Formules BBP

G.Huvent
Gery.Huvent@mail.ac-lille.fr

22 février 2001

Résumé

En 1995, S.Plouffe découvre la formule suivante, dite BBP :

$$\pi=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{16^{i}}\left(\frac{4}{8i+1}-\frac{2}{8i+4}-\frac{1}{8i+5}-\frac{1}{8i+6}\right)$$

En utilisant l'algorithme "PSLQ ", Bailey, Borwein et Plouffe découvrent et prouvent des formules analogues pour π^2. En mai 2000, B.Gourevitch, à l'aide de l'algorithme "LLL", découvre une formule du même type pour $\zeta(3)$ et en donne ensuite une démonstration.
Les preuves de ces résultats reposent sur la transformation en une intégrale de la série, puis par l'évaluation de cette intégrale à l'aide des fonctions polylogarithmes.
On se propose ici d'établir des formules BBP pour les constantes suivantes : $\pi,\pi^2,\pi\ln(2),\ln^2(2),G$ (constante de Catalan), $\pi\ln^2(2)$, $\pi^2\ln(2)$, $\ln^3(2)$, $\zeta(3)$, π^3, $\zeta(4)$, $\pi^2\ln^2(2)$, $\ln^4(2)$, $\pi^4\ln(2)$, $\pi^2\ln^3(2)$ et enfin $\zeta(5)$. La démarche est analogue : on introduit une famille d'intégrales égales à des combinaisons linéaires de polylogarithmes. On évalue ensuite certaines combinaisons linéaires de ces intégrales à l'aide des équations de Kummer pour les polylogarithmes. On en déduit alors des séries BBP pour les constantes citées.

Abstract

In 1995, S.Plouffe found the following formula, called the BBP formula :

$$\pi=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{16^{i}}\left(\frac{4}{8i+1}-\frac{2}{8i+4}-\frac{1}{8i+5}-\frac{1}{8i+6}\right)$$

Using the PSLQ integer relation algorithm, Bailey, Borwein and Plouffe found and proved similar formulas for π^2. In May 2000, B Gourevitch, using the LLL algorithm found the same type of formula for $\zeta(3)$ and, then gave proof for it.
The proof for these results is based on a transformation of the series to a simple integral, and on its evaluation by polylogarithm functions.
We set out to find BBP formula for the following constants : $\pi,\pi^2,\pi\ln(2),\ln^2(2),G$ (Catalan's constant), $\pi\ln^2(2)$, $\pi^2\ln(2)$, $\ln^3(2)$, $\zeta(3)$, π^3, $\zeta(4)$, $\pi^2\ln^2(2)$, $\ln^4(2)$, $\pi^4\ln(2)$, $\pi^2\ln^3(2)$ and, last but not least $\zeta(5)$. The process is the same : we define simple integrals which are equal to linear combinations of polylogarithms. Then we apply Kummer's functional relations to evaluate some linear combinations of these integrals. Then we infer BBP's formula for the named constants

1 Liens entre intégrales, formules BBP et polylogarithmes

On note $BBP_k(\alpha, b, P(y))$, la somme $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha^i}\left(\sum_{l=0}^{b-2} \frac{a_l}{(bi+l+1)^{k+1}}\right)$, pour $P(y) = a_0 + a_1 y + ... + a_{b-2} y^{b-2}$. La formule de Plouffe s'écrit alors

$$\begin{aligned} \pi &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i}\left(\frac{4}{8i+1} - \frac{2}{8i+4} - \frac{1}{8i+5} - \frac{1}{8i+6}\right) \\ &= BBP_0\left(16, 8, 4 - 2y^3 - y^4 - y^5\right) \end{aligned} \tag{1}$$

De l'égalité $\forall \alpha \in \mathbb{Z}$, $\alpha \neq 1$,et $\alpha \neq 0$, $\forall y \in [0,1]$, $\forall k \geq 1$,

$$\int_0^1 \frac{\alpha y^{k-1}}{\alpha - y^b} dy = \int_0^1 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{y^{bi+k-1}}{\alpha^i} dy = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha^i} \frac{1}{bi+k}$$

on déduit que si $P \in \mathbb{Q}_{b-2}[X]$, $P = a_0 + a_1 X + ... + a_{b-2} X^{b-2}$ alors
$\alpha \displaystyle\int_0^1 \frac{a_0 + a_1 y + ... + a_{b-2} y^{b-2}}{y^b - \alpha} dy = \int_0^1 \frac{\alpha P(y)}{y^b - \alpha} dy = -\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha^i}\left(\sum_{k=0}^{b-1} \frac{a_k}{bi+k+1}\right)$
De la même manière,

$$\int_0^1 \frac{\ln^k(y) P(y)}{y^b - \alpha} dy = \frac{(-1)^{k+1} k!}{\alpha} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha^i}\left(\sum_{l=0}^{b-1} \frac{a_l}{(bi+l+1)^{k+1}}\right) = \frac{(-1)^{k+1} k!}{\alpha} BBP_k(\alpha, b, P(y)) \tag{2}$$

$$\int_0^1 \frac{\ln^k(y) P(y)}{y^b + \alpha} dy = \frac{(-1)^k k!}{\alpha} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{\alpha^i}\left(\sum_{l=0}^{b-1} \frac{a_l}{(bi+l+1)^{k+1}}\right) = \frac{(-1)^k k!}{\alpha} BPP_k(-\alpha, b, P(y)) \tag{3}$$

En particulier si $Q(y)$ divise $y^b - \alpha$, alors $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln^k(y) R(y)}{Q(y)} dy = \int_0^1 \frac{\ln^k(y) P(y)}{y^b - \alpha} dy$ où $P(y) = R(y) \dfrac{(y^b - \alpha)}{Q(y)}$.
Ceci permet, lorsque l'on sait calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln^k(y) R(y)}{Q(y)} dy$, d'en déduire une formule BBP. Le même type de remarque s'applique si $Q(y)$ divise $y^b + \alpha$.

On rappelle l'expression intégrale du polylogarithme d'ordre n pour un complexe z non nul de module inférieur à 1.

$$\int_0^1 \frac{\ln^n(y)}{y - \frac{1}{z}} dy = (-1)^{n+1} n! L_{n+1}(z)$$

ce qui permet, après décomposition en éléments simples, d'exprimer une intégrale du type $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln^k(y) R(y)}{Q(y)} dy$ comme somme de polylogarithmes.

2 Les intégrales considérées

On s'intéresse maintenant aux intégrales suivantes :

$$\begin{aligned}
I_1^{(k)} &= \int_0^1 \frac{2y\ln^k(y)}{y^2-2}dy = \frac{1}{2^k}\int_0^1 \frac{\ln^k(u)}{u-2}dy = \frac{(-1)^{k+1}k!}{2^k}L_{k+1}\left(\frac{1}{2}\right)\\
I_2^{(k)} &= \int_0^1 \frac{2y\ln^k(y)}{y^2+2}dy = \frac{1}{2^k}\int_0^1 \frac{\ln^k(u)}{u+2}dy = \frac{(-1)^{k+1}k!}{2^k}L_{k+1}\left(-\frac{1}{2}\right)\\
&= (-1)^{k+1}k!\left(L_{k+1}\left(\frac{i}{\sqrt{2}}\right)+L_{k+1}\left(\frac{-i}{\sqrt{2}}\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_3^{(k)} &= \int_0^1 \frac{(2\,y+2)\ln^k(y)}{y^2+2\,y+2}dy = (-1)^{k+1}k!\left(L_{k+1}\left(\frac{-1+i}{2}\right)+L_{k+1}\left(\frac{-1-i}{2}\right)\right)\\
I_4^{(k)} &= \int_0^1 \frac{(2\,y-2)\ln^k(y)}{y^2-2\,y+2}dy = (-1)^{k+1}k!\left(L_{k+1}\left(\frac{1+i}{2}\right)+L_{k+1}\left(\frac{1-i}{2}\right)\right)\\
I_5^{(k)} &= \int_0^1 \frac{2\ln^k(y)}{y^2-2y+2}dy = i\,(-1)^{k+1}k!\left(L_{k+1}\left(\frac{1+i}{2}\right)-L_{k+1}\left(\frac{1-i}{2}\right)\right)\\
I_6^{(k)} &= \int_0^1 \frac{2\ln^k(y)}{y^2+2y+2}dy = i\,(-1)^{k+1}k!\left(-L_{k+1}\left(\frac{-1-i}{2}\right)+L_{k+1}\left(\frac{-1+i}{2}\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_7^{(k)} &= \int_0^1 \frac{\left(4\,y^3-4\,y\right)\ln^k(y)}{y^4-2\,y^2+4}dy = \frac{1}{2^k}\int_0^1 \frac{(2u-2)\ln^k(u)}{u^2-2u+4}\,du\\
&= \frac{(-1)^{k+1}k!}{2^k}\left(L_{k+1}\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{4}\right)+L_{k+1}\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{4}\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_8^{(k)} &= \int_0^1 \frac{\left(4\,y^3-6\,y^2+4\,y-4\right)\ln^k(y)}{y^4-2\,y^3+2\,y^2-4\,y+4}dy\\
&= (-1)^{k+1}k!\left(L_{k+1}\left(\frac{1}{s_1}\right)+L_{k+1}\left(\frac{1}{s_2}\right)+L_{k+1}\left(\frac{1}{s_3}\right)+L_{k+1}\left(\frac{1}{s_4}\right)\right)\\
I_9^{(k)} &= \int_0^1 \frac{2\left(y^2-4\,y+2\right)\ln^k(y)}{y^4-2\,y^3+2\,y^2-4\,y+4}dy\\
&= i\,(-1)^{k+1}k!\left(L_{k+1}\left(\frac{1}{s_3}\right)+L_{k+1}\left(\frac{1}{s_4}\right)-L_{k+1}\left(\frac{1}{s_1}\right)-L_{k+1}\left(\frac{1}{s_2}\right)\right)\\
\text{où } s_1 &= \frac{1}{2}(1+i)+\frac{\sqrt{3}}{2}(1-i)\,,\ s_2 = \frac{1}{2}(1+i)-\frac{\sqrt{3}}{2}(1-i)\\
s_3 &= \frac{1}{2}(1-i)+\frac{\sqrt{3}}{2}(1+i)\,,\ s_4 = \frac{1}{2}(1-i)-\frac{\sqrt{3}}{2}(1+i)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
I_{10}^{(k)} &= \int_0^1 \frac{\left(8\,y^7 - 14\,y^6 + 12\,y^5 - 16\,y^3 + 16\,y - 16\right)\ln^k(y)}{y^8 - 2\,y^7 + 2\,y^6 - 4\,y^4 + 8\,y^2 - 16\,y + 16} dy \\
I_{11}^{(k)} &= \int_0^1 \frac{2\left(y^6 - 4y^5 + 8y^4 - 8y^3 + 16y^2 - 16y + 8\right)\ln^k(y)}{y^8 - 2\,y^7 + 2\,y^6 - 4\,y^4 + 8\,y^2 - 16\,y + 16}
\end{aligned}
$$

