis tout à fait contre ce genre d'amusements !!!

http://www.infty08.ac.ma/

La réputation de ce site n'est plus à faire ! Tous les corrigés des problèmes de concours rescents, plus un vrac d'exos.

http://prepas.citeweb.net

Egalement un site pour prépamen. Mais celui-ci est plus général avec des infos en tous genres ... et des classements d'écoles.

Informatique

LaTeX

Un excellent site sur le logiciel de formatage LaTeX. Pour les matheux [ou autre :-)] qui ne connaissent pas ce logiciel, je vous le recommande vivement ! C'est LA référence de la communauté scientifique internationale.
Pour les récalcitrants, il est encore temps de vous résigner !

Compilateur gcc

Pour ceux qui programment en C/C++, il n'est pas très facile de trouver un compilateur pour DOS. Je l'ai cherché assez longtemps, et l'adresse ci-dessus permet (enfin !) de le télécharger avec la librairie C++ en plusieurs fois, assez rapidement.

DNS virtuel

Si vous êtes sous Linux, ceci vous concerne. Sinon, il est temps de vous y mettre. DNS virtuel, très pratique pour ceux qui ont une ip dynamique (genre acquisition par dhcp), et qui veulent utiliser Linux pour devenir une machine serveur active.

Autre

Harmony Central

Pour tous les guitaristes, c'est un super moteur de recherche pour les paroles, accords, et tablatures de presque toutes les chansons. Bien sur, il est un peu plus difficile de trouver les auteurs francais, mais on y arrive ...

http://persoweb.francenet.fr/~jfbus/JeuxDeCartes/
Un site très sympa sur les jeux de cartes. Très complet avec les règles et des liens ...

Voila, c'est fini pour l'instant. Si vous avez des liens biens dans le même genre que ceux là, je suis preneur.
Et bien entendu, n'hésitez pas à me signaler un lien mort.

Bienvenue dans le secteur des maths. Y a rien de bien glorieux par ici: juste des trucs sur pi, et sur l'intégrale de Gauss qui me fascinait quand j'étais petit. Je vous raconterai ça un autre jour).

Page sur pi
Le grand DEFI !
FAQ
Intégrale de Gauss

Bon. la page est pas très jolie, mais j'ai pas le temps. Puis, si vous trouvez des erreurs, n'hésitez pas à me les mailer.

Amusements autour du mystérieux irrationel p:

p	Auteur Bibliographie
Petites blagues Méthodes de calcul simples Pi irrationel: Démonstration	Programme informatique expérimental Programmes informatiques précis

PETITES BLAGUES:

Vous connaissez pas la dernière ? Le rayon de convergence de la série entière dont le coefficient est égal à la n-ième décimale de pi, est égal à 1.

Voici un moyen mémotechnique pour se rappeler les 30 premières décimales de p.
Un joli petit poème:
Que j' aime à faire apprendre un nombre utile aux sages !
3, 1 4 1 5 9 2 6 5 3 5
Immortel Archimède, artiste, ingénieur,
8 9 7 9
qui de ton jugement peut priser la valeur
3 2 3 8 4 6 2 6
Pour moi ton problème eut de sérieux avantages.
4 3 3 8 3 2 7 9

On peut aussi, selon un grand classique, démontrer que p est rationel, contrairement à ce que certains pensent:

Démonstration:
Qu'est-ce qu'une vache ? Une bête à pis.
Qu'est-ce qu'un oiseau ? Une bête à ailes.

La commutativité du produit donne: cheval = vachel
Donc (cheval)/(oiseau) = L*(vache)/(oiseau) = L*(bp)/(bL) = p.

Alors, si j'avais pas raison !!! p = (cheval)/(oiseau).

Autrement, un naturaliste français, Buffon, lui aussi plein d'imagination, montra que la probabilité qu'une aiguille de longueur L, lancée sur un parquet dont les lattes ont une largeur L, coupe le bord d'une

latte est 2/p.
Et, croyez-le si vous le voulez, mais certains s'amusèrent à jetter des aiguilles, et à compter celles qui coupaient des bords de latte.
L'un d'eux, Lozzerini, trouva p = 3,141592***9***
Pas mal, non !?!

retour au début de la page

METHODES DE CALCUL:

Tout le monde connait la formule du périmètre d'un cercle, P=2pR. Il suffit donc d'entourer un cercle solide d'un ruban, et de mesurer le ruben, pour obtenir facilement une valeur expérimentale.

Une méthode algorithmique permet également de calculer pi à la main, décimale par décimale. C'est **l'algorithme compte-goutte** . Le principe en est très simple, mais comme vous le constaterez, il porte bien son nom.

Bon ! on y va, je vous donne le début du cacul, et ensuite j'explique...

A	Pi	r	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B			3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25
début		2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
*10		20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
retenue		10	12	12	12	10	12	7	8	9	0	0	0	0
somme	3	30	32	32	32	30	32	27	28	29	20	20	20	20
reste		0	2	2	4	3	10	1	13	12	1	20	20	20
*10		0	20	20	40	30	100	10	130	120	10	200	200	200
retenue		13	20	33	40	65	48	98	88	72	150	132	96	0
somme	1	13	40	53	80	95	148	108	218	192	160	332	296	200
reste		3	1	3	3	5	5	4	8	5	8	17	20	0

Dans les trois premières lignes, on ne fait que planter le décor, et on place un 0 tout à droite, dans la 4ème ligne. Ensuite, on place dans la ligne "somme", la somme du terme de la ligne *10 et du terme de la ligne retenue. Puis, on divise cette somme par le terme de la ligne B, et on place le reste dans la ligne reste. Quant au quotient, on le multiplie par le terme de la ligne A, et on le place dans la ligne retenue de la colonne de gauche. Et ainsi de suite jusqu'au bout. Alors, le premier chiffre du nombre de la ligne somme dans la colonne r est la décimale cherchée !!

Voila.

Autre méthode: On s'amusa longtemps à chercher des formules faisant intervenir des arctangentes, en espérant trouver LA formule donnant p, et, avis aux amateurs, personne n'a montré que c'était impossible!
Certains grands mathématiciens ont travaillé dans cette optique là, et voici un exemple de formule trouvée par Gauss en 1863. Veuillez noter que ce brave n'avait pas de calculatrice !!!
Un peu plus tard, en 1958, Felton calcula grâce à cette formule quelques 10 021 décimales de p.

p = 48arctan(1/18) + 32arctan(1/57) - 20arctan(1/239)

retour au début de la page

PROGRAMME INFORMATIQUE EXPERIMENTAL.

De nombreuses théories probabilistes, mises sous forme algorithmique permettrait de calculer p avec une plus ou moins bonne précision. La méthode du jeu de fléchette n'est pas mauvaise (et a l'avantage d'être réalisable sous q-basic très simplement, ou avec d'autres logiciels meilleurs):
La probabilité pour qu'une fléchette lancée au hasard, arrive dans un cercle de rayon N, tend vers p/4, lorsque N tend vers l'infini.

retour au début de la page

PROGRAMME INFORMATIQUE PRECIS:

Voici un programme d'un auteur anonyme (et non moins génial), qui donne quelques milliers dedécimales de Pi:

En langage C:

```
int a=10000,b,c=8400,d,e,f[8401],g;main(){for(;b-c;)
f[b++]=a/5;for(;d=0,g=c*2;c-=14,printf("%,4d",e+d/a),
e=d%a)for(b=c;d+=f[b]*a,f[b]=d%--g,d/=g--,--b;d*=b);}
```

En langage basic:

```
DEFLNG a-g : DIM f(8401) AS LONG
 a = 10000 : c = 8400
 WHILE (b<>c)
       f(b) = a \ 5 : b = b + 1
 WEND
 WHILE (c>0)
       g = 2*c : d = 0 : b = c
       WHILE (b>0)
             d = d + f(b)*a : g = g - 1 : f(b) = d MOD g
             d = d \ g : g = g - 1 : b = b - 1
             IF (b<>0) THEN d = d*b
       WEND
       c = c - 14 : x$ = STR$ (e + d \ a) : L = LEN (x$)
       PRINT LEFT$ ("0000",5 - L); RIGHTS$ (x$,L - 1);
       e = d MOD a
 WEND
```

Il est toujours très intéressant de comprendre comment fonctionne un programme. Cependant, vous pouvez toujours le télécharger tout fait en allant sur la page des programmes à télécharger

Voici rapidement le principe de construction du programme: Il s'agit de la "mise en algorithme" d'une série attribuée à Euler. Je vous la donne, mais je vous fais confiance pour ne pas torturer Maple, ou autre pauvre logiciel sans défense avec ce calcul: en effet, ce n'est pas pour rien que l'on utilise un algorithme !!!

p = 2*S(n!)/(1*3*...*(2n+1)), pour n allant de 0 à l'infini.

Précision: On peut remarquer que le rapport de chaque terme au précédent est inférieur à 1/2. Or chacun sait que , $A_n /2 + A_n/2^2 + A_n/2^3 ...= A_n$

Donc, forcément, l'erreur que l'on fait en s'arrêtant au terme A_n, est inférieure à ce terme A_n.
Ainsi, l'erreur commise est facilement majorable !

Pour en savoir plus, vous pouvez consulter la bibliographie

retour au début de la page

IRRATIONALITE DE p:

Principe: On démontrera l'irrationalité de pi par l'absurde. A savoir que l'on va se persuader que pi peut s'écrire comme quotient de deux entiers, et on va tomber sur une ânerie.

Prenons donc trois entiers non nuls a, b, et n. Et considérons le polynôme et l'intégrale suivant:

$$P_n = \frac{1}{n!} X^n (bX - a)^n \qquad \text{et} \qquad I_n = \int_0^\pi P_n(x)\sin(x)dx$$

Appliquons au polynôme la relation de Leibnitz, on obtient:

$$P_n^{(k)} = \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(X^n)^{(i)}((bX-a)^n)^{(k-i)}, \text{ et notons que } (X^n)^{(i)}(0) = \begin{cases} i \neq n \Rightarrow 0 \\ i = n \Rightarrow n! \end{cases}$$

$$\text{et } ((bX-a)^n)^{(k-i)}\left(\frac{a}{b}\right) = \begin{cases} i \neq k-n \Rightarrow 0 \\ i = k-n \Rightarrow b^n n! \end{cases}$$

Distinguons alors deux cas:

1) k<n: Alors, toutes les dérivées de Pn et Pn, sont nuls en 0 et en (a/b).
2) k>n ou k=n:
On obtient alors les formules suivantes:

$$\begin{cases} P_n^{(k)}(0) = \binom{k}{n}((bX-a)^n)^{(k-n)}(0) \in Z \\ P_n^{(k)}\left(\frac{a}{b}\right) = \binom{k}{k-n}(X^n)^{(k-n)}\left(\frac{a}{b}\right)b^n n! \in Z \end{cases}$$

Donc, dans tous les cas, le polynôme Pn et ses dérivées successives sont à valeurs entières.

D'autre part, si on appelle M, le sup de abs(bX-a) sur [0,pi], on peut sortir le terme gênant correspondant de l'intégrale In, et la majorer en valeur absolue par:

$$\frac{\pi^{n+1}(\text{sup})^n}{(n+1)!}$$

qui tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Donc l'intégrale In converge vers 0

Supposons que pi=(a/b)
Si l'on intègre In par partie plusieurs fois, on verra que les termes entre crochets sont entiers: En effet, ils sont composés de cosinus ou sinus fort sympathiques vu que les bornes d'intégration sont 0 et pi. De plus, on a vu que les dérivées de Pn sont entières.
Enfin, on intègre par partie jusqu'à ce que la partie intégrale s'annule en comportant une dérivée (2n+1)ième du polynôme Pn de degré 2n seulement.

Donc, l'intéhrale In est à valeurs entières.

Démonstration annexe: Montrons que une suite à valeurs entières convergeante est stationaire:
Supposons que Un ->l. Alors, il existe N tel que pour tout n, abs(Un-l)<e
Or, abs(Un-UN)<abs(Un-l)+abs(UN-l)<2e
Or comme Un est à valeurs entières, on peut conclure que la suite est stationaire.

Ainsi, dans le cas qui nous occupe, il existe un rang N au delà duquel, In=0;
Donc; I2N=0, mais l'application P2N*sinx, étant continue sur [0,pi], et à valeurs positives, P2N=0
Par exemple en pi/2, et la ... CATASTROPHE!!!! en pi/2, il suffit de faire le calcul, ce n'est pas nul du tout !

