Historias de Matemáticas

Euler y El Problema de Basilea

Euler and The Basel Problem

José Manuel Sánchez Muñoz

Revista de Investigación

G.I.E Pensamiento Matemático MAIC

Volumen V, Número 1, pp. 027–056, ISSN 2174-0410
Recepción: 31 Mar'14; Aceptación: 2 Ene'15

1 de abril de 2015

Resumen

Normalmente la demostración de un problema matemático abierto no supone metafóricamente hablando el cierre de una puerta, sino el nacimiento de nuevas teorías y campos en los que investigar. El problema de Basilea significó no sólo un trampolín en la carrera de un joven Leonhard Euler, sino el germen de una de las herramientas fundamentales en Teoría de Números como es la Función Zeta.

Palabras Clave: Euler, Basilea, Función Zeta.

Abstract

Usually, the proving of an open mathematical problem does not mean metaphorically the closing of a door, but the birth of new theories and fields to research. The Basel Problem meant not only a springboard in the career of a young Leonhard Euler, but the germ of one of the fundamental tools in Number Theory such as the Zeta Function.

Keywords: Euler, Basel, Zeta Function.

1. El origen histórico del problema

El nombre del problema proviene de la ciudad natal de Leonhard Euler (1707–1783) y de quizás una de las familias de matemáticos más notables de la historia, Los Bernoulli, y consiste básicamente en hallar la suma infinita de los recíprocos de los cuadrados de los números naturales, esto es:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \tag{1}$$

Con anterioridad al propio Euler, el problema había sido planteado por primera vez en 1644 en la obra *"Novae Quadraturae Arithmeticae"* de Pietro Mengoli (1625–1686), alumno aventajado de Bonaventura Cavalieri (1598–1647), prior de la iglesia de Santa María Magdalena de Bolonia y sustituto de su maestro como profesor en la Universidad de Bolonia. La obra anteriormente descrita está formada por tres libros, y en el primero Mengoli demostró la convergencia e incluso calculó la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

que desde entonces es conocida como *serie de Mengoli*[1]. La serie de Mengoli constituye un ejemplo clásico de la serie telescópica.

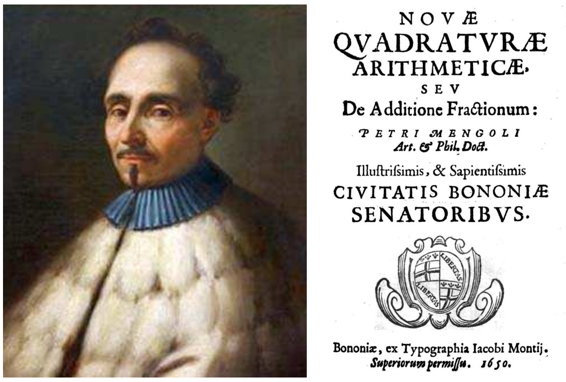

Figura 1. Pietro Mengoli y portada de "'Novae Quadraturae Arithmeticae Seu de Additione Fractionum".

Planteado el reto por Mengoli, muchos fueron los matemáticos que posteriormente intentarían sin éxito encontrar la solución a dicho problema. Uno de los primeros que lo abordó fue el británico John Wallis (1616-1703), que en su obra *"Arithmetica Infinitorum"* (1655) aproximó el valor de dicha serie a $1,645$ cometiendo un error menor que una milésima, lo que con la notación moderna supondría tener que evaluar 1.071 términos de dicha serie. Wallis llegó a dicho resultado a través de lo que hoy se denomina *producto de Wallis*, un producto de infinitos términos que se expresa

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \right) = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdots} = \frac{\pi}{2}$$

o lo que es lo mismo:

$$\frac{2}{\pi} = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{5^2}\right) \cdots$$

Por aquellos años, las series se encontraban en su punto más álgido en cuanto a desarrollo y estudio se refiere. De hecho el gran salto cualitativo en cuanto a la obtención de un valor truncado de π cada vez más preciso, se produjo en cuanto los métodos geométricos "arquimedianos" fueron abandonados en favor de la utilización de las series infinitas. Gottfried W. Leibniz (1646-1716) siguiendo indicaciones de su mentor Christiaan Huygens (1629-1695), resolvía el problema de la suma de los recíprocos de los números triangulares, números cuya expresión es de la forma:

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

[1] Se demuestra que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{k+1} \to 1, \text{ cuando } k \to \infty$$

Como curiosidad Mengoli denominó a los números de la forma $n(n+1)$ con $n \in \mathbb{N}$, *números planos*, para diferenciarlos de los números de la forma $n(n+1)(n+2)$ que estudia en el 2° libro de dicha obra y que denomina *números sólidos*.

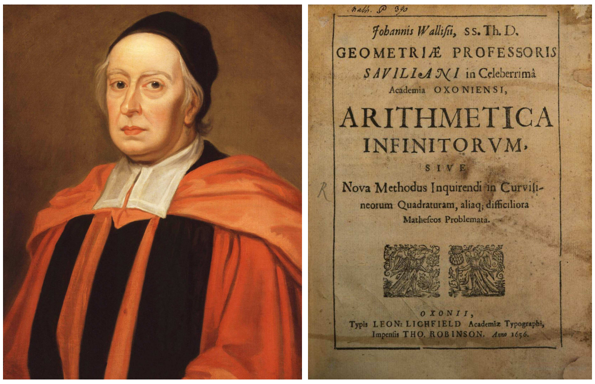

Figura 2. John Wallis y portada de "Arithmetica Infinitorum".

El problema resuelto por Leibniz consistía en calcular por lo tanto la suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{T_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Siguiendo el mismo proceso que en la serie de Mengoli, se puede descomponer en fracciones simples, de modo que

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

donde se puede observar que todos los términos se anulan salvo el primero.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{T_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots\right) = 2$$

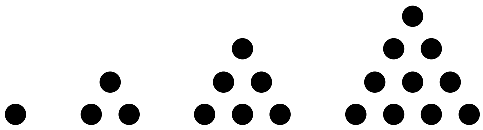

Figura 3. Los cuatro primeros números triangulares.

Leibniz conoció el Problema de Basilea en 1673, cuando el por entonces primer secretario de la Royal Society of London, Henry Oldenburg (1616-1716) se lo propuso en una de sus comunicaciones por carta. Una vez Leibniz se familiarizó con el problema, no era de extrañar que los Bernoulli también lo conocieran (Leibniz era mentor de varios miembros de dicha familia). En 1689, Jakob Bernoulli (1654-1705), hermano del maestro y mentor de Euler, Johann Bernoulli (1667-1748), a pesar de no hallar la anhelada suma, consiguió revelar y publicar dos resultados sobre dicha serie a todas luces fundamentales[2]. El primero es que se trataba de una serie convergente (aunque muy lentamente) ya que todas las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$$

con $k \geq 2$ cumplen que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 2$$

[2] Parece ser muy probable que Euler conociera el problema a través de Jakob.

además como el n-ésimo número triangular es menor que el n-ésimo recíproco cuadrado, si se invierten se tendrá que

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{T_n}$$

y por lo tanto se puede concluir que la serie está acotada por 2. El criterio de convergencia que hoy día resulta fundamental y es lo primero que se busca en una serie, no era por entonces tenido demasiado en cuenta con el mismo rigor con el que ahora se busca, ya que durante aquellos años los matemáticos lejos de proporcionar una demostración impecable, estaban mucho más interesados en demostrar resultados.

La Serie Armónica

Figura 4. Nicolás Oresme.

El nombre de dicha serie deriva del concepto de armónico musical, ya que las longitudes de onda de los armónicos de una cuerda vibrante son proporcionales a su longitud según la serie de fracciones unitarias: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

La divergencia de dicha serie fue demostrada por Nicolás Oresme (1323-1382) en torno al año 1350, y aunque significó un avance importante en las matemáticas del medievo, pronto quedó en el olvido. Dicha divergencia se produce muy lentamente, de hecho los primeros 10^{43} términos de la serie no llegan a sumar siquiera 100, lo cual parece ir en contra de toda intuición de cualquier principiante matemático. La demostración resulta a todas luces bastante accesible y puede consultarse en multitud de bibliografía. Para ello partimos de la serie general:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots$$

Se agrupan todos los términos del siguiente modo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots$$

que resulta mayor término a término que la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-\log_2 k} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \cdots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots$$

que claramente diverge, y por lo tanto también lo hace la serie armónica. □

Los estudios de Jakob Bernoulli para encontrar la solución analítica del problema desembocaron en un segundo resultado detallado a continuación. Partiendo de la serie original

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$$

multiplicó ambos miembros por 2^{-2} obteniendo

$$\frac{1}{2^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2^2} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots\right) = \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots\right)$$

es decir la suma de los términos pares de dicha serie. Restando estos a la serie original resulta que la suma de los términos impares será por lo tanto:

$$\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{2^2-1}{2^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

Figura 5. Gottfried W. Leibniz, Henry Oldenburg y Jakob Bernoulli.

Previa a la irrupción de la figura de Euler, el problema experimenta varios intentos infructuosos de ser demostrado. Sin embargo comienza una carrera vertiginosa por alzarse con el honor de dar el mayor número de cifras exactas. Ha de considerarse que la convergencia de la serie es bastante lenta, recuerde el lector que se necesitarían 1.071 términos para dar una precisión de tres cifras decimales. En 1721, en una carta de Johann a su hijo Daniel Bernoulli (1700-1782), éste especifica que el resultado de la suma se encuentra en torno al valor $\frac{8}{5}$. En 1729 Christian Goldbach (1690-1764), con el que el propio Euler mantuvo durante toda su vida un intercambio de una muy productiva correspondencia, acotó la solución entre $\frac{41}{35}$ y $\frac{5}{3}$, y en 1730 James Stirling (1692-1770) en su libro *"Methodus Differentialis"*, da la cifra $1,644934066$, correcta hasta la novena cifra decimal.