Dans [3], Broadhurst établi des relations entre différentes sommes de polylogarithmes. Cependant il ne semble pas envisager le lien avec les intégrales. On se propose de le faire. C'est pourquoi on introduit les intégrales suivantes :

$$
\begin{aligned}
J_1^{(k)} &= \int_0^1 \frac{2y\ln^k(y)}{y^2+4} dy = (-1)^{k+1}\,k!\left(L_{k+1}\left(\frac{i}{2}\right) + L_{k+1}\left(\frac{-i}{2}\right)\right) = \frac{(-1)^{k+1}\,k!}{2^k} L_{k+1}\left(-\frac{1}{4}\right) \\
J_2^{(k)} &= \int_0^1 \frac{4\ln^k(y)}{y^2+4} dy = i\,(-1)^{k+1}\,k!\left(L_{k+1}\left(\frac{i}{2}\right) - L_{k+1}\left(\frac{-i}{2}\right)\right) \\
J_3^{(k)} &= \int_0^1 \frac{(2y-4)\ln^k(y)}{y^2-4\,y+8} dy = (-1)^{k+1}\,k!\left(L_{k+1}\left(\frac{1+i}{4}\right) + L_{k+1}\left(\frac{1-i}{4}\right)\right) \\
J_4^{(k)} &= \int_0^1 \frac{4\ln^k(y)}{y^2-4\,y+8} dy = i\,(-1)^{k+1}\,k!\left(L_{k+1}\left(\frac{1+i}{4}\right) - L_{k+1}\left(\frac{1-i}{4}\right)\right) \\
J_5^{(k)} &= \int_0^1 \frac{(2\,y-8)\ln^k(y)}{y^2-8\,y+32} dy = (-1)^{k+1}\,k!\left(L_{k+1}\left(\frac{1+i}{8}\right) + L_{k+1}\left(\frac{1-i}{8}\right)\right) \\
J_6^{(k)} &= \int_0^1 \frac{8\ln^k(y)}{y^2-8\,y+32} dy = i\,(-1)^{k+1}\,k!\left(L_{k+1}\left(\frac{1+i}{8}\right) - L_{k+1}\left(\frac{1-i}{8}\right)\right) \\
J_7^{(k)} &= \int_0^1 \frac{2y\ln^k(y)}{y^2+8} dy = (-1)^{k+1}\,k!\left(L_{k+1}\left(\frac{i}{\sqrt{8}}\right) + L_{k+1}\left(\frac{-i}{\sqrt{8}}\right)\right)
\end{aligned}
$$

Le lien entre les $J_n^{(k)}$ et les $I_n^{(k)}$ est le suivant :

$$
\begin{aligned}
J_1^{(k)} &= \int_0^1 \frac{2y\ln^k(y)}{y^2+4} dy \underset{y=u^2}{=} 16\int_0^1 \frac{u^3\ln^k(u)}{u^4+4}\,du \\
&= 16\int_0^1 \left(\frac{1}{2}\frac{u-1}{u^2+2u+2} + \frac{1}{2}\frac{u+1}{u^2-2u+2}\right) du = 2^k\left(I_3^{(k)} + I_4^{(k)}\right) \\
J_2^{(k)} &= \int_0^1 \frac{4\ln^k(y)}{y^2+4} dy \underset{y=u^2}{=} 2^k\left(I_5^{(k)} - I_6^{(k)}\right) \\
J_3^{(k)} &= \int_0^1 \frac{(2y-4)\ln^k(y)}{y^2-4\,y+8} dy \underset{y=u^3}{=} 3^k\left(I_3^{(k)} + I_8^{(k)}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
J_4^{(k)} &= \int_0^1 \frac{4\ln^k(y)}{y^2-4\,y+8}dy \underset{y=u^3}{=} 3^k\left(I_6^{(k)}-I_9^{(k)}\right)\\
J_5^{(k)} &= \int_0^1 \frac{(2\,y-8)\ln^k(y)}{y^2-8\,y+32}dy \underset{y=u^5}{=} 5^k\left(I_3^{(k)}+I_{10}^{(k)}\right)\\
J_6^{(k)} &= \int_0^1 \frac{8\ln^k(y)}{y^2-8\,y+32}dy = \underset{y=u^3}{=} 5^k\left(-I_6^{(k)}+I_{11}^{(k)}\right)\\
J_7^{(k)} &= \int_0^1 \frac{2y\ln^k(y)}{y^2+8}dy = 3^k\left(I_2^{(k)}+I_7^{(k)}\right)
\end{aligned}
$$

On considère alors la forme linéaire $\mathcal{L}_k(\alpha_1,...,\alpha_{11}) = \sum_{n=1}^{11}\alpha_n I_n^{(k)}$ et on se propose de la simplifier afin d'en déduire des formules BPP pour différentes constantes remarquables. Pour obtenir des formules BBP, on utilise les tableaux suivants (dits tableaux des dénominateurs). La méthode est détaillée sur un exemple.

$$
\begin{aligned}
\text{Pour } n &= 1,2,3,4,5,6 \text{ on a } I_n^{(k)} = \int_0^1 \frac{P(y)}{y^8-2^4}\ln^k(y)\,dy\\
\text{Pour } n &= 3,4,5,6 \text{ on a } I_n^{(k)} = \int_0^1 \frac{P(y)}{y^4+4}\ln^k(y)\,dy
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Pour } n &= 1,2,7 \text{ on a } I_n^{(k)} = \int_0^1 \frac{P(y)}{y^{12}-2^6}\ln^k(y)\,dy\\
\text{Pour } n &= 2,7 \text{ on a } I_n^{(k)} = \int_0^1 \frac{P(y)}{y^6+2^3}\ln^k(y)\,dy
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Pour } n &= 1,2,...,9 \text{ on a } I_n^{(k)} = \int_0^1 \frac{P(y)}{y^{24}-2^{12}}\ln^k(y)\,dy\\
\text{Pour } n &= 3,4,5,6,8,9 \text{ on a } I_n^{(k)} = \int_0^1 \frac{P(y)}{y^{12}+2^6}\ln^k(y)\,dy
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Pour } n &= 1,2,3,4,5,6,10,11 \text{ on a } I_n^{(k)} = \int_0^1 \frac{P(y)}{y^{40}-2^{20}}\ln^k(y)\,dy\\
\text{Pour } n &= 3,4,5,6,10,11 \text{ on a } I_n^{(k)} = \int_0^1 \frac{P(y)}{y^{20}+2^{10}}\ln^k(y)\,dy\\
\text{Pour } n &= 1,...,11 \text{ on a } I_n^{(k)} = \int_0^1 \frac{P(y)}{y^{120}-2^{60}}\ln^k(y)\,dy
\end{aligned}
$$

où P est un polynôme à coefficients entiers qui dépend à la fois de n et du dénominateur choisi.

2.1 Formules pour π, $\ln(2)$, $\ln(3)$ et $\ln(5)$

Dans le cas où $k=0$, on obtient, par un calcul des intégrales

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0(\alpha_1,...,\alpha_{11}) &= \left(-\frac{1}{2}\alpha_6+\frac{1}{2}\alpha_5+\alpha_{11}\right)\pi+(-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4-2\,\alpha_7-2\,\alpha_8-4\,\alpha_{10}-\alpha_1)\ln(2)\\ &+(\alpha_2+\alpha_7)\ln(3)+(\alpha_3+\alpha_{10})\ln(5)+(2\,\alpha_6-2\,\alpha_{11})\arctan(2)\end{aligned}$$

2.1.1 Application aux formules BBP pour π

Afin d'obtenir des formules pour π, on impose les relations suivantes :
$(-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4-2\,\alpha_7-2\,\alpha_8-4\,\alpha_{10}-\alpha_1)=(\alpha_2+\alpha_7)=(\alpha_3+\alpha_{10})=(2\,\alpha_6-2\,\alpha_{11})=0$.
On a alors

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\alpha_{11}+\alpha_5)\pi &= (-\alpha_7-3\,\alpha_{10}-\alpha_4-2\,\alpha_8)\,I_1^{(0)}-\alpha_7 I_2{}^{(0)}-\alpha_{10}I_3^{(0)}+\alpha_4 I_4^{(0)}+\alpha_5 I_5^{(0)}\\ &+\alpha_{11}I_6^{(0)}+\alpha_7 I_7^{(0)}+\alpha_8 I_8^{(0)}+\alpha_9 I_9^{(0)}+\alpha_{10}I_{10}^{(0)}+\alpha_{11}I_{11}^{(0)}\end{aligned}\tag{4}$$

Pour avoir des formules BBP ayant peu de termes, on peut dans un premier temps imposer $\alpha_{11}=\alpha_{10}=\alpha_9=\alpha_8=\alpha_7=0$, ce qui donne

$$\frac{\alpha_5}{2}\pi=-\alpha_4 I_1^{(0)}+\alpha_4 I_4^{(0)}+\alpha_5 I_5^{(0)}$$

On consulte alors la table des dénominateurs. Pour simplifier une somme faisant intervenir I_1, I_4 et I_5, on écrit chaque intégrale sous la forme $\int_0^1 \frac{P_n(y)}{y^8-2^4}dy$, $n=1,4,5$. Ainsi

$$\frac{\alpha_5}{2}\pi=-\alpha_4 I_1^{(0)}+\alpha_4 I_4^{(0)}+\alpha_5 I_5^{(0)}=\int_0^1\frac{P(y)}{y^8-2^4}dy=\frac{-1}{2^4}BBP_0\left(2^4,8,P(y)\right)$$

où P est un polynôme dont les coefficients dépendent de α_4 et α_5. Si l'on impose $\alpha_5=1$ et $\alpha_4=-4r-1$ on obtient la formule d'Adamchik-Wagon (*cf* [6])

$$\forall r\in\mathbb{C},\ \pi=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{16^i}\left(\frac{8\,r+4}{8\,i+1}-\frac{8r}{8\,i+2}-\frac{4r}{8\,i+3}+\frac{-8\,r-2}{8\,i+4}+\frac{-2\,r-1}{8\,i+5}+\frac{-2\,r-1}{8\,i+6}+\frac{r}{8\,i+7}\right)$$

Le choix de $\alpha_4=-\alpha_5=1$ donne la formule de Plouffe (1) et celui de $\alpha_4=\alpha_5=1$:

$$\pi=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{16^i}\left(\frac{8}{8i+2}+\frac{4}{8i+3}+\frac{4}{8i+4}-\frac{1}{8i+7}\right)$$

On peut maintenant chercher un dénominateur en $y^{24}-2^{12}$. On reprend alors la formule (4) et on impose simplement $\alpha_{11}=\alpha_{10}=0$.

$$\begin{aligned}\frac{\alpha_5}{2}\pi &= (-\alpha_7-\alpha_4-2\,\alpha_8)\,I_1^{(0)}-\alpha_7 I_2^{(0)}+\alpha_4 I_4^{(0)}+\alpha_5 I_5^{(0)}+\alpha_7 I_7^{(0)}+\alpha_8 I_8^{(0)}+\alpha_9 I_9^{(0)}\\ &= \int_0^1\frac{P(y)}{y^{24}-2^{12}}dy\end{aligned}\tag{5}$$

On choisit les autres coefficients de manière à annuler le plus de coefficients de P (en imposant $\alpha_5 \neq 0$).
Le meilleur choix semble être $[\alpha_i] = (\alpha_1, ..., \alpha_{11}) = (0, -1, 0, 1, 1, 0, 1, -1, -1, 0, 0)$ qui donne

$$\begin{aligned} \pi &= \frac{1}{128} BBP_0 \left(2^{12}, 24, -y^{21} + 2\,y^{19} - 12\,y^{14} - 16\,y^{13} - 16\,y^{11} + 128\,y^5 + 512\,y^3 + 768\,y^2\right) \\ &= \frac{1}{128} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{12i}} \left(\tfrac{768}{24\,i+3} + \tfrac{512}{24\,i+4} + \tfrac{128}{24\,i+6} - \tfrac{16}{24\,i+12} - \tfrac{16}{24\,i+14} - \tfrac{12}{24\,i+15} + \tfrac{2}{24\,i+20} - \tfrac{1}{24\,i+22}\right) \end{aligned}$$