ET VOILA!!! Pi ne s'exprime donc pas sous la forme a/b ! Pi est donc irrationel !

retour au début de la page

AUTEUR DE LA PAGE:

Benjamin HERZOG (Paris).
Vous pouvez m'envoyer vos suggestions à l'adresse: b.herzog@francemel.com

retour au début de la page

SOURCE:

"Le fascinant nombre p"   de Jean-Paul DELAHAYE
"Analyse MPSI" de Jean-Marie MONIER

retour au début de la page

Programmes à télécharger

C'est mon tout premier PERL script ! Vous remplissez un fichier avec le nom de vos potes et leurs IP; et puis il vous dit si ils sont online. Allez, il faut m'encourager quoi !	ishere - Linux ishere - Windows
Un script de calculatrice. C'est super, il fait les opérations de base, mais il montre surtout à quel point Perl est génial ! Si vous vous intéressez à ce langage sans y avoir encore touché, voyez ce script ...	calc.pl
Ce programme a été écrit à l'origine en C par un auteur inconnu. Il donne un grand nombre de décimales de pi en un nombre record de lignes de programme. Pour plus de détail, voyez ma Page sur pi.	pi2400-basic
La, c'est la version écrite en C. Et puis comme je suis gentil, en voila une version toute compilée (GCC de GNU pour win <-- eurk, je suis vraiment trop gentil).	pi2400-C pi2400
Ce programme approxime la valeur de pi grâce à une expérience de probabilité que l'on peut modéliser par un jeu de fléchette ... Pour plus de détail, voyez ma Page sur pi.	Jeu de fléchette
Tout le monde connait cet algorithme qui triple les nombres impairs, réduit de moitié les nombre pairs, et finit toujours par rencontrer 1. Cependant, personne encore ne l'a démontré...	Algorithme de Collatz
Un petit programme qui évalue les résultats du bac au terme d'un petit questionaire.	bac

Grande nouvelle: Si j'ai un peu de temps cette année (probablement pas en fait), je terminerai mon premier client :) Youpiii ! On débouche le champagne ! C'est un client mail ASCII pour shell Linux. Et puis si jamais il marche, j'essaierai de le porter sous DOS ... Et puis il sera très vite disponible ici même, en version super alpha.

```
#!/usr/bin/perl

# Ce script est une calculette rudimentaire (très très rudimentaire)
# On peut faire + - * et / autant que l'on veut ... mais pas de parenthèses
# C'est à l'utilisateur de faire ses calculs intelligemment :)
# Les règles de priorités des opérations sont respectées
# De plus, opNUM fait ANS op NUM
# Remarques à Benjamin HERZOG <b.herzog@netcourrier.com>



#########################################################################
############################ MAIN #######################################
#########################################################################

$result=0;
print "calc> "; # une petite invite à la ftp :)
$a=<STDIN>;
chomp $a;
while(!($a =~ /exit|quit/)){
if( $a =~ /clear/ ){
system(clear);
}
elsif( $a =~ /[^0-9\+\-\*\/]/ ){
print "Opération non permise\n";
}
else{
$result=check($a);
print "$result\n";
}
print "calc> ";
$a=<STDIN>;
chomp $a;
}
print "Goodbye !\n";



##############################################################
################### ROUTINE CHECK ############################
##############################################################


sub check {
 if($_[0] =~ /\+/){
 return add($_[0]);
 }
 elsif($_[0] =~ /\-/){
 return less($_[0]);
 }
 elsif($_[0] =~ /\*/){
 return mult($_[0]);
 }
 elsif($_[0] =~ /\//){
 return div($_[0]);
 }
 else{return $_[0];}
}
```

```
##################################################################
###################### ROUTINES ##################################
##################################################################


sub add { # Addition
 @add=split(/\+/,$_[0]);
 if($_[0] =~ /^\+/){return add($result."+".$add[1]);}
 $add=check($add[0]);
  for($i=1;$i<=$#add;$i++){
  $add=$add+check($add[$i]);
   }
 return $add;
}

sub less { # Soustraction
 @less=split(/\-/,$_[0]);
 if($_[0] =~ /^\-/){return less($result."-".$less[1]);}
 $less=check($less[0]);
  for($j=1;$j<=$#less;$j++){
  $less=$less-check($less[$j]);
   }
 return $less;
}

sub mult { # Multiplication
 @mult=split(/\*/,$_[0]);
 if($_[0] =~ /^\*/){return mult($result."*".$mult[1]);}
 $mult=check($mult[0]);
  for($k=1;$k<=$#mult;$k++){
  $mult=$mult*check($mult[$k]);
   }
 return $mult;
}

sub div { # Division
 @div=split(/\//,$_[0]);
 if($_[0] =~ /^\//){return div($result."/".$div[1]);}
 $div=check($div[0]);
  for($l=1;$l<=$#div;$l++){
  if($div[$l]!=0){
  $div=$div/check($div[$l]);
   }
  else{print "Error: Divide by zero\n"; return 0;}
   }
 return $div;
}
```

Bon, alors je vous propose ici un très grand classique. Il donne lieu à des discussions assez amusantes sur l'infini. Donc, si vous avez une théorie intéressante, n'hésitez pas à me la soumettre, et je mettrais les mieux sur cette page.

Voici donc le problème:
On va montrer que 0.999999999999999... = 1.
x=0.999999999999999..., 100x=99.9999999999999999...
Donc 100x = 99 + x => 99x=99 => x=1

Bon alors c'est juste ou c'est faux ?

Le résultat est vrai parceque:

Génial ! Nul ! Annuler

Et pour les gens qui n'ont pas d'imagination, et pour ceux qui ont la critique facile, je donne ma solution. Si vous la trouvez mauvaise, ou débile, écrivez moi :-)

L'autre jour, je suis passé sur #math sur undernet (chanel que je viens de découvrir sur lequel ya plein de français), et puis ya des questions qui reviennent de temps en temps alors j'en mets quelques unes ici ...

Somme d'une série géométrique

C'est très simple, mais le problème, c'est que les profs s'amusent à donner des versions particulières de cette formule avec différents indiçages. Donc quand un gars a sa formule avec sum(x^(n-1), n=1..N) il sait plus faire sum(x^n, n=0..N-1) ... donc voila une formule assez générale:

$$\text{Formule générale: } \sum_{n=p}^{N} x^n = x^p \frac{1 - x^{N-p+1}}{1-x}$$

$$\text{Cas où } |x| < 1\text{: } \sum_{n=p}^{\infty} x^n = \frac{x^p}{1-x}$$

Oulala, mais LaTeX passe à merveille en Jpeg ! Et bin ça fait plaisir.

Calculs de l'intégrale de Gauss

Qui ignore que l'intégrale de l'exponentielle de $-x^2$ sur R est égale à racine carrée de Pi ? Personne ! Ainsi, on peut aisément imaginer le plaisir que l'on éprouve en démontrant ce résultat pour la première fois. Cette modeste page propose pour l'instant trois moyens (parmi les plus rapides) pour mener à bien ce calcul:

La méthode classique par l'intégrale double
Une méthode utilisant la célèbre fonction gamma
Une méthode sympathique utilisant entre autres les sommes de Wallis

---

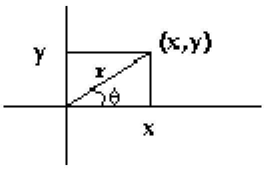
Voici la méthode de loin la plus classique et la plus rapide:

On cherche la valeur de l'intégrale : $I = \int_R e^{-x^2} dx$.

Définissons pour cela une intégrale intermédiaire K, telle que $K = \iint_{R^2} e^{-(x^2+y^2)} dx.dy$

On opère alors le changement de variable $\begin{cases} x = r.\cos\theta \\ y = r.\sin\theta \end{cases}$. x et y sont des réel.

Donc pour que (x,y) décrive R^2, il faut que r soit strictement positif, et θ parcourt $[0,2\pi]$.



Ainsi, on obtient les bornes de l'intégrale après le changement de variable.

D'autre part, $dx \wedge dy = [\cos\theta.dr + r(-\sin\theta).d\theta] \wedge [\sin\theta.dr + r\cos\theta.d\theta] = r dr \wedge d\theta$

Donc $K = \iint_{R^2} e^{-(x^2+y^2)} dx.dy = \iint e^{-r^2} r.dr.d\theta = \left(-\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} 2re^{-r^2} dr \right) \times \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right)$

$$K = -\frac{1}{2}\left[e^{-r^2}\right]_0^{+\infty} \times [\theta]_0^{2\pi} = -\frac{1}{2}(0-1) \times 2\pi = \pi$$

Enfin, on peut conclure : L'intégrale I étant positive, et en remarquant que $K = I^2$, on peut établir :

$$\boxed{\int_R e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}}$$

retour au début de la page

Cette méthode est un peu calculatoire, mais très sympathique quand même:

ERRATA:Là où j'évoque le théorème de convergence monotone, il s'agit en fait bien évidemment du théorème de convergence dominée.

Soit $B = \begin{pmatrix} (R_+^*)^2 \to R \\ (\alpha,\beta) \mapsto \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt \end{pmatrix}$

L'existence de cette application bilinéaire est assurée par la règle des équivalents en 0 et en 1 .

Après avoir remarqué que $B(\alpha+1,\beta) + B(\alpha,\beta+1) = B(\alpha,\beta)$ et que $\alpha.B(\alpha,\beta+1) = \beta.B(\alpha+1,\beta)$, on établit facilement que $B(\alpha,\beta+1) = \frac{}{\alpha+\beta}B(\alpha,\beta)$.

Dans le cas particulier où β est un entier n non nul on établit facilement en itérant n fois l'expression ci-dessus que :

$$B(\alpha,n+1) = \frac{n!}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n)}$$

Sur le même principe d'itération, on obtient : $B(\alpha,\beta+n+1) = \frac{(\beta+n)\ldots(\beta+1)\beta}{(\alpha+\beta+n)\ldots(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)}B(\alpha,\beta)$

Par ailleurs, en utilisant l'expression de B(α,,n+1) on a aussi :

$$\frac{B(\beta,n+1)}{B(\alpha+\beta,n+1)} = \frac{\dfrac{n!}{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n)}}{\dfrac{n!}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)\ldots(\alpha+\beta+n)}} = \frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)\ldots(\alpha+\beta+n)}{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n)} = \frac{B(\alpha,\beta)}{B(\alpha,\beta+n+1)}$$

Et on peut conclure que :

$$\boxed{B(\alpha,\beta) = \frac{B(\alpha,\beta+n+1)\,B(\beta,n+1)}{B(\alpha+\beta,n+1)}}$$

Par ailleurs, un petit changement de variable $u=\sin^2\theta$ permet d'établir que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{x-1}\theta\,\sin^{y-1}\theta\,d\theta = \frac{1}{2}B\left(\frac{x}{2},\frac{y}{2}\right)$$

Et donc :

$$\boxed{B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \pi}$$

Commençons à nous intéresser à la fameuse fonction gamma.

Rappelons que $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^\alpha e^{-t}dt$, qui pour un entier est tout simplement la factorielle.

Chacun sait que $\left(1-\frac{t}{x}\right)^x \xrightarrow[x\to\infty]{} e^{-t}$. On met un petit coup de théorème de convergence monotone et

on obtient : $\lim\limits_{x\to\infty}\int_0^x t^{\alpha-1}\left(1-\frac{t}{x}\right)^x dt = \Gamma(\alpha)$, et par un suite, un petit changement de variable $t = \frac{u}{x}$ donne

que : $n^\alpha B(\alpha,n+1) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!\,n^\alpha}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n)} = \Gamma(\alpha)$

Donc d'après la première relation encadrée, $B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$. Et pour α=β=1/2, et en tenant compte de la seconde

expression encadrée, on a : $\boxed{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}}$

Par ailleurs, un petit changement de variable (si je dis « petit », c'est pour conserver le moral des troupes au énième changement de variable.) $t=x^2$ dans gamma(1/2) donne enfin le résultat attendu :

$$\boxed{\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

retour au début de la page

Cette méthode ressemble un peu à la précédente sur le principe, mais elle est en cour d'écriture ... patience ! retour au début de la page

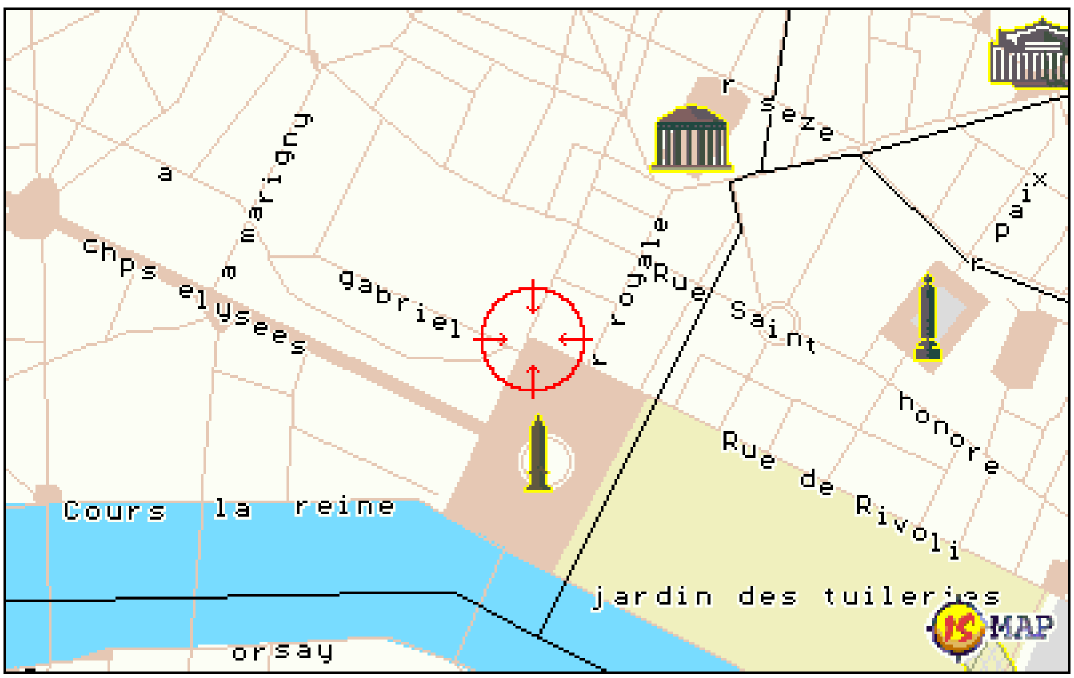
[HOMEPAGE]

Le cadran solaire de la concorde

Depuis Juin 99, sont apparus des signes étranges sur la chaussée de la place de la Concorde. On peut observer essentiellement de grandes lignes qui semblent converger vers l'Obélisque (en fait, pas vraiment), et des chiffres romains inscrits en jaune sur chaque ligne.
Le principe est très simple (vous avez déja probablement deviné): L'ombre de l'Obélisque indique l'heure.

Attention! L'Obélisque est pour ce cadran un style droit. Ceci implique que seule l'extrémité de l'Obélisque indique l'heure en pointant un endroit sur le sol.
En été, il faut rajouter 2 heures à l'heure lue sur le cadran, et seulement 1 heure en hiver. Il y aurait d'autres corrections à apporter, mais ceci est une autre histoire (cf. Equation du temps).

Si vous êtes observateur, vous avez peut-être aussi remarqué des point dorés sur les grandes lignes ... Et bien ils permettent de lire la date.
En fait, l'ombre de l'extrémité du style droit se promène le long de la journée sur une conique (les arcs diurnes; à Paris, des Hyperboles) qui change au cours de l'année. Et bien les points sont les intersections des arcs diurnes avec les lignes horaires. D'où la lecture immédiate de la date.



La ligne du XIV heures est pointée vers la rue Royale. Le VIII est pas loin des Chanps, ...

[HOMEPAGE]

L'année prochaine, yaura ici une page remplie !
En attendant, chantez avec moi la complainte du 5/2 ...

