ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ



https://doi.org/10.15407/dopovidi2022.05.003
УДК 517.587

**В.Л. Макаров**[1], https://orcid.org/0000-0002-4883-6574
**С.В. Макаров**[2], https://orcid.org/0000-0003-3128-3683

[1] Інститут математики НАН України, Київ
[2] Національний центр "Мала академія наук України", Київ
E-mail: makarov@imath.kiev.ua, makarovsergii@gmail.com

# Функції і поліноми Лагерра–Келі

*Представлено академіком НАН України В.Л. Макаровим*

*Виникнення поліномів Лагерра–Келі пов'язане з розв'язуванням задачі Коші для абстрактного однорідного еволюційного рівняння дробового порядку з необмеженим операторним коефіцієнтом A. З використанням зображення її розв'язку через операторну функцію Міттаг-Леффлера із заміною оператора A його перетворенням Келі $A=(I-q)^{-1}q$ і подальшим розкладом у ряд за степенями q одержується базова формула методу перетворення Келі. Коефіцієнтами цього ряду є функції Лагерра–Келі. Оскільки метод перетворення Келі належить до експоненціально збіжних методів і в ряді випадків є ефективнішим порівняно з існуючими методами з точки зору алгоритмічної реалізації, дослідження функцій Лагерра–Келі є важливою і актуальною задачею.*

*У статті досліджені основні властивості функцій Лагерра–Келі та пов'язаних із ними поліномів. Знайдено явний вигляд цих функцій та рекурентні формули двох типів (з інтегральним членом і без нього), які вони задовольняють. Доведено, що поліноми Лагерра–Келі не задовольняють тричленне рекурентне співвідношення, а отже, не утворюють ортогональну систему. Вони також не є розв'язками диференціальних рівнянь скінченних порядків зі змінними поліноміальними коефіцієнтами, незалежними від степеня полінома. Вивчено ряд властивостей нулів поліномів Лагерра–Келі. З використанням засобів комп'ютерної алгебри Maple знайдено асимптотичну поведінку досліджуваних функцій, що є дуже важливим для обґрунтування експоненціальної швидкості збіжності методу перетворення Келі.*

***Ключові слова***: *функції Міттаг-Леффлера, поліноми Лагерра–Келі, рекурентні співвідношення, поліноми Гурвіца.*

Виникнення поліномів Лагерра–Келі пов'язане з дослідженням задачі Коші для абстрактного однорідного еволюційного рівняння дробового порядку

$$\partial_t u(t)+\partial_t^{-\alpha} A u(t)=0, \quad t>0, \quad u(0)=u_0,$$

розв'язок якого за допомогою функції Міттаг-Леффлера зображується у формі [1]

$$u(t)=E_{1+\alpha}(-At^{1+\alpha})u_0=\sum_{j=0}^{\infty}(-At^{1+\alpha})^j \frac{1}{\Gamma(1+j(\alpha+1))}u_0. \tag{1}$$

Цитування: Макаров В.Л., Макаров С.В. Функції і поліноми Лагерра—Келі. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2022. № 5. С. 3—9. https://doi.org/10.15407/dopovidi2022.05.003

Тут

$$(\partial_t^{-\alpha} u)(t) = \begin{cases} \partial_t \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} u(s)ds, & -1 < \alpha < 0, \\ \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} u(s)ds, & 0 < \alpha < 1, \end{cases}$$

— інтеграл у сенсі Рімана—Ліувілля, $A$ — секторіальний оператор у комплексному банаховому просторі. Якщо формально замінити $A$ на $(I-q)^{-1}q$ (перетворення Келі) і розвинути ряд у (1) за степенями оператора $q$, то в результаті одержимо зображення

$$u(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} q^k p_k^{\alpha}(t^{1+\alpha}), \tag{2}$$

яке містить функції $p_k^{\alpha}(t^{1+\alpha})$, названі нами функціями Лагерра—Келі. Тут для спрощення викладу вважатимемо, що елемент $u_0$ є одиничним у відповідному банаховому просторі.