On peut aussi chercher un dénominateur en $y^{40} - 2^{20}$ en imposant $\alpha_9 = \alpha_8 = \alpha_7 = 0$, le meilleur choix semble être $[\alpha_i] = (\alpha_1, ..., \alpha_{11}) = (0, 0, 0, 0, -2, 1, 0, 0, 0, 0, 1)$ qui donne

$$\begin{aligned} \pi &= \frac{1}{2^{16}} BBP_0 \left(2^{20}, 40, P(y)\right) \text{ où } P(y) = -2y^{37} + 5y^{34} + 2^3y^{33} + 2^3y^{29} + 2^7y^{25} + 2^5 \times 5y^{24} - 2^9y^{21} \\ &\quad +2^{11}y^{17} - 2^{10} \times 5y^{14} - 2^{13}y^{13} - 2^{13}y^9 - 2^{17}y^5 - 2^{15} \times 5y^4 + 2^{19}y \end{aligned}$$

En fait il s'avère que dans la dernière formule $\frac{P(y)}{y^{40}-2^{20}}$ peut se simplifier en $\frac{Q(y)}{y^{20}+2^{10}}$, ce qui donne la formule alternée :

$$\begin{aligned} \pi &= \frac{1}{2^6} BBP_0 \left(-2^{10}, 20, 2y^{17} - 5y^{14} - 8y^{13} - 8y^9 - 128y^5 - 160y^4 + 512y\right) \\ &= \frac{1}{64} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2^{10i}} \left(\tfrac{512}{20\,i+2} - \tfrac{160}{20\,i+5} - \tfrac{128}{20\,i+6} - \tfrac{8}{20\,i+10} - \tfrac{8}{20\,i+14} - \tfrac{5}{20\,i+15} + \tfrac{2}{20\,i+18}\right) \end{aligned}$$

Enfin si l'on considère la formule (4) en toute généralité, elle peut s'écrire $\frac{1}{2}(\alpha_{11} + \alpha_5)\pi = \int_0^1 \frac{P(y)}{y^{120}-2^{60}} dy$, il reste à choisir judicieusement les $(\alpha_i)_i$. Le choix qui conduit à une formule ayant le moins de termes possible semble être $[\alpha_i] = (\alpha_1, ..., \alpha_{11}) = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, -2, 0, 1)$ et donne

$$\pi = \frac{1}{2^{56}} BBP_0 \left(2^{60}, 120, P(y)\right) \text{ où } P(y) \text{ a 42 coefficients non nuls}$$

On peut expliciter P en écrivant que $\mathcal{L}_0 (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, -2, 0, 1) = \int_0^1 \frac{P(y)}{y^{120}-2^{60}} dy$.
Pour finir, le choix de $[\alpha] = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, -2, 0, 1)$ conduit à

$$\begin{aligned} \pi &= \frac{1}{64} BPP_0 \left(-1024, 4, y^2 + 8y + 32)\right) + \frac{1}{4} BPP_0 \left(-64, 4, y^2 + 4y + 8\right) \\ & \frac{1}{64} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{1024^i} \left(\frac{32}{4i+1} + \frac{8}{4i+2} + \frac{1}{4i+3}\right) + \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{64^i} \left(\frac{8}{4i+1} + \frac{4}{4i+2} + \frac{1}{4i+3}\right) \end{aligned}$$

Et $[\alpha] = (0, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, -2, 0, 0)$ donne

$$\begin{aligned} \pi &= 2I_5^{(0)} - 2I_9^{(0)} = \frac{1}{8} BPP_0 \left(-2^6, 12, 2y^9 + 3y^8 + 4y^5 + 24y^2 + 32y\right) \\ &= \frac{1}{8} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{64} \left(\frac{32}{12i+2} + \frac{24}{12i+3} + \frac{4}{12i+6} + \frac{3}{12i+9} + \frac{2}{12i+10}\right) \end{aligned}$$

2.1.2 Formules BBP pour $\ln(2)$, $\ln(3)$ et $\ln(5)$

En appliquant ces méthodes, on trouve
$[\alpha_i] = (1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)$ donne

$$\begin{aligned}\ln(2) &= \frac{1}{8} BBP_0\left(16, 8, y^7+2y^5+4y^3+8y\right)\\ &= \frac{1}{16} BBP\left(16,4,y^3+2y^2+4y+8\right)\end{aligned}$$

$[\alpha_i] = (2,1,0,0,0,0,-1,0,0,0,0)$ donne

$$\begin{aligned}\ln(2) &= \frac{1}{2^5} BBP_0\left(2^6, 12, y^{11}+16y^7+24y^5+64y^3\right)\\ &= \frac{1}{2^6} BBP_0\left(2^6,6,y^5+16y^3+24y^2+64y\right)\end{aligned}$$

$[\alpha_i] = (2,1,0,-2,0,0,-1,2,0,0,0)$ donne

$$\ln(2) = \frac{1}{3\times 2^{11}} BPP_0\left(2^{12}, 24, 3\,y^{23}+12\,y^{20}+32\,y^{19}+24\,y^{17}-96\,y^{14}-64\,y^{11}-768\,y^8+1536\,y^5+8192\,y^3+6144\,y^2\right)$$

$[\alpha_i] = (0,0,1,2,0,0,0,0,0,-1,0)$ donne

$$\begin{aligned}\ln(2) &= \frac{1}{2^{19}} BBP_0\left(2^{20}, 40, P(y)\right) \text{ où } P(y) = y^{39}+2^4y^{35}+2^2\times 5y^{34}-2^6y^{31}+2^8y^{27}-2^7\times 5y^{24}\\ &\quad -2^{10}y^{23}-2^{10}y^{19}-2^{14}y^{15}-2^{12}\times 5y^{14}+2^{16}y^{11}-2^{18}y^7+2^{17}\times 5y^4+2^{20}y^3\end{aligned}$$

$[\alpha_i] = (-1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0)$ donne

$$\begin{aligned}\ln(3) &= \frac{1}{2^3} BBP_0\left(2^4, 8, y^5+16y\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{16^i}\left(\tfrac{4}{8i+2}+\tfrac{1}{8i+6}\right)\\ &= \frac{1}{2^4} BBP_0\left(2^4,8,y^2+16\right) = \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{16^i}\left(\tfrac{4}{4i+1}+\tfrac{1}{4i+3}\right)\end{aligned}$$

$[\alpha_i] = (3,1,0,0,0,0,-2,0,0,0,0)$ donne

$$\begin{aligned}\ln(3) &= \frac{3}{4} BBP_0\left(2^6, 12, y^7+2y^5+4y^3\right) = \frac{3}{8} BBP_0\left(2^6,6,y^3+2y^2+4y\right)\\ &= \frac{3}{8}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{64^i}\left(\frac{4}{6i+2}+\frac{2}{6i+3}+\frac{1}{6i+4}\right)\end{aligned}$$

$[\alpha_i] = (0,-2,0,0,0,0,1,0,0,0,0)$ donne

$$\begin{aligned}\ln(3) &= \frac{3}{2^{10}} BBP_0\left(2^{12}, 24, y^{21}-2y^{19}-8y^{15}+16y^{13}+64y^9-128y^7-512y^3+1024y\right)\\ &= \frac{3}{2^{11}} BBP_0\left(2^{12},12,y^{10}-2y^9-8y^7+16y^6+64y^4-128y^3-512y+1024\right)\end{aligned}$$

$[\alpha_i] = (1, 1, 2, 4, 0, 0, 0, 0, 0, -2, 0)$ donne

$$\begin{aligned} \ln(3) &= \frac{1}{2^{16}} BPP_0\left(2^{20}, 40, P(y)\right) \\ \text{où } P(y) &= 3\,y^{35} + 5\,y^{34} - 20\,y^{31} + 48\,y^{27} - 160\,y^{24} - 320\,y^{23} - 512\,y^{19} - 5120\,y^{15} \\ &\quad -5120\,y^{14} + 12288\,y^{11} - 81920\,y^{7} + 163840\,y^{4} + 196608\,y^{3} \end{aligned}$$

$[\alpha_i] = (0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ donne

$$\ln(5) = \frac{1}{4} BBP_0\left(2^4, 8, y^6 - 2y^4 - 4y^2 + 8\right)$$

$[\alpha_i] = (-4, -2, 1, 1, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 0)$ donne

$$\begin{aligned} \ln(5) &= \frac{1}{2^8} BBP_0\left(2^{12}, 24, 5y^{19} + 6y^{17} + 12y^{15} + 32y^{11} + 192y^7 + 384y^5 + 1280y^3\right) \\ &= \frac{1}{2^9} BBP_0\left(2^{12}, 12, 5y^9 + 6y^8 + 12y^7 + 32y^5 + 192y^3 + 384y^2 + 1280y^1\right) \end{aligned}$$

$[\alpha_i] = (0, 0, -3, -5, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 0)$ donne

$$\begin{aligned} \ln(5) &= \frac{5}{2^{16}} BBP_0\left(2^{20}, 40, P(y)\right), \text{ où } P(y) = y^{35} + y^{34} - 4y^{31} + 16y^{27} - 32y^{24} - 64y^{23} - 1024y^{15} - 1024y^{14} \\ &\quad +4096y^{11} - 16384y^7 + 32768y^4 + 65536y^3 \text{ dont les coefficients sont des puissances de 2} \\ &= \frac{-5}{64} BBP_0\left(-2^{10}, 20, y^{15} + y^{14} - 4y^{11} + 16y^7 - 32y^4 - 64y^3\right) \end{aligned}$$

2.2 Formules pour $\pi\sqrt{3}$ et $\pi\sqrt{2}$

On peut également considérer les intégrales suivantes

$$I_{12}^{(0)} = \int_0^1 \frac{y}{y^4 - 2\,y^2 + 4} dy = \frac{1}{9}\pi\sqrt{3}$$

$$I_{13}^{(0)} = \int_0^1 \frac{y^2 - y + 2}{y^4 - 2\,y^3 + 2\,y^2 - 4\,y + 4} dy = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}$$

$$I_{14}^{(0)} = \int_0^1 \frac{y^3 - 2y^2 + 3y - 2}{y^4 - 2\,y^3 + 2\,y^2 - 4\,y + 4} = -\frac{ln(2)}{2}$$

$$\begin{aligned} I_{15}^{(0)} &= \int_0^1 \frac{y^2 + 2}{y^4 - 2\,y^2 + 4} dy = \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan(\sqrt{2}) \\ I_{16}^{(0)} &= \int_0^1 \frac{2}{y^2 + 2} dy = \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan(2\sqrt{2}) \end{aligned}$$

Compte tenu de $\arctan(2\sqrt{2}) + 2\arctan(\sqrt{2}) = \pi$, on obtient $2I_{16}^{(0)} + 4I_{15}^{(0)} = \pi\sqrt{2}$.

