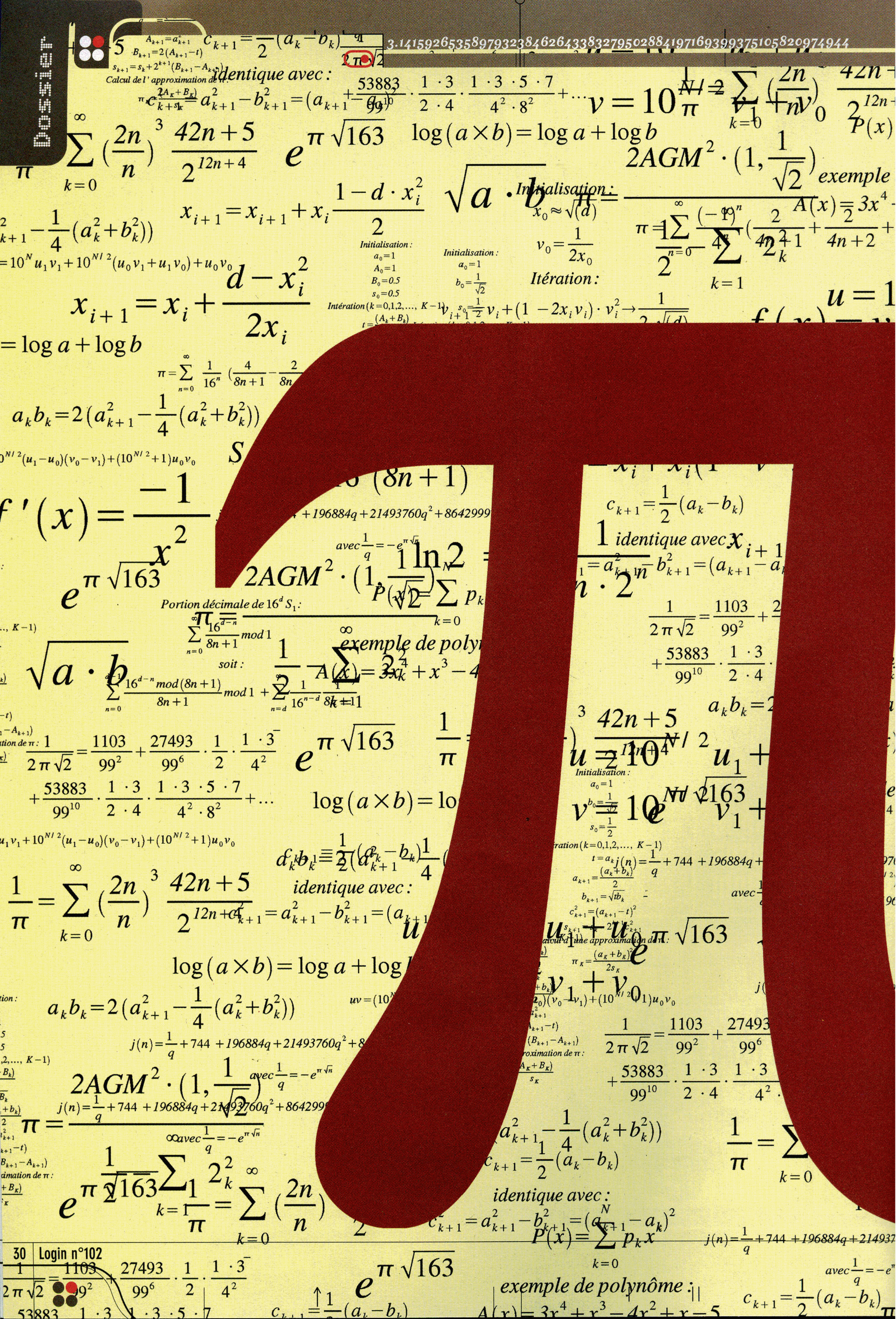

3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494
identique avec :
Calcul de l' approximation de π :
Initialisation :
Itération :
Portion décimale de 16^d S_1 :
soit :
exemple de polynôme :
log(a×b) = log a + log b

A LA RECHERCHE DE PI

Les quatre mille ans d'étude sur le nombre Pi ne furent jamais aussi prolifiques qu'aujourd'hui. Malgré l'avancée constante et phénoménale des capacités de calcul, ce sont bien les algorithmes qui marquent encore la différence. Ce dossier se consacre à la poursuite de Pi, regroupe les algorithmes classiques et en présente des optimisations. Les nouvelles méthodes de calcul y sont implémentées dont l'incroyable algorithme de Bailey-Borwein-Plouffe.

Le professeur Yasumasa Kanada, université de Tokyo.

En octobre 1999 le professeur Yasumasa Kanada a annoncé, sur Internet, avoir calculé près de 200 milliards de décimales de Pi, établissant un nouveau record mondial. Ces nombres représentent une quantité d'information considérable : leur forme compressée requiert plus de 150 CD-Rom, ou encore trente mille livres de mille pages chacun. Un supercalculateur, le SR8000 d'Hitachi avec 128 processeurs, a calculé ces décimales sur un peu plus de trente heures (deux calculs avec deux algorithmes différents pour comparer les résultats). Pourtant, sur un plan scientifique nos calculs ne demandent pas une telle précision : quelle est donc cette étrange constante qui fascine tant de mathématiciens ?

Pi, irrationnel et transcendant

Pi se définit comme le rapport constant entre la circonférence d'un cercle et son diamètre. Son appellation "pi" vient d'ailleurs du mot grec peripheria lequel désigne, justement, la circonférence du cercle. Mais il aura connu de nombreux autres noms au cours de l'histoire, sa notation actuelle ne datant que d'une publication d'Euler en 1748. Dans celle-ci, le mathématicien voulait rendre hommage aux Grecs qui, fascinés par ses propriétés étranges, furent les premiers (à notre connaissance) à avoir trouvé comment s'approcher le plus de sa valeur. L'irrationalité de Pi fut démontrée en 1766 par le mathématicien Johann Heinrich Lambert. Un irrationnel figure un nombre qui ne peut pas se présenter comme le quotient de deux entiers. Ainsi, le rapport 355/113, employé pour exprimer Pi dès le cinquième siècle avant J.C. par Tsu Chhung-Chih, en Chine, n'est précis qu'à six décimales près. Ce qui ne l'empêcha pas d'être sa valeur approchée la plus précise pendant 800 ans.

$$\frac{\pi}{4} = 4\alpha - \beta$$
$$= 4 \arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$$
$$= 4\left[\frac{1}{5} - \frac{1}{3\cdot 5^3} + \frac{1}{5\cdot 5^5} - \ldots\right] - \left[\frac{1}{239} - \frac{1}{3\cdot 239^3} + \ldots\right]$$

Étapes du développement de la formule de John Machin.

$$\pi \approx \sqrt{2} + \sqrt{3}$$

Figure 3.

$$a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

Figure 1.

$$Aire = pi * \left(\frac{d^2}{4}\right)$$

Figure 2.

Le caractère transcendant de Pi aura sans doute incarné l'aspect le plus incroyable de cette constante. A l'époque de sa découverte, personne n'avait imaginé qu'un tel nombre puisse exister. La démonstration (très compliquée) de la transcendance de Pi fut rédigée par Ferdinand Lindemann en 1882. Celui-ci prouva que Pi ne peut s'écrire sous la forme d'un polynôme (comme par exemple l'équation de la figure 1). En fait, cette transcendance de Pi est encore plus fondamentale car elle démontre également que la quadrature du cercle à l'aide d'un compas et d'une règle est impossible (un problème connu depuis 1882 même si on rencontre encore des farfelus ignares persuadés du contraire).

QUIZ

Question
Comment calculer la taille d'un éléphant ?

Pi au cours de l'histoire

L'étude du cercle compte parmi les plus anciens problèmes en mathématiques comme le soulignent les plus antiques traités. Pourtant, sa notation moderne reste relativement récente (18ème siècle) sans compter la force de ses récentes évolutions. Avant le 18ème siècle, les allusions à Pi utilisent une définition brute et lourde, comme celle-ci : "quantitas, in quam cum multiplicetur dyameter, proveniet circumferentia". Elle signifie littéralement : "la quantité qui, lorsque qu'elle multiplie le diamètre, contient la circonférence". Le symbole grec moderne remontre à William Jones (1675-1749), lequel l'emploie dans son compendium de formules "Synopsis Palmariarum Mathesos" publié en 1706. En fait, il cite John Machin comme source de la formule et son origine lui est donc attribuée. John Machin est également célèbre pour sa formule fondée sur l'arc tangente et son record de calcul (cent décimales).