Une petite chose: Si vous désirez réaliser des documents (je veux dire à l'ordinateur) contenant des formules scientifiques: TIPE, devoir à rendre, sujet de DS ... initiez vous à LaTeX (si ce n'est déja fait ! Ce formateur de texte est une extension de TeX spécialement adaptée aux documents scientifiques, et largement utilisé dans la communauté scientifique internationale. C'est tout bonnement génial !
Est-ce que je vous convaincrai en disant que les sujets de l'X sont faits sous LaTeX ?
L'adresse utile pour commencer, c'est bien entendu une bonne FAQ traduite en français, que je vous ai dégottée à l'adresse:
LaTeX

Vous pouvez admirer ma photo de classe

photo

Carte d'identité du maître de ces lieux (quasiment)

Prénom: Benjamin
NOM: HERZOG
Age: 19 ans
Ville: Paris
Boulot: Math Spé (5/2)

Informatique:
Pour l'instant totalement amateur, je bidouille quelques progs en C, et pis le code HTML et javascript nécessaire pour entretenir ce petit site :)
Comme vous avez pu le remarquer si vous avez parcouru ce site, j'aime beaucoup le système Linux.

Dernière mise à jour effectuée le 10/08/98

Comment calculer les 2400 premières décimales de Pi

Le nombre Pi est il vraiment aléatoire ?

Je suis un jour tombé sur un petit programme de 10 lignes, écrit en langage C dans un style pour le moins concis (les développeurs apprécieront), et ayant l'étonnante propriété de calculer les 2 400 premières décimales de Pi (2 399 pour être tout à fait exact, si l'on considère que le premier chiffre 3 représente la partie entière).

L'auteur en est inconnu et le principe appliqué m'échappe totalement.

Voici le petit bijou :

```
#include <stdio.h>

void main(void)
{
int a = 10000, b, c = 8400, d, e, f[8401], g;

for ( ; b-c ; ) f[b++] = a/5;

for ( ; d = 0, g = c*2 ; c -= 14, printf("%.4d",e+d/a), e = d%a)
  {
  for (b = c ; d += f[b]*a, f[b] = d%--g, d /= g--, --b ; d *= b);
  }
}
```

Pour les non coutumiers du langage C, en voici une traduction en pseudo-langage :

```
programme

variables :
  a,b,c,d,e,g : entiers
  f : tableau_de 8401 entiers (de f[0] à f[8400])

a = 10000
b = 0
c = 8400

tant_que (b différent_de c) faire
  f[b] = a / 5
  b = b+1
fin_faire

tant_que (c > 0) faire
  d = 0
  g = 2*c
  b = c
  tant_que (b > 0) faire
    d = d + f[b]*a
    g = g-1
    f[b] = d modulo g
    d = d / g
    g = g-1
    b = b-1
    d = d*b
  fin_faire
  c = c-14
  Imprimer_au_minimum_sur_4_caractères (e+d/a)
  e = d modulo a
fin_faire

fin_programme
```

et si vous n'avez pas de compilateur à portée de la main, en voici le résultat :

314159265358979323846264338327950288419716939937510582097494
459230781640628620899862803482534211706798214808651328230664
709384460955058223172535940812848111745028410270193852110555
964462294895493038196442881097566593344612847564823378678316
527120190914564856692346034861045432664821339360726024914127
372458700660631558817488152092096282925409171536436789259036
001133053054882046652138414695194151160943305727036575959195
309218611738193261179310511854807446237996274956735188575272
489122793818301194912983367336244065664308602139494639522473
719070217986094370277053921717629317675238467481846766940513

200056812714526356082778577134275778960917363717872146844090
122495343014654958537105079227968925892354201995611212902196
086403441815981362977477130996051870721134999999837297804995
105973173281609631859502445945534690830264252230825334468503
526193118817101000313783875288658753320838142061717766914730
359825349042875546873115956286388235378759375195778185778053
217122680661300192787661119590921642019893809525720106548586
327886593615338182796823030195203530185296899577362259941389
124972177528347913151557485724245415069595082953311686172785
588907509838175463746493931925506040092770167113900984882401
285836160356370766010471018194295559619894676783744944825537
977472684710404753464620804668425906949129331367702898915210
475216205696602405803815019351125338243003558764024749647326
391419927260426992279678235478163600934172164121992458631503
028618297455570674983850549458858692699569092721079750930295
532116534498720275596023648066549911988183479775356636980742
654252786255181841757467289097777279380008164706001614524919
217321721477235014144197356854816136115735255213347574184946
843852332390739414333454776241686251898356948556209921922218
427255025425688767179049460165346680498862723279178608578438
382796797668145410095388378636095068006422512520511739298489
608412848862694560424196528502221066118630674427862203919494
504712371378696095636437191728746776465757396241389086583264
599581339047802759009946576407895126946839835259570982582262
052248940772671947826848260147699090264013639443745530506820
349625245174939965143142980919065925093722169646151570985838
741059788595977297549893016175392846813826868386894277415599
185592524595395943104997252468084598727364469584865383673622
262609912460805124388439045124413654976278079771569143599770
012961608944169486855584840635342207222582848864815845602850

Questions

Lors de la mise en ligne de cette page j'avais posé les questions suivantes :

- Quelqu'un serait il capable de m'expliquer l'algorithme sur lequel reposent ces quelques lignes de code ?
- Pourquoi 2400 ? Pourrait on étendre le principe appliqué à un nombre quelconque de décimales ?

Réponses

J'ai trouvé les réponses à ces épineuses questions dans un livre passionnant et très bien illustré (que je recommande) "Le fascinant nombre Pi" par Jean-Paul Delahaye, aux éditions Pour La Science - Belin (ISBN : 2-9029-1825-9) pages 94 à 98.

L'algorithme utilisé repose sur une série d'Euler :

Pi = 2 (1 + 1/3 + 1.2 / 3.5 + 1.2.3 / 3.5.7 + 1.2.3.4 / 3.5.7.9 + ...)
= 2 somme pour_n=0_à_l'infini de (1.2. ... .n / 1.3. ... (2.n+1))

Avec cette série, on montre que pour connaître Pi avec une précision de N décimales il suffit de sommer
$Log_2(10^N)$ ~= 3,32.N termes.

Les calculs étant effectués en base 10 000, les chiffres sont affichés par groupe de 4 à la fin du calcul.

Le programme calcule 600 chiffres en base 10 000 équivalant à 2 400 chiffres décimaux.

Le nombre de termes utilisés est 600.4.3,32 ~= 8 400 (arrondi).

Le programme comporte une première boucle d'initialisation, suivie d'une double boucle de calcul et d'impression.

La double boucle exploite la série d'Euler écrite sous la forme de Horner pour limiter le nombre de multiplications :

1 000 Pi ~= 10 000 / 5 (1 + 1 / 3 (1 + 2 / 5 (1 + 3 / 7 (... + 8 399 / 16 799))))

Pour aboutir, le calcul doit être effectué dès le départ avec un nombre de chiffres de l'ordre de grandeur de celui voulu à la fin.

Pour avoir d'autres informations sur les algorithmes de calcul du nombre Pi et de bien d'autres constantes je vous conseille de visiter le site de Simon Plouffe.

---

page d'accueil

Made With A Mac

Dernière mise à jour effectuée le 21/12/1999

Macintosh forever :-)

Au Sommaire

- Bienvenue aux utilisateurs de MacOS : les liens indispensables.
- Pourriez vous imaginer un monde sans Macintosh ?

- L'acharnement médiatique contre Apple, voici des exemples. (m.à.j)
- Micro$oft est un danger pour l'innovation. (m.à.j)

- Pourquoi le Macintosh sous MacOS est meilleur que les PC sous Windows.
- Téléchargez l'étude Gistics comparant les plates-formes Macintosh et Windows.

- Achetez MacOS 9 !
- Prédateur de Pentiums
- Apple toujours à la pointe en matière d'innovation

- Internet pratique : recherche d'informations et services gratuits.
- France Télécom se moque t'il de nous ?

- Comment calculer les 2400 premières décimales de Pi.

- A propos de ce site.

A lire absolument : LE HOLD-UP PLANETAIRE - La face cachée de Microsoft par Roberto Di Cosmo et Dominique Nora.

018631

visiteurs depuis le 18/06/1997

Hugues Freyssinet : macforever@chez.com

Tous les commentaires et suggestions sont les bienvenus.

Si vous désirez être prévenu par e-mail des mises à jour de ce site, il vous suffit de m'envoyer un message.

Webmasters, si ce site vous a plu, et si vous désirez placer un lien vers lui,
vous pouvez mettre l'une des images suivantes sur l'une de vos pages :

et lui associer l'URL : http://www.multimania.com/freyssin/

S'il vous reste un peu de place ;-)
vous pouvez également signaler, qu'en cas d'indisponibilité momentannée du serveur MultiMania :-(
ce site est en miroir à l'URL : http://www.chez.com/macforever/

Merci pour votre soutien :-)

page d'accueil

Dernière mise à jour effectuée le 21/12/1999

Bienvenue aux utilisateurs de MacOS

Au sommaire, plus de 200 liens vers l'univers Macintosh :

Les sites en langue française sont signalés par un (F), tous les autres sont en langue anglaise.

Notes :
- Si ces pages vous ont rendu service, envoyez moi un petit mail, afin que je continue à les enrichir ;-)
- Si vous connaissez d'autres liens intéressants n'hésitez pas à me les communiquer !
- Si vous constatez qu'un des liens suivants n'est plus valide, merci de me le faire savoir.

---

page d'accueil

page 1/3

Les dernières nouvelles du front

L'actualité du Macintosh va très vite, bien plus vite que vos hebdomadaires ou mensuels préférés ne peuvent vous la rapporter.

Pour vous tenir journellement au courant des dernières informations concernant le monde Apple et tout ce qui gravite autour, vous n'avez que l'embarras du choix.

Voici une liste de sites classée par ordre alphabétique. La plupart de ces sites sont dédiés à l'univers Macintosh, d'autres sont plus généralistes.

En commençant par les sites francophones :

Sites francophones	Sujets
Applaide (F)	Site consacré à Apple et compatibles, informations, produits, rumeurs, humeurs...
Atou.com (F)	Infos, petites annonces, s.o.s., dicos, forum...
Canard Mac (F)	Un site destiné à être une source d'informations sur le Mac et surtout à ce que l'on peut en faire. Le but est aussi notament de regrouper des informations "de base" et les réponses à des questions qui reviennent souvent.
CyberActu (F)	Actualités du monde Macintosh.
G3 Phil (F)	Les nouvelles neuves du Mac.
Highmac (F)	Le webzine francophone du Macintosh : Actualités, jeux, Trucs & Astuces, Mailing liste.
L'Apple Cafe (F)	La partie magazine cesse ses activités, mais la partie Emploi du site reste active. Nombreux liens intéressants.
Le Machiniste (F)	Les dernières nouvelles de l'univers Mac, des dossiers, des liens, et des thèmes de réflexion que vous propose Pierre-Arnaud Bonraisin.
Mac@Zine (F)	E-zine bimestriel publié par Le Club Macintosh de Montréal.
Mac-@-jour (F)	Site Québécois. Les dernières nouvelles, des archives, des conseils pratiques, et de nombreux liens.

Mac And News (F)	Au menu : Erreurs Système, Trucs & Astuces, Langage Micro, Les Smilies, Coup de Gueule, et Sommaire Mag (très pratique : chaque mois les sommaires de Macworld, SVM Mac, et Univers Mac).
MacDepart (F)	MacDépart veut présenter aux internautes tous les sites incontournables qui parlent, en français, du Mac. Ils peuvent ainsi suivre en temps (presque) réel les évolutions de leurs sites préférés.
MacManiac (F)	Sites officiels Apple, des sociétés, news, listes de diffusion, java, développement, newton, magazines, recherche générale et de logiciels.
MacPassion (F)	Pour les passionnés de Mac uniquement. Nouvelles, presse, produits, annonces, MacOS, jeux, Internet. Site lorrain géré par Guillaume Boudrant.
Macworld On line (F)	Le site de la fameuse revue française. Les dernières nouvelles, et ici la côte de l'action Apple.
Mikaël (F)	Au sommaire : les dernières nouvelles du front, des dossiers sur le monde Mac, une mailing list, et même une Hot line :-)
Passion Macintosh (F)	Pour tout savoir sur le Macintosh, pour connaître les dernières nouveautés... Site Québécois géré par Pascal Mercier.
Pro'Mac (F)	E-zine suisse. Au sommaire : Culture, internet, matériel, logiciel, créateurs, lecteurs...
Revue de presse Apple (F)	Une revue de presse effectuée par Yves Cornil.
Revue de presse Macintosh (F)	Revue de presse Macintosh réalisée par Fabrice Authenac. Abonnement, archives.
Rhapso (F)	Divers rubriques : Macintosh, Microprocesseurs PowerPC, Images RayDream...
Take Back Your Mac (F)	Magazine virtuel : dernières nouvelles, nouveaux logiciels, mises à jour, liens, abonnement gratuit...
TidBITS (F)	Fanzine hebdomadaire : événements de l'industrie informatique avec une attention particulière au monde Macintosh et Internet.

Les sites anglophones :

Autres Sites	Sujets
AppleJedi	Magazine pour les évangélistes, les développeurs de logiciel et de matériel, les fournisseurs de solutions, et les défenseurs de MacOS.
a-World	Magazine électronique destiné à faciliter la vie des utilisateurs de Macintosh et de Newton. Abonnement ou téléchargement gratuits.
C|NET	Un site de nouvelles sur le monde de l'informatique en général. Toujours à la fine pointe de l'information.
ComputerBits magazine	Divers rubriques informatiques dont certaines destinées aux utilisateurs de Macintosh.
Computer Currents Interactive	Rubriques concernant le Macintosh et listes d'utilisateurs Macintosh.
Deal-Mac	Nouvelles, analyses, suivi des prix, archives, nombreux liens, du monde Macintosh.
Digital Apple	Nouvelles, shareware, et plus de 1000 liens vers le monde Macintosh.
E-Mac	Magazine électronique. Nombreuses rubriques : discussions, classements, critiques, trucs et astuces, ...
Fight4Mac	Dernières nouvelles, enquêtes, comparatifs.
InfoWorld	Nouvelles du monde informatique en général (rubriques Macintosh), forums de discussion, et archives.
Internet Magazine	Nouvelles et archives, critiques de produits et de sites Web.
MacAddict	Magazine mensuel pour les fans du Macintosh. Musique, jeux, graphisme, éducation, gestion personnelle, et accès à l'Internet.
MacCentral	Magazine électronique mensuel. Dernières nouvelles, promotions, discussions, informations, archives, concernant le monde Macintosh.
Mac Channel	Informations et nouvelles pour les utilisateurs de Macintosh.
MacCom	Magazine distribué par e-mail : informations, nouvelles, critiques, astuces, concours, publicités,...
MacDirectory	Distribué à plus de 230.000 exemplaires. Forums, actualité, produits, outils pratiques, et téléchargement...
MacFormat	Magazine mensuel. Table des matières des anciens numéros depuis octobre 1994, et une sélection des meilleurs articles des derniers numéros.