2. Los primeros intentos de Euler

En 1731, irrumpe en el contexto del problema la figura de un jovencísimo Euler. En su artículo *"De summatione innumerabilium progressionum"*, publicado en 1738, utiliza un método completamente vanguardista para aproximar la serie. Euler parte de la serie de potencias

$$\log(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots \tag{2}$$

Dividiendo la expresión (2) por $-x$ e integrando entre 0 y $\frac{1}{2}$, resultando

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\frac{x^3}{4}+\cdots\right)dx=\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2^2}}{4}+\cdots+\frac{\frac{1}{2^n}}{n^2}+\cdots \tag{3}$$

En el lado izquierdo de esta expresión hace la sustitución $y=1-x$ obteniendo

$$\int_0^{\frac{1}{2}}-\frac{\log(1-x)}{x}dx=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\log(y)}{1-y}dy$$

y dado que se conoce la suma de una serie geométrica de término inicial a y razón r,

$$\sum_{n=0}^{\infty}ar^n=\frac{a}{1-r}\Rightarrow\frac{1}{1-y}=\sum_{n=0}^{\infty}y^n$$

La serie de Gregory-Leibniz y π

Desde los comienzos de las primeras civilizaciones, definir un valor de π cada vez más preciso se convirtió en una tarea primordial para los geómetras. El verdadero avance se produjo cuando los engorrosos métodos heredados de la época de Arquímedes basados en la utilización de polígonos regulares cada vez con un mayor número de caras, dieron paso a la utilización de las series infinitas.

Uno de los primeros que se percató de la capacidad de estas series para la definición de π fue el joven matemático escocés James Gregory (1638-1675). Familiarizado con el desarrollo en serie de las funciones $\tan x$, $\sec x$, $\arctan x$, $\operatorname{arcsec} x$ y las series logarítmicas, su principal logro consistió en encontrar una relación entre el desarrollo de la función $\arctan x$ y π. Gregory pudo identificar que el área bajo la curva $\frac{1}{1+x^2}$ en el intervalo $(0,x)$ era precisamente la función $\arctan x$, lo que en notación moderna se puede expresar:

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \tag{4}$$

Mediante un proceso de larga división en el integrando y la utilización de la fórmula de Cavalieri[3], pudo identificar la siguiente expresión:

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \tag{5}$$

Si se sustituye $x = 1$ en la expresión (4), se obtiene que $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$, por lo tanto:

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right) \tag{6}$$

lo cual significaba haber encontrado el primer desarrollo de la historia en serie infinita del valor de π.

Gregory envió una carta a Leibniz el 15 de Febrero de 1671, poniendo de manifiesto el logro obtenido con la serie de la expresión (5). Posteriormente Leibniz se percató del caso especial de la expresión (6) en 1674 y publicó sus resultados en 1682.

La convergencia de esta serie es muy lenta, sin embargo mostró el camino de una nueva vía de investigación en la historia de π.

se obtiene

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \sum_{n=0}^{\infty} y^n \log(y) dy = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\frac{1}{2}}^{1} y^n \log(y) dy$$

Se puede integrar por partes cada uno de los sumandos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{\frac{1}{2}}^{1} y^n \log(y) dy = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{y^{n+1}}{n+1}\log(y) - \frac{y^{n+1}}{(n+1)^2}\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1}$$

[3] En 1653, el matemático italiano Bonaventura Cavalieri (1598-1647) publicaba su obra póstuma *"Geometria Indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota"*, considerada como uno de los principales tratados del pre-Cálculo, donde aparecía el siguiente resultado conocido como *fórmula de Cavalieri*:

$$\int_0^a x^n\,dx = \frac{a^{n+1}}{n+1} \qquad n \geq 0$$

Agrupando nuevamente, se llega a que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{\frac{1}{2}}^{1} y^n \log(y)dy = \left(\log(y)\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{n+1}}{n+1}\right]-\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{n+1}}{(n+1)^2}\right]\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1}$$

Pudiendo sustituir la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{n+1}}{n+1} = -\log(1-y)$$

resultando

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{\frac{1}{2}}^{1} y^n \log(y)\,dy = \left(\log(y)(-\log(1-y)) - \left[y+\frac{y^2}{4}+\frac{y^3}{9}+\cdots\right]\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1} =$$
$$= \log(1)\log(0) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} - \log^2\left(\frac{1}{2}\right) - \left[\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2^2}}{4}+\cdots+\frac{\frac{1}{2^n}}{n^2}+\cdots\right] \quad (7)$$

Euler iguala los términos de la derecha de las expresiones (3) y (7) despreciando el producto $\log(1)\log(0)$. De este modo llega a que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \log^2(2) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2\,2^{k-1}} \quad (8)$$

El procedimiento utilizado por Euler, aunque poco riguroso (utiliza la integración de la serie término a término, no considera el producto $\log(1)\log(0)$, etc), solventa de forma eficiente la baja velocidad de convergencia de la serie (1). Gracias a las potencias cuadráticas del numerador, los términos de la nueva serie que ha obtenido decaen mucho más rápido, y en consecuencia la convergencia de la misma mejora ostensiblemente. Además, Euler conocía el valor de $\log(2)$ con una gran cantidad de cifras decimales, consiguiendo de este modo una aproximación de la serie al valor $1,644934$, que es correcta en las seis cifras decimales únicamente con la suma de catorce términos de la nueva serie, lo que obliga a valorar la importancia del resultado obtenido por Euler puesto que de otro modo se necesitarían la friolera de 3.352.001 términos de la serie para obtener la misma precisión

Figura 6. Leonhard Euler.

3. La demostración de Euler

A pesar de que Euler había conseguido con la expresión (8) un método bastante rápido de realizar una estimación muy buena de (1), sin embargo se desconocía su valor real que era el principal objetivo. No obstante en 1734 sucedió el desenlace esperado y Euler anunciaba la demostración del resultado definitivo, presentándolo primero en la Academia de San Petesburgo y varios años después publicado. Se trataba de una demostración que ponía de manifiesto la gran intuición del joven Euler, aunque sin resultar demasiado rigurosa para los estándares de nuestros días. Gracias a la aparición y al desarrollo del estudio de la teoría de las funciones analíticas en variable compleja en el siglo XIX, fundamentalmente gracias a los trabajos del francés Augustin Louis Cauchy (1789-1857) y el alemán Karl Weierstrass (1815-1897) sobre factorización infinita de dichas funciones, esta demostración puede combinarse perfectamente con dichos logros y considerarse por lo tanto completamente válida y rigurosa. El lector debe tener presente que Euler no pudo contar todavía con multitud de herramientas analíticas posteriores. Sin embargo su gran intuición mostraba por primera vez la íntima relación entre un concepto analítico como eran las series, con un concepto puramente geométrico como era la aparición de π.

La ingeniosa solución a la que Euler acaba por llegar hacía uso fundamental de las propiedades de la función trigonométrica seno. Dicha función admite una interpretación geométrica como muestra la figura 7. Como puede observarse, dado un número real x, se representa el punto P situado sobre la circunferencia de radio unitario a un ángulo x (medido en radianes), y se traza el triángulo rectángulo que se obtiene proyectando al punto P sobre el eje de abcisas. Resulta en este caso que $\operatorname{sen} x$ es la longitud del cateto opuesto al ángulo, (con signo negativo si se encuentra en el semiplano inferior). Como los catetos son siempre más cortos que la hipotenusa, el seno de un ángulo está siempre acotado entre -1 y 1.

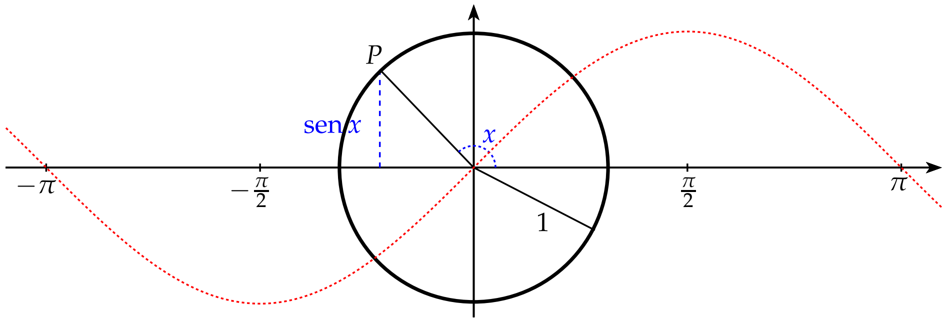

Figura 7. Interpretación geométrica de la función seno.

Gracias a la interpretación geométrica de la figura 7, puede observarse que la función seno es periódica, puesto que un ángulo de 2π radianes (o bien 360°) corresponde a un giro completo en la circunferencia unitaria, por lo tanto el valor de la función seno no sufre variación si le sumamos o restamos múltiplos de 2π, y además el valor absoluto del seno coincide si sumamos o restamos múltiplos de π, por lo que se puede afirmar que:

$$\operatorname{sen} x = |\operatorname{sen}(x+\pi)| = |\operatorname{sen}(x-\pi)| = \operatorname{sen}(x+2\pi) = \operatorname{sen}(x-2\pi) = \cdots$$

Para deducir los valores para los que la función seno se anula, se puede suponer que x está comprendido entre 0 y π, ya que en ese caso el punto P se encuentra en el eje de abcisas. Por lo tanto por la propiedad de la periocidad de la función seno, los ceros de la misma son los múltiplos de π, es decir, los puntos de la forma $k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

En el caso particular de la función seno, ésta toma infinitas veces el mismo valor, por lo tanto no puede considerarse un polinomio en el sentido estricto de la palabra. Sin embargo el método ingenioso de Euler consiste en imaginar dicha función como un "polinomio infinito", del que conocía su desarrollo en serie según la fórmula de Taylor:

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \tag{9}$$

En general si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son las raíces de un polinomio $Q(x)$ cuyo término independiente vale 1 (es decir, $Q(0) = 1$), entonces Q se puede factorizar como

$$Q(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$$

Además, si todas las raíces son distintas de cero, multiplicando y dividiendo por

$$Q(0) = (-1)^n a_1 a_2 \cdots a_n$$

se puede reescribir dicha igualdad como

$$Q(x) = Q(0)\left(1 - \frac{x}{a_1}\right)\left(1 - \frac{x}{a_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{x}{a_n}\right)$$

Euler extendió dicho razonamiento imaginando un "polinomio infinito" con "infinitas" raíces. Sin embargo como cero es precisamente una de las raíces de la función $\operatorname{sen} x$, Euler dividió la expresión (9) por x obteniendo:

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{2n} \quad \text{con} \quad c_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \tag{10}$$

que como puede comprobarse no se anula en cero (de hecho, vale 1), pero que, exceptuando dicho valor, tiene las mismas raíces que la función seno (todos los múltiplos no nulos de π). Euler expresó (10) como producto infinito, obteniendo