On peut alors considérer la forme linéaire $\mathcal{L}\left(\alpha_1, ..., \alpha_{16}\right) = \sum_{n=1}^{16} \alpha_n I_n^{(0)}$, avec cette dernière, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left(\alpha_1, ..., \alpha_{16}\right) &= \left(\frac{1}{2}\alpha_5 + \alpha_{11} - \frac{1}{2}\alpha_6\right)\pi + \left(-2\alpha_7 - \alpha_3 - 4\alpha_{10} - 2\alpha_8 - \frac{1}{2}\alpha_{14} - \alpha_2 - \alpha_1 - \alpha_4\right)\ln(2) \\
&\quad + (\alpha_2 + \alpha_7)\ln(3) + (\alpha_3 + \alpha_{10})\ln(5) + (-2\alpha_{11} + 2\alpha_6)\arctan(2) \\
&\quad + \frac{1}{2}\alpha_{16}\pi\sqrt{2} + \left(\frac{1}{6}\alpha_{13} + \frac{1}{36}\alpha_{12}\right)\pi\sqrt{3} + (-2\alpha_{16} + \alpha_{15})\, I_{15}^{(0)}
\end{aligned}$$

Cette dernière égalité permet d'obtenir :

$$\pi = \frac{1}{256} BBP_0\left(2^{12}, 24, -3y^{20} - 4y^{19} - 4y^{17} + 32y^{11} + 128y^9 + 192y^8 - 1024y^3 + 2048y\right)$$

$$\pi = \frac{1}{256} BBP_0\left(2^{12}, 24, -2y^{21} + 4y^{19} - 24y^{14} - 32y^{13} - 32y^{11} + 256y^5 + 1024y^3 + 1536y^2\right)$$

$$\begin{aligned}
\ln(2) &= \frac{1}{12288} BBP_0\left(2^{12}, 24, 6y^{23} + 16y^{21} + 16y^{17} + 256y^{13} + 384y^{11} + 1024y^9 + 1024y^5 + 16384y\right) \\
&= \frac{1}{24576} BPP_0\left(2^{12}, 12, 6y^{11} + 16y^{10} + 16y^8 + 256y^6 + 384y^5 + 1024y^4 + 1024y^2 + 16384\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\forall r &\in \mathbb{C},\ \pi\sqrt{3} = \frac{9}{16} BBP_0\left(2^6, 12, -ry^9 + 2(3r-4)\,y^7 + 8(r-1)\,y^5 + 8(3r-2)\,y^3 + 8(4-2r)\,y\right) \\
&= \frac{9}{16}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{64^i}\left(\frac{-16\,r + 32}{12\,i + 2} + \frac{24\,r - 16}{12\,i + 4} + \frac{-8 + 8\,r}{12\,i + 6} + \frac{6\,r - 8}{12\,i + 8} - \frac{r}{12\,i + 10}\right) \\
&= \frac{9}{32}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{64^i}\left(\frac{-16\,r + 32}{6\,i + 1} + \frac{24\,r - 16}{6\,i + 2} + \frac{-8 + 8\,r}{6\,i + 3} + \frac{6\,r - 8}{6\,i + 4} - \frac{r}{6\,i + 5}\right)
\end{aligned}$$

$$\pi\sqrt{3} = \frac{3}{512} BBP_0\left(2^{12}, 12, -y^{10} + 2y^8 + 12y^7 + 8y^6 - 64y^4 + 128y^2 + 768y + 512\right)$$

$$\begin{aligned}
\pi\sqrt{2} &= -\frac{1}{8} BBP_0\left(2^6, 12, y^{10} + y^8 + 4y^6 - 8y^4 - 8y^2 - 32\right) \\
&= \frac{1}{8}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{64^i}\left(\frac{32}{12\,i + 1} + \frac{8}{12\,i + 3} + \frac{8}{12\,i + 5} - \frac{4}{12\,i + 7} - \frac{1}{12\,i + 9} - \frac{1}{12\,i + 11}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pi\sqrt{2} &= BBP_0\left(-8, 6, y^4 + y^2 + 4\right) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{8^i}\left(\frac{4}{6i + 1} + \frac{1}{6i + 3} + \frac{1}{6i + 5}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi\sqrt{2} &= \frac{1}{512}BPP_0\left(2^{12},24,-2y^{22}+7y^{20}+12y^{19}-48y^{15}-56y^{14}+64y^{12}-576y^{8}\right.\\ &\left.-768y^{7}-512y^{6}+1024y^{4}+3072y^{3}+4608y^{2}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi\sqrt{2} &= \frac{1}{512}BPP_0\left(2^{12},24,-y^{22}-y^{20}-4y^{18}+8y^{16}+8y^{14}+32y^{12}\right.\\ &\left.-64y^{10}-64y^{8}-256y^{6}+512y^{4}+512y^{2}+2048\right)\end{aligned}$$

cette dernière formule est très intéressante car les coefficients sont tous des puissances de 2. Il est évident que cette liste est loin d'être exhaustive.

3 Cas des polylogarithmes d'ordre 2

3.1 Les expressions classiques : $I_1^{(1)}, I_2^{(1)}, I_3^{(1)}, I_4^{(1)}$ et $I_5^{(1)}$

Un résultat classique d'Euler est

$$I_1^{(1)} = \frac{\pi^2}{24} - \frac{\ln^2(2)}{4} \tag{6}$$

Ce qui permet d'écrire que

$$I_2^{(1)} = -\frac{\pi^2}{24} + \frac{\ln^2(2)}{4} + \frac{1}{4}L_2\left(\frac{1}{4}\right) \tag{7}$$

L'équation de Kummer pour le polylogarithme d'ordre 2 s'écrit (cf [4])

$$L_2\left(\frac{x(1-y)^2}{y(1-x)^2}\right) = L_2\left(-\frac{x(1-y)}{1-x}\right) + L_2\left(-\frac{1-y}{y(1-x)}\right) + L_2\left(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right) + L_2\left(\frac{1-y}{1-x}\right) + \frac{1}{2}\ln^2(y)$$

La formule d'inversion est

$$L_2\left(\frac{1}{z}\right) = -L_2(z) - \frac{\pi^2}{6} - \frac{\ln^2(-z)}{2} \tag{Formule d'inversion}$$

et enfin la formule de duplication dans le cas général :

$$L_k(z) + L_k(-z) = \frac{1}{2^{k-1}}L_k\left(z^2\right) \tag{Formule de duplication}$$

En appliquant l'équation de Kummer pour $x = \frac{1-i}{2}$, $y = \frac{1}{2}$ puis $x = \frac{1+i}{2}$, $y = \frac{1}{2}$, on obtient deux égalités qui additionnées donnent

$$\begin{aligned}&L_2\left(\frac{1+i}{2}\right) + L_2\left(\frac{1-i}{2}\right) - \left(L_2\left(\frac{-1-i}{2}\right) + L_2\left(\frac{-1+i}{2}\right)\right)\\ &+L_2(-1+i) + L_2(-1-i)\\ &+L_2\left(\frac{i}{2}\right) + L_2\left(-\frac{i}{2}\right) + L_2(-i) + L_2(i) + \ln^2(2) = 0\end{aligned}$$

En utilisant formule la d'inversion pour $z=-1+i$ et $z=-1-i$ et la formule de duplication , on obtient

$$L_2\left(\frac{1+i}{2}\right)+L_2\left(\frac{1-i}{2}\right)-2\left(L_2\left(\frac{-1-i}{2}\right)+L_2\left(\frac{-1+i}{2}\right)\right)=\frac{5\pi^2}{16}-\frac{3\ln^2(2)}{4}-\frac{1}{2}L_2\left(-\frac{1}{4}\right)$$

Par duplication, on a aussi

$$L_2\left(\frac{1+i}{2}\right)+L_2\left(\frac{1-i}{2}\right)+L_2\left(\frac{-1-i}{2}\right)+L_2\left(\frac{-1+i}{2}\right)=\frac{1}{4}L_2\left(-\frac{1}{4}\right)$$

On en déduit

$$I_3^{(1)} = L_2\left(\frac{-1-i}{2}\right)+L_2\left(\frac{-1+i}{2}\right)=\frac{1}{4}L_2\left(\frac{-1}{4}\right)-\left(\frac{5\pi^2}{48}-\frac{1}{4}\ln^2(2)\right) \tag{8}$$

$$I_4^{(1)} = L_2\left(\frac{1+i}{2}\right)+L_2\left(\frac{1-i}{2}\right)=\frac{5\pi^2}{48}-\frac{1}{4}\ln^2(2) \tag{9}$$

De la même manière, l'équation de Kummer pour $x=\frac{1-i}{2}$, $y=\frac{1}{2}$ puis $x=\frac{1+i}{2}$, $y=\frac{1}{2}$, donnent deux égalités qui soustraites donnent une nouvelle égalité. En utilisant ensuite la formule d'inversion pour $z=-1+i$ et $z=-1-i$ et la formule de duplication pour $\frac{1+i}{2}$ et $\frac{1-i}{2}$,on obtient

$$L_2\left(\frac{1+i}{2}\right)-L_2\left(\frac{1-i}{2}\right)-\left(L_2(i)-L_2(-i)\right)+i\frac{\pi\ln(2)}{4}=0$$

Mais $L_2(i)=-\dfrac{\pi^2}{48}+iG$ où G est la constante de Catalan. Ainsi

$$I_5^{(1)}=i\left(L_2\left(\frac{1-i}{2}\right)-L_2\left(\frac{1+i}{2}\right)\right)=\frac{\pi\ln(2)}{4}-2G \tag{10}$$

3.2 Calcul de $I_7^{(1)}, I_8^{(1)}$et $I_9^{(1)}$

Proposition 1 *On a*

$$I_7^{(1)}=\frac{\pi^2}{72}+\frac{1}{4}L_2\left(\frac{1}{4}\right) \tag{11}$$

Preuve. *L'équation de Kummer avec $x=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$, $y=\frac{1}{2}$ donne l'égalité*

$$L_2\left(-\frac{1}{2}\right)=L_2\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{4}\right)+L_2\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)+L_2\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)+L_2\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{4}\right)+\frac{\ln^2(2)}{2}$$

ce qui donne immédiatement le résultat cherché car $L_2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi^2}{12}-\frac{\ln^2(2)}{2}$, $L_2\left(\frac{1}{2}\right)+L_2\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}L_2\left(\frac{1}{4}\right)$, $L_2\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)+L_2\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)+L_2\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)+L_2\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(L_2\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)+L_2\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)\right)$ par la formule de duplication et la formule de Kummer pour $x=y=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$donne $L_2\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)+L_2\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)=-\dfrac{\pi^2}{9}$. ■

Proposition 2 *On a*

$$I_8^{(1)}{=}\frac{5\pi^2}{36}-\frac{\ln^2(2)}{2} \tag{12}$$

et

$$I_9^{(1)}=-\frac{2G}{3} \tag{13}$$

Preuve. *L'équation de Kummer pour* $x=\frac{1+i}{2}$, $y=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ *donne, compte tenu de* $L_2(1-i)=\frac{\pi^2}{16}-i\left(G+\frac{\pi\ln(2)}{4}\right)$:

$$L_2(s_1)+L_2(s_2)=\frac{17}{144}\pi^2-i\left(G+\frac{\pi\ln(2)}{4}\right)-L_2\left(e^{-\frac{i\pi}{6}}\right)-L_2\left(e^{-\frac{5i\pi}{6}}\right)$$

de même, l'équation de Kummer pour $x=\frac{1-i}{2}$, $y=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ *donne*

$$L_2(s_3)+L_2(s_4)=\frac{17}{144}\pi^2+i\left(G+\frac{\pi\ln(2)}{4}\right)-L_2\left(e^{\frac{i\pi}{6}}\right)-L_2\left(e^{\frac{5i\pi}{6}}\right)$$