У зазначеній роботі [1] був запропонований і обґрунтований експоненціально збіжний метод знаходження наближення до векторнозначної функції (2). Інший підхід, що базується на операторному перетворенні Келі та спрямований на побудову і обґрунтування наближення до формули (2), був запропонований у роботі [2]. Цей підхід з точки зору реалізації та обґрунтування є конкурентоспроможним щодо методу з [1] і у ньому суттєву роль відіграють функції $p_k^{\alpha}(t^{1+\alpha})$. Тому вивчення властивостей функцій Лагерра—Келі є важливим напрямком досліджень. Цілком природним є вивчення цих властивостей через властивості поліномів $p_j^{\alpha}(x)$, які також природно називати поліномами Лагерра—Келі.

Поліноми $p_j^{\alpha}(x)$ належать до класу гіперболічних поліномів (експериментально встановлено), тобто поліномів, у яких усі нулі є дійсними. Такі властивості мають, зокрема, ортогональні поліноми, що задовольняють тричленні рекурентні співвідношення. На відміну від останніх, поліноми Лагерра—Келі не мають такої властивості. Зокрема, поліноми $p_j^{-1/2}(x)$, як доведено в даній роботі, задовольняють чотиричленне рекурентне співвідношення (далі наведено його точний вигляд) з коефіцієнтами, що залежать від $j$, тобто не є ортогональними. Дослідженням поліномів, які задовольняють чотиричленні рекурентні співвідношення вигляду

$$\begin{gathered} p_m(z) + C(z)p_{m-1}(z) + B(z)p_{m-2}(z) + A(z)p_{m-3}(z) = 0, \\ m = 2, 3, \ldots, \ p_m(z) = 0, \ m < 0, \end{gathered} \tag{3}$$

де $C(z)$, $B(z)$, $A(z)$ — лінійні функції від $z$ і не залежать від $m$, останнім часом присвячена значна кількість робіт (див. [3—5]). Роботи, де вивчаються питання, пов'язані з чотиричленним рекурентним співвідношенням вигляду (3), коефіцієнти якого залежать від $m$, авторам не відомі.

**Означення**. Функції $p_j^{\alpha}(t^{1+\alpha})$, які утворюються після розвинення в ряд Маклорена функції Міттаг-Леффлера

$$E_{1+\alpha}\left(-\frac{q}{1-q}t^{1+\alpha}\right)=\sum_{j=0}^{\infty}\left(-\frac{q}{1-q}t^{1+\alpha}\right)^{j}\frac{1}{\Gamma(1+j(\alpha+1))}=\sum_{j=0}^{\infty}(q^{j}p_j^{\alpha}(t^{1+\alpha})),$$

$$p_j^{\alpha}(t^{1+\alpha})=\frac{1}{j!}\frac{\partial^{j}}{\partial q^{j}}E_{1+\alpha}\left(-\frac{q}{1-q}t^{1+\alpha}\right)_{q=0}, \qquad (4)$$

назвемо функціями Лагерра—Келі.

Користуючись означенням, знаходимо явний вираз функцій Лагерра—Келі

$$p_k^{\alpha}(t^{1+\alpha})=\sum_{s=0}^{k-1}C_{k-1}^{s}\frac{(-1)^{s+1}t^{(s+1)(1+\alpha)}}{\Gamma(1+(\alpha+1)(s+1))}. \qquad (5)$$

**Лема 1.** *Для того щоб функції Лагерра—Келі визначалися за формулою* (5)*, необхідно та достатньо, щоб для них виконувалося таке інтегрально-різницеве двочленне рекурентне співвідношення:*

$$p_{k+1}^{\alpha}(t^{1+\alpha})=p_k^{\alpha}(t^{1+\alpha})-\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^t(t-s)^{\alpha}p_k^{\alpha}(s^{1+\alpha})ds, \quad \alpha\in(-1,1),$$

$$k=1,2,\ldots, \quad p_1^{\alpha}(t^{1+\alpha})=-\frac{t^{1+\alpha}}{\Gamma(\alpha+2)}.$$

**Асимптотика та оцінки функцій Лагерра—Келі.** Для дослідження асимптотичної поведінки функцій Лагерра—Келі, а також отримання оцінок для них, що є дуже важливим для теоретичного обґрунтування FD-методу, ефективним підходом виявилось використання апарату твірних функцій.