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{sen} x}{x} &= \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{3\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{3\pi}\right)\cdots = \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots = \\ &= 1 - \frac{x^2}{\pi^2} - \frac{x^2}{2^2\pi^2} - \frac{x^2}{3^2\pi^2} + \frac{x^4}{2^2\pi^4} + \frac{x^4}{3^2\pi^4} + \frac{x^4}{2^2 3^2\pi^4}\cdots = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{2n}\end{aligned} \tag{11}$$

donde

$$\begin{aligned}b_0 &= 1 \\ b_1 &= -\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2} \\ b_2 &= \frac{1}{\pi^4}\sum_{1\le n_1<n_2}^{\infty}\frac{1}{n_1^2 n_2^2} \\ &\cdots \\ b_k &= \left(\frac{-1}{\pi^2}\right)^k \sum_{1\le n_1<n_2<\cdots<n_k}^{\infty}\frac{1}{n_1^2 n_2^2\cdots n_k^2} \\ &\cdots\end{aligned}$$

En este punto, Euler recibió bastantes críticas por la falta de rigor que para muchos existía en su metodología expuesta hasta este punto. Precisamente uno de los más críticos fue Johann Bernoulli, quien le recomendaba que por lo menos demostrase que las raíces especificadas en el producto infinito anteriormente expuesto eran las únicas raíces del seno. Como contraejemplo al razonamiento de Euler, la función

$$e^x\,\frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

tiene las mismas raíces y sin embargo la expresión como producto infinito es diferente. A esta críticas Euler respondió afirmando que los valores aproximados que él obtenía eran parecidos a $\frac{\pi^2}{6}$.

Llegado hasta aquí, Euler disponía de dos expresiones diferentes para la misma función, por lo que podía desarrollar el producto e igualar los coeficientes de los términos del mismo grado. Fijándose en el coeficiente de x^2, para su cálculo el único modo de obtener un múltiplo de x^2 al deshacer el paréntesis es elegir el término $\frac{x^2}{n^2\pi^2}$ en uno de los factores y 1 en todos los demás. Por lo tanto, el valor del coeficiente resulta:

$$c_1 = -\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right)$$

Este coeficiente debía coincidir con el coeficiente de la serie original, es decir $c_1 = -\frac{1}{3!} = -\frac{1}{6}$. El lector podrá imaginar la euforia que debió sentir Euler en este momento que lo único que debía hacer era igualar dichos coeficientes y obtener el esquivo resultado durante más de 80 años:

$$-\frac{1}{6} = -\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right)$$

la solución al Problema de Basilea resultaba:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \square$$

Aunque el resultado obtenido es completamente correcto, Euler recibió numerosas críticas por la falta de rigor en su exposición. En el trabajo de Euler no se justificaba que se pudiera tratar la función seno como un polinomio. De hecho, no es cierto que cualquier serie de potencias admita una factorización de este tipo. Sin embargo, gracias a investigaciones del francés Jacques Hadamard (1865-1963), se sabe que se necesita una hipótesis relativa al crecimiento de la función cuando x tiende a infinito. En este sentido Euler tuvo mucha suerte o quizás gozaba de una clarividencia que le permitió dar un paso hacia delante en su demostración ya que en el caso de la función $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ el condicionante descrito se cumple. Uno de los campos en los que Hadamard trabajó se centró en las funciones analíticas que tienen singularidades en el plano finito. Trabajó en el campo de las funciones enteras[4], como por ejemplo las funciones expresadas en series de potencias que convergen en todos los valores de x.

Cualquier polinomio $P(x)$ es obviamente una función entera. Si es mónico ($P(0) \neq 0$), el polinomio puede ser expresado de la forma

$$P(x) = P(0)\left(1 - \frac{x}{a_1}\right)\left(1 - \frac{x}{a_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{x}{a_n}\right)$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son las raíces del polinomio $P(x)$. Por analogía, el problema de la factorización de las funciones enteras consiste fundamentalmente en su reconstrucción a partir de sus raíces. Puede ocurrir que una función entera no tenga raíces o ceros (p.ej. e^x), o un número finito (p.ej. $P(x)e^x$), o un número infinito.

El alemán Karl Weierstrass, a la sazón, una de las fuentes en las que bebió Hadamard, había demostrado años antes un resultado crucial con su *Teorema de Factorización*. Dicho teorema (denominado en ocasiones *Teorema del producto/factor*) establece que toda función entera $\varphi(z)$ (analítica en todo el plano complejo) posee una factorización infinita de la forma

$$\varphi(z) = z^m \, e^{g(z)} \prod_{w} \left(1 - \frac{z}{w}\right) e^{p_w(z)}$$

siendo dicha factorización no única, y donde $m \geq 0$ es la multiplicidad de la raíz 0, mientras que w varía sobre las demás raíces de φ (incluyendo multiplicidad), las funciones $p_w(z)$, una para cada raíz w, son ciertos polinomios (aproximaciones de Taylor a la función $-\log(1 - {}^{z}\!/_{w})$), y $g(z)$ es también entera. Hadamard estudió las funciones de género[5] finito k, que se pueden caracterizar como aquéllas para las cuales g y todos los polinomios p_w tienen grado $\leq k$. En el

[4] Las funciones holomorfas se definen sobre un subconjunto abierto del plano complejo $\mathbb{C}$ y con valores en $\mathbb{C}$, que además son complejo-diferenciables en cada punto. Esta condición es mucho más fuerte que la diferenciabilidad en caso real e implica que la función es infinitamente diferenciable y que puede ser descrita mediante su serie de Taylor. El término función analítica se usa a menudo en vez del de "función holomorfa", especialmente para cuando se trata de la restricción a los números reales de una función holomorfa. Una función que sea holomorfa sobre todo el plano complejo se denomina *función entera*. Cuando se dice que una función es "holomorfa en un punto a" significa que no sólo es diferenciable en a, sino que es diferenciable en todo un disco abierto centrado en a, en el plano complejo.

[5] El concepto de *género* fue introducido por el francés Edmond Laguerre (1834-1886) en sus estudios de la distribución de raíces de funciones enteras y sus derivadas (1882).

caso particular de $f(\zeta) = \frac{\operatorname{sen}\zeta}{\zeta}$ se cumple que es entera y par (además sin raíz en 0, por lo que $m = 0$), se tiene $\varphi(z) = f(\sqrt{z})$ es entera con raíces $(\pi\, n)^2$ para $n \geq 1$.

Algunos pudieran pensar que Euler tuvo mucha suerte en su demostración, otros que la intuición de este genio se adelantó a su tiempo, siendo capaz de vislumbrar un resultado fundamental en la historia de la matemática. La enorme "fortuna" de Euler consistió en que φ es una función de género cero, un hecho desde luego nada trivial a priori, por lo que g y los p_w son polinomios de grado cero, así que p_w es idénticamente cero para cada $w = (\pi\, n)^2$, $n \geq 1$, mientras que el factor constante $e^{g(z)}$ satisface $1 = \varphi(0) = e^{g(0)} = e^{g(z)}$, de forma que en el producto de Weierstrass todo factor es 1 a excepción de $(1 - {}^{z}\!/_{w})$ para cada $w = (\pi\, n)^2$, $n \geq 1$.

Figura 8. Jacques Hadamard y Karl Weierstrass.

4. Extensiones al problema

El resultado de Euler consideraba el coeficiente que multiplica a x^2 en el producto infinito, pero se puede hacer lo mismo para el resto de potencias. En particular el problema de Basilea se resuelve como la identidad $c_1 = b_1$, coeficientes definidos en las ecuaciones (10) y (11), pero del mismo modo se pueden obtener identidades generalizadas $c_n = b_n$, para todo $n \geq 1$. Si se considera el cálculo del término en x^4 equivale a elegir dos factores (distintos) de la forma $\frac{x^2}{n^2\pi^2}$ y tomar el resto igual a 1. Se obtiene en ese caso

$$\frac{1}{2\pi^4}\sum\frac{1}{m^2n^2}$$

donde la suma se realiza sobre los pares de números naturales $(m,n) \geq 1$ con $m \neq n$. Otra manera de expresar dicha suma se basa en considerar en primer lugar todos los pares de números naturales y restar a continuación aquellos en los cuales $m = n$. De este modo se puede utilizar la solución al Problema de Basilea para simplificar la expresión:

$$\sum_{\substack{m,n\geq 1\\ m\neq n}}^{\infty}\frac{1}{m^2n^2} = \left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right) - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{36} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$

Si se divide por $2\pi^4$ y se iguala el coeficiente $c_2 = \dfrac{1}{5!} = \dfrac{1}{120}$ del desarrollo en serie, se ve que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

En general, dado $k \geq 2$, con $k \in \mathbb{Z}$ se designa por $\zeta(k)$ a la suma de los recíprocos de orden k de los números naturales, que siempre resulta convergente:

$$\zeta(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \tag{12}$$

Para cuando Euler había resuelto el problema de Basilea, Jakob Bernoulli había fallecido hacía 29 años. De hecho su hermano Johan, que sabía que Jakob había sido el que más en profundidad había trabajado en este problema, manifestaba en una comunicación a Euler:

"De este modo el deseo más ferviente de mi hermano se ha cumplido ... ¡Si estuviera aquí!"

En contraposición a las acusaciones sufridas por su falta de rigurosidad, la seguridad, clarividencia e intuición con la que Euler contaba estaban al alcance de muy pocos elegidos y confiaba con fe ciega en que el resultado al que había llegado era el correcto. Por ello continuó trabajando en nuevas demostraciones que hicieran de su demostración una verdad incuestionable.