A l'aide de la formule d'inversion

$$\begin{aligned}L_2\left(\frac{1}{s_1}\right)+L_2\left(\frac{1}{s_2}\right) &= -L_2(s_1)-L_2(s_2)+\frac{25\pi^2}{144}-\frac{\ln^2(2)}{4}-\frac{i\pi\ln(2)}{4}\\ L_2\left(\frac{1}{s_3}\right)+L_2\left(\frac{1}{s_4}\right) &= -L_2(s_3)-L_2(s_4)+\frac{25\pi^2}{144}-\frac{\ln^2(2)}{4}+\frac{i\pi\ln(2)}{4})\end{aligned}$$

Ce qui permet de conclure que

$$\begin{aligned}L_2\left(\frac{1}{s_1}\right)+L_2\left(\frac{1}{s_2}\right)-L_2\left(\frac{1}{s_3}\right)-L_2\left(\frac{1}{s_4}\right) &= L_2(s_3)+L_2(s_4)-L_2(s_1)-L_2(s_2)-\frac{i\pi\ln(2)}{2}\\ &= 2iG+\left(L_2\left(e^{-\frac{i\pi}{6}}\right)+L_2\left(e^{-\frac{5i\pi}{6}}\right)-L_2\left(e^{\frac{i\pi}{6}}\right)-L_2\left(e^{\frac{5i\pi}{6}}\right)\right)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}L_2\left(\frac{1}{s_1}\right)+L_2\left(\frac{1}{s_2}\right)+L_2\left(\frac{1}{s_3}\right)+L_2\left(\frac{1}{s4}\right) &= -L_2(s_1)-L_2(s_2)-L_2(s_3)-L_2(s_4)+\frac{25\pi^2}{72}-\frac{\ln^2(2)}{2}\\ &= \frac{\pi^2}{9}-\frac{\ln^2(2)}{2}-\left(L_2\left(e^{-\frac{i\pi}{6}}\right)+L_2\left(e^{-\frac{5i\pi}{6}}\right)+L_2\left(e^{\frac{i\pi}{6}}\right)+L_2\left(e^{\frac{5i\pi}{6}}\right)\right)\end{aligned}$$

Il reste donc à calculer la dernière somme de polylogarithmes. Mais on a gagné en simplicité car ces polylogarithmes font intervenir des racines de l'unité .
On utilise alors la formule de multiplication

$$L_2(z^q)=q\sum_{k=0}^{q-1}L_2\left(e^{\frac{2ik\pi}{q}}z\right) \tag{Formule de multiplication}$$

qui donne avec $z=-i$ et $q=3$

$$\frac{1}{3}L_2(i)=L_2\left(e^{\frac{i\pi}{6}}\right)+L_2\left(e^{\frac{5i\pi}{6}}\right)+L_2(-i)$$

puis avec $z=i$ et $q=3$

$$\frac{1}{3}L_2(-i)=L_2\left(e^{-\frac{i\pi}{6}}\right)+L_2\left(e^{-\frac{5i\pi}{6}}\right)+L_2(i)$$

et permet facilement de conclure. ■

3.3 Calcul de $I_{10}^{(1)}$, relation entre $I_6^{(1)}$ et $I_{11}^{(1)}$

L'équation de Kummer pour $x=-1$ et $y=1+i$ et pour $x=-1$ et $y=1-i$ donne deux égalités qui additionnées fournissent

$$L_2\left(\frac{1-i}{8}\right)+L_2\left(\frac{1+i}{8}\right)=2\left(L_2\left(\frac{1+i}{4}\right)+L_2\left(\frac{1-i}{4}\right)\right)+L_2\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}\ln^2(2)-\frac{\pi^2}{16}$$

Ce qui se traduit par

$$J_5^{(1)}=2J_3^{(1)}+L_2\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}\ln^2(2)-\frac{\pi^2}{16}$$

et permet d'affirmer que

$$I_{10}^{(1)}=\frac{2\pi^2}{15}-\frac{\ln^2(2)}{2}+\frac{1}{4}L_2\left(-\frac{1}{4}\right) \tag{14}$$

Si, au lieu de les additionner, on soustrait ces égalités, on obtient

$$L_2\left(\frac{1-i}{8}\right)+L_2\left(\frac{1+i}{8}\right)=2\left(L_2\left(\frac{1+i}{4}\right)+L_2\left(\frac{1-i}{4}\right)\right)-2\left(L_2\left(\frac{I}{2}\right)-L_2\left(-\frac{I}{2}\right)\right)+i\frac{\pi\ln(2)}{4}$$

ce qui donne

$$J_6^{(1)}=2\left(J_2^{(1)}-J_4^{(1)}\right)+\frac{\pi\ln(2)}{4}$$

i.e.

$$I_6^{(1)}+I_{11}^{(1)}=\frac{\pi\ln 2}{4}-\frac{12}{5}G$$

3.4 Application à la détermination de formules BBP

On considère maintenant la forme linéaire $\mathcal{L}_1(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{11}) = \alpha_1 I_1^{(1)} + ... + \alpha_{11} I_{11}^{(1)}$. Compte tenu des égalités (6),(7), (8), (9), (10), (11), (12), (13) et (14), on a

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1(\alpha_1,...,\alpha_{11}) &= \left(\frac{1}{24}\alpha_1 - \frac{1}{24}\alpha_2 - \frac{5}{48}\alpha_3 + \frac{5}{48}\alpha_4 + \frac{1}{72}\alpha_7 + \frac{5}{36}\alpha_8 + \frac{2}{15}\alpha_{10}\right)\pi^2 \\ &+ \left(-\frac{1}{4}\alpha_1 + \frac{1}{4}\alpha_2 + \frac{1}{4}\alpha_3 - \frac{1}{4}\alpha_4 - \frac{1}{2}\alpha_8 - \frac{1}{2}\alpha_{10}\right)\ln^2(2) \\ &+ \left(-2\alpha_5 - \frac{2}{3}\alpha_9 - \frac{12}{5}\alpha_{11}\right)G + \frac{1}{4}(\alpha_5+\alpha_{11})\pi\ln(2) \\ &+ \frac{1}{4}(\alpha_2+\alpha_7)\,L_2\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}(\alpha_3+\alpha_{10})\,L_2\left(-\frac{1}{4}\right) + (\alpha_6-\alpha_{11})\,I_6^{(1)}\end{aligned}$$

3.4.1 Formules pour π^2

Afin d'obtenir des formules BBP pour π^2, on impose les relations suivantes :
$\left(-\frac{1}{4}\alpha_1 + \frac{1}{4}\alpha_2 + \frac{1}{4}\alpha_3 - \frac{1}{4}\alpha_4 - \frac{1}{2}\alpha_8 - \frac{1}{2}\alpha_{10}\right) = \left(-2\alpha_5 - \frac{2}{3}\alpha_9 - \frac{12}{5}\alpha_{11}\right) = (\alpha_5+\alpha_{11})$
$= (\alpha_2+\alpha_7) = (\alpha_3+\alpha_{10}) = (\alpha_6-\alpha_{11}) = 0$ pour obtenir l'égalité

$$\begin{aligned}\left(\tfrac{1}{72}\alpha_7 + \tfrac{9}{80}\alpha_{10} + \tfrac{1}{16}\alpha_4 + \tfrac{1}{18}\alpha_8\right)\pi^2 &= (-\alpha_7 - 3\alpha_{10} - \alpha_4 - 2\alpha_8)\,I_1^{(1)} - \alpha_7 I_2^{(1)} - \alpha_{10} I_3^{(1)} \\ &+ \alpha_4 I_4^{(1)} + \frac{5}{3}\alpha_9 I_5^{(1)} - \frac{5}{3}\alpha_9 I_6^{(1)} + \alpha_7 I_7^{(1)} + \alpha_8 I_8^{(1)} \\ &+ \alpha_9 I_9^{(1)} + \alpha_{10} I_{10}^{(1)} - \frac{5}{3}\alpha_9 I_{11}^{(1)}\end{aligned}$$

Il suffit maintenant de particulariser les variables pour obtenir des formules “simples“.

Quelques formules simples déjà connues pour π^2 On obtient ces formules en choisissant les intégrales qui donnent un dénominateur de plus bas degré dans le tableau de correspondance.
Détaillons une dernière fois un exemple :
Afin d'obtenir un dénominateur de la forme $y^b - \alpha$ de plus bas degré (en l'occurrence $y^{24} - 2^{12}$), on choisit $\alpha_9 = \alpha_{10} = 0$ de manière à faire disparaître $I_{10}^{(1)}$ et $I_{11}^{(1)}$. On a alors

$$(-\alpha_7 - \alpha_4 - 2\alpha_8)\,I_1^{(1)} - \alpha_7 I_2^{(1)} + \alpha_4 I_4^{(1)} + \alpha_7 I_7^{(1)} + \alpha_8 I_8^{(1)} = \left(\frac{1}{16}\alpha_4 + \frac{1}{72}\alpha_7 + \frac{1}{18}\alpha_8\right)\pi^2 \qquad (15)$$

Cette égalité permet de donner la formule générale à 3 paramètres

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{16}\alpha_4+\frac{1}{72}\,\alpha_7+\frac{1}{18}\alpha_8\right)\pi^2 &= \frac{1}{2^{11}}BBP_1\left(2^{12},24,P\left(y\right)\right)\\
\text{où } P\left(y\right) &= \left(\alpha_4+\alpha_8\right)y^{22}+\left(-2\,\alpha_4+2\,\alpha_7-4\,\alpha_8\right)y^{21}+\left(-2\,\alpha_4+4\,\alpha_8\right)y^{20}\\
&+\left(-12\,\alpha_7-4\,\alpha_8-8\,\alpha_4\right)y^{19}+\left(-4\,\alpha_4-4\,\alpha_8\right)y^{18}\\
&+\left(-16\,\alpha_8-16\,\alpha_7-8\,\alpha_4\right)y^{17}+\left(8\,\alpha_8+8\,\alpha_4\right)y^{16}+\left(-48\,\alpha_7-48\,\alpha_8\right)y^{15}\\
&+\left(-32\,\alpha_8+16\,\alpha_4\right)y^{14}+\left(-32\,\alpha_4-64\,\alpha_8+32\,\alpha_7\right)y^{13}+\left(-32\,\alpha_4-32\,\alpha_8\right)y^{12}\\
&+\left(-256\,\alpha_8-128\,\alpha_4\right)y^{11}+\left(-64\,\alpha_8-64\,\alpha_4\right)y^{10}\\
&+\left(128\,\alpha_7-256\,\alpha_8-128\,\alpha_4\right)y^{9}+\left(-256\,\alpha_8+128\,\alpha_4\right)y^{8}\\
&+\left(-768\,\alpha_8-768\,\alpha_7\right)y^{7}+\left(256\,\alpha_8+256\,\alpha_4\right)y^{6}\\
&+\left(-512\,\alpha_4-1024\,\alpha_7-1024\,\alpha_8\right)y^{5}+\left(-512\,\alpha_8-512\,\alpha_4\right)y^{4}\\
&+\left(-3072\,\alpha_7-1024\,\alpha_8-2048\,\alpha_4\right)y^{3}+\left(-1024\,\alpha_4+2048\,\alpha_8\right)y^{2}\\
&+\left(2048\,\alpha_7-4096\,\alpha_8-2048\,\alpha_4\right)y+2048\,\alpha_4+2048\,\alpha_8
\end{aligned}$$