La plus ancienne approximation de Pi portée à notre connaissance est celle d'une tablette de l'ancienne époque babylonienne, datée entre 1900 et 1600 avant JC. Elle lui attribue la valeur 3.(1/8). Puis, on trouve le papyrus de Rhind (du nom de son acheteur qui le trouva en 1858 à Louxor). Regroupant une série de problèmes, il a pour cinquantième propos : "Exemple d'un champ circulaire de diamètre 9. Quelle est sa surface ? Prenez 1/9 du diamètre, le reste est 8. Multipliez 8 par 8 soit 64. La surface est donc 64". Cette description correspond à la formule (8d/9)^2, soit l'approximation de la surface du cercle (figure 2). Les

$$3 + \frac{1}{7} > \pi > 3 + \frac{10}{71}$$

Figure 4.

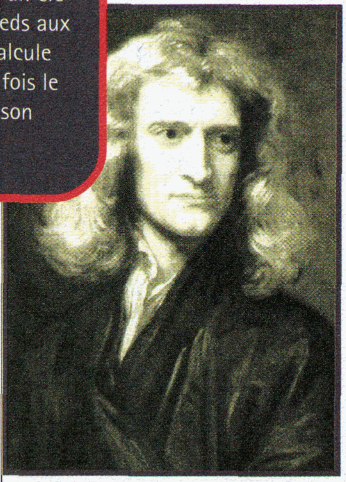
Grecs ont consacré de grands efforts à l'étude du cercle aux Vème et IIIème siècles avant J.C. On leur doit notamment la méthode dite de "l'épuisement". Elle consiste à partir de figures plus complexes, comme les polygones, pour circonscrire le cercle. Euclide (330-275 avant J.C.) a employé cette méthode pour démontrer que les aires des cercles sont en proportion du carré de leur diamètre. On attribue également à Platon (427-348 avant J.C.) la valeur de Pi la plus fiable de son époque (figure 3).

Les polygones

Les polygones forment la première phase théorique dans l'étude de Pi. Archimède de Syracuse (287-212 avant J.C.) utilise cette méthode en 250 avant J.C. pour fixer une limite inférieure et supérieure à Pi (figure 4). Sa proposition devient rapidement célèbre et se propage à Alexandrie où elle remplace l'ancienne approximation $(19/9)^{\wedge 2}$ et poursuit son chemin vers l'Inde et la Chine. Comme son travail ne subsiste qu'en forme fragmentaire, nous ne pouvons reconstruire sa démonstration même si nous pensons qu'il a utilisé des polygones à 96 côtés et qu'il a probablement "inséré" une approximation initiale après avoir obtenu ses formules. En fait, il est possible de l'obtenir à partir de la forme géométrique, mais c'est une étape complexe. Plus que la précision de son calcul, c'est l'emploi de limites inférieure et supérieure qui démarque son travail. Sa méthode d'approximation n'a aucune limite de précision et elle sera même utilisée jusqu'au 17ème siècle par ses successeurs, lesquels multiplient le nombre de côtés des polygones pour en améliorer la précision.

QUIZ

Réponse :
La hauteur d'un éléphant des pieds aux épaules se calcule par 2 fois Pi fois le diamètre de son pied.



Isaac Newton (1642 – 1727).

Les expressions infinies

Les expressions infinies ouvrent la seconde ère du calcul sur Pi. Après deux mille ans de calculs fondés sur la géométrie, une méthode analytique se fait jour en Inde au XVème siècle

Johann Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855).

(en fait, probablement une bonne centaine d'années avant cette date). Huit séries sur Pi se trouvent dans les textes sanskrit Yukti-Bhasa et Yukti-Dipika. Nous avons reproduit l'une de ces séries en figure 5. Leur origine est d'autant plus compliquée que leur transmission était orale. Leurs résultats dépassent de très loin l'approche européenne, de plusieurs centaines d'années quant à leur précision, en fait.

En Europe, le mathématicien François Viète propose un produit infini pour Pi en 1593, dans son remarquable *Variorum De Rebus Mathematicis* (figure 6). Dotée d'une rapide convergence (15 décimales après 25 termes), sa méthode se montre simple. Fait intéressant, de toute l'histoire des mathématiques, nous n'avons que deux produits infinis utilisés pour calculer Pi : Viète et Wallis. Tous les autres mathématiciens auront choisi des séries infinies. La découverte du calcul intégral et différentiel par Isaac Newton (1643-1727) et Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) dans la seconde moitié du 17ème siècle provoque quant à elle l'explosion du nombre de formules utilisées avec Pi. Newton lui-même se voue à ces calculs pendant un an (1665 à 1666) et dérive une série très efficace. Il reconnaît avec une certaine honte y avoir consacré beaucoup de temps.

La première formule de l'arc tangente

Le 15 février 1671 marque une date historique pour Pi : James Gregory (1638-1675) écrit la pre-

$$\pi = 3 + \frac{4}{({}_3 3 - 3)} - \frac{4}{({}_3 5 - 5)} + \frac{4}{({}_3 7 - 7)} - \frac{4}{({}_3 9 - 9)} + \ldots$$

Figure 5.

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \ldots$$

Figure 6.

$$\frac{1}{\pi}=\frac{12}{\sqrt{(640320^3)}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(6k)!}{(k!)^3(3k)!}\frac{13591409+545140134k}{(640320^3)^k}$$

Cette équation, inspirée par Ramanujan et élaborée par les frères Chudnovsky, est utilisée par Mathematica et produit quinze décimales par terme de série : elle fut employée en 1996 pour calculer huit milliards de décimales de Pi.

$$a=t-\frac{t^3}{3r^2}+\frac{t^5}{5r^4}-\frac{t^7}{7r^6}+\frac{t^9}{9r^8}-\dots$$

$$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}-\dots$$

Figure 7.

Anatolii Alekseevich Karatsuba (né en 1937).

John Tukey (1915 – 2000).

mière série basée sur l'arc tangente, bien qu'il n'explique pas comment il l'a dérivée. Si l'on note "r" le rayon, "a" l'arc et "t" les tangentes associées, sa série s'exprime sous la forme présentée en figure 7 (nous avons placé en seconde ligne sa notation moderne). Il n'aura malheureusement pas substitué 1 pour x et n'a donc pas découvert la série de Leibniz. Ce dernier la proposera de manière indépendante, comme l'attestent ses écrits, dès 1674.

Euler et sa divine formule

Le mathématicien suisse Leonhard Euler (1707-1783) domine sans conteste le XVIIIème siècle. Après avoir écrit plus de sept cents livres et essais, son admirable travail souffrira de sa vue, qu'il finira d'ailleurs par perdre. De toute l'histoire, il reste sans doute l'auteur le plus prolifique et il apporte une profonde compréhension de Pi. Observez avec attention en figure 8 la formule qu'il a produite. Celle-ci a été jugée comme "la plus belle de tous les temps" par les avisés lecteurs du *Mathematical Intelligencer*, en 1990. Elle est fascinante.

$$e^{i\pi}+1=0$$

Figure 8.

Le règne de John Machin

En 1706, John Machin calcule Pi sur cent décimales. Sans la moindre erreur. Il utilise une combinaison de deux séries d'arc tangente pour son calcul. Sa formule (figure 9) devient célèbre mais elle ne se verra publiée que par William Jones (et c'est à cette occasion que la lettre grecque devient le symbole de Pi). Pendant plus de deux cents ans, personne ne pourra proposer de meilleure formule et, ce, même si des mathématiciens de grand renom comme Gauss (1777-1855) en proposent des formes plus efficaces.

$$\pi=16\ \arctan\frac{1}{5}+4\ \arctan\frac{1}{239}$$

Figure 9.

L'ère de l'ordinateur

Les ordinateurs entrent dans le monde de Pi à la fin des années quarante. En 1949, on programme l'ENIAC (pour "Electronic Numerical Integrator And Computer") pour calculer un peu plus de deux mille décimales de Pi, en employant la formule d'arc tangente de John Machin. Le résultat s'obtient après soixante-dix heures de calcul, soit à peu près deux minutes par chiffre. En 1957, Felton tente de calculer dix mille décimales mais une erreur matérielle stoppe son calcul après 7840 chiffres. Une machine IBM 704 brise cette barrière l'année suivante. Les records se suivent alors régulièrement à mesure que la puissance des

Initialisation :

$$y_0 = \sqrt{2} - 1$$

$$a_0 = 6 - 4\sqrt{2}$$

Itération $(k = 0, 1, 2, \ldots)$

$$y_{k+1} = \frac{1 - \sqrt[4]{1 - y_k^4}}{1 + \sqrt[4]{1 - y_k^4}}$$

$$a_{k+1} = a_k(1 + y_{k+1})^4 - 2^{2k+3}_{y_{k+1}}(1 + y_{k+1} + y_{k+1}^2) \rightarrow \frac{1}{\pi}$$

La variante quartique Borwein.