Entre 1734 y 1748 Euler trabajó de forma incansable intentando depurar los resultados a los que había llegado. Fruto de sus investigaciones y siguiendo la notación utilizada en (12), Euler fue capaz de calcular todos los valores de $\zeta(2n)$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$, obteniendo los desarrollos siguientes:

$$\pi \cot \pi x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x^2}{x^2 - n^2}$$

$$\pi \cot \pi x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2\pi)^{2n} B_{2n}}{(2n)!} x^{2n}$$

donde B_{2n} son los denominados *números de Bernoulli*[6] que resultan ser números racionales definidos por la *función generatriz* $G(x)$:

$$G(x) = \frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{B_2}{2!} x^2 + \cdots + \frac{B_n}{n!} x^n + \cdots \text{ , si } |x| < 2\pi$$

Se puede ver que

$$\frac{2x^2}{x^2 - n^2} = -\frac{2x^2}{n^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x^2}{n^2}} = -\frac{2x^2}{n^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{n^2} \right)^k$$

por lo que identificando coeficientes, se obtiene la siguiente identidad

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = (-1)^{k-1} \frac{(2\pi)^{2k}}{2 \cdot (2k)!} B_{2k}$$

Por ejemplo

$$\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}; \quad \zeta(8) = \frac{\pi^8}{9.450}; \quad \zeta(10) = \frac{\pi^{10}}{93.555}; \quad \ldots^{7}$$

[6] Sabiendo que $B_0 = 1$, el resto de números se calcula de forma recursiva mediante la siguiente expresión:

$$B_k = -\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} \frac{B_i}{k+1-i}$$

Todos los estudios sobre el Problema de Basilea realizados por Euler culminan en su obra *"Introductio In Analysin Infinitorum"* en 1748. En la Proposición 168 del Capítulo X del Tomo Primero de dicha obra, un pletórico Euler expresa de forma particular su más que justificado gozo:

> *"He encontrado ahora y contra todo pronóstico una expresión elegante para la suma de la serie que depende de la cuadratura del círculo ... He encontrado que seis veces la suma de esta serie es igual al cuadrado de la longitud de la circunferencia cuyo diámetro es 1. Se hace patente así que de todas las series infinitas contenidas en la forma general*
>
> $$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + etc.,$$
>
> *que, cada vez que n fuere número par, se podrían expresar mediante la periferia del círculo π; en efecto, la suma de la serie mantendrá siempre una proporción racional con π. Para que se perciba más claramente su valor, adjunto aquí varias sumas de tales series expresadas de manera más cómoda."*

En general $\zeta(2n)$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$ es un múltiplo racional de π^{2n}. Una consecuencia que se deduce de este resultado es que, todos los números de la forma $\zeta(2n)$ son *trascendentes*, ya que si alguno verificase una ecuación polinomial con coeficientes enteros, entonces deduciríamos que π también satisface una ecuación de este tipo, lo cual es imposible puesto que Joseph Liouville (1809-1882) demostró en 1844 que π es trascendente.

Tabla 1. Valores de $\zeta(2) = 1,64493406684822\ldots$

n	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$	Error $\lvert\epsilon\rvert$
203	1,64002007182253	0,00491399502569
1.071	1,64400079580071	0,00093327104751
29.354	1,64490000052109	0,00003406632713
245.891	1,64493000001389	0,00000406683433
3.352.001	1,64493400000005	0,00000006684817
4.195.876	1,64493406000005	0,00000000684817
4.304.236	1,64493406600003	0,00000000084819
4.319.108	1,64493406680001	0,00000000004821
4.319.854	1,64493406684000	0,00000000000822
4.320.004	1,64493406684804	0,00000000000018

Otro modo de obtener los valores de $\zeta(2n)$ es mediante las series de Fourier a través de la igualdad de Bessel,

$$\int_0^1 \|f(x)\|^2 \, dx = \sum_{-\infty}^{\infty} \left\|\hat{f}(x)\right\|^2$$

aplicada a las funciones $f(x) = x^k$, $0 \leq x < 1$, siendo $\hat{f}(x)$ la transformada de Fourier de la

[7] Existen muchos soportes de software con los que poder obtener cualquier valor de la función zeta de Riemann. Por ejemplo en *Maxima* (http://andrejv.github.io/wxmaxima/), introduciendo la instrucción *bfzeta(s,n)*, el programa retorna el valor de la función zeta de Riemann para el argumento s con n dígitos de exactitud. Otra posibilidad es utilizar la página de *Wolfram Alpha*© (https://www.wolframalpha.com/), donde la instrucción *Zeta(n)* retorna tanto el valor exacto de dicha función (en el caso de que n sea par) como su aproximación decimal con todos los dígitos exactos que se desee. Cabe destacar que entre 1740 y 1744, Euler encontró "a mano" todos los inversos de las potencias pares de los números naturales hasta el orden 26.

función $f(x)$, es decir:

$$\hat{f}(\gamma) = \int_0^1 f(x)\, e^{-2\pi i n x \gamma}\, dx$$

5. ...¡Y por fin una demostración definitiva!

La esperada demostración *rigurosa* del Problema de Basilea necesitaba tres premisas fundamentales:

A. Demostrar la igualdad

$$\frac{1}{2}(\operatorname{arc\,sen} x)^2 = \int_0^x \frac{\operatorname{arc\,sen} t}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$$

la cual se resuelve mediante el cambio de variable $u = \operatorname{arc\,sen} t$.

B. Realizar el desarrollo en serie de la función $\operatorname{arc\,sen} x$. Para ello

$$\operatorname{arc\,sen} x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \int_0^x (1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\, dt$$

sustituyendo el integrando por su serie binomial e integrando término a término se obtiene

$$\begin{aligned}
\operatorname{arc\,sen} x &= \int_0^x \left(1 + \frac{1}{2}\, t^2 + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}\, t^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}\, t^6 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2^4\cdot 4!}\, t^8 + \cdots\right) dt = \\
&= t + \frac{1}{2}\cdot\frac{t^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{t^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{t^7}{7} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{t^9}{9} + \cdots \Big|_0^x = \\
&= x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{x^9}{9} + \cdots
\end{aligned}$$

C. Demostrar la relación

$$\int_0^1 \frac{t^{n+2}}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \frac{n+1}{n+2}\int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}}\, dt \text{ para } n \geq 1$$

El término de la izquierda de la igualdad anterior $J = \int_0^1 \frac{t^{n+2}}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$, se resuelve mediante integración por partes haciendo $u = t^{n+1}$ y

$$dv = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\, dt, \text{ para obtener}$$

$$\begin{aligned}
J &= \left(-t^{n+1}\sqrt{1-t^2}\right)\Big|_0^1 + (n+1)\int_0^1 t^n\sqrt{1-t^2}\, dt = \\
&= 0 + (n+1)\int_0^1 \frac{t^n(1-t^2)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = (n+1)\int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}}\, dt - (n+1)J
\end{aligned}$$

Resultando

$$(n+2)J = (n+1)\int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}}\, dt,$$

obteniendo el resultado que se buscaba.

La irracionalidad de π

Aunque ya había sido conjeturada por Aristóteles, fue el suizo Johann Heinrich Lambert (1728-1777) el que demostraba la irracionalidad de π en 1761. Para su demostración utilizó la expresión de este número mediante una fracción continua infinita. Lambert utilizó la propiedad biunívoca de que cada función continua finita se puede expresar mediante un número racional y viceversa, si π fuera racional, debería existir tal fracción continua, y por reducción al absurdo o contradicción llegó al resultado esperado. Veamos su razonamiento, si x es un número racional, entonces, la función $\arctan x$ puede expresarse mediante una función continua del siguiente modo:

$$\arctan x = \cfrac{x}{1+\cfrac{x^2}{3+\cfrac{4x^2}{5+\cfrac{9x^2}{7+\cfrac{16x^2}{9+\ddots}}}}}$$

Considerando $x = 1$, se obtiene que $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$, y por lo tanto:

$$\frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{4}{5+\cfrac{9}{7+\cfrac{16}{9+\ddots}}}}}$$

En este punto, si $\pi = \frac{a}{b}$, entonces $\frac{\pi}{4} = \frac{a}{4b}$, y la fracción continua tendría un número finito n de términos. En virtud de que dicha fracción tiene una estructura ordenada, se puede comprobar de un modo sencillo que contiene infinitos términos, lo que contradice la hipótesis de partida, y por lo tanto se concluye que π es irracional.[8] $\square$

Con todos estos mimbres, Euler comenzó a elaborar la demostración definitiva. Inicialmente hizo $x = 1$ en la premisa A., obteniendo:

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{2}(\operatorname{arc\,sen} 1)^2 = \int_0^1 \frac{\operatorname{arc\,sen} t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

A continuación sustituyó $\operatorname{arc\,sen} t$ por su desarrollo en serie obtenido en la premisa B., e integró término a término:

$$\frac{\pi^2}{8} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt + \frac{1}{2\cdot 3}\int_0^1 \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}\,dt + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}\int_0^1 \frac{t^5}{\sqrt{1-t^2}}\,dt + \\ + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}\int_0^1 \frac{t^7}{\sqrt{1-t^2}}\,dt + \cdots$$

[8] Para profundizar en el tema, se recomienda leer NIVEN, I. *"A simple proof that π is irrational"*, Bulletin American Mathematics Society, 56(6), p.509, 1947, donde aparece una demostración de la irracionalidad de π y π^2 mediante la utilización del cálculo.

Sabiendo que $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = 1$, Euler calculó las otras integrales utilizando la premisa C.:

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{2\cdot 3}\left[\frac{2}{3}\right] + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}\left[\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\right] + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}\left[\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\right] + \cdots =$$
$$= 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \cdots$$

expresión en la que únicamente aparecen la suma de la serie de los recíprocos de los cuadrados de los números impares.

Para llegar al resultado esperado, Euler separó por un lado la suma de los términos impares y por otro la de los pares, resultando

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots\right) =$$
$$= \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots\right) + \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots\right)$$

Esto es,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

Euler despejó y llegó al resultado esperado:

$$\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \square$$

Esta segunda demostración no por ser más rigurosa deja de ser igualmente tan genial como la primera. Euler aplicó este resultado en campos muy dispares. Llegó a afirmar, que su *"principal uso"* era *"el cálculo de los logaritmos"*. Euler encontró un método eficaz de calcular logaritmos de senos, y declaraba:

> *"...con estas fórmulas, podemos encontrar tanto el logaritmo natural como el neperiano del seno y del coseno de cualquier ángulo, incluso sin conocer los senos y cosenos."*

6. El nacimiento de la Función Zeta

Figura 9. Bernhard Riemann.

Si juzgásemos la importancia de un resultado o de una demostración por la cantidad de literatura que se ha escrito en torno a ella o la cantidad de obras derivadas posteriores que se han publicado, sin duda el Problema de Basilea debe ser uno de los problemas con mayúsculas de la historia de las matemáticas.