Mac-Forum-News	Publication mensuelle gratuite. Dernières versions système, nouvelles, critiques, trucs et astuces pour tirer le meilleur parti de son Macintosh. Pour s'inscrire envoyer un e-mail à AFLPromo@AOL.COM avec "Subscribe" comme objet.
MacinStuff	Un excellent magazine quotidien sur les nouvelles du monde Macintosh.
Macintosh News Network	Couverture complète et journalière de l'actualité Macintosh. Nouvelles avec nombreux liens, enquêtes, archives, autres liens, ...
Macintosh Technical Reference	Rubriques concernant l'industrie du Macintosh, les publications, les logiciels, et les vendeurs.
MacInTouch	Informations quotidiennes et services pour un travail productif sur Macintosh.
MacKiDo	"The Power of the Macintosh Way" : Dernières nouvelles et leurs analyses, références, les mythes démontés, nombreux liens.
MacMadness	Articles, nouvelles, astuces Macintosh, avant premières, liens...
Mac Net Journal	Magazine mensuel. Informations fiables sur le shareware et analyses pointues sur l'univers Macintosh.
Mac Online	Dernières MacNews, et NetNews, guide des produits Macintosh disponibles au Royaume Uni, coin jeux, ère de discussion. Inscription (gratuite) lors de la première entrée sur le site.
MacOS Daily	Nouvelles, informations sur les dernières versions de logiciels, critiques, archives, liens...
MacOS Mania	Nouvelles, nombreux liens, archives, grande compilation de shareware pour Macintosh.
MacOS Rumors	Chaque jour, dernières informations sur l'actualité du Macintosh, nouvelles sorties de logiciels, anecdotes. Archives... (en particulier sur Rhapsody).
MacOS Users Only!	Les actualités de la semaine avec de nombreux liens, événements, critiques, autres liens,...
MacResource Page	Chaque jour des nouvelles, des astuces, des liens, et des mises à jour concernant le Macintosh.
MacSpectre	Nouvelles, articles, liens, actualité logicielle et matérielle.
MacSupreme	Focalisé sur les dernières nouvelles et les critiques.

MacSurfer	Nombreux liens vers les derniers faits de l'actualité Macintosh.
MacTimes	Revue de presse Macintosh quotidienne .
MacToday	Magazine Mac, Mac, Mac, PC s'abstenir... La revue Macintosh la plus humoristique sur le marché. Voir en particulier cette page.
MacUser Online	Très complet : nouvelles, informations commerciales, aide technique... Inscription (gratuite) lors de la première entrée sur le site.
Mac users	Aide les utilisateurs de Macintosh à mieux exploiter leur système, leurs logiciels et périphériques. Nombreuses rubriques et liens.
MacWeek	Dernières nouvelles sur les produits, les entreprises, et la technologie du monde Macintosh.
Macworld online	La célèbre revue traitant du monde Macintosh. Bibliothèque logicielle, informations spécifiques à la version en ligne,...
Mission Apple	Enquêtes, articles, et nouvelles du monde professionnel.
My Mac Ezine	Magazine mensuel en ligne dédié au Macintosh. Commentaires, critiques de produits, informations, humour, et de nombreux liens.
San Jose Mercury News	Les dernières nouvelles concernant l'univers Apple et les archives des faits marquants des derniers mois.
TechWeb Wire	Dernières nouvelles du monde Macintosh, lignes directrices, archives, informations financières et industrielles...
The Daily Mac	Chaque jour les dernières informations sur l'univers Macintosh, nombreux liens.
TidBITS	Fanzine hebdomadaire : événements de l'industrie informatique avec une attention particulière au monde Macintosh et Internet.
Webintosh	Pour alimenter votre Macintosh à partir du web. Dernières nouvelles, critiques, perspectives logicielles et matérielles.

retour sommaire

Les publications officielles d'Apple

Sites	Sujets
Apple Directions	Stratégie Apple, affaires, et orientations technologiques (mensuel).
Apple Education News & Events	Informations concernant le monde de l'éducation (bimensuel).
Apple Press Books	Dernières informations sur la technologie Apple.
Develop	Le journal des développeurs Apple (trimestriel).
The Information Alley et sa bibliothèque	Magazine destiné à aider les utilisateurs Apple à tirer pleinement partie de leur ordinateur, de ses périphériques, et de ses logiciels.

retour sommaire

Listes de publications et de mailing lists

Les sites suivants vous donneront d'autres listes de journaux, et de mailing list.

Sites	Sujets
Apple Mailing List Server	Toute une série de mailing list pour les clients, les développeurs et les utilisateurs du monde Apple.
Apple Online Magazine Links MacFaq periodicals	Listes de journaux électroniques concernant le Macintosh et auxquels on peut s'abonner.
Francopholistes	Extrait du Catalogue des Listes de Diffusion Francophones.
MacFaq mailing lists Solutions.apple.com	Listes de mailing lists concernant le Macintosh et auxquelles on peut s'inscrire.
-	-
AIP	Apple In Presse : Liste de diffusion sur Apple dans la presse française et étrangère.
BugTraqMac	Mailing list consacrée aux bugs, virus, et trous de sécurité repérés dans MacOS, MacOS X et MacOS X server.
Mac Addict	Le meilleur du monde Mac chaque semaine.
MacFR	Cette liste a pour but de faciliter l'échange de conseils, d'informations, de questions et de réponses entre utilisateurs francophones de la plateforme MacOS.
Passion Apple	La Mailing List des mordus de la Pomme.

TBYM	Le bulletin Take Back Your Mac est un hebdomadaire d'information sur l'actualité Mac OS en particulier, sur Internet, et les nouvelles technologies en général.
TidBITS Fr	TidBITS est un hebdomadaire électronique gratuit, paraissant depuis 1989 et qui donne les dernières nouvelles et des points de vue sur le Macintosh et l`Internet.
TIL FR TIL Fr www	Bulletin quotidien d'information envoyé par e-mail tous les jours à ses abonnés. Le bulletin TIL FR comporte : - Une traduction condensée et en français des nouveaux articles parus le jour même sur la Tech Info Library d'Apple ; - Un article choisi, tiré de la Tech Info Library et traduit en français. L'article sera choisi en fonction de son degré d'utilité et de sa potentielle actualité ; - Une astuce sur l'utilisation de la Tech Info Library.

retour sommaire

page suivante

page d'accueil

Désormais, toute l'actu est sur www.highmac.com :)

Highmac.com

Le site francophone de l'iBook et de l'iMac

HOME | ACTUALITE | RUMEURS | MISES A JOUR | DOSSIERS | LES PRIX | TESTS | LIENS

A la une

iBook

Un portable irresistible

Autre dossiers

L'iBook arrive !
Premières impressions sur l'iBook en attendant sa sortie !

Mac OS 9 [A venir]
Quelles sont les améliorations ? est-il plus rapide ? plus simple ? Toutes les réponses dans notre dossier !

iMovie [A venir]
Le montage vidéo idéal, une interface de rêve, une simplicité Mac...

Le nouvel iMac DV est là
Premières impressions du nouveau bijou d'Apple

[Autres dossiers]

A voir "Jeux"

http://www.promac.ch
http://www.overgame.com
http://www.joystick.fr

Actualite

En bref...

MacWorld Expo 2000 : 5 Janvier 2000
Le **5 Janvier** est un jour à noter dans vos agendas !

Steve Jobs présentera la keynote comme à son habitude.

On attends en vrac : les nouveaux **Powerbook Pismo**, des **G4** encore plus rapides, peut être un **iMate** et beaucoup d'annonces sur **Mac OS X** Client.

Creative Labs sera là pour présenter ses produits audio sur Mac, Bungie présentera **Oni** etc.

Bref, c'est un rendez vous à **ne pas rater** ! Highmac.com sera en direct via QuickTime pour vous présenter la keynote...

[Plus d'actualité]

Mises à jours iMac / iBook

Maj Office 98 FR pour Mac OS 9

Téléchargez ce patch pour corriger les bugs sous Mac OS 9 : pb d'impression avec Powerpoint etc.

[Info] - [Téléchargement (4100Ko)]

OpenGL 1.1.2 US

Une MAJ pour l'OpenGL de tous les Macs en particulier les Mac AGP comme l'iBook ou l'iMac DV. En version US mais utilisable sur Mac OS francais

[Info] - [Téléchargement (4317Ko)]

Battery Reset 2.0

Si la jauge batterie n'apparait pas dans votre iBook. Téléchagez ce petit correctif Apple.

[Info] - [Téléchargement (434Ko)]

MAJ CD Rom iMac I

Corrige les problèmes liés au lecteur CD Rom de l'iMac I.

[Info] - [Téléchargement (683Ko)]

[Plus de mise à jour]

Le temps Apple

Du retard, du retard. Alice aux pays des Merveilles ?

L'année 1999

Faisons le point sur cette superbe année 1999 pour le Mac !

Que pensez-vous du nouvel iMac DV ? :

67.5%
Parfait

27.2%
Bien

3%
Beurk

2.1%
Pas mal

Total Votes: 231

Mailing Liste

Plus de mailing liste pour le moment...

Publicité : contactez moi pour avoir vos mini bandeaux ici !

Accueil - Actualité - Rumeurs - Mise a jour - Dossiers - Prix malins - Jeux - Liens

- Site Macintosh Francophone -

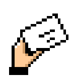
MacManiac est un site qui a pour but de vous faire découvrir la planète Mac.
Plus de 800 liens sont actuellement recensés selon diverses catégories!

Et

MacManiac Software est un site qui a pour but de vous faire découvrir mes sharewares et Freewares.
Celui qu'il vous faut, c'est FTAïe! ;-)

Pour consulter MacManiac ou MacManiac Sotware dans les meilleures conditions:

- Passez en résolution 832x640
- Passez en mode 16 bits (milliers de couleurs)
- Téléchargez Netscape Navigator ou Netscape Communicator sur le site de Netscape



Ma carte de visite

Bonne visite et bon divertissement

Home

MacManiac Software

Apple

Liens

CoolPeople

SiteWarrior

GraphiMac

Java

Freeware

News

SoftSearch

Revues

VPC

Mailing Lists

Sociétés

Gravage

Livre d' or

37059

MacManiac

Ce site est une MacBase avec déjà plus de 750 liens pour surfer sur le Net à la sauce Mac. Evidemment, c' est le Mac qui est le maître sur ce site. Au fur et à mesure de mes progressions et de mes découvertes, de nouveaux liens apparaitront. S' il apparait qu' un lien n' est plus d' actualité, je vous invite à me le faire savoir.

Je me présente, je suis votre WebMaster ?

Site du mois: PowerGlot Site

Mis à jour le **23/02/99**

FTAïe jugé par la presse!

netsurf

MacManiac

Ce site est une MacBase avec déjà plus de 750 liens pour surfer sur le Net à la sauce Mac. Evidemment, c' est le Mac qui est le maître sur ce site. Au fur et à mesure de mes progressions et de mes découvertes, de nouveaux liens apparaitront. S' il apparait qu' un lien n' est plus d' actualité, je vous invite à me le faire savoir.

Je me présente, je suis votre WebMaster ?

Site du mois:
PowerGlot Site

Mis à jour le
23/02/99

FTAïe jugé par la presse!

netsurf

Enchanté de faire votre connaissance

Nom: Robert

Prénom: Olivier

Date de Naissance: 05/07/70

Signe particulier: Moustache

Domicilié à: Metz

Surnom: Robby

Esprit: Vif et créatif

Expérience: 7 ans de bidouille

Caractèritisque: Touche à tout

Connaissances relatives au Net: HTML, intégration d' applets et scripts Java, intégration de sons, vidéos et images, conception de formulaires. Quoi de plus banal!

Ma petite config personnelle:

PowerMac 6400/200 104/2,5Go/CDx8/33.6
Apple Vision 1710 AV + 15" Apple Muli. + MacPicasso 520 (4Mo)
Zip 100 Mo + Graveur Phillips CDD 2600
Agfa Snapscan
LaserWriter 300
Epson Stylus 800

Et je fais quoi avec tout ca, héhéhé, je m' amuse beaucoup et je bosse un peu! ;-)

J' aime-J' aime pas

Les mecs cools qui ne se prennent pas au sérieux	Les intégristes de la langue française qui emmerdent le monde avec leurs leçons de vocabulaire
Tutoyer les gens	Vouvoyer les gens
La franchise au risque qu' elle fasse mal	Les "salamaleks" des faux-culs
La bonne bouffe et le bon vin	Les conserves et la bibine
Le "Stroudel" (spécialité autrichienne)	Le choux
Les chiens de travail, en particulier les dobermans: mon nouveau compagnon s' appelle Murphy. J' ai une pensée émue pour mon gentil Zeus qui nous a quitté.	Les chiens de salon, toutou à sa maman. Et les oiseaux en cage. Qu' on mette à leur place les gus qui les mettent en cage

La nature et ses odeurs	Les grandes villes et leurs odeurs
Les sciences et la rationalité	La religion et les croyances débiles
TOTO, Clapton, ...	La techno et les groupes de plusieurs chanteurs pour pucelles en manque d' amour
Le ski, VTT, billard, ...	Le basquet, le patinage artistique, ...
Les belles filles	Les belles filles: elles ont les inconvéniants de leurs avantages
...	...

Sites d' Apple

Quelques links vers notre Pomme préférée. A consommer sans modération...
Commençons par le commencement! Apple What's New et Apple Press Release

Un petit tour dans tous les pays où Apple est présent! Pas de problème: choisissez votre destination.