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{9801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!}{(n!)^4} \cdot \frac{[1103 + 26390n]}{396^{4n}}$$

Figure 10.

Srinivasa Aiyangar Ramanujan (1887 - 1920).

machines augmente : en 1973, une seule journée suffit à un CDC pour calculer un million de décimales. Tous ces calculs reposent sur la formule de l'arc tangente.

De nouveaux algorithmes

A partir des années 1980 débute la troisième période du développement de Pi. Plusieurs opérations mathématiques furent largement optimisées et les calculs sur Pi atteignent de nouveaux sommets.

L'opération de multiplication de nombres de grande taille se trouve largement améliorée en 1965. Cette méthode, dite de la multiplication par transformée rapide de Fourrier, modifie les opérandes avant leur "multiplication". La complexité du calcul de cette opération devient pratiquement linéaire et d'une grande rapidité. Lors d'une réunion avec le président des Etats-Unis, deux mathématiciens, Richard W. Garwin et John W. Tukey, discutèrent de ce sujet. Peu de temps après leur entretien, l'algorithme fut publié et la recherche historique commença pour en déterminer les fondements. Plusieurs travaux s'en approchent mais il semble bien que Gauss soit le premier mathématicien à avoir amélioré ce calcul à l'aide de la transformée rapide de Fourrier, dès 1805. Si la multiplication classique que l'on apprend à l'école est dotée d'une complexité de calcul dite quadratique, la multiplication par transformée rapide de Fourrier est de l'ordre N.log2 (N) : sa progression est presque linéaire (nous aborderons plus loin la méthode intermédiaire de la multiplication de Karatsuba).

Les algorithmes spécifiques

Après les optimisations des opérations utilisées dans les calculs, de nouvelles formules totalement vouées à Pi voient le jour. Dès 1976, on abandonne la formule de l'arc tangente au profit des travaux du vénérable mathématicien indien Srinivasa Ramanujan (1887-1920). L'une de ses formules, présentée en figure 10, se révèle au moins cinq fois plus rapide que toutes celles qui circulent lors de sa publication. Une autre amélioration touche l'algorithme de l'AGM de Gauss (étudié plus loin dans ce dossier) : une

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n} \left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6} \right)$$

Figure 11.

méthode dite de l'itération permet de doubler le nombre de décimales obtenues, créant une convergence quadratique vers Pi.

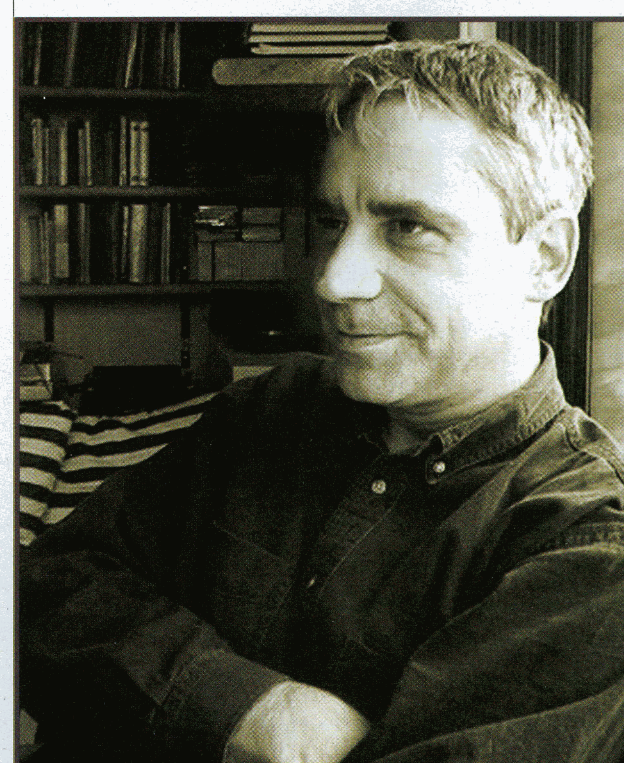
Les frères Borwein

En 1985, les frères Borwein publient une série de formules hautement spécialisées dans le calcul de Pi. Leurs travaux sont incontournables et les amoureux de Pi ne peuvent y échapper. On y trouve des progressions quadratiques et même noniques, mais à l'usage la première forme est la plus rapide.

C'est avec une formule quadratique que Yasumaka Kanada parvient à son record de 200 milliards de décimales, après seulement vingt itérations de l'algorithme ! Entre 1981 et 1999, le record sera battu vingt-six fois.

A la poursuite de chiffres isolés dans Pi

L'un des algorithmes les plus impressionnants concernant Pi - et dans une plus large mesure les mathématiques - fut l'introduction de la formule BBP ; ses initiales reprennent les noms de ses auteurs : David Bailey, Peter Borwein et Simon Plouffe. Publié en septembre 1995, leur algorithme (figure 11) permet de calculer toute position arbitraire en base 16 dans Pi et, ce, sans avoir besoin de calculer toutes les décimales qui précèdent ! Les chercheurs auront ainsi déterminé que le dix milliardième chiffre de Pi est zéro, soit deux fois plus loin de Pi que le dernier record à l'époque. Aujourd'hui, nous avons des chiffres mille fois plus loin... Nous devons ces records au jeune Simon Fraser de l'université de Burnaby (Canada). En utilisant l'approche du calcul distribué sur deux ans et grâce à près de 2000 machines sur Internet, il a réalisé un calcul équivalent à 700 années de calcul.



Le mathématicien canadien Simon Plouffe, l'un des auteurs de l'algorithme BBP.

L'ARC TANGENTE

Parmi les expressions infinies, une sous-catégorie reposant sur les fonctions d'arc tangente émerge avec le développement du calcul analytique.

Les fonctions dites d'arc tangente sont les inverses des fonctions trigonométriques classiques (cos, sin, etc.) et, comme leur nom le suggère, il s'agit d'arcs. Si x = tan (y), alors nous avons la relation arctan (x) = y, ce, si y se trouve compris entre -Pi/2 et Pi/2.
Lorsque x est égal à 1, on obtient un cas intéressant pour le calcul de Pi, puisque la fonction d'arc tangente correspond à 45 degrés d'arc, soit Pi/4. Comme la tangente de Pi/4 = 1, nous avons la relation Pi/4 = arctan (1).
L'arc tangente dispose d'une série facile à calculer, découverte par James Gregory (1638 - 1675) en 1671 (voir la figure 12 ; la seconde ligne y montre la série de Leibniz). Si l'on pose x = 1, la série de Leibniz apparaît mais elle n'est pas très pratique pour réaliser des calculs : ses termes ne se réduisent que très lentement. Après deux milliards de termes, la précision obtenue n'est que de neuf décimales correctes pour Pi, une convergence très médiocre s'il en est.
Il est possible d'améliorer la précision et la vitesse du calcul en utilisant plusieurs arcs au lieu d'un seul. Leonhard Euler (1707 - 1783) a proposé une formule très simple (figure 13) qui se prouve par l'identité trigonométrique simple (figure 14), si l'on pose tan (alpha) = arctan (1/2) et tan (beta) = 1/3.
Si l'on remplace chacune des expressions d'arc tangente dans la formule d'Euler par la série de Gregory (voir figure 12, première ligne), on peut observer une décroissance de ses termes beaucoup plus rapide. Bien que deux séries soient à calculer alors, ce gain est appréciable.
En 1706, John Machin propose une formule (figure 15) s'appuyant sur l'arc tangente et l'utilise pour calculer cent décimales de Pi. Les termes successifs de la première opérande de sa formule convergent rapidement (1,39 décimales par terme) et la présence du nombre 5 dans le dénominateur rend son calcul "à la main" très facile.
De toutes les formules d'arc tangente, celle de John Machin est sans conteste la plus efficace.

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$$

Figure 12.

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$$

Figure 13.