Todos las investigaciones de Euler desembocaron un siglo más tarde en los trabajos del alemán Bernhard Riemann (1826-1866). Riemann publicó en la Academia de Berlín en noviembre de 1859 su genial artículo *"Über die Anzahl der Primzahlen unterei-ner gegebenen Grösse"* (puede traducirse como *"Sobre la cuantía de números primos menores que una cantidad dada"*), significando un antes y un después en el desarrollo de las matemáticas. A pesar de lo escueto de dicha publicación la cual alcanzaba tan sólo la cantidad de seis páginas, nunca una relación calidad de resultados frente a cantidad de páginas publicadas pudo haber sido más notable en la historia de las matemáticas y las ciencias. Riemann presenta y estudia las propiedades de lo que pronto pasaría a denominarse *Función Zeta de Riemann*.

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

A diferencia de (12), s no tiene por qué ser un número natural, sino que puede tomar cualquier valor complejo cuya parte real sea estrictamente mayor que 1 (condición necesaria para que la serie converja). De forma paradójica, el hecho de que la variable pueda tomar cualquier valor complejo permite usar la función zeta de Riemann con la finalidad de predecir fenómenos relacionados con la distribución de los números primos, hecho este un tanto sorprendente puesto que en la definición de $\zeta(s)$ intervienen todos los números naturales.

La irracionalidad de π^2 implica la existencia de infinitos números primos

Como curiosidad, se puede comprobar que la irracionalidad de π^2, y por lo tanto la irracionalidad de $\zeta(2)$, implica que existen infinitos números primos[9]. Partiendo de la siguiente expresión

$$\frac{\pi^2}{6} = \prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{1-\frac{1}{p^2}} \Rightarrow \frac{\pi^2}{6} = \prod_{p \text{ primo}} \frac{p^2}{p^2-1} \tag{13}$$

si se supone que existe una cantidad finita de números primos, entonces el producto de la derecha de la igualdad (13) es finito, por lo que el miembro derecho de dicha expresión es un producto finito de números racionales ... y por lo tanto $\frac{\pi^2}{4}$ es racional, lo cual resulta contradictorio con la hipótesis de partida, ya que π^2 es irracional, por lo tanto no puede haber una cantidad finita de números primos. $\square$

Los trabajos de Euler ponen precisamente de manifiesto el origen de la relación de la función zeta con los números primos a través de la llamada *fórmula de Euler*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} \tag{14}$$

donde se puede identificar $\zeta(s)$ con un producto infinito indexado por los números primos. Para demostrar (14), si z es un número complejo de módulo estrictamente menor que 1, entonces la serie geométrica de razón z es convergente y su suma vale

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots$$

De este modo, cada factor del producto de (14) se puede expresar por su desarrollo

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \cdots$$

[9] Originalmente dicho resultado fue demostrado por el matemático francés Adrien Marie Legrende (1752-1833) en su obra *"Éléments de Géométrie"* (1794), junto con una prueba más rigurosa de la irracionalidad de π que la de Lambert, además de conjeturar su trascendencia.

y expresar igualmente el término de la derecha en la fórmula de Euler como

$$\prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\cdots\right)$$
$$\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{5^4}+\cdots\right)\cdots\left(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^3}+\frac{1}{p^4}+\cdots\right)\cdots$$

Desarrollando los paréntesis, se obtienen los inversos de todos los posibles productos finitos de números primos. Como la descomposición en factores primos de cualquier número natural es única, cada sumando $\frac{1}{n^s}$ aparece una única vez. Por ejemplo como $20 = 2^2 \times 5$, el término $\frac{1}{20^s}$ se obtiene eligiendo $\frac{1}{2^{2s}}$ en el primer paréntesis, $\frac{1}{5}$ en el segundo y 1 en todos los demás. De este modo puede observarse que ambos lados de la igualdad coinciden para cualquier valor de s.

Figura 10. Jeffrey Lagarias.

La aparición de la Función Zeta de Riemann significó una revolución en teoría de números, de hecho es la clave fundamental de la denominada *"hipótesis de Riemann"*, quizás uno de los problemas matemáticos abiertos más importantes de toda la historia de las matemáticas. Dicha hipótesis afirma que todos los ceros no triviales $s \in \mathbb{C}$ de la función zeta satisfacen que $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$. La función zeta se anula en todos los enteros negativos, que se llaman "ceros triviales". Recientemente, Jeffrey Lagarias (1949-) sorprendió a la comunidad matemática demostrando que la hipótesis de Riemann es equivalente a la siguiente afirmación elemental: Para todo $n \geq 1$,

$$\sigma(n) \leq H_n + e^{H_n}\log(H_n)$$

con igualdad estricta cuando $n = 1$, donde $\sigma(n)$ es la función suma de divisores[10], y H_n es el n-ésimo número armónico, es decir

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

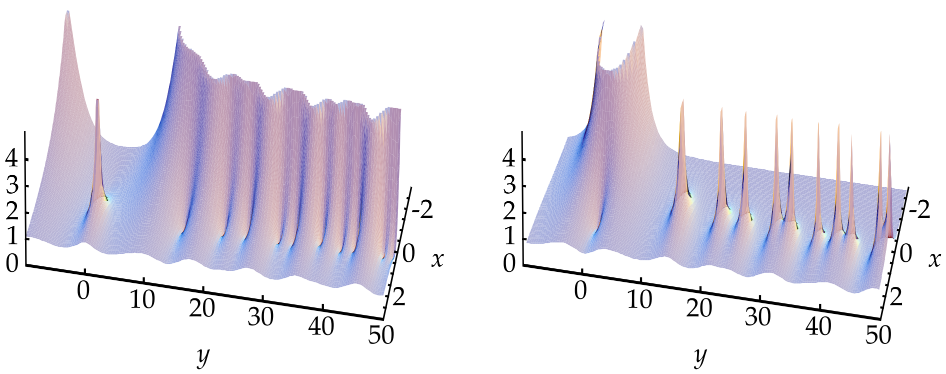

Figura 11. Representación tridimensional de las funciones $|\zeta(x+iy)|$ y $|\zeta(x+iy)|^{-1}$.

[10] En general la suma de funciones divisor positivas $\sigma_x(n)$ está definida como la suma de las x^k potencias de los divisores positivos de n, o

$$\sigma_x(n) = \sum_{d|n} d^x$$

Las notaciones $d(n)$ y $\tau(n)$ son utilizadas para denotar $\sigma_0(n)$, o el número de divisores de n. Cuando $x = 1$, la función es denominada *función sigma* o *función suma de divisores*, y la variable subscrita es omitida, luego $\sigma(n)$ es equivalente a $\sigma_1(n)$. Por ejemplo, $\sigma_1(12) = \sigma(12) = 1^1 + 2^1 + 3^1 + 4^1 + 6^1 + 12^1 = 28$.

En el presente documento, se ha expuesto hasta el momento un estudio de valores de las sumas de las series infinitas de los recíprocos de los números naturales con potencias pares. ¿Pero qué ocurre con las potencias impares? Por extraño que pudiera resultar ni siquiera se conoce una expresión cerrada para la suma de los recíprocos de los cubos, aunque su irracionalidad fue demostrada por Roger Apéry (1916-1994) en junio de 1978, durante las *Journées Arithmétiques de Luminy* [2]. Desgraciadamente y aunque en su momento la demostración de Apéry fue considerada una auténtica proeza por la comunidad matemática, no se puede hacer extensible a otros valores impares. De hecho existen muchos resultados pendientes de demostrar todavía en este campo como son la trascendencia o no de $\zeta(3)$, o la irracionalidad de multitud de valores impares de la función zeta, aunque en este último caso caben destacar estudios como los del francés Tanguy Rivoal (1981-) [11] en el año 2000 que demostró la existencia de infinidad de valores irracionales de la función zeta para valores enteros impares de ésta o como los del ruso Wadim Zudilin [15] en el año 2001, que demostró que al menos uno de los cuatro valores $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$ o $\zeta(11)$ es irracional, resultado este último que le valdría el distinguido premio de la Sociedad Hardy-Ramanujan ese mismo año. Respecto a la expresión cerrada de valores de la función zeta para enteros impares, cabe destacar los estudios del francés Simon Plouffe [10] en el año 2006, donde pone de manifiesto expresiones, desde luego nada triviales, para algunos de dichos enteros.

Figura 12. Roger Apéry, Wadim Zudilin y Simon Plouffe.

Cabe comentar que el resultado obtenido por Apéry sobre la irracionalidad de $\zeta(3)$, inspiró a muchos otros autores que construyeron nuevos métodos vanguardistas basados fundamentalmente en posteriores investigaciones de dicho autor sobre las sucesiones de aproximantes racionales[11], cuyo objetivo fundamental es buscar una explicación más profunda de dicha irracionalidad. Parece ser que todos estos métodos coinciden, teniendo como origen común, un problema de aproximación simultánea, hecho denominado *fenómeno de Apéry*. Por poner un ejemplo de dichos métodos, uno de ellos se basa en la integral doble, denominada *integral de Beukers*, que involucra los polinomios de Legrende, de manera que

$$\begin{aligned} r_n^{(0,0)} = q_n^{(0,0)}\zeta(3) - p_n^{(0,0)} &= -\int_0^1 \int_0^1 \frac{\log xy}{1-xy} L_n(x) L_n(y)\, dx\, dy \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{(xyz(1-x)(1-y)(1-z))^n}{(1-(1-xy)z)^{n+1}}\, dx\, dy\, dz \end{aligned}$$

[11] Para profundizar en el tema se recomienda leer Soria Lorente, A. Tesis Doctoral: *"Aproximaciones simultáneas e irracionalidad de los valores de la función Zeta de Riemann"*, Universidad Carlos III de Madrid, noviembre, 2012.

donde

$$q_n^{(0,0)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{k}^2 \binom{n}{k}^2, \text{ y } p_n^{(0,0)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{k}^2 \binom{n}{k}^2 \gamma_{n,k}$$

$$\gamma_{n,k} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^3} + \sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{j-1}}{2j^3} \binom{n+j}{j}^{-1} \binom{n}{j}^{-1}$$

son los denominados aproximantes racionales de Apéry, y

$$L_n(z) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n} z^n (1-z)^n = \sum_{k=0}^{n} l_k^{(n)} z^k, \quad l_k^{(n)} = (-1)^k \binom{n+k}{k} \binom{n}{k}$$

corresponden a los polinomios de Legrende, ortogonales con respecto a la medida de Lebesgue en (0,1).