Sites Apple dans le Monde

Choisissez

Teleportation

All software updates

Always Apple

Dr. Amelio Web

AppleComputer France

Apple Classrooms of Tomorrow (ACOT)

Apple Info Web

What's new on Apple servers

Apple WebMaster Home page

Apple Europe Home Page

Apple Computer Inc

Apple Business Systems Division Page

Apple Business Systems' mirror.apple.com page

Apple Club

Apple Computer's OpenDoc Web

Apple Computer Higher Education Gopher

Apple Solutions

Apple Script Web

Apple Technical Information Library

Apple Technical Support Resources

Apple's Project X

AppleFacts Online

CHRP

Colony Networks

Cyberdog Home Page

Developer Products Group's Cambridge page

Educational Object Economy

Macintosh Application Environment Home Page

Mac OS

Mac OS 8

Mac OS Software and Hardware Guide

Apple Computer Publishing & Media Markets

Apple Computer World Wide Technical Support Home Page

Apple Consumer Information

Apple History

Apple Miror Sites in Europe

Apple Multimedia Program

Apple e.g.

Apple Imaging

Apple Information Alley

Apple - New software updates

Apple Open Transport

Apple Phone Numbers & Contact Information

Apple's Power Macintosh Website

AppleShare IP

Apple "Small Business"

Master's of Media

Mission Impossible: The web adventure

MkLinux (Apple)

MkLinux

Pippin

PowerBookWeb Site

Third Party Products Main Page

QuickDraw GX Home page

QuickDraw 3D Home Page

QuickTime Conferencing

QuickTime Continuum

QuickTime VR Home Page

QuickTime Live!

Recent software updates

Usenet Archive of Mac Newsgroups

Sites pro ou semi-pro

Voici "quelques" liens vers ... Ben, oui, vous avez devinez!

Absolute Macintosh Les prix, tous les prix!

AIMED (The Association of Independent Macintosh Engineers and Developers, Inc.) Explicite!

AIMS - Apple Internet Mail Server: An E-mail Server for the Macintosh Serveur Mail de Glenn Anderson pour Mac

AMSYS Apple related web sites

Aladdin Knowledge Systems Ltd. MacHASP: logiciel de protection anti piratage

An Apple A Day Les technologies Mac

Appleholics Anonymous

Apple Jedi

Apple news room

AppleSauce Humour et rumeurs

Apple takes the NeXT Step **COOL** Les dernières infos sur le sujet

AKTIV Software Corporation Un robot internet pour Mac

BK's Total Waste of Disk Space

Bottom Line Online L'essentiel sur Macintosh en ligne

Buying a Mac

CafeMac Culture, politique, art, et science

Macintosh Universe

Macmaniac L' homonyme US - Hotline

MacMedic

MacNetNews

Mac Nuggets De nombreux sites passés en revue

MacPort of Science University of Tokyo

MacPride **TOP** Pour afficher votre fierté d' utilisateur Mac

MacSite Weekly

MacSOURCE **COOL** Infos sur le monde Mac

MacSpectre A voir

MacSurfer's Headline News™ **TOP** Regroupe les gros titres des plus importants Webs Mac d' information quotidienne. Un Must!

Maction Home

Mactivity

Made with a Macintosh **TOP** Des logos à gogo!

MkArchive - software for MkLinux on PowerMac

Nothing But Macintosh

OpenMac: References

OzEmail's Macintosh CyberCentre

Clixsounds Pour les fans de sons!

Clock Chipping Comment accélérer son Mac en bidouillant le petit quartz?

Complete Conflict Compendium Base de données sur les conflits logiciels

Club Macintosh Site général

Club Macintosh de Québec

Cult of Macintosh **TOP** Le must

Cyberdog Pound! Tout sur Cyber-toutou

DigitalApple News, reviews et logiciels

Digital Sushi! Des news à manger tant qu' elles sont fraiches!

Emulator **TOP** Tout sur les émulateurs pour Mac

Essential Software Les indispensables!

EvangeList Le must bis

Everything Macintosh Est-ce que IBM utilise des Mac?

Everything Macintosh Links

Extreme Mac **COOL** Demos, News, Jeux, Macintosh

Feeding Frenzy Infos et réactions

For Mac Users Only! Consultation par E-Mail

Happy Puppy's Macintosh Games Page

Hotline Le web (communication - logiciels client & serveur)

Infozone News Stand **COOL** Infos

Internet Interstate's Macintosh Web

Internet Macintosh User Group

PCI PowerMac Pruning Page

Performa Problems & Solutions Page **TOP** Très complet. Un must pour les utilisateurs de Performa

PowerMac Software Conflicts **COOL** Des problèmes avec votre PowerMac?

PowerPC News home page

PowerTool's Infiniti Clones Construisez votre propre PowerMac ou compatible et sauvegardez!

Prime Time Freeware

Real Mac Solutions

Sad Macs, Bombs, and Other Disasters Update Site

Software MacKiev (Apple in the Ukraine)

Speedometer Results for Various Macintoshes **COOL** Des benchs pour tous les Mac. Très intéressant!

System 7.5.3 Bugs

The Apple Shrine Une page dédié à la "plus grande compagnie du monde"!

The Australian Macintosh Product Guide

The Big List

The Celebrity Macintosh Page Les vedettes fans du Mac

The church of the Mac Evangelist

The History of Apple Computer **TOP** Un fan est obligé de s' arrêté là!!!

The Icon Factory **COOL**

The InfoZone

The Mac

Internet Mac Map

Internet servers for Mac OS

jrm? Newz & Viewz News

Mac Assist **TOP** Ils répondront à vos questions les plus compliquées en 24h environ

MacCentral! **TOP** A ne rater sous aucun pretexte! Des infos au jour le jour.

MacConnect Partenaire avec MacCentral

MacFixIt **COOL** Tout est dans le nom!

Macintosh Freeze & Crash Troubleshooting Tips **TOP** Indispensable

Mac-Guru Trucs et astuces, infos...

MacHelp De l' aide quand le Mac déconne

Macintosh Advocacy Page

Macintosh Compendium

Macintosh Graphics Resources

Macintosh Incompatibilities Aie!

Macintosh ISDN FAQ

MacintoshOS.com

Macintosh PCI Page

Macintosh Resources Billboard Vous cherchez un truc? Commencez ici!

Macintosh Resource Page

Macintosh Statistics Software Vous faites des stats? Alors, ce site est pour vous

Macintosh Tips and First Aid

Macintosh Technotes

Macintosh Technical Referance Page

The Mac Channel **COOL** propose l' application du même nom pour un service d' information

The Mac File of the Day

The Macintosh Guide Book **TOP** Pour tout savoir sur un Mac ou un compatible. Config, prix, ...

The Mac Orchard **COOL** Liste des applications essentielles pour le Net

The Mac Trading Post Service d' achat et vente de Mac gratuit

The Macintosh Extensions Guide Pour enfin tout savoir sur les extensions

The Macintosh Guide Book Tous les Macs et les compatibles MacOS

The Sax Index d' auteurs shareware

The ULTIMATE Macintosh page **TOP** Tout est dit dans le nom

The Unofficial Apple Information Alley

The Unofficial Turbo 601 Web Site Information sur la carte d' upgradeTurbo 601 PowerPC de DayStar Digital

The Updater Update Page Des updates

The Well Connected Mac **TOP** Sur ce site, il est very well connected!

Top Twenty Tips for Macintosh Webmasters

Ultimate Macintosh

University of Washington: Internet Resources for Macintosh Support

User Group Connection Home Page

Version Tracker **TOP** Infos sur les dernières versions en date!

Macintosh Test

Macintosh vs. Windows 95 Hahaha!

Macintouch **TOP** A ne rater sous aucun pretexte! Des infos au jour le jour.

Virtual Macintosh Utilisateur de Windows, voyez ce qu' un véritable OS sait faire

WorldWide-Goodies Store

9 Inch Macs Pas de discrimination!

Le Fan Club!

Vous avez une page sur le Net. Je vous propose de faire figurer un link vers cette dernière ici. Un mail, l' adresse de votre page: le tour est joué!

A- B- C- D- E- F- G- H- I- J- K- L- M- N- O- P- Q- R- S- T- U- V- W- X- Y- Z

A

- Aalok's Macintosh Things
- Aaron's Mac Game Page Liens et téléchargement concernant les jeux
- Annabella Alberti's Sniffer Page Les meilleurs Shareware et Freeware sur le net
- Andrew's Macintosh Page
- Andrew Starr(pi)s Internet/Computers/Software page Site Eudora d' **Andrew Starr's** avec des links vers d' autres soft pour Eudora, les FAQs, les sites pour télécharger Eudora Light ou acheter Eudora Pro
- Arnold's Web Page

B

- For MacOS Users Only Le site de **Bill Fox**
- Bill Giel' s Home Page Un excellent programmeur C/C++, Java, ...
- Benster's Mac Pages **COOL** De nombreux liens
- Matt's Blizzard Page Les jeux sur Mac...
- Brent Foster's Mac Page Une large compilation de Resources Mac sur le Net
- Brian Caslis's Macintosh Stuff and More
- Brian's Repository of Macintosh Information
- BurpTeam Ah! Les potes...

C

- Carl de Cordova's Web Developers' Pointers page Un excellent départ pour qui veut s' initié à HTML

- Chip's MacOS Pages **TOP** Le site de **Chip Rondot** A ne rater sous aucun pretexte!
- Chris' Macintosh Page
- Chris Moyer's FileMaker Pro Page Fan de ... Vous avez deviné?
- CK's Macintosh Page Un site qui compare le Mac au PC (hé!hé!hé!)
- Corey's MacOS Page

D

- Mac & Guitare **TOP** Le site de **Daniel Amieli**. Fans de Mac et de guitare, arrêt obligé! (Mirroir)
- Hallowed Point HomePage Téléchargement gratuit de plus de 5000 JPEGs de très bonne qualité, et de tous genres (des paysages jusqu' aux mangas et bien plus encore). Quelques exemples sur la page Web de **Damien Olanier**
- Macintosh Links **Dan Martens** propose plus de 1000 liens vers des sites Mac
- Dave Clader's Gaming Gallery Tout sur les jeux Mac
- Dave's Macintosh Page De nombreux liens
- Dave's Scavenger Hunt Net tools pour Mac et links vers la 3-D
- MacOS PCI Product Directory de **David Slik** liste les cartes PCI pour Mac
- The Mac Orchard Un site très cool de **Drew D. Saur**

E

- Ernst J. Oud's Home Page
- The Macintosh Page **Eric David Belsley** a une liste de logiciels très utile
- Bienvenue dans mon emissi...pardon mon site! **TOP** Ne rattez pas le site d' **Eric Boisson**!!! Il est génial: éclats de rires assurés

F

- Revue de Presse **COOL**

- ADIM Association pour le Développement de l'Informatique et de la Musique de **Frédéric Blisson**

G

- Click&Create Et oui, ça existe aussi pour Mac! Le site concernant "Click and Play" et "Click and Create" de **Gabriel Delpech**
- Graeme's Page & Links

- [Greg's Web Site] Vous connaisez ~aaron? Faites un tour chez **Gregory D. Landweber**, ca vaut le détour. C' est lui l' auteur
- Guido's Mac Resources Page
- MacFun Tout sur les jeux, sur Mac ... Bien sûr! Un site très intéressant de **Guillaume Boudrant**

H

- Hans' Macpages
- Heidsite, Jim Heid's Mac and Media-Production Hangout
- Hugh's Photoshop Site Le site de **Hugh Kawahara**: il y a des plug-ins freeware a y télécharger

I

- Mac OS 8 - Mac Café **TOP** Le site de **Florian Innocente** (en stand by)

J

- Jae Ho Chang's eHome FinderNote, c' est lui
- Jay's Macintosh WWW Pointers
- The Mac OS Thermopylae de **Jason**
- MacManiac le Club (Fr) MacManiac fait des émules. Voici le site de **Jean-Daniel Kneubuhler**
- Jen's Macintosh page Links et infos
- Jeremy's Web Pages CPUSpeedDisplay: c' est lui!
- Macman, Joe Textes, dessins animés, gifs animées et sons pour promouvoir le Mac
- John Norstad Disinfectant
- John Neil & Associates Les créateurs de Software FPU et Power FPU
- Jon Bodner's PowerBook 190, 2300, 5300 FAQ
- Joseph's Macintosh Universe Un large panel d' infos sur le Mac: links, softs, presses, etc...
- UCL/SRI - Logiciel Internet Mac **TOP** Vous rechercher des logiciels pour le Net qui ont été traduits en français: le site de **JP Kuypers** est donc INDISPENSABLE

K

- Karl Harrison's Macintosh World Wide Web Connections
- K's MacIsland Site voué aux technologies avancées sur Mac et Power Mac. Vous y trouverez des resources, des travaux pratiques (tutorials), des links, et une aire de discution

interactive

L

- Larry Harris' Web Site , ftp File Budy, c' est lui!
- Lemke Software Graphic Converter
- In Love with Macintosh Editorial sur HyperCard et Director file library
- Internet sur Mac, mode d'emploi **COOL** Vous saurez tout grâce à **Ludovic Jardel**

M

- MacFR Le Mac en Français ;-)
- MaCNN Les news ...
- Mac Math Programs Le Mac et les math
- Mark Snellenberger's Macintosh Resources
- Mark Sproul's Macintosh Page
- Maxrebo's Mac Links
- Ultimate Apple Search **Michael Bystrom**
- Built in Adobe PageMill! **Michael Jahn** aime Adobe PageMill! Et ses pages sont certainement plus explicites que le manuel!
- Michael Cosmo's Macintosh Synapses
- 514 Montreal Network Group (Fr) **COOL** Tout sur les jeux par modem/internet. Ne rater le site de **Jimmy Merckx** sous aucun pretexte!!!
- MacPassion **COOL** Site de **Vincent Motte et Guillaume Boudrant** consacré à notre machine préférée
- Yet Another Mac Page Vous avez un Mac? Vous avez aussi un Newton? Alors le site de **Mike Murry** est idéal

N

- Nathan's Everything Macintosh
- Nathan Romero's Macintosh Links
- Mac Infos ! **COOL** Un tout nouveau site Mac. Celui de **Niko**
- John Neil & Associates Les créateurs de Software FPU et Power FPU

O

- O'Grady's PowerPage
- Page Web d' Olivier Un site très sympa et très bien réalisé
- La Cigogne La Cigogne est un BBS consacré à 98% au Mac. Et comment c' est son BBS? Le site d' **Olivier Martinea** vous le dira!