AMÉLIORATION DE LA MULTIPLICATION

Pi ne requiert pas seulement une machine puissante et le choix d'un bon algorithme : il faut également prendre soin d'utiliser une arithmétique rapide pour compenser les médiocres capacités de calcul sur 32 ou 80 bits de la plupart des processeurs. L'opération qui affecte le plus le temps de calcul de Pi est sans conteste la multiplication. Dans les algorithmes employés pour calculer Pi, la majeure partie du temps est consommée par ces opérations de multiplication ou de division (laquelle revient à une multiplication par la réciproque du second terme) ou de calcul de racines carrées (implémentées par des séries de multiplications). Les opérations mineures comme l'addition et la soustraction sont en comparaison insignifiantes. Malheureusement, l'arithmétique de la multiplication telle qu'enseignée à l'école est très médiocre. Deux méthodes permettent de l'améliorer : la multiplication de Karatsuba, et la multiplication par transformée de Fourrier rapide (présentée en bandeau dans la double page suivante). La technique de la multiplication de Karatsuba n'est utilisée que depuis 1960 et elle ne provient pas du mathématicien russe Anatolii Karatsuba qui l'a présentée en 1962 sous une forme plus compliquée. Supposons que nous voulons multiplier ensemble deux nombres de N de k^2 chiffres, u et v. Pour simplifier, les deux nombres auront la même taille et leur nombre de chiffres est une puissance intégrale de deux. Nous allons comparer la méthode classique que l'on apprend à l'école et la multiplication de Karatsuba. Chacun de ces nombres à multiplier est divisé en deux parties dites supérieure et inférieure, chacune comportant N/2 chiffres.

$$u = 10^{N/2} u_1 + u_0$$
$$v = 10^{N/2} v_1 + v_0$$

Figure 16.

SPIGOT

Développé par Stanley Rabinowitz et Stanley Wagon, l'algorithme Spigot offre une approche élégante du calcul de Pi qui s'adapte parfaitement au calcul sur ordinateur.

Le premier avantage de l'algorithme Spigot réside dans le fait qu'il délivre les chiffres de Pi au fur et à mesure, alors que la plupart des autres méthodes recourent à une mémoire tampon et calculent le résultat à la fin. De fait, il se montre idéal pour l'écriture d'une applet Java à placer sur un site Web. Son second avantage est qu'il fonctionne parfaitement avec des variables entières et ne requiert pas de librairie de précision infinie : une variable de type long (en langage C) suffit largement. Enfin, cet algorithme s'avère très rapide (bien qu'il soit incapable de rivaliser avec les équations quadratiques de Borwein, plus loin dans ce dossier). Quelques lignes de code suffisent à l'élaborer et ses mathématiques restent, en outre, très simples.

On peut concevoir cette série comme un nombre à base variable. Dans notre base usuelle, dite "base 10", chaque chiffre dans un nombre est multiplié par une base fixe selon sa position (1, 10, 100, ...). Il existe des nombres dont la base est variable : l'exemple le plus frappant est celui d'une date : 2 semaines, 4 jours et 8 minutes. Cet algorithme emploie cette forme de représentation pour la série utilisée dans le calcul Pi.

Lorsque la base de la série est modifiée pour la base 10, il arrive que la paire "10" survienne : on traite ce "1" comme une retenue que l'on doit ajouter au chiffre qui précède. Mais si jamais ce chiffre est un "9", il faudra corriger ce dernier. Une complication de l'algorithme Spigot est donc que les chiffres calculés ne peuvent pas être immédiatement affichés. Par exemple, si le calcul de Pi nous donne:

```
3.1415...99999(10)
```

Nous devons transformer le 10 en 9 + 1 suivi par zéro, et appliquer toute retenue en partant vers la gauche. Une implémentation en langage C de l'algorithme Spigot figure sur le CD-Rom qui accompagne le magazine, le source contenant une présentation des étapes de l'algorithme.

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

Figure 14

QUIZ

Question
Quelle est la particularité du nombre premier 73939133 ?

$$4\left[\frac{1}{5}-\frac{1}{3\cdot 5^3}+\frac{1}{5\cdot 5^5}-\dots\right]-\left[\frac{1}{239}-\frac{1}{3\cdot 239^3}+\dots\right]$$

Figure 15

On désigne ces moitiés u0, u1 et v0, v1 (voir figure 16). La méthode classique que l'on apprend à l'école consiste à réaliser la multiplication à la manière de la figure 17. On y trouve quatre multiplications partielles : u1.v1, u0.v1, u1.v0 et u0.v0, tandis que les facteurs 10^N et $10^{(N/2)}$ s'obtiennent par simple décalage de N et N/2 chiffres respectivement. La méthode de Karatsuba construit le produit avec seulement trois multiplications partielles (voir figure 18) que l'on remplace par trois additions négligeables. Cette approche de la multiplication se prête tout particulièrement à la récursivité, et c'est sous cette forme que nous avons programmé l'exemple d'implémentation de cet algorithme (dont le listing est présent sur le CD-Rom). Il est à noter que cette multiplication est très performante avec des nombres puissances de deux, une caractéristique d'ailleurs partagée avec la méthode par transformée rapide de Fourrier.

$$uv=10^N u_1 v_1+10^{N/2}(u_0 v_1+u_1 v_0)+u_0 v_0$$

Figure 17.

$$uv=(10^N+10^{N/2})u_1 v_1+10^{N/2}(u_1-u_0)(v_0-v_1)+(10^{N/2}+1)u_0 v_0$$

Figure 18.

LA MOYENNE ARITHMÉTIQUE-GÉOMÉTRIQUE DE GAUSS

L'une des méthodes les plus rapides de calcul de Pi, sinon la plus rapide, est l'approche du mathématicien allemand Carl Friedrich Gauss inventée vers 1800. Oubliée pendant plus de 170 ans, elle fut redécouverte par Eugene Salamin et Richard Brent. Il s'agit de la moyenne arithmétique-géométrique.

$$\sqrt{a \cdot b}$$

Figure 20.

Les variations fondées sur l'AGM de Gauss (AGM désignant la moyenne arithmétique-géométrique) sont nombreuses, à commencer par celle de Brent-Salamin. L'AGM fait partie de l'équation utilisée pour calculer Pi (figure 19), et en constitue un élément primordial. La seconde variable visible dans l'équation, ck, est directement liée à l'AGM.

$$\pi = \frac{2AGM^2 \cdot (1, \frac{1}{\sqrt{2}})}{\frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} 2^2_k}$$

Figure 19.

La moyenne classique de deux nombres est une chose courante. La moyenne géométrique (figure 20) est également bien connue et permet de calculer la moyenne de deux (ou plus de deux) variables reliées par une opération de multiplication. On la rencontre, par exemple, dans les calculs de taux d'intérêt. L'AGM correspond aussi à la moyenne de deux variables a et b, mais il n'est pas possible de la calculer d'un coup : on utilise un nombre infini d'étapes dont chacune vous rapproche un peu plus du résultat. Il s'agit donc d'une moyenne particulière, obtenue par itérations (voir figure 21)

Fonctionnement

A chaque itération, ak et bk se rapprochent l'un de l'autre, ak se réduisant tandis que bk croît. Leur valeur de convergence, dite "AGM de a et b", s'écrit AGM(a,b).

Géometriquement, l'AGM se situe entre la moyenne arithmétique classique (1+x)/2 et la moyenne géométrique (racine carrée de x) pour AGM(1,x) comme exemple. Le fait particulier dans l'AGM réside dans la très grande rapidité de convergence entre ak et bk : après quatre itérations d'un calcul simple comme AGM (racine de 2, 1), on obtient déjà 19 décimales correctes. En fait, à chaque itération, le nombre de décimales correctes double pratiquement : il s'agit d'une convergence quadratique. Elle donne à l'AGM ses excellents résultats lorsqu'on l'applique au calcul de Pi.

L'algorithme commence par l'initialisation de trois variables : a, b et c. Au fur et à mesure des itérations, elles sont traitées par l'AGM afin

$$c_{k+1} = \frac{1}{2}(a_k - b_k)$$

identique avec :

$$c^2_{k+1} = a^2_{k+1} - b^2_{k+1} = (a_{k+1} - a_k)^2$$

Figure 22.

QUIZ

Réponse : On peut retirer un nombre à chaque fois en partant de la droite, jusqu'à 7, et chacun des nombres obtenus est lui-même premier !