За допомогою цього апарату доводимо

**Твердження 1.** *Нехай* $\alpha\in(-1,0)$, *тоді буде мати місце формула*

$$\frac{1}{k!}\sum_{s=k}^{\infty}p_s^{\alpha}(1)\frac{k!}{(k-s)!}=(-1)^{k}\sum_{s=0}^{k-1}\frac{(-1)^{s}C_{k-1}^{s}}{\Gamma(-\alpha-s(1+\alpha))}=\lim_{q\to1-0}\frac{1}{k!}\frac{\partial^{k}}{\partial q^{k}}f^{(\alpha)}(q,1). \qquad (6)$$

У випадку, коли для певних конкретних значень α використання формули (6) зумовлює значні труднощі, доцільно застосувати інший підхід. А саме, шукати розвинення лівої частини (4) не в нулі, а в точці $q=-1$.

**Твердження 2.** *Нехай* $\alpha\in(-1,0)$, *тоді для будь-якого натурального j буде справедливою формула*

$$E_{1+\alpha}\left(-\frac{q}{1-q}t^{1+\alpha}\right)=$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}\left(-\frac{q}{1-q}t^{1+\alpha}\right)^{j}\frac{1}{\Gamma(1+j(\alpha+1))}=\sum_{j=0}^{\infty}(q+1)^{j}\frac{1}{j!}\sum_{s=j}^{\infty}(-1)^{s}p_s^{\alpha}(t^{1+\alpha})\frac{s!}{(s-j)!}.$$

Із тверджень 1, 2 випливає, що для $\alpha \in (-1, 0)$ і будь-якого цілого невід'ємного $j \leqslant s$ буде вірною така гранична рівність:

$$\lim_{s\to\infty} p_s^{\alpha}(t^{1+\alpha}) \frac{s!}{(s-j)!} = 0 .$$

Для $\alpha \in (0,1)$ шляхом аналітичних розрахунків, проведених за допомогою системи комп'ютерної алгебри (с. к. а.) Maple, показано, що існують такі натуральні показники $\mu(\alpha)$, що ряди

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k^{\alpha}(1) k^{-\mu(\alpha)}$$

обчислюються точно, тобто є збіжними. Отже, виконується оцінка

$$\left| p_k^{\alpha}(1) \right| \leqslant C k^{\mu(\alpha)}, \quad \alpha \in (0,1).$$

Зокрема,

$$\mu(\alpha) = 6,\ \alpha = \frac{1}{m},\ \ m = 4, \dots, 13,\ \ \mu(\alpha) = 7,\ \ \alpha = \frac{m}{m+1},\ \ m = 2, 3, 4,\ \ \mu(\frac{1}{2}) = 8 .$$

*Зауваження*. Використання такої техніки вимагає одночасної перевірки, як правило, чисельно, чи прямує загальний член суми до нуля. У протилежному випадку, згідно з теорією, ряд є розбіжним, бо не виконується необхідна умова збіжності.

**Рекурентні співвідношення**. Нехай $\alpha = -\frac{1}{2}$, тоді функції Лагерра–Келі $p_k^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{t})$ задовольнятимуть таке рекурентне співвідношення:

$$n\, p_n^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{t}) =$$
$$= 3(n-1) p_{n-1}^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{t}) + (2t - 3n + 6) p_{n-2}^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{t}) + (n-3) p_{n-3}^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{t}),$$

$$n = 3, 4, \dots, \quad p_0^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{t}) = 1, \quad p_1^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{t}) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{t}, \quad p_2^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{t}) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{t} + t.$$

Воно було одержане з використанням послідовності A052887 із [6], що збігається з послідовністю чисельників дробів $p_k^{+, -1/2}(1),\ \ k = 1, 2, \dots$, знаменники яких містять $k!$.

Для інших значень $\alpha$ вигляду $\alpha = -\frac{p}{q}$, де $\frac{p}{q}$ — простий дріб, розроблено методику отримання рекурентних співвідношень для функцій Лагерра—Келі, яка спирається на застосування с. к. а. Maple. Ця методика дає можливість переконатися, що із зростанням $q$ порядок відповідного рекурентного співвідношення зростає. Конкретні результати не наводимо через їх громіздкість.