Afin de ne pas alourdir l'exposé seules les formules à paramètres qui correspondent au dénominateur en $y^{24}-2^{12}$ seront données. Il en existe qui sont associées à d'autres dénominateurs (par exemple $y^{120}-2^{60}$).
Revenons à l'égalité 15, si l'on choisit de poser $\alpha_7=0$ et $\alpha_4=16$, cette égalité devient

$$-16I_1^{(1)}+16I_4^{(1)}=-16\int_0^1 2\,\frac{y\ln(y)}{y^2-2}dy+16\int_0^1\frac{\left(2\,y-2\right)\ln(y)}{y^2-2\,y+2}dy=\pi^2$$

On peut traduire cette égalité sous forme de somme de formule BBP.

$$\begin{aligned}
\pi^2 &= -16BBP_1\left(2,2,y\right)-8BBP_1\left(-4,4,y^3+y^2-2\right)\\
&= -16\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{2^i\left(2\,i+2\right)^2}-8\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^i}{4^i}\left(-\frac{2}{\left(4\,i+1\right)^2}+\frac{1}{\left(4\,i+3\right)^2}+\frac{1}{\left(4\,i+4\right)^2}\right)\\
&= -16BBP_1\left(2,2,y\right)+2BBP_1\left(16,8,y^7+y^6-2y^4-4y^3-4y^2+8\right)\\
&= -16\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{2^i\left(2\,i+2\right)^2}+2\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{16^i}\left(\frac{8}{(8\,i+1)^2}-\frac{4}{(8\,i+3)^2}-\frac{4}{(8\,i+4)^2}-\frac{2}{(8\,i+5)^2}+\frac{1}{(8\,i+7)^2}+\frac{1}{(8\,i+8)^2}\right)
\end{aligned}$$

On peut ramener cette intégrale à un dénominateur de la forme $y^b-\alpha$ à l'aide du tableau de correspondance pour obtenir

$$32\int_0^1\frac{\ln(y)\left(y^6-2\,y^5-2\,y^4-8\,y^3-4\,y^2-8\,y+8\right)}{y^8-16}dy=\pi^2$$

qui donne l'égalité suivante

$$32\;BBP_1\left(16,8,y^6-2\,y^5-2\,y^4-8\,y^3-4\,y^2-8\,y+8\right)=\pi^2$$

où

$$\pi^2=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{2^{4i}}\left(\frac{16}{\left(8i+1\right)^2}-\frac{16}{\left(8i+2\right)^2}-\frac{8}{\left(8i+3\right)^2}-\frac{16}{\left(8i+4\right)^2}-\frac{4}{\left(8i+5\right)^2}-\frac{4}{\left(8i+6\right)^2}+\frac{2}{\left(8i+7\right)^2}\right)$$

Cette égalité est déjà mentionnée par Plouffe dans [1].
Le choix de $\alpha_4 = 0,\ \alpha_7 = 72$ donne

$$\begin{aligned}\pi^2 &= -72I_1^{(1)} - 72I_2^{(1)} + 72I_7^{(1)} \\ &= \frac{9}{2}BBP_1\left(64, 12, y^9 - 6y^7 - 8y^5 - 24y^3 + 16y\right)\end{aligned}$$

ce qui donne la formule suivante due à Plouffe :

$$\begin{aligned}\pi^2 &= \frac{9}{2}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{2^{6i}}\left(\tfrac{16}{(12i+2)^2} - \tfrac{24}{(12i+4)^2} - \tfrac{8}{(12i+6)^2} - \tfrac{6}{(12i+8)^2} + \tfrac{1}{(12i+10)^2}\right) \\ &= \frac{9}{8}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{2^{6i}}\left(\tfrac{2^4}{(6i+1)^2} - \tfrac{3\times 2^3}{(6i+2)^2} - \tfrac{2^3}{(6i+3)^2} - \tfrac{3\times 2^1}{(6i+4)^2} + \tfrac{2^0}{(6i+5)^2}\right)\end{aligned} \tag{16}$$

Quelques formules simples et nouvelles Une autre solution consiste à garder les intégrales qui fournissent des dénominateurs de la forme $y^b - \alpha$ de degré élévé mais d'ajuster les paramètres de manière à avoir beaucoup de coefficients nuls dans les formules BBP.
De bon choix semblent être les suivants :
$[\alpha_i] = (\alpha_1, ..., \alpha_{11}) = (1, 1, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0)$ qui donne la formule à 10 termes

$$\begin{aligned}\pi^2 &= \frac{9}{128}BBP_1\left(2^{12}, 24, P\left(y\right)\right) \text{ où } P\left(y\right) = y^{21} - 6\,y^{19} - 8\,y^{17} - 24\,y^{15} + 16\,y^{13} \\ &\quad +64\,y^9 - 384\,y^7 - 512\,y^5 - 1536\,y^3 + 1024\,y\end{aligned} \tag{17}$$

Le polynôme $P\left(y\right)$ n'ayant que des puissances impaires, cette formule peut se simplifier pour donner

$$\begin{aligned}\pi^2 &= \frac{9}{4\times 128}BBP_1\left(2^{12}, 12, P\left(y\right)\right) \text{ où } P\left(y\right) = y^{10} - 6\,y^9 - 8\,y^8 - 24\,y^7 + 16\,y^6 \\ &\quad +64\,y^4 - 384\,y^3 - 512\,y^2 - 1536\,y + 1024\end{aligned}$$

$[\alpha_i] = (2, 1, 0, 1, 0, 0, -1, -1, 0, 0, 0)$ qui donne la formule à 11 termes

$$\begin{aligned}\pi^2 &= -\frac{9}{64}BBP_1\left(2^{12}, 24, P\left(y\right)\right) \text{ où } P\left(y\right) = 3y^{20} - 4y^{19} - 12y^{17} - 48y^{15} - 24y^{14} \\ &\quad -64y^{11} - 192y^8 - 768y^7 - 768y^5 - 1024y^3 + 1536y^2\end{aligned}$$

$[\alpha_i] = (-2, -1, -1, -2, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0)$ qui donne la formule BBP à 43 termes (remarquer le 2^{60}) :

$$\begin{aligned}
\pi^2 &= \frac{45}{2^{43}} BBP_1 \left(2^{60}, 120, P(y)\right) \text{ où } P(y) = 5\,y^{114} - 6\,y^{113} - 32\,y^{111} + 48\,y^{107} - 160\,y^{104} \\
&\quad -512\,y^{103} - 384\,y^{101} - 1280\,y^{99} - 5120\,y^{95} - 5120\,y^{94} - 24576\,y^{89} - 131072\,y^{87} \\
&\quad +163840\,y^{84} + 196608\,y^{83} - 786432\,y^{79} - 1572864\,y^{77} + 5242880\,y^{74} - 20971520\,y^{71} \\
&\quad -100663296\,y^{65} - 167772160\,y^{64} - 536870912\,y^{63} - 536870912\,y^{59} - 8589934592\,y^{55} \\
&\quad -5368709120\,y^{54} - 6442450944\,y^{53} - 85899345920\,y^{47} + 171798691840\,y^{44} \\
&\quad -412316860416\,y^{41} - 824633720832\,y^{39} + 3298534883328\,y^{35} + 5497558138880\,y^{34} \\
&\quad -35184372088832\,y^{31} - 26388279066624\,y^{29} - 175921860444160\,y^{24} \\
&\quad -351843720888320\,y^{23} - 1407374883553280\,y^{19} - 1688849860263936\,y^{17} \\
&\quad -9007199254740992\,y^{15} - 5629499534213120\,y^{14} + 13510798882111488\,y^{11} \\
&\quad -144115188075855872\,y^{7} - 108086391056891904\,y^{5} + 180143985094819840\,y^{4}
\end{aligned}$$

Si l'on s'intéresse aux formules ayant le moins de termes, citons que d'autres formules à 50 termes ($[\alpha_i] = (-1, -1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$) et à 55 termes ($[\alpha_i] = (-2, -1, 0, -1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0)$) existent.
On peut également chercher des séries alternées, par exemple
$[\alpha_i] = (0, 0, 0, -2, 0, 0, 0, , 0, 0, 0)$ donne

$$\pi^2 = -\frac{9}{20} BBP_1 \left(-2^6, 12, y^{10} - 8y^8 - 12y^7 - 4y^6 + 8y^4 + 48y^3 + 64y^2 - 32\right)$$

Remarque Les égalités intégrales permettent aussi d'écrire de différentes façons π^2 comme somme de formule BBP.
Par exemple, le résultat [17] ($[\alpha_i] = (-1, -1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$) donne l'égalité intégrale

$$\begin{aligned}
\frac{1}{72}\pi^2 &= -\int_0^1 2\,\frac{y\ln(y)}{y^2-2}dy - \int_0^1 2\,\frac{y\ln(y)}{y^2+2}dy + \int_0^1 \frac{\left(4\,y^3 - 4\,y\right)\ln(y)}{y^4 - 2\,y^2 + 4}dy \\
&= -\int_0^1 2\,\frac{\ln(y)y}{y^2-2}dy + 2\int_0^1 \frac{\ln(y)y\left(y^4 + 4\,y^2 - 8\right)}{(y^2+2)\,(y^4 - 2\,y^2 + 4)}dy \\
&= -\int_0^1 2\,\frac{\ln(y)y}{y^2-2}dy + 2\int_0^1 \frac{\ln(y)y\left(y^4 + 4\,y^2 - 8\right)}{y^6+8}dy
\end{aligned}$$

Ce qui peut s'écrire

$$\begin{aligned}
\pi^2 &= -72BBP_1(2, 2, y) - 18BBP_1\left(-2^3, 6, y^5 + 4y^3 - 8y\right) \\
&= -18BBP_1(2, 1, 1) - \frac{9}{2}BBP_1\left(-2^3, 3, y^2 + 4y - 8\right) \\
&= -18\sum_{i=0}^{\infty} \tfrac{1}{2^i\,(i+1)^2} - \frac{9}{2}\sum_{i=0}^{\infty} \tfrac{(-1)^i}{8^i}\left(\tfrac{-8}{(3\,i+1)^2} + \tfrac{4}{(3\,i+2)^2} + \tfrac{1}{(3\,i+3)^2}\right)
\end{aligned}$$