LA TRANSFORMÉE RAPIDE DE FOURRIER

Si la multiplication de Karatsuba donne de bons résultats, il y a beaucoup plus rapide. Pour obtenir une vitesse de calcul plus élevée, il faudra transformer le problème pour prendre une autre "route". Nous allons donc modifier les opérandes de la multiplication, effectuer le calcul, puis convertir le résultat. Pour éviter les multiplications, la première approche revient à utiliser les logarithmes, ou a.b devient log a + log b : la multiplication y devient une addition, en s'appuyant sur le théorème du logarithme (figure 27). Cela semble élégant mais nous pouvons mieux faire : la multiplication par transformée rapide de Fourier. Il s'agit de la méthode la plus rapide connue pour les nombres de grande taille et les calculs sur Pi les plus importants y font appel systématiquement. La transformée rapide de Fourrier est notée FFT. Elle provient du mathématicien français Jean-Baptiste de Fourrier (1788 – 1830) qui proposa cette méthode dans son essai *Théorie Analytique De La Chaleur*, publié en 1822. Elle ne fut vraiment propagée qu'à partir de 1965 où deux mathématiciens, Cooley et Tukey, la présentèrent à grand bruit. Au lieu de multiplier a et b ensemble, on utilise une première transformation dite "FFT-avant" pour obtenir F(a) et F(b) qui subissent alors une multiplication

$$\log(a \times b) = \log a + \log b$$

Figure 27.

de calculer une approximation du terme AGM(1, 1/(racine de 2)) que l'on trouve au dénominateur. En même temps, nous calculons la somme du dénominateur à l'aide d'une variable auxiliaire ; si ak et bk sont obtenus au cours des itérations de l'AGM, ck est défini comme la moitié de leur différence (équation 22). A mesure que a et b se rapprochent l'un de l'autre, c converge vers zéro. La variable t (pour "temporaire") contient la valeur de ak, qui est employée à plusieurs reprises dans l'algorithme.

L'algorithme présenté est l'un des meilleurs algorithmes de calcul de Pi en existence. Une centaine d'itérations suffit à obtenir plus de 200 milliards de décimales.

Initialisation :

$$a_0 = 1$$

$$b_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$s_0 = \frac{1}{2}$$

Itération $(k = 0,1,2,\ldots,\ K-1)$

$$t = a_k$$

$$a_{k+1} = \frac{(a_k + b_k)}{2}$$

$$b_{k+1} = \sqrt{t b_k}$$

$$c_{k+1}^2 = (a_{k+1} - t)^2$$

$$s_{k+1} = s_k - 2^{k+1} c_{k+1}^2$$

Calcul d'une approximation de π :

$$\pi_K = \frac{(a_K + b_K)^2}{2 s_K}$$

Figure 21.

LE PHÉNOMÈNE 163

Observez bien le nombre de la figure 23. A priori, il ne comporte rien de particulier, à part les nombres transcendantaux e, Pi et le nombre premier 163. En fait, quand on l'exprime sous forme décimale, on obtient un résultat remarquable :

262537412640768743,9999999999992

$$e^{\pi \sqrt{163}}$$

Figure 23.

Il s'agit "presque" d'un entier (la différence entre ce nombre et un entier est inférieure à 10^-12). Or, rappelons que l'on ne peut a priori pas obtenir d'entier à partir du nombre Pi, puisque celui-ci dispose d'un nombre infini de chiffres après la virgule. Le comportement particulier de notre exemple fut découvert par Alexander Aitken (1895 - 1967). Pour lui, il ne pouvait s'agir d'un hasard. Ce mathématicien est célèbre car ses incroyables capacités de calcul mental lui faisaient "sentir" si un chiffre était premier ou non. D'autres valeurs produisent ce genre de résultats :

$$j(n) = \frac{1}{q} + 744 + 196884q + 21493760q^2 + 864299970q^3 + \ldots$$

$$avec\ \frac{1}{q} = -e^{\pi\sqrt{n}}$$

Figure 24.

La taille de cette liste suggère qu'il ne s'agit pas d'un hasard, et tout cela est à relier aux équations modulaires que seuls quelques spécialistes maîtrisent totalement. Ce phénomène particulier défie l'explication. Nous n'avons une piste que pour les chiffres 43, 67 et 163. La fonction j (voir figure 24) serait un entier et même un cube parfait : on obtient -960^3 pour n = 43, -5280^3 pour n = 67 et -640320^3 pour n = 163. Roy Williams offre un prix à toute personne capable de démontrer que ces occurrences sont liées à la chance... ou ne le sont pas (ce qui semblerait plus probable, à vrai dire).

N	e^(pi.racine(n))
6	2197.990...
17	422150.997...
18	614551.992...
22	2508951.998...
25	6635623.9993...
37	199148647.99997...
43	884736743.9997...
58	24591257751.9999998...
59	30197683486.993...
67	147197952743.999998...
74	545518122089.9991...
163	262537412640768743.9999999999992...

QUIZ

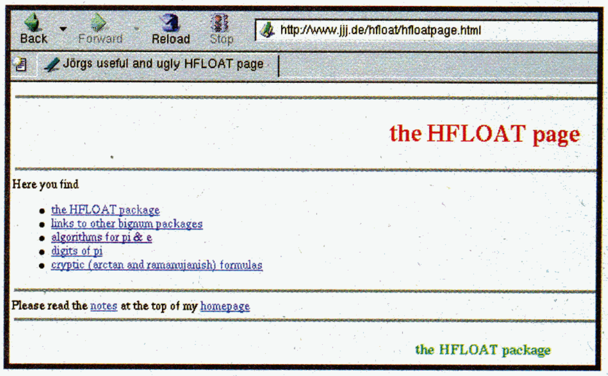
Question
Quelle est la relation entre la pression atmosphérique et Pi ?

terme à terme de leurs polynômes correspondants. Une conversion dans l'autre sens dite "FFT-arrière" produit le résultat final. Après avoir posé les bases de la transformée de Fourier, elle a subi deux améliorations qui la rendent utile : le théorème de convolution, et une méthode plus efficace pour réaliser la transformée ; les explications sur la transformée de Fourier et l'application du théorème de convolution demandent trop de place pour être détaillées ici, bien que plusieurs listings sur le CD-Rom présentent les implémentations de la transformée de Fourier simple et sa variante rapide dite "FFT" (pour "Fast Fourrier Transform"). La première forme de transformée pour un chiffre de taille N est proportionnelle à N^2, ce qui n'est pas très intéressant. Mais, sa variante rapide réduit le temps de calcul de N^2 à N.log2(N), soit à peine plus long que la progression de N. C'est en fait la même idée que pour celle de Karatsuba : une transformée de Fourrier de taille N est découpée en plusieurs blocs de taille N/2, dont le nombre doit être inférieur à quatre (car avec quatre transformées de Fourrier le gain serait nul). Si la méthode de Karatsuba remplace la multiplication de N-chiffres par trois multiplications de N/2 chiffres, la transformée rapide de Fourrier n'en demande que deux. Notre implémentation repose encore une fois sous une forme récursive où à chaque appel de la fonction les nombres multipliés voient leur taille réduite de moitié ; puis on assemble le résultat final. Lorsque N prend une taille considérable, la différence est vraiment frappante : la multiplication de deux nombres d'un million de chiffres chacun requiert un milliard d'opérations de multiplication simples, réduites à 20 millions (N.log2(N)) par la transformée rapide de Fourrier (elle est même cent fois plus rapide que la méthode de Karatsuba). Sur une machine de puissance moyenne (Pentium), cela réduit le temps de calcul d'une journée entière à moins de trois secondes...

VARIANTE DE SCHÖNHAGE

L'algorithme de l'AGM de Gauss a été amélioré par Arnold Schönage, avec un résultat bien plus rapide.

Les calculs effectués dans l'algorithme AGM impliquent de longues variables, en particulier la multiplication de ak par bk, le calcul de la racine carrée de ce résultat et d'autres opérations. Certaines opérations comme l'addition ou les multiplications/divisions par puissances de deux restent peu coûteuses en utilisant les décalages de bits. Présentée dans *Fast Algorithms, A Multitape Turing Machine Implementation* en 1994, Arnold Schönage évite la longue multiplication de ak.bk en remplaçant ce produit par une décomposition d'autres variables de l'algorithme (équation 25) : les variables A et B stockant les carrés de a et b, respectivement. Par cette simple modification, on obtient un gain de performances d'environ 25 %. On évite également le calcul d'une longue racine carrée en initialisation et pendant le calcul de l'approximation de Pi (où il évite une opération de mise au carré). Il est également possible de pousser plus loin l'optimisation : bk et Bk peuvent partager la même variable, donc cette variante de Schönage ne demande pas plus de variables que la forme originelle de l'AGM de Gauss. Pas de stockage supplémentaire, et aucune pénalité pour ce type de traitement. Nous vous recommandons, bien entendu, de n'utiliser que cette variante plus efficace de l'AGM de Gauss, dont vous trouverez le listing (en langage C) sur le CD-Rom accompagnant le magazine.