 

**Диференціальне рівняння**. Поліноми $\frac{p_n^{-\frac{1}{2}}(t)}{t} = u_{n-1}^{-\frac{1}{2}}(t)$ задовольняють диференціальне рівняння нескінченного порядку

$$L\left(u_n^{-\frac{1}{2}}(t)\right) - 2nu_n^{-\frac{1}{2}}(t) = \sum_{j=1}^{\infty} q_j(t) \frac{d^j u_n^{-\frac{1}{2}}(t)}{dt^j} - 2nu_n^{-\frac{1}{2}}(t), \quad n = 0, 1, \ldots,$$

де коефіцієнти $q_j(t) = \sum_{s=0}^{j} g_s^{(j)} t^j$ не залежать від *n*.

Має місце

**Лема 2.** *У класі диференціальних рівнянь вигляду*

$$L\left(u_n^{-\frac{1}{2}}(t)\right) - \lambda_n u_n^{-\frac{1}{2}}(t) = \sum_{j=1}^{\infty} q_j(t) \frac{d^j u_n^{-\frac{1}{2}}(t)}{dt^j} - \lambda_n u_n^{-\frac{1}{2}}(t), \quad n = 0, 1, \ldots,$$

*не існує диференціального рівняння скінченного порядку.*

**Нулі поліномів Лагерра—Келі**. Наведемо деякі результати щодо властивостей коренів функцій Лагерра—Келі. Для їх одержання зручно застосувати властивості нулів поліномів, породжених функціями Лагерра—Келі, за такою формулою:

$$P_{k-1}^{\alpha}(x) = \frac{p_k^{\alpha}(-x)}{x}, \text{ заміна } t^{1+\alpha} = -x.$$

Згідно з (5) отримаємо

$$P_{k-1}^{\alpha}(x) = \sum_{s=0}^{k-1} C_{k-1}^{s} \frac{x^s}{\Gamma(1+(\alpha+1)(s+1))} = \sum_{s=0}^{k-1} b_{k-1,\,s}^{\alpha} x^s. \tag{7}$$

Справедливою є нерівність

$$\begin{gathered} b_{k-1,\,s}^{\alpha} b_{k-1,\,s+1}^{\alpha} - b_{k-1,\,s-1}^{\alpha} b_{k-1,\,s+2}^{\alpha} > 0, \\ s = 1, \ldots, k-3, \quad k > 3, \quad \alpha > -1, \end{gathered} \tag{8}$$

яка свідчить про те, що поліноми (7) є стійкими або поліномами Гурвіца. Згідно з роботою [7] виконання нерівностей (8) є необхідною умовою, щоб поліноми (7) були поліномами Гурвіца. Звідси випливає, що корені функцій Лагерра—Келі відмінні від нуля і лежать у правій відкритій комплексній півплощині. Варто зауважити, що на основі техніки, пов'язаної з неперервними дробами Стілтьєса, і теорем 5.1 та 5.2 із [8] у с. к. а. Maple є прості у використанні засоби автоматичної перевірки виконання необхідних і достатніх умов щодо належності даного полінома до класу поліномів Гурвіца. Зазначені засоби дали можливість переконатися в тому, що будь-який перевірений поліном є поліномом Гурвіца. Додамо до цього, що окремі компоненти дробів Стілтьєса можна знайти в явному вигляді. Зауважимо, що чисельні експерименти показали, що всі нулі поліномів Лагерра—Келі є дійсними, додатними та переміжними. Теоретично цей факт не доведено.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА


1. Mclean W., Thomée V. Numerical solution via Laplace transforms of a fractional order evolution equation. *J. Integral Equat. Appl.* 2010. **22**, № 1, Spring 2010. P. 57—94. https://doi.org/10.1216/JIE-2010-22-1-57
2. Василик В.Б., Гаврилюк І.П., Макаров В.Л. Експоненціально збіжний метод наближення для рівняння з дробовою похідною і необмеженим операторним коефіцієнтом в банаховому просторі. *Укр. мат. журн.* 2022. **74**, № 2. С. 151—163. https://doi.org/10.37863/umzh.v74i2.6984
3. Tran K., Zumba A. Zeros of polynomials with four-term recurrence. *Involve*. 2018. **11**, № 3. P. 501—518. https://doi.org/10.2140/involve.2018.11.501
4. Adams R. On hyperbolic polynomials with four-term recurrence and linear coefficients. *Calcolo*. 2020. **57**, Art. 22. https://doi.org/10.1007/s10092-020-00373-7
5. Tran K., Zumba A. Zeros of polynomials with four-term recurrence and linear coefficients. *Ramanujan J*. 2021. **55**. P. 447—470. https://doi.org/10.1007/s11139-020-00263-0
6. Sloane N.J.A., Plouffe S. The encyclopedia of integer sequences. San Diego: Academic Press, 1995. 587 pp.
7. Xie X. A new method of investigating the stability of linear systems. Meeting report in Beijing, 1957 (in Chinese).
8. Levinson N., Redheffer R.M. Complex variables. San Francisco: Holden-Day, 1970. 456 p.