3.4.2 Formules pour les constantes $G, \pi \ln(2)$ et $\ln^2(2)$

Pour $\pi \ln(2)$ La même méthode conduit à la formule générale pour $\pi \ln(2)$ suivante (lorsque l'on impose un dénominateur en $y^{24} - 2^{12}$)

$$\begin{aligned}
\pi \ln(2) &= \frac{1}{2^{11}} BBP_1\left(2^{12}, 24, P(y)\right) \\
\text{où } P(y) &= (\alpha_8 + \alpha_4 - 8)\, y^{22} + (-12\,\alpha_8 + 32 - 11\,\alpha_4)\, y^{21} + 16384 + (56 - 2\,\alpha_4 + 4\,\alpha_8)\, y^{20} \\
&+ (44\,\alpha_8 + 46\,\alpha_4)\, y^{19} + (-4\,\alpha_8 - 4\,\alpha_4 + 32)\, y^{18} + (160 + 48\,\alpha_8 + 64\,\alpha_4)\, y^{17} \\
&+ (8\,\alpha_4 + 8\,\alpha_8 + 64)\, y^{16} + (216\,\alpha_4 + 144\,\alpha_8)\, y^{15} + (-32\,\alpha_8 + 448 + 16\,\alpha_4)\, y^{14} \\
&+ (-192\,\alpha_8 + 512 - 176\,\alpha_4)\, y^{13} + (-32\,\alpha_8 - 256 - 32\,\alpha_4)\, y^{12} + (-256\,\alpha_8 - 128\,\alpha_4)\, y^{11} \\
&+ (512 - 64\,\alpha_8 - 64\,\alpha_4)\, y^{10} + (-704\,\alpha_4 - 2048 - 768\,\alpha_8)\, y^{9} + (-256\,\alpha_8 + 128\,\alpha_4 - 3584)\, y^{8} \\
&+ (2304\,\alpha_8 + 3456\,\alpha_4)\, y^{7} + (256\,\alpha_8 - 2048 + 256\,\alpha_4)\, y^{6} + (3072\,\alpha_8 - 10240 + 4096\,\alpha_4)\, y^{5} \\
&+ (-512\,\alpha_8 - 512\,\alpha_4 - 4096)\, y^{4} + (11264\,\alpha_8 + 11776\,\alpha_4)\, y^{3} + (-28672 - 1024\,\alpha_4 + 2048\,\alpha_8)\, y^{2} \\
&+ (-12288\,\alpha_8 - 32768 - 11264\,\alpha_4)\, y + 2048\,\alpha_4 + 2048\,\alpha_8
\end{aligned}$$

En ajustant les coefficients α_4 et α_8, on dispose de formules ayant 17 termes qui sont de la forme

$$\pi \ln(2) = BBP_1\left(2^{12}, 24, P(y)\right)$$

Une des plus simples semble être $[\alpha_i] = (2, -6, 0, 4, 1, 0, 6, -6, -3, 0, 0)$

$$\pi \ln(2) = \frac{-1}{256} BBP_1\left(2^{12}, 24, P(y)\right) \text{ où } P(y) = 2\,y^{22} - 18\,y^{21} + 9\,y^{20} + 40\,y^{19} - 8\,y^{18} - 4\,y^{17} - 184\,y^{14} - 288\,y^{13} - 512\,y^{11} - 128\,y^{10} - 640\,y^{9} - 576\,y^{8} + 512\,y^{6} + 2304\,y^{5} + 10240\,y^{3} + 11776\,y^{2} - 10240\,y$$

Une autre formule à 18 termes est obtenue pour $[\alpha_i] = (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, -3, 0, 0)$

$$\pi \ln(2) = \frac{-1}{256} BBP_1\left(2^{12}, 24, P(y)\right) \text{ où } P(y) = y^{22} - 4\,y^{21} - 7\,y^{20} - 4\,y^{18} - 20\,y^{17} - 8\,y^{16} - 56\,y^{14} - 64\,y^{13} + 32\,y^{12} - 64\,y^{10} + 256\,y^{9} + 448\,y^{8} + 256\,y^{6} + 1280\,y^{5} + 512\,y^{4} + 3584\,y^{2} + 4096\,y - 2048$$

Enfin si l'on cherche des dénominateurs de degré plus élevé dans les intégrales, le choix de $[\alpha_i] = (0, 0, 0, 0, 4, -5, 0, 0, 6, 0, -5)$ donne la formule à 58 termes :

$$\pi \ln(2) = BBP_1\left(2^{60}, 120, P(y)\right)$$

où $P(y)$ est un polynôme de degré 117 , à 58 coefficients non nuls que le lecteur pourra expliciter
Pour terminer $[\alpha_i] = (0, 0, 0, 0, 4, 1, 0, 0, 0, 0, 1)$ donne

$$\begin{aligned}
\pi \ln(2) &= \frac{-1}{2^{15}} BBP_1\left(2^{20}, 40, P(y)\right) \text{ où } P(y) = y^{38} - 8\,y^{37} + 2\,y^{36} + 21\,y^{34} + 32\,y^{33} - 8\,y^{32} + 16\,y^{30} + 72\,y^{29} \\
&+32\,y^{28} - 64\,y^{26} + 512\,y^{25} + 672\,y^{24} + 256\,y^{22} - 2048\,y^{21} + 512\,y^{20} - 1024\,y^{18} + 8192\,y^{17} \\
&-2048\,y^{16} - 21504\,y^{14} - 32768\,y^{13} + 8192\,y^{12} - 16384\,y^{10} - 73728\,y^{9} - 32768\,y^{8} + 65536\,y^{6} \\
&-524288\,y^{5} - 688128\,y^{4} - 262144\,y^{2} + 2097152\,y - 524288 \\
&= \frac{1}{2^5} BBP_1\left(-2^{10}, 20, Q(y)\right) \text{ où } Q(y) = y^{18} - 8\,y^{17} + 2\,y^{16} + 21\,y^{14} + 32\,y^{13} - 8\,y^{12} + 16\,y^{10} + 72\,y^{9} \\
&+32\,y^{8} - 64\,y^{6} + 512\,y^{5} + 672\,y^{4} + 256\,y^{2} - 2048\,y + 512
\end{aligned}$$

Pour la constante de Catalan G De même, en imposant un dénominateur en $y^{24}-2^{12}$, on obtient

$$\begin{aligned}
G &= \frac{1}{7\times 2^{12}} BBP_1\left(2^{12},24,P(y)\right)\\
\text{où } P(y) &= (4\,\alpha_1+6\,\alpha_8-21)\,y^{22}+(-44\,\alpha_1+42-80\,\alpha_8)\,y^{21}+(84-8\,\alpha_1+72\,\alpha_8)\,y^{20}\\
&+(248\,\alpha_8+184\,\alpha_1)\,y^{19}+(-16\,\alpha_1-24\,\alpha_8+84)\,y^{18}+(160\,\alpha_8+336+256\,\alpha_1)\,y^{17}\\
&+(168+32\,\alpha_1+48\,\alpha_8)\,y^{16}+(864\,\alpha_1+288\,\alpha_8)\,y^{15}+(64\,\alpha_1+672-576\,\alpha_8)\,y^{14}\\
&+(-1280\,\alpha_8-704\,\alpha_1+672)\,y^{13}+(-672-128\,\alpha_1-192\,\alpha_8)\,y^{12}+(-512\,\alpha_1-2560\,\alpha_8)\,y^{11}\\
&+(-256\,\alpha_1+1344-384\,\alpha_8)\,y^{10}+(-2816\,\alpha_1-5120\,\alpha_8-2688)\,y^{9}\\
&+(-5376-4608\,\alpha_8+512\,\alpha_1)\,y^{8}+(13824\,\alpha_1+4608\,\alpha_8)\,y^{7}+(1024\,\alpha_1-5376+1536\,\alpha_8)\,y^{6}\\
&+(16384\,\alpha_1+10240\,\alpha_8-21504)\,y^{5}+(-3072\,\alpha_8-2048\,\alpha_1-10752)\,y^{4}\\
&+(63488\,\alpha_8+47104\,\alpha_1)\,y^{3}+(-43008-4096\,\alpha_1+36864\,\alpha_8)\,y^{2}\\
&+(-81920\,\alpha_8-43008-45056\,\alpha_1)\,y+12288\,\alpha_8+8192\,\alpha_1+43008
\end{aligned}$$

Le cas le plus intéressant est obtenue quand tous les α_i sont nuls excepté α_9 que l'on prend égal à 1. On obtient ainsi

$$\begin{aligned}
G &= \frac{3}{2^{12}} BBP_1\left(2^{12},24,P(y)\right) \text{ où } P(y)=-y^{22}+2\,y^{21}+4\,y^{20}+4\,y^{18}+16\,y^{17}+8\,y^{16}+32\,y^{14}+32\,y^{13}\\
&\quad -32\,y^{12}+64\,y^{10}-128\,y^{9}-256\,y^{8}-256\,y^{6}-1024\,y^{5}-512\,y^{4}-2048\,y^{2}-2048\,y+2048\\
&= \frac{3}{2^{6}} BBP_1\left(-2^{6},12,y^{10}-2\,y^{9}-4\,y^{8}-4\,y^{6}-16\,y^{5}-8\,y^{4}-32\,y^{2}-32\,y+32\right)
\end{aligned}$$

L'intérêt de cette formule réside dans les coefficients de P qui sont tous des puissances de 2.
Le choix de $[\alpha_i]=(1,-3,0,2,0,0,3,-3,1,0,0)$ ou de $[\alpha_i]=(1,-3,0,2,0,0,3,-3,-1,0,0)$ permet d'écrire que $G=BBP_1\left(2^{12},24,P(y)\right)$ où $P(y)$ a 16 coefficients non nuls.
Pour finir $[\alpha_i]=(0,0,0,0,-1,1,0,0,-1,0,1)$ donne $G=BBP_1\left(2^{30},60,P(y)\right)$ où P a 28 coefficients non nuls.

Remarque 3 *B.Gourevitch semble le premier à avoir découvert expérimentalement une formule BBP pour G (Mai 2000) sans toutefois fournir de preuve.*

Pour $\ln^2(2)$ On obtient

$$\begin{aligned}
(9\alpha_4+2\alpha_7+8\alpha_8)\ln^2(2) &= -\frac{1}{2^9} BBP_1\left(2^{12},24,P(y)\right)\\
\text{où } P(y) &= (8\,\alpha_8+2\,\alpha_7+9\,\alpha_4)\,y^{23}+(-6\,\alpha_8-6\,\alpha_4)\,y^{22}+(40\,\alpha_8-8\,\alpha_7+30\,\alpha_4)\,y^{21}\\
&+(-24\,\alpha_8+12\,\alpha_4)\,y^{20}+(56\,\alpha_8+84\,\alpha_4+80\,\alpha_7)\,y^{19}+(24\,\alpha_4+24\,\alpha_8)\,y^{18}\\
&+(112\,\alpha_7+160\,\alpha_8+120\,\alpha_4)\,y^{17}+(-48\,\alpha_8-48\,\alpha_4)\,y^{16}\\
&+(144\,\alpha_4+416\,\alpha_8+320\,\alpha_7)\,y^{15}+(-96\,\alpha_4+192\,\alpha_8)\,y^{14}\\
&+(640\,\alpha_8+480\,\alpha_4-128\,\alpha_7)\,y^{13}+(192\,\alpha_8+192\,\alpha_4)\,y^{12}\\
&+(2048\,\alpha_8+1344\,\alpha_4+128\,\alpha_7)\,y^{11}+(384\,\alpha_8+384\,\alpha_4)\,y^{10}\\
&+(2560\,\alpha_8-512\,\alpha_7+1920\,\alpha_4)\,y^{9}+(1536\,\alpha_8-768\,\alpha_4)\,y^{8}\\
&+(5120\,\alpha_7+6656\,\alpha_8+2304\,\alpha_4)\,y^{7}+(-1536\,\alpha_8-1536\,\alpha_4)\,y^{6}\\
&+(7168\,\alpha_7+7680\,\alpha_4+10240\,\alpha_8)\,y^{5}+(3072\,\alpha_4+3072\,\alpha_8)\,y^{4}\\
&+(21504\,\alpha_4+20480\,\alpha_7+14336\,\alpha_8)\,y^{3}+(-12288\,\alpha_8+6144\,\alpha_4)\,y^{2}\\
&+(30720\,\alpha_4+40960\,\alpha_8-8192\,\alpha_7)\,y-12288\,\alpha_8-12288\,\alpha_4
\end{aligned}$$

Le cas le plus simple est donné par $[\alpha_i] = (-4, -3, 0, 0, 0, 0, 3, 0, 0, 0, 0)$ qui conduit à

$$\begin{aligned}
\ln^2(2) &= \frac{-1}{8} BBP_1 \left(2^6, 12, y^{11} - 4\,y^9 + 40\,y^7 + 56\,y^5 + 160\,y^3 - 64\,y\right) \\
&= \frac{-1}{32} BBP_1 \left(2^6, 6, y^5 - 4\,y^4 + 40\,y^3 + 56\,y^2 + 160\,y - 64\right)
\end{aligned}$$

Le choix de $[\alpha_i] = (-42, -21, -20, -40, 0, 0, 21, 0, 0, 20, 0)$ conduit à $\ln^2(2) = BBP_1\left(2^{60}, 120, P(y)\right)$ où P a 52 coefficients non nuls.