P

- Mac Site Canada Mac passion: au Canada, on ne dort pas. Faites un tour sur le site de **Pascal Mercier**
- Paul's Macintosh Forum
- Pete Keleher
- LE FRENCH CLUB Klik & Play - Klik & Create Merci **Pierre-Etienne Noble**
- Mac et electronique **Philippe Laparre** démontre que Macintosh et Electronique vont bien ensemble
- Philippe Mouret' s Home Page **TOP** Il vous y présente quelques unes de ses créations graphiques - et il connait son affaire.
- La page francaise de WarCraft2 **COOL** Cyber-cancre attitré depuis longtemps... **Philippe** vous informe sur cet excellent jeu
- Phil's Fonts Fontes
- Philippe's Mac Page Vouyez pourquoi le Mac pourrait etre l' ordinateur idéal pour vous
- Pure Mac Infos logiciel

Q

R

- TBYM **TOP** Vous cherchez encore un Site Mac Francophone de qualité: arrêtez-vous chez **Richard Menneveux**
- RZS (Rick Z Shepard)
- MacBuzz Des bench de comparaison de **Robart**
- Rob Art Mog, Cartoonist, Macintosh Art Sensei
- Robert Lentz's Macintosh Resources
- Robert Porter's Mac Page
- Sir Roblin's Mac Gaming Page DOOM, DOOM][, Wolenstein 3D
- Roger Lim's Macintosh Corner
- Ron's Mac Ooo's and Ahhh's

S

- Sam Choukri's Web Tools ColorMaker
- Scott Hoppe's Internet eMail Guide
- Seb's Mac Links (Be) **COOL**
- Sergio Salvatore's Macintosh Home Page
- Steve Martin's Documented Links
- Power Macintosh Resource Page by Steve Tannehill
- Stuart's Bolo Pages Un fan de Bolo

T

- Timo Eloranta's Mac Links
- Thomas Schnaidt's Macintosh Links
- Mac-Theology Site voué au culte du Mac
- SignFile(Fr) est un petit utilitaire pour vous aider à vous y retrouver dans les différents formats de fichier du Mac, de **Tod**
- Todd Frazier's Macintosh Support Page
- Todd McCurdy's Mac Sites
- Todd McCurdy's Mac Sites
- Todd's Macintosh Support Page Jeux, images, ...
- The Mac Fanatic

U

V

- Victor's Mac Site

W

- Jon Wiederspan's Internet Resources for Macintosh
- Williams Arcade Games for the Mac
- Wimsey's Mac Page

X

Y

- MICROCAM06 (Fr) **TOP** La passion du Mac de **Yves Cornil**

- Yves Cornil's Home Page (Fr) La maison page d' **Yves Cornil**

Z

Edition HTML

Voici une sélection d' éditeurs HTML, pour ceux qui désirent conquérir le Web.

- PageSpinner **Top** : Shareware
- Golive Cyberstudio 2 **Top** WYSIWYG
- HTML.edit Freeware
- Page Mill **COOL** WYSIWYG d' Adobe- La version 2 est excellente
- Claris Home Page **COOL** WYSIWYG - Egalement en version 2
- Arachnid WYSIWYG
- HTML Editor for the Macintosh Semi-WYSIWYG
- WebDoor Aucun besoin de conna î tre HTML pour être sur le Web
- Web Weaver **COOL** Qui ne le connait pas
- BBEdit HTML extensions
- BBEdit HTML Tools
- MacHTTP Util BBEdit
- Simple HTML Editor Pile HyperCard
- HTML Grinder
- GT_HTML.DOT Macros pour Microsoft Word 6.0 - Pseudo-WYSIWYG
- Alpha
- ANT_HTML Conversion Utilities Fonctionne pour Word
- Clay Basket Editeur et web site manager de Dave Winer
- GNNpress
- HTML-HyperEditor
- Jon's HTML Editor - UW-TJP
- SimpleText2Html
- Thesis Writer Editeur HTML proposant des options pour le site management
- Web-Knitter
- WebWarrior
- Index - Macintosh WWW Development Resources Pour être sur de ne rien rater!

Encore besoin d' aide pour la création de vos pages?

- L' HTML 3.2 au format 'Apple Guide' disponible dans votre editeur HTML prefere.
- Creation de serveur Web et ecriture multimedia au format PDF
- Propriete intellectuelle des serveurs Web (texte de lois, protection, procedure, jurisprudence,...)
- L'Hypertexte et hypermedia

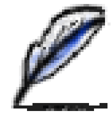
GraphiMac

Merci à Jean-Philippe Guihard pour le logo Graphimac

Cette rubrique est concoctée par
Philippe & Robby

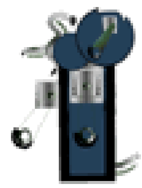
Et gérée par
Phillipe

C'est un début et la rubrique s'étoffera au fil des mois. N'hésitez pas à nous faire part de vos remarques et votre collaboration est la bienvenue.

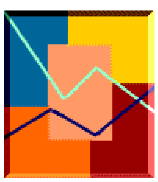


Contactez-nous

Gifs et Bandeaux



Liens techniques



Sites d'auteur

Vos trucs et astuces

Les bannières de la fierté Mac

Pour collaborer à GraphiMac

Ne nous envoyez pas vos oeuvres par mail svp. Nos BAL sont déja limites comme ça!! Remplissez le formulaire ci-dessous et faites nous part de vos créations, de vos Trucs&Astuces sur vos logiciels préférés, de vos remarques, de vos liens que vous n' avez pas retrouvés dans la rubrique, et de vos idées pour améliorer celle-ci.

Soyez créatif!

Nom:

Prénom:

E-Mail:

Couchez-vous sur le divan et dites moi ... :

Envoyer Annuler

Retour au sommaire

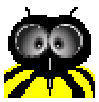
GraphiMac

Gifs à votre disposition

Ces images ont été réalisées par nos soins et sont
libres de droits pour toute utilisation personnelle
y compris sur un site Web non commercial.
Pour les récupérer sur Mac doté de l'extention Drag and Drop
amenez l'image sur le bureau du mac et le tour est joué!
Vous pouvez aussi utiliser la copie d'images
de votre navigateur.
Robby & Philippe

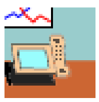
Consultez donc aussi ces 2 liens:

Le Site de Netscape sur les Gifs animés I The 1st Internet Gallery of GIF Animation



Butineur.gif

Plume.gif

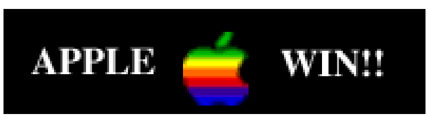


Phone.gif

Futur.gif

MacNext.gif

Bandeau animé
Fait avec...



Bandeau animé
Windows Killer...

Retour au sommaire

GraphiMac

La plupart des sites présentés ici sont en anglais...
Il ne tient qu'à nous tous de développer
des sites en français...

Les éditeurs de logiciels

- AdobeSystem Photoshop, Illustrator, etc, des conseils, téléchargement.
- Alias Research
- ArtBeats WebTools
- Fractal Design Painter, Expression, Poser, etc, un fond nouveau à récupérer chaque jour.
- Macromedia FreeHand, le chalenger d'Illustrator prêt pour le Web
- Letraset Online Visitez Catch of the Month et téléchargez une police Fontek gratuite
- MetaTools Kai Krause et ses outils intuitifs pour les créateurs: Bryce, Convoler,etc..
- Quark homepage Infos, updates et Xtensions pour Quark Xpress
- Silicon Graphics
- Specular Infini-D, ...
- Strata Strata Studio Pro, Media Paint, ...
- Yonowat Amapi vous ne connaissez pas encore?

Conseils, trucs et astuces

Mes liens préférés

- Get InfoUn magasine en ligne de conseils sur les principaux logiciels graphiques, Quark, Illustrator, Photoshop, Freehand, PageMaker.
- Sullivan's OnlineDu bon usage d'un scanner
- Bandwidth Conservation SocietyComme son nom l'indique cette ressource a pour but de préserver la bande passante; elle est destinée à ceux qui créent pour le Web. Comment réduire la taille d'un fichier sans altération des couleurs,etc...
- Photoshop tips pageDes conseils, illustrés et tout (même si c'est avec des copies d'écrans PC).

- ColorExpertUn site à ne pas rater,avec des applets JAVA qui vous expliquent tout sur la couleur!

Liens relatifs à PhotoShop

- Adobe Photoshop Web Reference
- Photoshop Links, Tips and More Resources pour utilisateurs de Photoshop
- Photoshop Sites Resources pour utilisateurs de Photoshop
- The Phoshop f/x Online Companion Un grand site avec une liste de Plug-Ins pour Photoshop
- PHOTSHOP Digest search engine Cherchez parmi les archives de cette Mailing-list
- General Adobe information on Photoshop
- Kai's Power Tips Les conseils précieux de Kai Krause (Mr Metatools) pour Photoshop
- Digital Directions Techniques encore des conseils pour Photoshop

Liens relatifs à Illustrator

- General Adobe information on Illustrator
- GetInfo newsletter Pour de bons conseils sur Illustrator

Liens relatifs à FreeHand

- Anton's FreeHand Page

Pour créer des graphismes de haute qualité pour le Web

- Lynda's Homegurrrl Page- Un bon point de départ pour trouver des infos sur la création d'images de qualité pour le Web
- Victor Engels no dither Netscape colors-Une palette pour créer des graphismes destinés au Web
- Yikes !- Testez différentes palettes de couleur sur des images
- The Great Cross-Platform Netscape Background Dithering Test- Une page de test + information sur les couleurs dansNetscape par Abigail Lavine
- Not Just Decoration: quality graphics for the Web- Un excellent article sur la production d' images de qualité pour le web par Chris Lilley

---

Publication électronique & Multimedia

- Adobe.mag Nouveau magasine d'Adobe sur le graphisme et la publication en ligne
- MacArt Magazine un magasine électronique avec de nombreuses infos sur Photoshop (format PDF)
- Fusion- An on-line magazine for Macintosh based interactive and graphic arts professionals.
- The DTP Jumplist - Information on DTP, clipart archive, etc.
- Photoshop 3 Wow! Book Des infos sur le livre et des exemples illustrés
- Prepress/DTP center - Information on DTP, clipart archive, etc.
- The Prepress Page - provides links to other DTP-sites
- GetInfo Newsletter Un magasine en ligne de conseils sur les principaux logiciels graphiques,
  Quark, Illustrator, Photoshop, Freehand, PageMaker.
- ImageSoup Publication pour les professionnels des arts graphiques
- Digital Directions - E-zine on Mac design, DTP techniques and new technologies.
- Electronic Publishing Resource Center - Even more links to DTP info...
- comp.sys.mac.graphics Newsgroup général à propos du graphisme sur Mac.

Conversion de fichiers sur le Web

- Carberry Conversion Machine Convrsion automatisée de fichiers sur le Web [CGM, HPGL, DXF, GIF, JPEG]
- Image Alchemy - Ce service vous propose de convertir vos fichiers en-line. Beaucoup d'options.

Une autre façon de diffuser ses oeuvres avec Acrobat

- general Adobe information on Acrobat
- R. Scott Wennerdahl's Acrobat Reader Tutorial
- Amber Plug-in Pour visualiser les fichiers au format PDF dans Netscape

---

Director pour mettre enscène vos créations

- Macromedia's own Director page
- Director web(site non officiel) Beaucoup d'infos sur Director

- Director Viewer Home Page

Quark Xpress

- Quark homepage
- The Xpresso bar -lots of useful information about QuarkXPress (and some Bass too...)
- The QuarkXPress FAQ - Part of the FAQ for Quark Users about quality-control check of documents.
- Quark to HTML conversion - Information for converting QuarkXPress documents to HTML.
- David Andersons FTP-site - A vast collection of Quark extensions, updaters and other information.

Premiere

- general Adobe information on Premiere

Autres sites graphiques

- Macintosh Graphics Resources Les pages graphiques de Joe Ashear's, et son logiciel !
- MacUsers "Graphics places to go"
- DesktopPublishing.com Liens pour l' édition
- DesignSphere Online
- The Terraformers' Guild La passion de KPT Bryce
- Fusion Un magazine pour les professionnels des arts graphiques
- The Xpresso Bar Avis aux utilisateurs de Quark XPress
- The (Macromedia) Director Web
- The Graphics Sketchbook 3D à la Tom Karlo
- 3DSite 3D, 3D - revendeurs et Modèles 3D libres de droits
- Animation Master Hobbyist Resources pour l' animation
- Better Living Through Typography Resources pour typographes
- Boersma, J. Fonds d' écran, GIFs, etc...
- The comp.fonts Home Page Fontes
- designOnline Informations pour les graphistes

- DTP Internet Jumplist
- Ghostscript Viewer PostScript pour Mac
- Graphics for HTML Documents Ou et comment utiliser des images pour le web?
- The Graphics List Web Liste de diffusion Home of Graphics List
- Graphion's Online Type Museum Histoire de la typographie
- Inline Design Trucs , infos et liens
- Internet Font Archive Ou trouver des fontes sur le Net?
- Internet PostScript Resources Liens vers des resources PostScript
- Jeffrey Zeldman Presents Patterns et icones
- KPT Bryce Animation Help Comment faire des animations dans Bryce?
- MiniCAD Freepage MiniCAD
- MPEG FAQ Compression MPEG
- ONGdesign
- PageMaker FAQs JumplistInfos et liens pour PageMaker
- POV-Ray Resources POV-Ray
- QuickDraw GX Fan Club bientôt réservé aux nostalgiques
- QuickTime FAQ
- RenderMan Repository Resources pour RenderMan
- The Scanning FAQ Comment scanner?
- Texturassic Park Textures
- TextureLand Textures libres de droits
- Transparent/Interlaced GIF Resources
- Ventana Clip Art Archive Clip art
- WWW Virtual Library: Design

Retour au sommaire

Erreur 404

L'adresse que vous avez tapée n'existe pas.

Préciser votre recherche

ok options

Pourquoi rejoindre MultiMania ?