Надійшло до редакції 30.05.2022

REFERENCES


1. Mclean, W. & Thomée, V. (2010). Numerical solution via Laplace transforms of a fractional order evolution equation. J. Integral Equat. Appl., 22, No. 1, Spring 2010, pp. 57-94. https://doi.org/10.1216/JIE-2010-22-1-57
2. Vasylyk, V. B., Gavrilyuk, I. P. & Makarov, V. L. (2022). Exponentially convergent method for a differential equation with fractional derivative and unbounded operator coefficient in Banach space. Ukr. Mat. Zhurn., 74, No. 2, pp. 151-163 (in Ukrainian). https://doi.org/10.37863/umzh.v74i2.6984
3. Tran, K. & Zumba, A. (2018). Zeros of polynomials with four-term recurrence. Involve, 11, No. 3, pp. 501-518. https://doi.org/10.2140/involve.2018.11.501
4. Adams, R. (2020). On hyperbolic polynomials with four-term recurrence and linear coefficients. Calcolo, 57, Art. 22. https://doi.org/10.1007/s10092-020-00373-7
5. Tran, K. & Zumba, A. (2021). Zeros of polynomials with four-term recurrence and linear coefficients. Ramanujan J., 55, pp. 447-470. https://doi.org/10.1007/s11139-020-00263-0
6. Sloane, N. J. A. & Plouffe, S. (1995). The encyclopedia of integer sequences. San Diego: Academic Press.
7. Xie, X. (1957). A new method of investigating the stability of linear systems. Meeting report in Beijing (in Chinese).
8. Levinson, N. & Redheffer, R. M. (1970). Complex Variables. San Francisco: Holden-Day, 1970.


Received 30.05.2022

*V.L. Makarov* [1], https://orcid.org/0000-0002-4883-6574
*S.V. Makarov* [2], https://orcid.org/0000-0003-3128-3683

[1] Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kyiv

[2] National Center “Small Academy of Sciences of Ukraine”, Kyiv

E-mail: makarov@imath.kiev.ua, makarovsergii@gmail.com

LAGERRA–KELLY FUNCTIONS AND RELATED POLYNOMIALS

The origin of the Laguerre–Kelly polynomials is related to the solution of the Cauchy problem for an abstract homogeneous evolutionary equation of a fractional order with an unbounded operator coefficient $A$. Using the representation of its solution through the Mittag-Leffler operator function with the replacement of the operator $A$ by its Kelly transform $A=(I-q)^{-1}q$ and the subsequent expansion into a power series of $q$, the basic formula of the transform method is obtained. The coefficients of this series are the Laguerre–Kelly functions.

Since the Kelly transform method is exponentially convergent and in some cases more efficient than existing methods (in terms of the Kelly algorithmic implementation), the study of the Laguerre–Kelly functions is an important and relevant problem. The main properties of the Laguerre–Kelly functions and related polynomials are investigated. An explicit form of these functions and recurrent formulas of two types (with and without an integral term) which they satisfy are found. It is proved that the Laguerre–Kelly polynomials do not satisfy the three-term recurrent relation and therefore do not form an orthogonal system. Moreover, they are not the solutions of finite-order differential equations with variable polynomial coefficients independent of the degree of the polynomial. A number of properties of zeros of the Laguerre–Kelly polynomials are studied. Using the computer algebra system Maple, we explore the asymptotic behaviour of these functions, which is very important for substantiating the exponential convergence rate of the Kelly transform method.

***Keywords***: *Mittag-Leffler functions, Lagerra–Kelly polynomials, recurrent relations, Hurwitz polynomials.*