La librairie hfloat (http://www.jjj.de/hfloat/hfloatpage.html).

$$a_k b_k = 2\left(a_{k+1}^2 - \frac{1}{4}\left(a_k^2 + b_k^2\right)\right)$$

Figure 25.

$$\begin{gathered}
\textit{Initialisation :}\\
a_0 = 1\\
A_0 = 1\\
B_0 = 0.5\\
s_0 = 0.5\\
\textit{Intération}\,(k = 0, 1, 2, \ldots,\ K-1)\\
t = \frac{(A_k + B_k)}{4}\\
b_k = \sqrt{B_k}\\
a_{k+1} = \frac{(a_k + b_k)}{2}\\
A_{k+1} = a_{k+1}^2\\
B_{k+1} = 2(A_{k+1} - t)\\
s_{k+1} = s_k + 2^{k+1}(B_{k+1} - A_{k+1})\\
\textit{Calcul de l'approximation de } \pi :\\
\pi_K = \frac{(A_K + B_K)}{s_K}
\end{gathered}$$

Figure 26.

Quelques défauts

Les problèmes rencontrés tiennent plus de l'implémentation que de l'algorithme lui-même : le coût de stockage et l'arithmétique de haute précision. Les variables de grande taille a, A, b = B, s et t doivent dès le début du programme disposer de la taille voulue du résultat, mais si vous désirez calculer des millions voire plusieurs milliards de décimales, les quantités de mémoire requises vont commencer au Go. Il faudra apporter un soin conséquent au développement de routines (probablement spécifiques au processeur) pour la gestion de la mémoire. D'autre part, les ordinateurs n'ont qu'une très faible précision mathématique et peinent à traiter plus de seize décimales et plus : ils découpent les opérations en blocs plus élémentaires, une procédure complexe et dont les performances auront un impact critique sur la vitesse de votre programme. L'utilisation d'une librairie spécialisée de précision infinie est fortement recommandée. Nous avons à cet égard placé la librairie hfloat sur le CD-Rom (attention : sa licence est contraignante).

QUIZ

Réponse :
1 divisé par la racine carrée de la pression atmosphérique donne 3.14153 (P = 0.101325 MPa).

PI ET LA SYMÉTRIE

Martin Gardner a souligné un ensemble de symétries particulières que l'on rencontre sur les trente-deux premiers chiffres de Pi. Si les mathématiciens considèrent l'expansion de Pi comme celle d'une série aléatoire (en particulier sur le plan de la distribution des nombres statistiques), on rencontre un jeu de symétries amusant. Le nombre 26 est le premier nombre à deux chiffres qui se répète, et le second 26 marque en fait le milieu d'une autre symétrie de nombres.

Les paires de nombres 79, 32 et 38 sont reproduites en symétrie de chaque côté du nombre 26. Les sommes sont aussi intéressantes, si l'on étudie les 5 chiffres de chaque côté des "26". Ceux à gauche du premier 26 ont une somme égale à 20, soit le nombre de décimales qui précèdent le second 26. La seconde somme donne 30, soit le nombre de décimales qui précèdent la seconde barre. Leur somme fait 50, soit le nombre qui suit la seconde barre. La séquence entre les deux barres commence par un 13, soit la moitié de 26. Les trois paires 79, 32 et 38 ont six chiffres dont la somme fait 32, soit la paire du milieu mais également le nombre total de décimales visibles. Enfin, les 46 et 43 de chaque côté du second 26 ont une somme égale à 89, le nombre composé de la paire de chiffres qui précèdent la première barre... Un jeu de coïncidences amusant.

RETROUVEZ LES LISTINGS SUR LE CD

Listing 1

```
/*********************************
* Un programme qui calcule une
* approximation de Pi
* par Brian Westley (1988)
* Pour obtenir plus de decimales,
* dessinez un disque plus grand
*********************************/
int F,OO;
#define _ OO>OO?0:--OO,--F;
main(){F_OO();printf("%1.3f\n",4.*-F/OO/OO);}F_OO()
{
            _-_-_-_
       _-_-_-_-_-_-_-_-_
    _-_-_-_-_-_-_-_-_-_-_-_
  _-_-_-_-_-_-_-_-_-_-_-_-_-_
 _-_-_-_-_-_-_-_-_-_-_-_-_-_-_
 _-_-_-_-_-_-_-_-_-_-_-_-_-_-_
_-_-_-_-_-_-_-_-_-_-_-_-_-_-_-_
_-_-_-_-_-_-_-_-_-_-_-_-_-_-_-_
_-_-_-_-_-_-_-_-_-_-_-_-_-_-_-_
_-_-_-_-_-_-_-_-_-_-_-_-_-_-_-_
 _-_-_-_-_-_-_-_-_-_-_-_-_-_-_
 _-_-_-_-_-_-_-_-_-_-_-_-_-_-_
  _-_-_-_-_-_-_-_-_-_-_-_-_-_
    _-_-_-_-_-_-_-_-_-_-_-_
        _-_-_-_-_-_-_-_
            _-_-_-_
}
```

Listing 2

```
/*******************************
* Forme ultra reduite de
* l'algorithme Spigot
* Merci a Dik T. Winter et
* Achim Flammenkamp
*******************************/
#include <stdio.h>
a[52514],b,c=52514,d,e,f=1e4,g,h;
main(){for(;b=c-=14;h=printf("%04d",e+d/f))
for(e=d%=f;g=--b*2;d/=g)d=d*b+f*(h?a[b]:f/5),a[b]=d%--g;}
```

Listing 3

```
/*******************************
* Toujours plus petit
* par Jorg Arndt
*******************************/
#include <stdio.h>
int a=10000,b,c=2800,d,e,f[2801],g;main(){for(;b-
c;)f[b++]=a/5;for(;d=0,g=c*2;c
-=14,printf("%.4d",e+d/a),e=d%a)for(b=c;d+=f[b]*a,f[b]=d%--g,d/=g--
,--b;d*=b);}
```

Listing 4

```
/**********************************
* transformée de Fourrier classique
* n  taille de l'array f (n'a pas
* besoin d'être multiple de 2)
* isign détermine si la transformée
* s'opère vers l'avant ou l'arrière
**********************************/
void ft(Complex *f, long n, int isign)
{
  Complex *res = new Complex[n];
  const double ph0 = isign > 0 ? +2.0*M_PI/n : -2.0*M_PI/n;
  for(long w=0; w<n; ++w) {
    Complex t = 0.0;
    for(long k=0; k<n; ++k) {
      double phi = ph0 * k * w;
      t += f[k] * Complex(cos(phi), sin(phi));
    }
    res[w] = t;
  }
  for(long k=0; k<n; ++k)
    f[k] = res[k];
  /* la transformation vers
   *  l'arrière demande
   * une normalisation par n */
  if(isign < 0)
    for(long k=0; k<n; ++k)
      f[k] /= n;
  delete [] res;
}
```

Listing 5

```
/****************************************
 * Une méthode qui se base sur la chance !
 * Dite de "Monte Carlo"
 * Programme sous licence BSD
 ****************************************/
#include <stdlib.h>
#include <stdio.h>
int main(void);
int main()
{
  long    k, n, coups;
  const   double    facteur = 1.0 / RAND_MAX;
  double  pi;
  coups = 0;
  while(1) {
    printf("nombre de jets ? (0 pour sortir) : ");
    scanf("%i", &n);
    if(n <= 0)
      break;
    srand( (int) clock() );
    for(k=coups; k < n; ++k) {
      double x = rand() * facteur;
      double y = rand() * facteur;
      if(x*x + y*y < 1.0)
        ++coups;
    }
    pi = 4.0 * coups / n;
    printf("\napproximation de pi après %d lancés : %f\n", n, pi);
  }
  return 0;
}
```

LES SÉRIES DE RAMANUJAN

Oublié pendant très longtemps, le mathématicien indien Ramanujan a travaillé dans l'isolement total et hors du système scolaire jusqu'à l'âge de 23 ans et dès ses premières publications son génie mathématique fascinant se propagea.