Rejoignez MultiMania aujourd'hui. C'est **simple, rapide et entièrement gratuit**. Vous bénéficiez immédiatement :

- D'une **adresse e-mail**, indépendante de votre ordinateur et de votre fournisseur d'accès.
- D'un espace de **12 à 20 Mo** pour vos **pages perso** et **des meilleurs outils de création pour les débutant comme pour les experts**.
- De plus de **30 chambres thématiques** de dialogue en direct.
- D'un espace e-commerce avec **des promotions spéciales réservées aux membres.**
- De plusieurs dizaines d'autres services : moteur de recherche, annuaire thématique, cartes postales virtuelles, magazines...

Rejoignez MultiMania

GraphiMac

Petit avertissement aux zappeurs pressés:

Les sites que nous vous proposons sont parfois un peu longs
à charger. C'est la rançon d'un contenu graphique important.
Il est extrêmement difficile avec les débits actuels
de faire plus rapide.
Cependant vous courrez rarement dans les allées
d'un musée ou d'une exposition.

Prenez donc le temps de visiter ces sites en toute
connaissance de cause.

Lucas Janin	Site à la fois magnifique et plein d'humour d'un "Mygalien".
GRAPhil	Ballade dans l'univers graphique de votre serviteur.
Yves Pazat	Présente certaines de ses oeuvres en Noir & Blanc (Dans son atelier Galerie)
Pasacal Gentil	Des infographies et des peintures toutes en couleurs de style un peu naïf.
Marianne Guetté	Un site où butiner sans retenue avec beaucoup de liens graphiques intéressants
Mkdzk	Un univers totalement baroque. Très beau mais aussi très très long à charger. Fait avec un Mac.
Laurent Pelletier	Un très beau site non dénué d'humour
Gilles Tran	Ses images sont d'une qualité rare
Jimmy Merckx	Présentation de son travail et des liens à foison
Braden Brook	Un peu long à charger mais on ne regrette pas le détour
Eric Boisson	L'un des sites les plus éclatants du Wouaib. Rendez visite au défenseur du Zougue
Annie Béland	Très beau travail d'une graphiste éclectique
SepiArt	Pour ceux qui créent des images sur Mac: Venez les exposer sur ce site

Retour au sommaire

GraphiMac

La page de trucs et astuces graphiques
de MacManiac.

Comment créer un gif à fond transparent?

Qu'est-ce qu'un "gif transparent"?

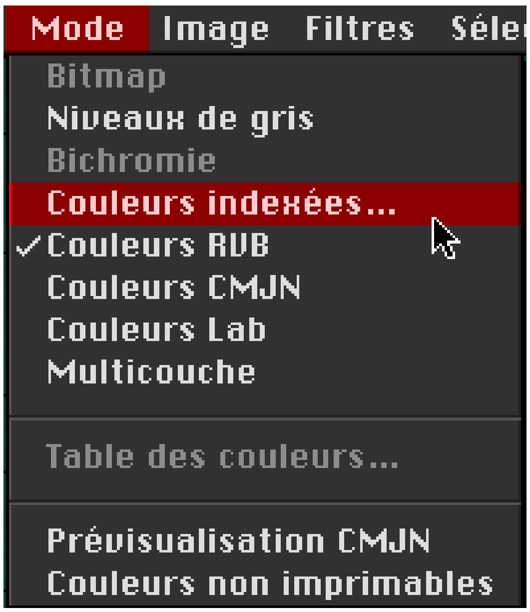
En fait le plus souvent il s'agit d'une image au format gif dont on souhaite rendre le fond transparent afin de pouvoir l'intégrer sans difficulté sur une page Web à la couleur d'arrière plan quelconque.
Prenons (au hasard) l'exemple de la petite pomme que nous aimons tous.

Pour les besoins de la cause nous avons choisi de modifier la couleur du fond car on n'a pas toujours la chance d'avoir un élément posé sur un fond uniforme.

Première étape: Le détourage de la pomme. Ici c'est facile car la pomme est posée sur un fond blanc et la baguette magique de Photoshop suffit.
Si le fond est plus complexe on utilisera les fonctions masque, lasso ou tracé afin de dessinner un masque de sélection précis.

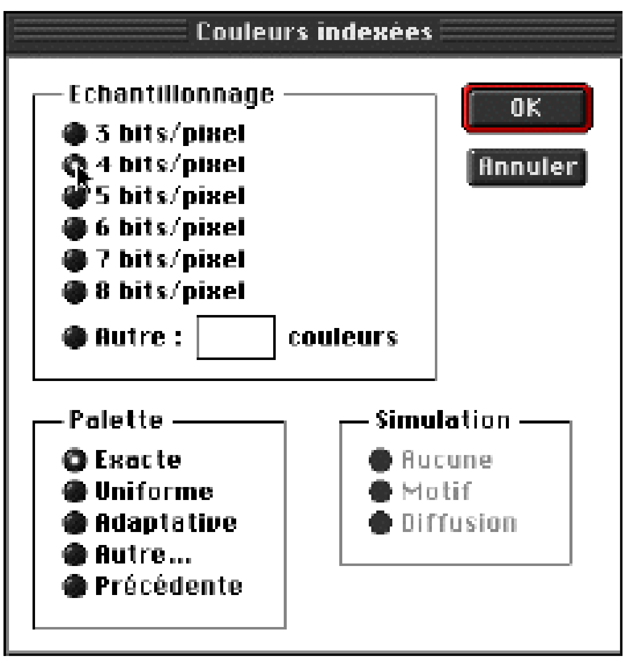
Lorsque la sélection est faite on la remplit avec une couleur uniforme TOTALEMENT DIFFERENTE de celles contenues dans la pomme (ici le noir mais le blanc d'origine aurait donné le même résultat).
En effet c'est cette couleur que l'on rendra transparente par la suite.
Si elle est trop proche de l'une des couleurs de l'objet

que l'on veut poser sur la page Web, on risque de créer des trous dans l'objet.



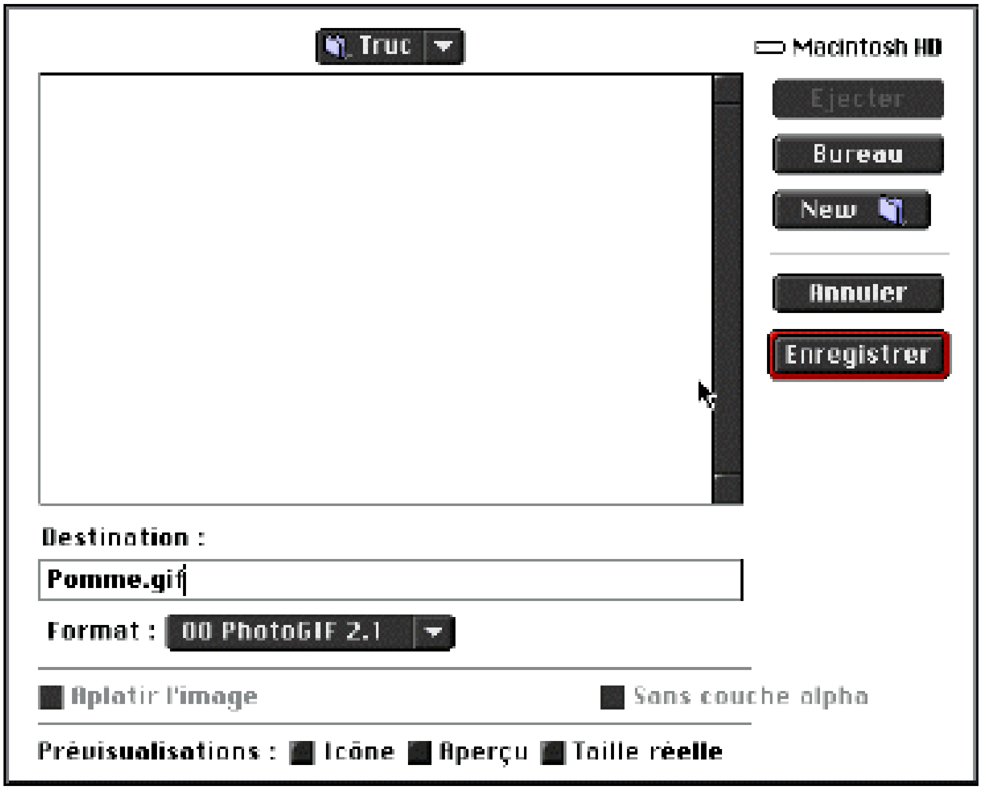
Afin de réduire la taille finale de notre gif nous passons en mode couleurs indexées.

Ceci n'est pas indispensable et même déconseillé lorsque l'on travaille sur des images complexes que l'on va enregistrer grâce à des Plug-in de type PhotoGif ou ProJpeg qui se chargent de rééchantillonner l'image.

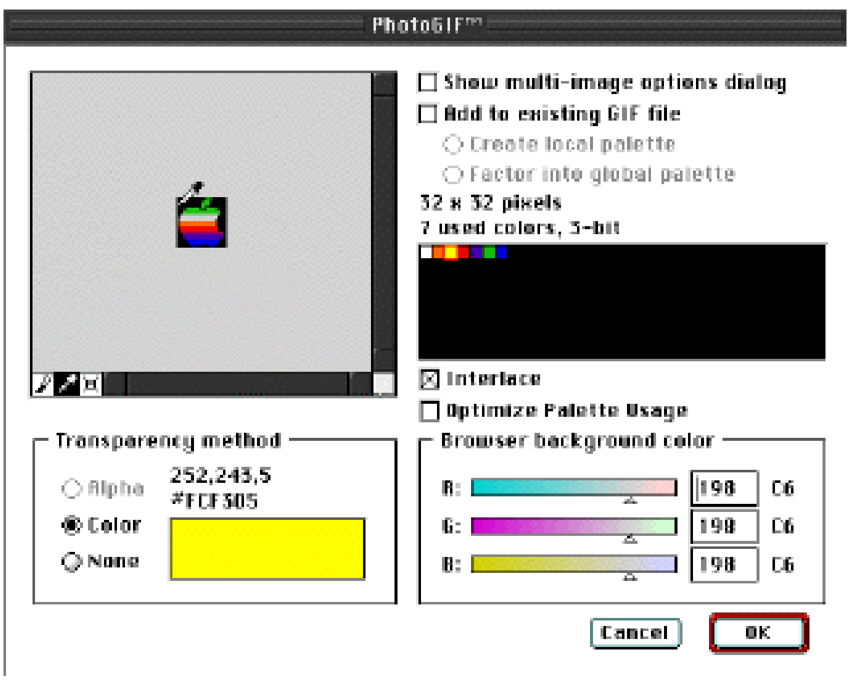


Pour notre pomme un échantillonnage à 4 bits par pixel suffit.

En la matière il n'existe pas UNE vérité et seule l'expérimentation permet de choisir ce qui convient le mieux à l'image choisie.

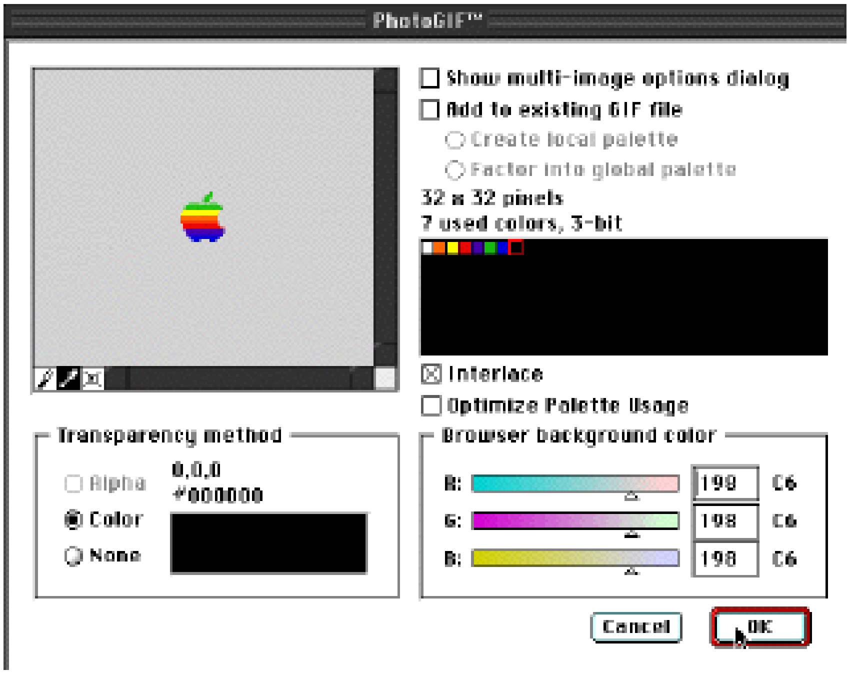


Nous enregistrons le fichier au format gif (ici avec Photogif afin de vous monter l'effet de la couleur de transparence)



Dans la fenêtre de dialogue nous voyons que notre pomme apparaît bien sur un fond noir.

On sélectionne grâce à la pipette le noir comme couleur de transparence et on obtient...



...Une pomme parfaitement isolée que l'on peut poser sans problème sur un fond bleu, rouge ou de n'importe quelle autre couleur.

Dans PageMill vous pouvez aussi créer des effets de transparence sur les gifs (Commande+double-clic sur l'image). Avoir son objet principal posé sur un fond de couleur totalement différente permet d'arriver facilement à un excellent résultat sans risquer de transformer son image en gruyère.

à vos Macs!

Editeur de couleurs

Quand on compose une page Web un des premiers problèmes qu'on souhaite résoudre concerne le choix de la couleur du fond. Pour cela il faut paramétrer correctement BGCOLOR. Trouver les trois composantes pour une couleur donnée relève du jeu de hasard, et l'on trouve même certaines pages qui référencent les couleurs dans de vastes catalogues. C'est idiot car perdu d'avance : le nombre de couleurs possibles est de 256*256*256 soit 16 777 216 couleurs différentes !

Voici une petite applette java bien pratique : un éditeur de couleurs sous forme R V B. En effet, l'attribut BGCOLOR que l'on place dans le tag body d'une page HTML définit la couleur du fond avec trois composantes Rouge, Verte et Bleue. La définition d'une couleur dans un programme ou applette java se fait de la même manière.