7. Otras demostraciones

La estrecha conexión entre el problema de Basilea y la Teoría de Números a través de la función Zeta, ha provocado siempre un interés creciente por encontrar nuevas vías que lograran llegar al genial resultado final conseguido por Euler. Como se ha podido comprobar, el problema de Basilea está íntimamente relacionado con el número π, por lo que la carrera por definir de manera más exacta dicho número, se traducía en una definición más exacta del resultado del problema planteado. Multitud de autores han trabajado con varios objetivos claros como facilitar los cálculos de la suma infinita o aumentar la velocidad de convergencia de dicha serie. Se presentan aquí de manera prácticamente literal a como sus autores concibieron, algunas vías novedosas de afrontar el problema y conseguir la solución final esperada.

7.1. LeVeque (1956)

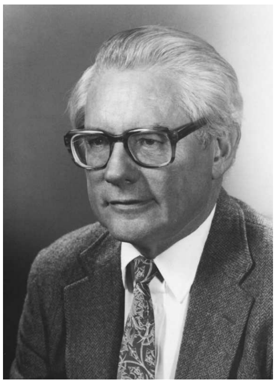

Figura 13. William J. LeVeque.

William Judson LeVeque (1923-2007) trabajó fundamentalmente en Teoría de Números, especialmente en números trascendentes, distribución uniforme discreta (teoría de la probabilidad) y aproximaciones diofánticas. Destaca su trayectoria como director ejecutivo de la Sociedad Matemática Americana desde 1977 hasta su jubilación en 1988, coincidiendo con una época de frenético crecimiento en la utilización de ordenadores en publicaciones académicas de la misma. A lo largo de su vida escribió un nutrido número de libros de texto que sirvieron de referencia prácticamente obligada y cuya aparición ayudó en gran medida a que la teoría de números experimentase un gran desarrollo en los EE.UU. La demostración que aquí presentamos aparece en su libro *"'Topics in Number Theory"* (*"Asuntos sobre Teoría de Números"*) (1956) en el que afirmaba:

"'No tengo ni la menor idea sobre el origen del problema, pero estoy bastante convencido de que no lo encontré yo."

Su planteamiento inicial consiste en la obtención de la integral doble (15) mediante dos caminos bien diferenciados.

$$I := \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy}\, dx\, dy \tag{15}$$

El primer camino consiste en considerar el término $\frac{1}{1-xy}$ como la suma de una serie geométrica, y por lo tanto equivalente a su desarrollo. Descomponiendo los sumandos como productos e integrando resulta:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_0^1 \sum_{n\geq 0} (xy)^n dx\, dy = \sum_{n\geq 0} \int_0^1 \int_0^1 x^n y^n \, dx\, dy = \\ &= \sum_{n\geq 0} \left(\int_0^1 x^n \, dx \right) \left(\int_0^1 y^n \, dy \right) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{n+1} = \\ &= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \zeta(2) \end{aligned}$$

Esta evaluación también demuestra que esta integral doble (de una función positiva con un polo en $x = y = 1$) es finita. Del mismo modo, obsérvese que dicha evaluación puede realizarse en sentido opuesto, de forma que la obtención de $\zeta(2)$ conduce a la integral doble I.

El segundo camino para evaluar la integral I consiste en realizar un cambio de coordenadas, de modo que las nuevas queden definidas como

$$u := \frac{y+x}{2} \quad \text{y} \quad v := \frac{y-x}{2}$$

de modo que el dominio de integración con este cambio es un cuadrado de arista $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, obtenido a partir del dominio original, rotando 45° y después aplicando una homotecia reductora según el factor de escala de $\sqrt{2}$. Sustituyendo $x = u - v$ e $y = u + v$ resulta

$$\frac{1}{1-xy} = \frac{1}{1-u^2+v^2}$$

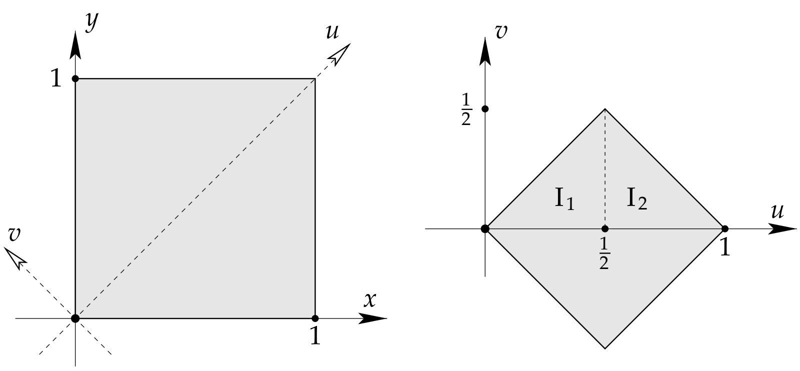

Figura 14. Representación gráfica del cambio de variables y nuevo dominio de integración.

Para transformar la integral se debe reemplazar $dx\, dy$ por $2\, du\, dv$, ya que la nueva transformación de coordenadas realizada reduce el área según el factor constante 2 (el jacobiano de la transformación). Puede observarse que tanto el dominio de integración como la función a integrar son simétricos respecto del eje u (figura 14), por lo tanto únicamente se necesita calcular la integral sobre la mitad superior del nuevo dominio, y tener en cuenta un factor adicional de 2. Se descompone por lo tanto la integral en dos partes de manera más natural:

$$I = 4 \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^u \frac{dv}{1-u^2+v^2} \right) du + 4 \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\int_0^{1-u} \frac{dv}{1-u^2+v^2} \right) du$$

Sabiendo que $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$, se obtiene:

$$I = 4\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right) du + 4\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,\arctan\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right) du$$

Se puede evaluar dichas integrales mediante los cambios $u = \operatorname{sen}\theta$ y $du = \cos\theta$ respectivamente. Sin embargo si se procede de un modo más directo, utilizando las derivadas de $g(x)$ y $h(x)$:

$$\begin{aligned} g(x) &= \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right) \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \\ h(x) &= \arctan\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right) = \arctan\left(\sqrt{\frac{1-u}{1+u}}\right) \Rightarrow h'(x) = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \end{aligned}$$

Considerando que

$$\int_a^b f'(x)\,f(x)\,dx = \left[\frac{1}{2}\,f(x)^2\right]_a^b = \frac{1}{2}\,f(b)^2 - \frac{1}{2}\,f(a)^2$$

resulta

$$\begin{aligned} I &= 4\int_0^{\frac{1}{2}} g'(u)\,g(u)\,du + 4\int_{\frac{1}{2}}^{1} -2\,h'(u)\,h(u)\,du = \\ &= 2\left[g(u)^2\right]_0^{\frac{1}{2}} - 4\left[h(u)^2\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \\ &= 2\,g\left(1/2\right)^2 - 2\,g(0)^2 - 4\,h(1)^2 + 4\,h\left(1/2\right)^2 = \\ &= 2\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 - 0 - 0 + 4\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 = \frac{\pi^2}{6} \end{aligned}$$

□

7.2. Beukers, Kolk, Calabi (1993)

Frits Beukers (1953-) presentó su tesis doctoral en la Universidad de Leiden (Holanda) bajo la dirección de Robert Tijdeman, con un trabajo sobre la Ecuación General de Ramanujan-Nagell. Se convirtió en profesor de Leiden y más tarde de la Universidad de Utrecht donde imparte actualmente docencia. Trabaja en teoría de números, fundamentalmente en cuestiones de trascendencia e irracionalidad, y funciones hipergeométricas.

Johan A.C. Kolk (1947-) es profesor en el Instituto Matemático de la Universidad de Utrecht (Holanda). Sus directores de tesis fueron J.J. Duistermaat (Universidad de Utrech) y V.S. Varadarajan (Universidad de California en los Ángeles). Ha publicado trabajos en campos como el Análisis Armónico en Grupos Semisimples de Lie, Teoría de Distribuciones y Análisis Clásico.

Eugenio Calabi (1923-) de origen judío e italiano y nacionalizado estadounidense, es profesor emérito desde 1994 en la Universidad de Pensilvania donde ingresó en su facultad de matemáticas en 1964. Sus campos de investigación se centran fundamentalmente en geometría diferencial y ecuaciones en derivadas parciales y sus aplicaciones. En 1953 estableció la llamada *Conjetura de Calabi*, demostrada posteriormente por Shing-Tung Yau en 1977 y convertida por lo tanto en teorema, que postulaba la existencia de ciertas estructuras geométricas específicas (espacios hexadimensionales) bajo ciertas condiciones topológicas. Estas investigaciones están relacionadas con la Teoría de las Supercuerdas.

Figura 15. Frits Beukers, Johan A.C. Kolk y Eugenio Calabi.

La demostración presentada aquí proviene del artículo *"Sums of generalized harmonic series and volumes"* (*"Sumas de series armónicas generalizadas y volúmenes"*) (1993). El punto de partida de dicha demostración consiste en separar la suma de dicha serie en sus términos pares e impares del mismo modo que tanto Jakob Bernoulli (éste sin éxito) y Leonhard Euler (al inicio de sus investigaciones) procedieron en el pasado. De este modo, tal y como se demuestra en la página 31 de este documento, los términos pares suman claramente $\frac{1}{4}\zeta(2)$ (basta con tomar factor común 2^{-2}), y por lo tanto los términos impares suman $\frac{3}{4}\zeta(2)$. Con estas premisas, es necesario demostrar entonces la siguiente igualdad:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Al igual que en la demostración de LeVeque, se puede expresar dicha suma como una integral doble, de forma que

$$J = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-x^2y^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

Con el fin de calcular la integral J, los autores propusieron realizar el siguiente desde luego nada trivial cambio de coordenadas:

$$u := \arccos\sqrt{\frac{1-x^2}{1-x^2y^2}} \quad \text{y} \quad v := \arccos\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2y^2}}$$

Para realizar el cálculo, se puede ignorar la frontera del dominio y considerar las variables x e y en los intervalos $0 < x < 1$ y $0 < y < 1$. En ese caso las variables u y v estarán en el triángulo $u > 0, v > 0, u + v < \frac{\pi}{2}$. La transformación de coordenadas anteriormente realizada es invertible de forma explícita mediante la substitución

$$x = \frac{\operatorname{sen} u}{\cos u} \quad \text{y} \quad y = \frac{\operatorname{sen} v}{\cos v}$$

Se puede comprobar de manera sencilla que dichas fórmulas definen una transformación biyectiva entre el interior del cuadrado unidad $S = \{(x, y) : 0 \leq x, y \leq 1\}$ y el interior del triángulo $T = \left\{(u, v) : u, v \geq 0, u + v \leq \frac{\pi}{2}\right\}$.