La vie de Srinivasa Aiyangar Ramanujan fut courte. Sans doute trop. Et son génie aura presque été gâché. Né à Érode en 1887, sa famille est très pauvre. Sans aucun mentor, le jeune Ramanujan montre une grande aptitude aux mathématiques et il acquiert toutes ses connaissances seul, ne disposant en tout et pour tout que de cinq livres. Parcourant et assimilant des ouvrages destinés à l'université dès l'âge de 12 ans, puis des compendiums d'équations sans la moindre explication ou démonstration à 16 ans. Il se présente au collège de Kumbakonam qui lui refuse l'entrée. De l'âge de 17 à 23 ans il travaille seul. Il mourra à 32 ans après avoir contracté un mal inconnu et nous lègue trente-sept travaux, dont l'excellent *Équations Modulaires Et Approximations Pour Pi*, datant de 1914.

Parmi les formules présentées par Ramanujan, il présente une série pour Pi dont la convergence est très rapide (voir figure 29) : près de huit décimales par terme, alors que la meilleure formule à l'époque, celle de l'arc tangente de John Machin, n'offre que 1,4 décimales par terme de précision. Bien que sa formule date de 1914, elle ne fut pas utilisée avant 1985. C'est l'invention de l'ordinateur qui permet aujourd'hui de calculer les séries de Ramanujan sur un grand nombre de termes. Son génie l'aura poussé à concevoir des mathématiques hors de notre portée à sa propre époque, en plus d'avoir été trop longtemps ignoré.

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{2}} = \frac{1103}{99^2} + \frac{27493}{99^6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1\cdot 3}{4^2} + \frac{53883}{99^{10}}\cdot\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{4^2\cdot 8^2} + \ldots$$

Figure 29.

$$\frac{1}{\pi} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2n}{n}\right)^3 \frac{42n+5}{2^{12n+4}}$$

Figure 30.

Dans le document que nous avons cité se trouve une autre formule (voir figure 30) qui ne converge pas très bien, mais elle permet de calculer la seconde moitié de n décimales binaires sans calculer l'autre moitié. Ramanujan est l'auteur d'une série de type BBP dont nous disposons depuis le milieu des années 80.

Les travaux de Ramanujan ont inspiré de nombreux chercheurs dont les frères Borwein. Nous disposons aujourd'hui d'une formule générale qui permet de dériver des équations convergentes de type Ramanujan : nous avons placé ce programme sur le CD-Rom du magazine.

AMÉLIORATION DE LA DIVISION

La méthode classique pour réaliser des divisions ne doit pas être utilisée sur des nombres de grande taille. On remplace la division par la multiplication de la réciproque du second terme. Diviser u par v revient donc à $u.v^{-1}$. Nous savons déjà optimiser fortement l'opération de multiplication grâce à la transformée rapide de Fourrier. Pour calculer la réciproque de grands nombres, la meilleure méthode est connue depuis plus de 300 ans : elle provient d'Isaac Newton (1642 - 1727). On utilise sa méthode de détermination du zéro d'une fonction f(x) de manière itérative (voir figure 31). La particularité de cette méthode est sa convergence quadratique, et son auto-correction. A chaque itération, le nombre de décimales précises double, et ce même si la valeur précédente n'était précise qu'à moitié de ses décimales. Dans notre cas, nous employons la fonction de la figure 32 : son zéro est la valeur désirée inverse de v. En partant d'une première dérivation (figure 33), nous créons la règle d'itération simple de la figure 34. Si xi est précis sur m décimales, alors les valeurs successives de xi+1 le seront sur au moins 2m-1 décimales. On continue les itérations jusqu'à la précision voulue. Par exemple, si nous devons calculer 1/v = 1/7 (soit 0,14285714...) avec huit décimales de précision, nous prenons comme valeur xi de départ 0.1 ; voici les résultats obtenus à chaque itération avec le nombre de décimales précises :

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Figure 31.

$$f(x) = v - \frac{1}{x}$$

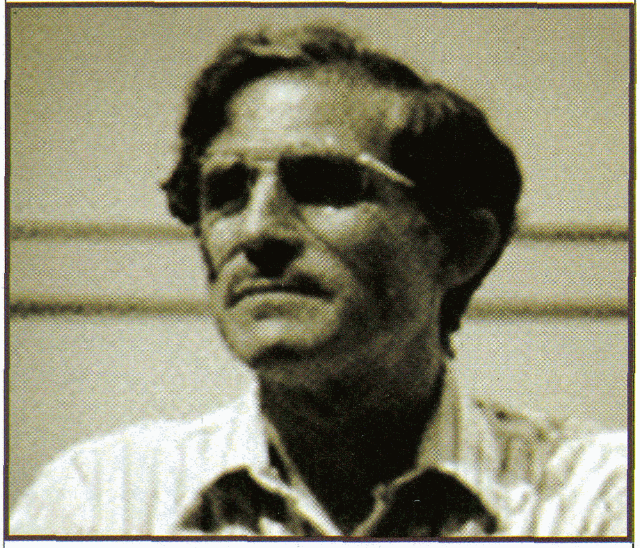
Figure 32.

LES FRÈRES BORWEIN

Les frères Borwein ont développé plusieurs méthodes itératives, s'appuyant sur les séries de Ramanujan, après avoir démontré que certaines formules sont des ordres particuliers d'équations modulaires plus générales.

Peter et Jonathan Borwein comptent aujourd'hui parmi les figures les plus importantes de la recherche sur Pi. Pratiquement tous les algorithmes à hautes performances sont le fruit de leur travail, bien que seuls 20 % de leurs publications se dédient à Pi. Bailey et Kanada ont implémenté les algorithmes développés par les frères Borwein depuis 1984. Leur premier algorithme quadratique fut dérivé de l'algorithme de Gauss, Salamin et Brent. Une forme plus élaborée, à progression quartique fut publiée en 1987 et Yasumaka Kanada l'a utilisée comme base pour ses records les plus récents.

Les frères Borwein (Peter et Jonathan).



David Bailey.

Un livre très important pour les amoureux de Pi a été publié par les frères Borwein : *Pi And The AGM*. Il couvre tous les aspects de la recherche sur Pi. En partant du 19ème siècle, ses auteurs étudient l'analyse du temps, des intégrales et fonctions elliptiques, les fonctions modulaires et theta, Lagrange, Gauss, Jacobi et Ramanujan. Ils expliquent la structure générale de leurs algorithmes, et démontrent que la série de Ramanujan est un cas particulier d'une forme plus générale. Ils offrent des algorithmes aux progressions incroyables dont une variante nonique stupéfiante. Cet ouvrage est à posséder, absolument. Il y a peu de temps, un nouveau livre a été publié par les frères Borwein avec Lennart Berggren : *Pi, A Source Book*. Il regroupe soixante-dix articles originaux sur Pi dont des reproductions historiques remarquables : la preuve de l'irrationalité de Pi par Lambert (1761) ou encore celle de sa transcendance par Lindemann (1882).

QUIZ

Question
Quelle est la relation entre la pyramide de Gizée et Pi ?

k	x_i	x_i(1-v.x_i)	x_i+1	Décimales correctes
0	0.1	0.03	0.13	1
1	0.13	0.0117	0.1417	2
2	0.1417	0.0011477	0.14284777	4
3	0.14284777	0.00009372	0.14285714	8

Après seulement trois itérations, nous avons huit décimales correctes. Pour déterminer le temps de calcul requis, on peut simplifier la procédure en considérant que pour n décimales précises voulues, il faut 2^k itérations à partir de l'approximation initiale. On réalise donc k itérations et leur précision n'a pas besoin d'être supérieure à n0, 2n0, 4n0, ..., 2(k-1)n0. Avec la caractéristique linéaire des itérations, le temps idéal de calcul de la réciproque de v est celui de deux multiplications de taille n, multiplié par la précision voulue. Les performances obtenues dans l'implémentation sont à peu près cela, bien qu'un peu plus médiocres.

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$$

Figure 33.

$$x_{i+1} = x_i + x_i(1 - v \cdot x_i)$$

Figure 34.

L'ALGORITHME BBP

En 1995, trois chercheurs présentent le dix milliardième chiffre de Pi. Mais, plus intéressant encore, ils expliquent comment calculer n'importe quelle décimale sans utiliser les précédentes ce qui était alors acquis comme inconcevable. Cet algorithme, BBP, porte le nom de ses auteurs : David Bailey, Peter Borwein et Simon Plouffe.