Cette applette résout définitivement cet épineux problème car elle permet d'éditer directement la couleur : on fixe les composantes R V B avec des ascenseurs, où en entrant les 3 composantes au clavier, et une fenêtre affiche instantanément la couleur correspondante (en hexadécimal). C'est aussi simple que ca. Il ne reste plus qu'à recopier les composantes dans le tag HTML (ou le code java). Par exemple : BGCOLOR="F0FF0A".

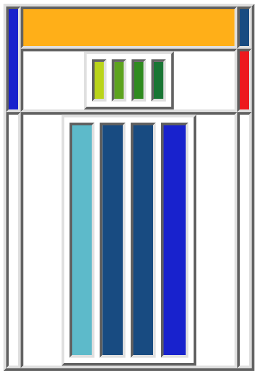
Michel Casabianca

casa@sdv.fr, homePage : Homo Ludens

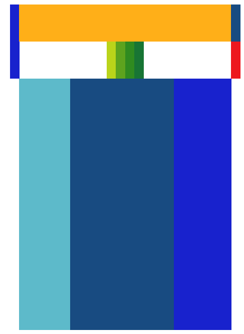
Des motifs pas lourds

Vous pouvez réaliser facilement des motifs simples pour égayer vos pages Web sans pour autant en alourdir le temps de chargement. Il suffit pour cela d'utiliser un ou des tableaux en colorant le fond de chaque cellule puis en règlant les contours à zero et l'espacement entre les cellules en fonction de l'effet désiré

Tableaux avec contours de 1 pixel



Tableaux avec contours et espacement des cellules à 0 pixel



Partagez vos experiences. Envoyez nous vos trucs et astuces!

Collaborez à GraphiMac!

Haut de la page II Retour au sommaire

Bannières de la fierté

MacManiac vous propose ces Gifs et Gifs animés qui ont été récupérés sur MacPride pour que vous puissiez en profiter et les télécharger plus rapidement.

Profitez en pour montrer la toute puissance du Mac. A ce niveau là, c' est plus de l' amour, c' est de la rage! ;-)

Encore des Gifs   Des Gifs animés

Retour au sommaire

Bannières de la fierté

MacManiac vous propose ces Gifs qui ont été récupérés sur MacPride pour que vous puissiez en profiter et les télécharger plus rapidement.

Un Mac Allien!!! Héhéhé!

Retour au sommaire I Retour

Bannières de la fierté

Ces Gifs animés ont été récupérés sur MacPride pour que vous puissiez en profiter et les télécharger plus rapidement.

Retour au sommaire I Retour

Java

C' est parti pour un petit shopping
Vos pages sont statiques!? Cela vous dérange? La solution s' appelle Java!
Avos marques - Prêt - Bougez!

Apple Flavored Java est LE site Java pour Mac

Java Boutique réunit des resources pour ceux qui voudraient rajouter des Applets Java à leur site. Il y en a environ 120, avec les instructions d' utilisation.

The JavaScript Workshop De nombreux scripts à copiés

Gamelan: Earthweb's Java Directory

MacaJava

Sun Microsystems

Vous rencontrez des difficultés avec la programmation Java? Voici des News Groups qui vous aidreront dans vos progressions:

fr.comp.lang.java

comp.lang.java	comp.lang.java.programmer
comp.lang.java.advocacy	comp.lang.java.security
comp.lang.java.announce	comp.lang.java.setup
comp.lang.java.api	comp.lang.java.tech
comp.lang.java.misc	comp.lang.javascript

Freeware

Finder Pop: Améliore sensiblement l' utilisation des menus contextuels sous MacOS 8.

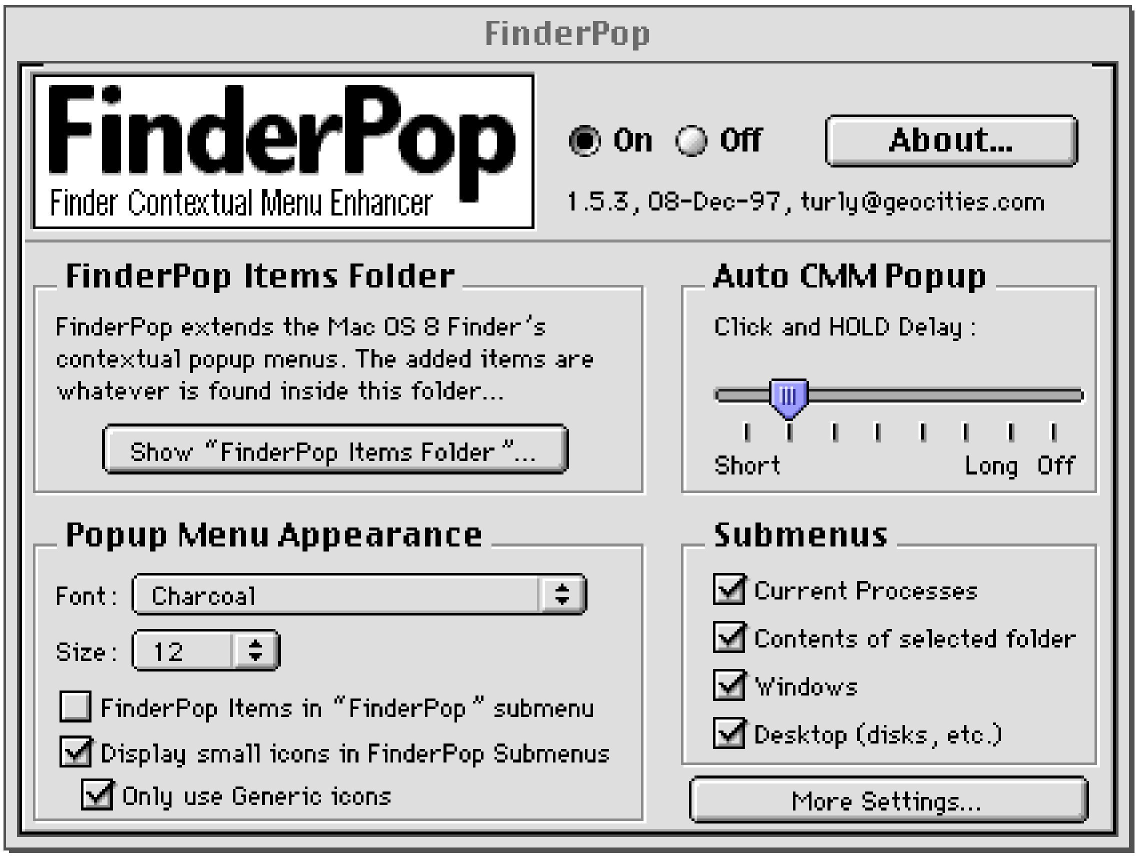
SoundApp: Le couteau suisse du son sur Mac.

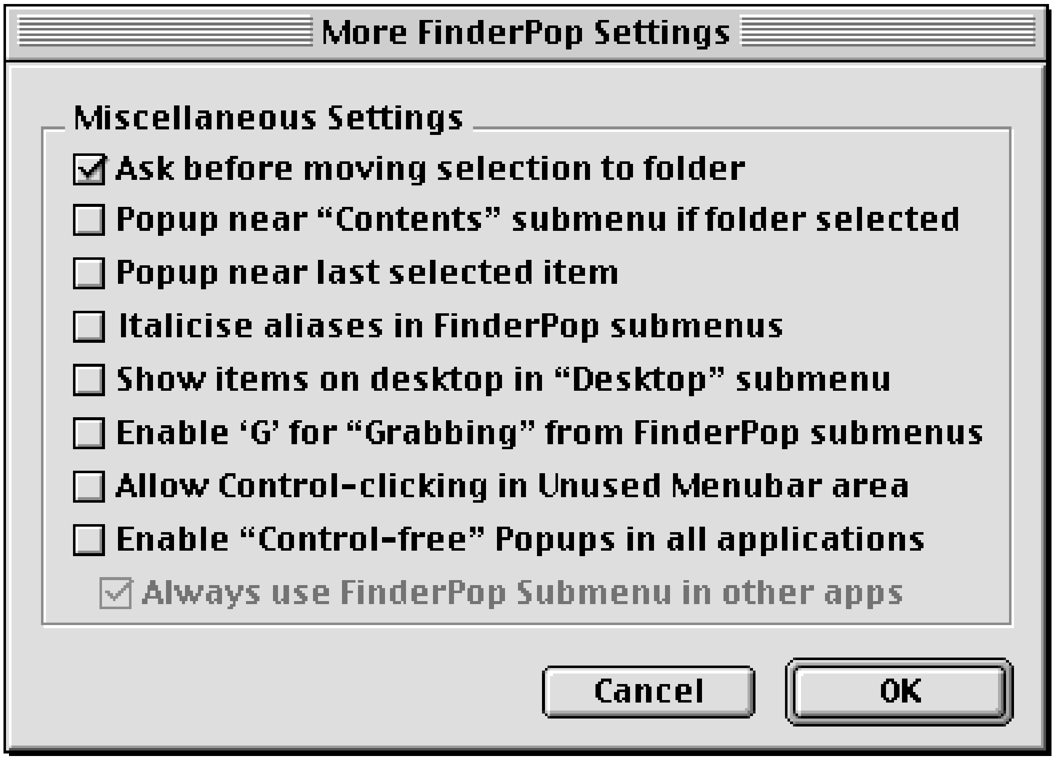
Finder Pop

Utilités:

Les menus de dossiers à la PopUpFolder (qui n' est plus compatible avec Mac OS 8)
Un dossier foure-tout dans le menu contextuel que l' on peut par exemple utiliser comme lanceur d' application
L' ouverture du menu contextuel sans l' utilisation de la touche "Commande"

Visualisation:




More FinderPop Settings
Miscellaneous Settings
Ask before moving selection to folder
Popup near "Contents" submenu if folder selected
Popup near last selected item
Italicise aliases in FinderPop submenus
Show items on desktop in "Desktop" submenu
Enable 'G' for "Grabbing" from FinderPop submenus
Allow Control-clicking in Unused Menubar area
Enable "Control-free" Popups in all applications
Always use FinderPop Submenu in other apps
Cancel
OK

SoundApp

Utilités:

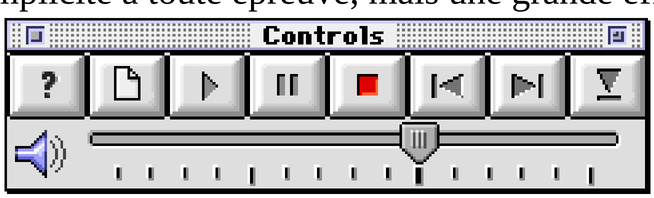
SoundApp reconnait de nombreux formats:

- AIFF and AIFF-C: (.aif, .aiff, .aifc)
- Amiga IFF (8SVX): (.iff)
- Audio CD Tracks
- DVI ADPCM: (.adpcm)(Adaptive Differential Pulse Code Modulation)
- GSM: (.gsm, .au.gsm)
- IMA ADPCM
- IRCAM: (.sf)
- MIDI: (.mid, .midi, .kar)
- MOD: (.mod, .s3m, .mtm)
- MPEG Audio: (.mp, .mp2, .mp3, .m1a, .m2a, .mpg, .mpeg, .swa)
- PSION sound: (.wve)
- QuickTime Movies: (.mov)
- Raw Audio CD Data
- Sound Blaster VOC: (.voc)
- Sound Designer
- Sound Designer II
- SoundCap
- SoundEdit
- Sun Audio and NeXT: (.au, .snd)
- Studio Session Instrument
- System 7 and 'snd '
- Windows WAVE: (.wav)

Il sait effectué pratiquement toutes les conversions dont vous aurez besoin, en particulier des formats spécifiques vers le 'snd'

Visualisation:

Une simplicité à toute épreuve, mais une grande efficacité



News

comp.binaries.mac

comp.emulators.mac.executor

comp.infosystems.www.browsers.mac

comp.infosystems.www.servers.mac

comp.lang.dylan

comp.lang.forth.mac

comp.lang.lisp.mcl

comp.lang.pascal.mac

comp.lang.prograph

comp.mail.mac.eudora

comp.mac.sys.misc

comp.periphs.scsi

comp.protocols.appletalk

comp.soft-sys.math.mathematica

comp.sources.mac

comp.sys.mac

comp.sys.mac.advocacy

comp.sys.mac.announce

comp.sys.mac.app

comp.sys.mac.apps

comp.sys.mac.comm

comp.sys.mac.databases

comp.sys.mac.graphics

comp.sys.mac.hardware

- .misc
- .storage
- .video

comp.sys.mac.hypercard

comp.sys.mac.misc

comp.sys.mac.portables

comp.sys.mac.printing

comp.sys.mac.programmeurs

- .codewarrior
- .games
- .help
- .info
- .misc
- .tools

comp.sys.mac.scitech

comp.sys.mac.system

comp.sys.mac.wanted

comp.sys.macintosh

comp.sys.macintrash

comp.sys.newton

comp.sys.newton.announce

comp.sys.newton.misc

comp.sys.mac.digest

comp.sys.mac.forsale

comp.sys.mac.games

- .action
- .adventure
- .announce
- .flight-sim
- .marketplace
- .misc
- .strategic

comp.sys.mac.general

comp.sys.newton.programmer

comp.sys.powerpc

cyberdog.general

cyberdog.hi-features

cyberdog.technical

de.comp.os.mac

fr.comp.sys.mac

fr.comp.sys.mac.programmation

francom.comp.macintosh

francom.macintosh

Il y a de quoi faire! Vous en voulez encore plus...Vous trouverez une liste beaucoup plus détaillée ici!

sign up now!

For Information e-mail:
hostmaster@downtown.com

Please visit our sponsors Mail.com and Beauty.com below:

mail.com The Internet Messaging Company

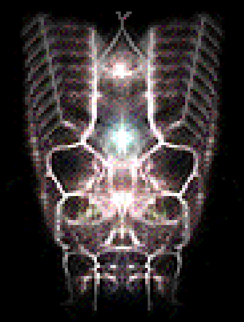
FREE EMAIL

Make a N@me for Yourself.

CLICK here to sign up

WHY SIGN UP? | PRIVACY POLICY | ABOUT MAIL.COM

If you have already signed up, click here to login.



e n t e r

MKZDK 4.5

updated 8/99

contact