Para completar el cambio de coordenadas de dicha transformación, hay que calcular el jacobiano de la misma, lo cual de forma sorprendente resulta ser:

$$\begin{vmatrix} \frac{dx}{du} & \frac{dx}{dv} \\ \frac{dy}{du} & \frac{dy}{dv} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\cos u}{\cos v} & \frac{\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v}{\cos^2 v} \\ \frac{\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v}{\cos^2 u} & \frac{\cos v}{\cos u} \end{vmatrix} = 1 - \frac{\operatorname{sen}^2 u \operatorname{sen}^2 v}{\cos^2 u \cos^2 v} = 1 - x^2y^2$$

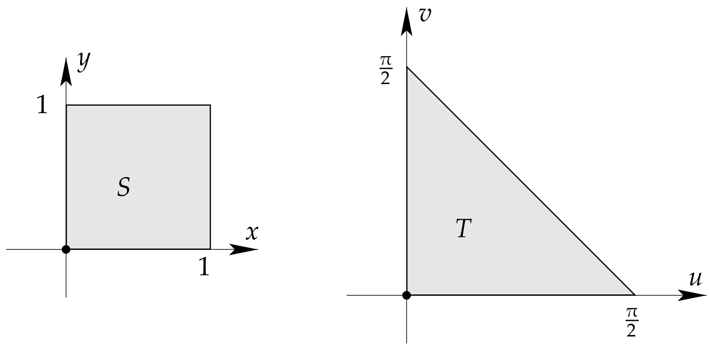

Figura 16. Representación gráfica del cambio de variables y nuevo dominio de integración.

Luego la integral J buscada se transforma en:

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}-u} 1 \, du \, dv$$

lo cual es precisamente el área del triángulo T, es decir

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{8} \qquad \square$$

7.3. Yaglom (1954)

Isaac Moiseevich Yaglom (1921-1988) destacó por su prolífica carrera como matemático y sobre todo como divulgador de ciencia, muchos de sus trabajos publicados junto a su hermano gemelo Akiva. Durante toda su trayectoria profesional mantuvo una actitud poco ortodoxa con respecto a la ideología imperante en la Unión Soviética de la época de la guerra fría. Creó una escuela científica, y trabajó como docente inculcando el amor por las matemáticas a multitud de estudiantes. Trabajó intensamente en el campo de la geometría no euclidiana. Estuvo interesado en los números complejos en espacios con métricas degeneradas, de hecho este fue el tema de su tesis doctoral que defendió en 1964, y tras la cual accedió a la universidad como profesor titular. Además se interesó por la teoría de las métricas proyectivas y su interpretación utilizando números complejos, escribiendo una serie de artículos al respecto sobre geometría diferencial y la geometría simpléctica del espacio. En 1968, junto a otros científicos firmaría un manifiesto en favor del disidente Alexander Esenin-Volpin lo que le valió su expulsión del Instituto Pedagógico Estatal de Moscú, tras lo cual trabajó en horarios vespertinos en el Instituto Metalúrgico. Tras varios años un tanto errantes por su particular visión crítica hacia el régimen comunista, encontró refugio en la Universidad Estatal de Yaroslavl, donde enseñó durante muchos años. Al inicio de la perestroika, ingresó en la Academia de Ciencias Pedagógicas donde trabajó hasta su muerte.

Akiva Moiseevich Yaglom (1921-2007) fue un destacado científico, matemático y geofísico. Al igual que su hermano gemelo, trabajó intensamente en la divulgación y popularización de las matemáticas, destacando su intensa colaboración junto a matemáticos de la talla de Andréi Kolmogórov, convirtiéndose en su principal discípulo. Son particularmente conocidas sus contribuciones a la teoría estadística de la turbulencia y la teoría de procesos aleatorios. Trabajó en varias instituciones en Rusia como el Instituto de Geofísica Teórica, y desde 1992 hasta su muerte trabajó en el Instituto Tecnológico de Massachusetts (MIT).

La siguiente demostración apareció en la versión rusa del libro *"Elementary Presentations of Nonelementary Problems"* (*"Problemas no elementales expuestos de forma elemental"*) (1954) de los hermanos Yaglom. Más tarde apareció en otras publicaciones como la revista *Eureka* en 1982,

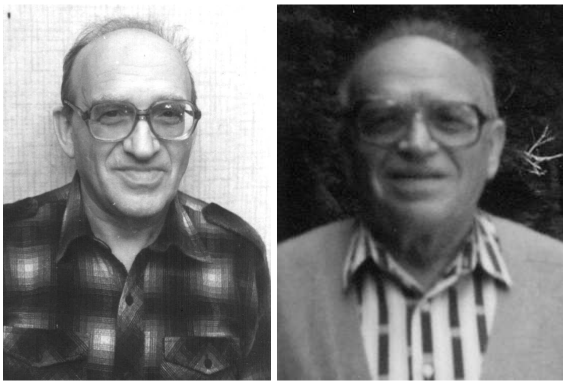

Figura 17. Los gemelos Isaac y Akiva Moiseevich Yaglom.

expuesta por John Scholes, aunque éste declaró que había aprendido la demostración de Peter Swinnerton-Dyer, y que dicha prueba era *"de conocimiento general en Cambridge a finales de la década de 1960"*.

El punto de partida consiste en establecer una relación de valores de la función "cotangente al cuadrado". Para todo $m \geq 1$, se tiene[12]:

$$\cot^2\left(\frac{\pi}{2m+1}\right) + \cot^2\left(\frac{2\pi}{2m+1}\right) + \ldots + \cot^2\left(\frac{m\pi}{2m+1}\right) = \frac{2m(2m-1)}{6} \tag{16}$$

Veamos como se obtiene la expresión (16). Si x es un número real que pertenece al intervalo $0 < x < \frac{\pi}{2}$, entonces por la *fórmula de Moivre* se establece que $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$. Si se considera la n-ésima potencia se tiene que $e^{inx} = (e^{ix})^n$, resultando:

$$\cos nx + i \operatorname{sen} nx = (\cos x + i \operatorname{sen} x)^n$$

La parte compleja resulta:

$$\operatorname{sen} nx = \binom{n}{1} \operatorname{sen} x \cos^{n-1} x - \binom{n}{3} \operatorname{sen}^3 x \cos^{n-3} x \pm \ldots \tag{17}$$

Se toma n como un entero positivo impar, esto es $n = 2m+1$, y para x se consideran los m valores diferentes $x = \frac{r\pi}{2m+1}$ para $r = 1, 2, \ldots, m$. Para cada uno de los valores anteriores, se tiene que $nx = r\pi$, y por lo tanto $\operatorname{sen} nx = 0$, en tanto en cuanto que $0 < x < \frac{\pi}{2}$ implica que para $\operatorname{sen} x$ se tienen m valores positivos distintos.

En particular dividiendo (17) por $\operatorname{sen}^n x$, se obtiene

$$0 = \binom{n}{1} \cot^{n-1} x - \binom{n}{3} \cot^{n-3} x \pm \ldots$$

esto es,

$$0 = \binom{2m+1}{1} \cot^{2m} x - \binom{2m+1}{3} \cot^{2m-2} \pm \ldots$$

para cada uno de los m valores distintos de x. Del polinomio de grado m

$$p(t) := \binom{2m+1}{1} t^m - \binom{2m+1}{3} t^{m-1} \pm \ldots + (-1)^m \binom{2m+1}{2m+1}$$

[12] Para $m = 1, 2, 3$, esto resulta en $\cot^2 \frac{\pi}{3} = \frac{1}{3}$; $\cot^2 \frac{\pi}{5} + \cot^2 \frac{2\pi}{5} = 2$; $\cot^2 \frac{\pi}{7} + \cot^2 \frac{2\pi}{7} + \cot^2 \frac{3\pi}{7} = 5$.

se conocen m raíces distintas

$$a_r = \cot^2\left(\frac{r\pi}{2m+1}\right) \quad \text{para} \quad r = 1, 2, \ldots, m$$

Por lo tanto, el polinomio coincide con

$$p(t) = \binom{2m+1}{1}\left(t - \cot^2\left(\frac{\pi}{2m+1}\right)\right)\cdots\left(t - \cot^2\left(\frac{m\pi}{2m+1}\right)\right)$$

Por la fórmula de Vieta se puede calcular la suma de las raíces directamente examinando los coeficientes de t^{m-1} en $p(t)$ se deduce que la suma de las raíces es[13]:

$$a_1 + \ldots + a_r = \frac{\binom{2m+1}{3}}{\binom{2m+1}{1}} = \frac{2m(2m-1)}{6}$$

lo cual demuestra (16).

Si se sustituye la identidad $\csc^2 x = \cot^2 x + 1$ y se suma m en ambos lados de la igualdad de (16) se tiene:

$$\csc^2\left(\frac{\pi}{2m+1}\right) + \csc^2\left(\frac{2\pi}{2m+1}\right) + \ldots + \csc^2\left(\frac{m\pi}{2m+1}\right) = \frac{2m(2m-1)}{6} + m = \frac{2m(2m+2)}{6} \tag{18}$$

En este momento se tienen todas las herramientas a mano para poder encajar las piezas de la demostración. Si se utiliza que para $0 < y < \frac{\pi}{2}$, se cumple[14]:

$$0 < \operatorname{sen} y < y < \tan y$$

y por lo tanto

$$0 < \cot y < \frac{1}{y} < \csc y$$

lo cual implica que

$$\cot^2 y < \frac{1}{y^2} < \csc^2 y$$

Ahora se aplica la desigualdad doble a cada uno de los m distintos valores de x, y se suman los resultados. Empleando (16) para el término a la izquierda y (18) para el término de la derecha, se obtiene:

$$\frac{2m(2m-1)}{6} < \left(\frac{2m+1}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{2m+1}{2\pi}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{2m+1}{m\pi}\right)^2 < \left(\frac{2m(2m+2)}{6}\right)^2$$

esto es,

$$\frac{\pi^2}{6} \cdot \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-1}{2m+1} < \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{m^2} < \frac{\pi^2}{6} \cdot \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m+2}{2m+1}$$

Tanto el término de la derecha como el de la izquierda convergen a $\frac{\pi^2}{6}$ cuando $m \to \infty$ por lo que se obtiene el resultado por el *teorema del emparedado*[15]. $\square$

[13] Comparación de coeficientes, si $p(t) = c(t - a_1)\cdots(t - a_m)$, entonces el coeficiente de t^{m-1} es $-c(a_1 + \ldots + a_m)$.