Cet algorithme s'implémente facilement, ne requiert pas d'arithmétique à précision infinie et ne demande pratiquement pas de mémoire. Son temps de calcul est relativement linéaire selon l'ordre de la décimale requise. Ces mathématiciens ont démontré que pour un nombre transcendant, il n'est pas nécessaire de calculer toutes les décimales qui précèdent celle dont vous voulez le résultat. Plus intéressante est la méthode obtenue pour obtenir cette formule (voir figure 35). La formule de BBP a été découverte par l'inférence : en utilisant un outil nommé "l'algorithme PSQL". Il s'agit d'une approche où un système informatique est utilisé pour rechercher des relations entre les variables et composantes d'équations, dans un cadre strictement symbolique. Parmi ces outils on trouve Mupad ou encore Mathematica. Les chercheurs savaient qu'une formule (voir figure 36) était disponible pour calculer n'importe quelle décimale de ln 2. Ils ont donc cherché la même chose, pour Pi. Cette formule n'est donc pas le fruit d'un cerveau humain, mais indirectement d'une machine. Les mathématiciens auront établi la preuve par la suite. Elle ne remplace par l'algorithme fondé sur l'AGM de Gauss mais permet de calculer "n'importe où" dans Pi, sous forme hexadécimale (en base 16).

QUIZ

Réponse : Son périmètre divisé par le double de sa hauteur donne Pi (précis à quinze décimales près).

Méthode

Pour appliquer la formule, on calcule chacun des quatre termes de manière séparée. Considérons le calcul du premier terme S1 (voir figure 37). Pour obtenir la séquence de chiffres hexadécimaux de S1 qui commence à la position p = d+1 (avec p=1,2,...), S1 est décalé vers la gauche de d places hexadécimales. Tout ce qui se trouve au-delà du point hexadécimal est ignoré. Les nombres seront obtenus en prenant une partie du produit 16^d. C'est après le point hexadécimal que S1 va apparaître. Pour simplifier le calcul, on recourt à la fonction modulo (soit le reste de la division entière entre deux termes) comme présenté sur la figure 38. On utilise la fonction modulo à chaque fois pour simplifier le calcul et ne conserver que le reste de la division. Sur la figure 38, S1 se compose de deux termes ajoutés : le premier terme à gauche comprend les d-n positifs et les termes de sa série sont supérieurs à 1. Le second terme, à droite, comprend les d-n négatifs et tous les termes de sa série sont inférieurs à 1.

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n}\left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6}\right)$$

Figure 35.

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$$

Figure 36.

$$S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n(8n+1)}$$

Figure 37.

Portion décimale de $16^d S_1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{16^{d-n}}{8n+1} \bmod 1$$

soit :

$$\sum_{n=0}^{d-1} \frac{16^{d-n} \bmod (8n+1)}{8n+1} \bmod 1 + \sum_{n=d}^{\infty} \frac{1}{16^{n-d}} \frac{1}{8n+1}$$

Figure 38.

AMÉLIORATION DU CALCUL DE RACINES : NEWTON

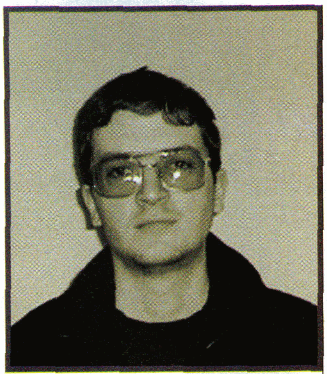
Les formules modernes reposant sur l'AGM de Gauss utilisent une racine carrée, au moins une fois par itération, qui doit être menée à son terme pour obtenir un résultat précis. Si vous avez appris à calculer les racines "à la main", il existe des méthodes très rapides, dont l'itération de Newton sans division et l'itération couplée de Newton. Dans l'itération de Newton, on divise la procédure de calcul en deux étapes : on calcule la réciproque de la racine carrée recherchée, soit (racine de a)^-1 puis sa multiplication par a. Pour la réciproque il faut trouver le zéro de 1/(racine de a) ; Newton nous donne une formule itérative pour cela (voir figure 41). Comme xi converge quadratiquement il est possible d'accélérer encore plus le calcul en éliminant les chiffres qui ne sont pas requis. En adoptant cette méthode, il est possible de calculer la réciproque de la racine d'un nombre en moins de temps qu'il ne faut pour réaliser trois multiplications de grande taille.

$$x_{i+1} = x_{i+1} + x_i \frac{1 - d \cdot x_i^2}{2}$$

Figure 41.

AMÉLIORATION DE BBP

Une fois leur formule annoncée, d'autres mathématiciens cherchèrent à leur tour des séries de type BBP, avec succès. Des variantes plus ou moins améliorées existent également.



Colin Perceval, un brillant étudiant.

Assez rapidement d'autres chercheurs ont trouvé des formules de type BBP pour le carré de Pi, mais aussi le logarithme de 7. D'autres formes plus simples pour Pi existent, comme celle élaborée par Viktor Adamchik et Stan Wagon (voir figure 39). Par rapport à la formule originelle du BBP nous n'avons plus ici que trois termes. Mais cette formule n'est pas seulement plus courte : Wagon et Adamchik ont découvert que la dérivation de cette formule contient sa propre preuve (remarquable). Comme la formule de Wagon et Adamchik n'est pas très efficace, Fabrice Bellard l'a modifiée avec une nouvelle série de type BBP, 43 % plus rapide (voir figure 40). Il fonde sa formule sur le calcul dans une base plus importante (1024) par rapport à celle du BBP classique (16), en conséquence de quoi il n'a pas besoin d'autant de termes que la formule classique pour rechercher un nombre. Elle permet, en outre, d'aller beaucoup plus loin avec le même effort de calcul.

Cette formule est actuellement la préférée des chercheurs de Pi et Colin Perceval, un brillant étudiant, a atteint plusieurs records avec son aide. En septembre 2000, il a calculé que la position binaire 10^{15} dans Pi est zéro (en base 2).

Les séries de BBP produisent des résultats hexadécimaux (ou binaire, octal...) et c'est assez exotique. Simon Plouffe a étudié la question, et conçu un algorithme qui permet de rechercher des positions dans Pi, dans n'importe quelle base. Malheureusement, cette approche a un temps de progression cubique de son calcul et c'est encore plus lent que de calculer la position voulue en partant de la toute première décimale. Malgré cela, Fabrice Bellard est parvenu à concevoir un algorithme capable de trouver n'importe quelle décimale de Pi en un temps quadratique, dans n'importe quelle base ! Vous en trouverez l'algorithme sur le CD-Rom accompagnant le magazine.

Gilbert Fernandes

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n}\left(\frac{2}{4n+1}+\frac{2}{4n+2}+\frac{1}{4n+3}\right)$$

Figure 39.

$$\pi = \frac{1}{64}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1024^n}\left(\frac{-32}{4n+1}-\frac{1}{4n+3}+\frac{256}{10n+1}-\frac{64}{10n+3}-\frac{4}{10n+5}-\frac{4}{10n+7}+\frac{1}{10n+9}\right)$$

Figure 40.

AMÉLIORATION DU CALCUL DE RACINES : SCHÖNHAGE

Arnold Schönhage a su trouver une meilleure méthode que celle de Newton en partant d'une solution pourtant moins efficace au premier abord. Sa méthode calcule la racine carrée du nombre d (directement) et estime le zéro de la fonction f(x) =d-x^2 pour laquelle l'équation de la figure 42 correspond à la règle d'itération. Chaque étape comprend une division coûteuse, qui élimine normalement cette approche mais Schönhage a trouvé une astuce qui permet d'éliminer ce problème, ce qu'on appelle aujourd'hui l'itération couplée de Newton (voir figure 43). *Au lieu de diviser, la procédure multiplie une réciproque* estimée que l'on améliore avant le début des itérations à l'aide d'une itération couplée entre vi et xi. Le temps requis pour réaliser ce calcul est asymptotique et correspond à trois multiplications longues, ce qui se traduit en pratique par trois opérations longues une fois programmé.

La librairie hfloat que nous avons recommandée dans le dossier comprend, d'ailleurs, une implémentation remarquable de cette méthode (hfloat/src/hf/itsqrt.cc).

$$x_{i+1} = x_i + \frac{d - x_i^2}{2x_i}$$

Figure 42.

Initialisation :

$$x_0 \approx \sqrt{(d)}$$

$$v_0 = \frac{1}{2x_0}$$

Itération :

$$v_{i+1} = v_i + (1 - 2x_i v_i)\cdot v_i^2 \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{(d)}}$$

$$x_{i+1} = x_i + (d - x_i^2)\cdot v_{i+1} \rightarrow \sqrt{(d)}$$

Figure 43.