[14] $0 < a < b < c$, implica que $0 < \frac{1}{c} < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

[15] Sea I un intervalo que contiene al punto a y sean f, g y h funciones definidas en I, exceptuando quizás el mismo

7.4. Demostración utilizando Series de Fourier

La demostración mostrada en la presente sección puede encontrarse en bibliografía diversa acerca del tema. Previa a dicha presentación vamos a ofrecer al lector algunas nociones básicas sobre el análisis de Fourier.

El análisis de Fourier aparece aplicado en multitud de fenómenos físicos, como por ejemplo el estudio de vibración de una cuerda, cómo se reparte el calor en un cuerpo, o para el cálculo dinámico de estructuras. La fundamentación teórica de dicha materia consiste en demostrar la posibilidad de obtener una función discontinua a partir de la suma de funciones continuas.

El matemático francés Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) se dio a conocer por sus trabajos sobre descomposición de funciones periódicas en series trigonométricas convergentes denominadas *Series de Fourier* en su honor, método con el cual consiguió resolver la ecuación del calor. La clave fundamental de sus investigaciones giran en torno a una idea que ya había sido intuida previamente por Daniel Bernoulli (1700-1782), y que consistía básicamente en que cualquier función $y = f(x) \in L^2[-l, l]$, se puede representar por una serie de la forma[16]:

Figura 18. Joseph Fourier.

$$y = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \, e^{{ik\pi}/{l}} \, , \quad y \in L^2[-l, l] \, , \tag{19}$$

resultando los coeficientes c_k:

$$c_k = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(x) \, e^{{-ik\pi}/{l}} \, dx \, ,$$

para poder asegurar la igualdad puntual se han de realizar hipótesis adicionales sobre la regularidad de y. Si una serie de la forma descrita en (19) converge, representa una función periódica de periodo $2l$ y por lo tanto es suficiente estudiar su restricción al intervalo $[-l, l]$, o de forma equivalente a $[0, 2l]$.

Las representaciones mediante este tipo de series permiten una mayor generalización en cuanto a la clase de funciones a desarrollar si se compara con los desarrollos en serie de Taylor, ya que existen muchas funciones que no admiten una representación en serie de potencias a pesar de presentar una gran regularidad. La condición necesaria y suficiente para que exista desarrollo en serie de potencias se define en el siguiente teorema:

TEOREMA: *Si una función $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, admite derivadas de todos los órdenes en un intervalo abierto $(-R, R)$, entonces la igualdad*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(0)}{n!} \, x^n \quad \textit{para todo } x \in (-R, R)$$

punto a. Supongamos que para todo x en I diferente de a tenemos:

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

y supongamos también que:

$$\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$$

Entonces:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

[16] En las demostraciones se utilizará $L^2[0, 1]$, así como series de Fourier en su forma real.

es válida si y sólo si existe algún valor $0 < c < x$ *de modo que*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{k)}(0)}{k!}\, x^k + \underbrace{\frac{f^{n+1)}(c)}{(n+1)!}\, x^{n+1}}_{\textit{Resto de Lagrange } R_n(x)} \qquad y \quad \lim_{n\to\infty} \frac{f^{n+1)}(c)}{(n+1)!}\, x^{n+1} = 0$$

para todo $x \in (-R, R)$.

Cabe recordar en este caso el contraejemplo que Augustin Louis Cauchy propuso para rebatir la afirmación realizada por Joseph Louis Lagrange (1736-1813) de que toda función admitía una representación mediante serie de potencias:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Esta función, a pesar de ser C^∞ (clase infinita), no admite serie de potencias en torno al cero. Por el contrario a pesar de que una función tenga multitud de puntos en los que la derivada no existe, o en los que es discontinua, sí que admite un desarrollo en serie de Fourier.

Veamos la demostración de (1). Considérese el espacio

$$L^2[0,1] = \left\{ f : [0,1] \to \mathbb{C} \mid \int_0^1 \|f\|^2 < +\infty \right\}$$

con el producto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f \cdot \overline{g}$$

Se trata éste de un *espacio de Hilbert*, o lo que es lo mismo un espacio euclídeo donde toda sucesión de Cauchy converge, es decir es completo con la métrica inducida por el producto interno.

Considérese el conjunto de funciones

$$\mathcal{S} = \{ e_n(x) := e^{2\pi i n x} \mid n \in \mathbb{Z} \}$$

Se demuestra que $\mathcal{S}$ es una base ortonormal del espacio $L^2[0,1]$, esto es

$$\langle e_m, e_n \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad m \neq n \\ 1 & \text{si} \quad m = n \end{cases}$$

Veamos:

$$\langle e_m, e_n \rangle = \int_0^1 e^{2\pi i m x} \cdot \overline{e^{2\pi i n x}}\, dx$$

como $\cos 2\pi n x - i \operatorname{sen} 2\pi n x = \cos(-2\pi n x) + i \operatorname{sen}(-2\pi n x)$ entonces

$$\langle e_m, e_n \rangle = \int_0^1 e^{2\pi i (m-n) x}\, dx = \frac{(1+0) - 1}{2\pi i (m-n)} = 0$$

a menos que $m = n$, en cuyo caso

$$\int_0^1 e^0\, dx = 1 \qquad \square$$

TEOREMA DE PARSEVAL: *Sea una función cualquiera* f *del espacio* $L^2[0,1]$ *tal que*

$$\langle f, f \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \| \langle f, e_n \rangle \|^2,$$

se cumple que

$$\int_{\mathbb{R}} \|f(x)\|^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}} \left\|\hat{f}(\gamma)\right\|^2 \, d\gamma$$

donde $\hat{f}(\gamma)$ *es la transformada de Fourier de* $f(x)$ *y* γ *su frecuencia.*

Considérese la función $f(x) = x$. Entonces

$$\begin{aligned}
\langle f, f\rangle &= \int_0^1 x \cdot \overline{x} \, dx = \int_0^1 x^2 \, dx = \frac{1}{3} \\
\langle f, e_0\rangle &= \int_0^1 x \cdot \overline{e^0} \, dx = \int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2} \\
\langle f, e_n\rangle &= \int_0^1 x \cdot e^{-2\pi i n x} \, dx \quad \text{para } n \neq 0 \\
&= -\frac{1}{2\pi i n}\left(x \cdot e^{-2\pi i n x}\Big|_0^1 - \int_0^1 e^{-2\pi i n x} \, dx \right) = \\
&= -\frac{1}{2\pi i n}\left((1-0) + \frac{1}{2\pi i n} \cdot e^{-2\pi i n x}\Big|_0^1 \right) = -\frac{1}{2\pi i n}
\end{aligned}$$

Si se aplica el Teorema de Parseval, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3} = \langle f, f\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|\langle f, e_n\rangle\|^2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \sum_{n\in\mathbb{Z}\text{-}\{0\}} \left|-\frac{1}{2\pi i n}\right|^2 \\
&= \frac{1}{4} + \sum_{n\in\mathbb{Z}\text{-}\{0\}} \frac{1}{4\pi^2 n^2} \\
\frac{1}{3} - \frac{1}{4} &= 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{1}{n^2} \\
\frac{\pi^2}{6} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}
\end{aligned}$$

□

Referencias

[1] AIGNER, M. and ZIEGLER, G.M., *Proofs from THE BOOK*, Springer-Verlag, 4th Ed., pp. 43–50, Berlin, 2010.

[2] APÉRY, R., *"Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$"*, Astérisque, 61, pp. 11–13, 1979.

[3] BECKMANN, P., *A History of Pi*, St. Martin's Press, pp. 132–133, New York, 1971.

[4] CÓRDOBA, A., *"Disquisitio Numerorum"*, La Gaceta de la RSME, 4, pp. 249–260, Madrid, 2001.

[5] DUNHAM, W., *Euler, El Maestro de todos los Matemáticos*, Colección: La matemática en sus personajes, pp. 95–121, Ed. Nívola, Madrid, 2004.

[6] FRESÁN, J. y RUÉ, J.J., *Los Números Trascendentes*, Colección: ¿Qué sabemos de ...?, núm. 42, pp. 112–121, Consejo Superior de Investigaciones Científicas; Los libros de la Catarata, Madrid, 2013.

[7] GRANERO BELINCHÓN, R., *"El Problema de Basilea: historia y algunas demostraciones"*, La Gaceta de la RSME, Vol. 12, núm. 4, pp. 721–727, Madrid, 2009.

[8] KNOPP, K., *Weierstrass's Factor-Theorem*, §1 in Theory of Functions Parts I and II, Two Volumes Bound as One, Part II. New York: Dover, pp. 1-7, 1996.

[9] KRANTZ, S. G., *The Weierstrass Factorization Theorem*, §8.2 in Handbook of Complex Variables. Boston, MA: Birkhäuser, pp. 109-110, 1999.

[10] PLOUFFE, S., *"Identities Inspired from Ramanujan Notebooks (Part 2)"*, Apr. 2006.

[11] RIVOAL, T., *"La fonction Zêta de Riemann prend une infinité de valeurs irrationnelles aux entiers impairs"*, arXiv:math/0008051, 7 Aug., 2000.

[12] PÉREZ SANZ, A., *"El Problema de Basilea. El año de Euler: 1707-2007"*, Revista SUMA, núm. 55, pp.95–102, Madrid, junio, 2007.

[13] MAZ´YA, V. and SHAPOSHNIKOVA, T. *Jacques Hadamard, A Universal Mathematician*, History of Mathematics, num. 14, American and London Mathematical Society, pp. 315–316, Ed. Board, Providence, 1998.

[14] SÁNCHEZ MUÑOZ, J. M., *"Riemann y los Números Primos"*, Historias de Matemáticas, Revista Pensamiento Matemático, Universidad Politécnica de Madrid, núm. 1, octubre, 2011.

[15] ZUDILIN, W., *"One of the numbers $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$ is irrational"*, Russian Mathematical Surveys, 56 (4): pp. 774–776, 2001.

Sobre el autor:
Nombre: José Manuel Sánchez Muñoz
Correo electrónico: jmanuel.sanchez@gmx.es
Institución: Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos. Profesor de Enseñanza Secundaria. Grupo de Innovación Educativa "Pensamiento Matemático", Universidad Politécnica de Madrid, España.