3.5 Quelques formules composites

Dans la détermination de formules BBP, on a systématiquement annulé les coefficients de $L_2\left(\frac{1}{4}\right)$, $L_2\left(-\frac{1}{4}\right)$ et $I_6^{(1)}$. Si l'on décide alors de garder ces termes, on obtient parmi les formules possibles, les résultats suivants : $[\alpha] = (1, 1, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 0)$ donne

$$\frac{1}{16} BPP_1 \left(2^6, 12, 3y^{11} + 2^9 - 16^5 + 32\right) = \frac{\pi^2}{36} + \frac{3}{4} L_2\left(\frac{1}{4}\right)$$

qui se simplifie en

$$\begin{aligned}
\pi^2 &= \frac{9}{8} BPP_1\left(2^6, 6, y^4 - 8y^2 + 16\right) + \frac{3}{64} BPP_1\left(2^6, 1, 1\right) - \frac{27}{4} BPP_1(4, 1, 1) \\
&= \frac{9}{8} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{6i}} \left(\tfrac{16}{(6\,i+1)^2} - \tfrac{8}{(6i+3)^2} + \tfrac{1}{(6i+5)^2}\right) + \frac{3}{64} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{6i}\,(i+1)^2} - \frac{27}{4} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{4^i\,(i+1)^2}
\end{aligned}$$

Cette formule est équivalente à la formule (16).
Si on applique cette idée pour la constante de Catalan, on obtient avec $[\alpha] = (0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 1, 0, 0)$ l'égalité

$$\begin{aligned}
\frac{2}{3} G &= \frac{3}{2^{10}} BPP_1\left(2^{12}, 24, y^{20} + 4y^{17} + 8y^{14} - 64y^8 - 256y^5 - 512y^2\right) - I_6^{(1)} \\
&= \frac{3}{2^{10}} BPP_1\left(2^{12}, 24, y^{20} + 4y^{17} + 8y^{14} - 64y^8 - 256y^5 - 512y^2\right) \\
&\quad - \frac{1}{2^3} BPP_1\left(2^4, 8, y^6 - 2y^5 + 2y^4 - 4y^2 + 8y - 8\right) \\
&= \frac{1}{3 \times 2^{10}} BPP_1\left(2^{12}, 24, y^6 + 4y^5 + 8y^4 - 64y^2 - 256y - 512\right) \\
&\quad - \frac{1}{2^3} BPP_1\left(2^4, 8, y^6 - 2y^5 + 2y^4 - 4y^2 + 8y - 8\right) \\
&= \frac{1}{2} BPP_1\left(-4, 4, y^2 - 2y + 2\right) - \frac{1}{3 \times 2^4} BPP_1\left(-2^6, y^2 + 4y + 8\right)
\end{aligned}$$

Ce qui sous forme de séries donne les deux égalités suivantes :

$$G = \frac{3}{4} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{4^i} \left(\frac{2}{(4i+1)^2} - \frac{2}{(4i+2)^2} + \frac{1}{(4i+3)^2}\right) - \frac{1}{32} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{64^i} \left(\frac{8}{(4i+1)^2} + \frac{4}{(4i+2)^2} + \frac{1}{(4i+3)^2}\right)$$

La même idée conduit, avec $[\alpha]=(0,0,0,0,-4,8,0,0,-12,0,0)$ à

$$\frac{1}{4}BBP_1\left(-2^6,12,y^{10}-7y^8-4y^6-36y^5-8y^4-56y^2+32\right)-4BPP_1\left(-4,2,1\right)=\pi\ln(2)$$

et avec $[\alpha]=(4,8,0,0,-4,4,12,0,0,0,0)$ à

$$\begin{aligned}\ln^2(2) &= \frac{1}{2^{11}}\,BBP_1\left(2^{12},12,9\,y^{11}-40\,y^8+576\,y^5+512\,y^4-4608\,y^2+8192\right)\\ &\quad+\frac{1}{2}BPP_1\left(16,4,y^2-4\right)-\frac{5}{4}\,BPP_1\left(4,1,1\right)\end{aligned}$$

Ce genre de formule n'a pas systématiquement été recherché.

4 Cas des polylogarithmes d'ordre 3

L'équation de Kummer pour le trilogarithme s'écrit

$$\begin{aligned}L_3\left(\frac{x\,(1-y)^2}{y\,(1-x)^2}\right)+L_3\,(xy)+L_3\left(\frac{x}{y}\right) &= 2L_3\left(\frac{x\,(1-y)}{y\,(1-x)}\right)+2L_3\left(-\frac{x\,(1-y)}{1-x}\right)+2L_3\left(-\frac{1-y}{y\,(1-x)}\right)\\ &\quad+2L_3\left(\frac{1-y}{1-x}\right)+2L_3\,(x)+2L_3\,(y)\\ &\quad+\ln^2(y)\ln\left(\frac{1-y}{1-x}\right)-\frac{\pi^2}{3}\ln(y)-\frac{1}{3}\ln^3(y)-2\,\zeta(3)\end{aligned}$$

et la formule d'inversion

$$L_3\left(\frac{1}{z}\right)=L_3\,(z)+\frac{\pi^2}{6}\ln(-z)+\frac{1}{6}\ln^3(-z)$$

Un résultat classique permet d'affirmer que

$$I_1^{(2)}=\frac{7}{8}\zeta\,(3)-\frac{\pi^2\ln(2)}{12}+\frac{\ln^2(2)}{6}$$

et par définition

$$I_2^{(2)}=-\frac{1}{2}L_3\left(-\frac{1}{2}\right)$$

4.1 Calcul de $I_4^{(2)}$

L'équation de Landen pour le trilogarithme (cf [4]) est

$$L_3\,(z)+L_3\,(1-z)=-L_3\left(\frac{z}{z-1}\right)+\zeta\,(3)+\frac{\pi^2}{6}\ln(1-z)-\frac{1}{2}\ln(z)\ln^2(1-z)+\frac{1}{6}\ln^3(1-z)$$

Appliquée à $z=\frac{1+i}{2}$,on obtient (avec $L_3(i)=\dfrac{-3\zeta(3)+i\pi^3}{32}$)

$$I_4^{(2)}=-2\left(L_3\left(\frac{1+i}{2}\right)+L_3\left(\frac{1-i}{2}\right)\right)=-\frac{35}{16}\zeta(3)+\frac{5\pi^2\ln(2)}{48}-\frac{\ln^3(2)}{12}$$

résultat implicitement contenu dans [3].
On en déduit par la formule de duplication que

$$I_3^{(2)}=\frac{35}{16}\zeta(3)-\frac{5\pi^2\ln(2)}{48}+\frac{\ln^3(2)}{12}-\frac{1}{8}L_3\left(-\frac{1}{4}\right)$$

4.2 Calcul de $I_8^{(2)}$

Comme pour le calcul de $I_8^{(1)}$, on utilise l'équation de Kummer avec $x=\frac{1+i}{2}$, $y=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$puis avec $x=\frac{1-i}{2}$, $y=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$. On additionne alors les deux équations obtenues. On simplifie ces équations à l'aide de l'égalité $L_3\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{\zeta(3)}{3}+\dfrac{5i\pi^3}{162}$ et de la valeur de $L_3(i)$. Ceci permet d'affirmer que

$$I_8^{(2)}=-\frac{119}{48}\zeta(3)+\frac{5\pi^2\ln(2)}{36}-\frac{\ln^3(2)}{6}$$

4.3 Relation entre $I_5^{(2)}$ et $I_9^{(2)}$, valeur de $I_{10}^{(2)}$

On reprend les deux premières équations du calcul de $I_8^{(1)}$ que l'on soustrait cette fois ci. On utilise ensuite la formule d'inversion avec $z=1+i$ et $z=1-i$ de manière à faire apparaître le terme $\left(L_2\left(\frac{1+i}{2}\right)-L_2\left(\frac{1-i}{2}\right)\right)$. Enfin une dernière application de la formule d'inversion avec $z=\frac{\sqrt{3}-i}{2}$ et avec $z=\frac{\sqrt{3}+i}{2}$ conduit à

$$\begin{aligned}\frac{3}{64}i\pi^3-\frac{1}{6}i\pi\ln^2(2) &= 3\left(L_3\left(\frac{1}{s_3}\right)+L_3\left(\frac{1}{s_4}\right)-L_3\left(\frac{1}{s_1}\right)-L_3\left(\frac{1}{s_2}\right)\right)\\ &\quad+\left(L_3\left(\frac{1+i}{2}\right)-L_3\left(\frac{1-i}{2}\right)\right)\end{aligned}$$

Ce qui prouve que

$$3I_9^{(2)}-I_5^{(2)}=\frac{3\pi^3}{32}-\frac{\pi\ln^2(2)}{8}$$

Si l'on utilise l'équation de Kummer avec $x=-1$ et $y=1+i$, puis avec $x=-1$ et $y=1-i$,on obtient deux égalités que l'on soustrait. On simplifie le résultat obtenu avec la formule d'inversion appliquée à $-1-i$, $-1+i$, $1+i$ et $1-i$ pour obtenir

$$\begin{aligned}&L_3\left(\frac{1-i}{8}\right)-L_3\left(\frac{1+i}{8}\right)+2L_3\left(\frac{-1+i}{2}\right)-2L_3\left(\frac{-1-i}{2}\right)\\ =\ &4L_3\left(\frac{1+i}{4}\right)-4L_3\left(\frac{1-i}{4}\right)+4L_3\left(-\frac{i}{2}\right)+4L_3\left(\frac{i}{2}\right)+2L_3\left(\frac{1-i}{2}\right)+2L_3\left(\frac{1+i}{2}\right)\\ &+\frac{13}{64}i\pi^3-\frac{7}{16}i\pi\ln^2(2)\end{aligned}$$

Cette égalité se traduit à l'aide des intégrales par

$$-\frac{1}{2}J_6^{(2)} + I_6^{(2)} = 2J_4^{(2)} - I_5^{(2)} - 2J_2^{(2)} + \frac{13}{64}\pi^3 - \frac{7}{16}\pi\ln^2(2)$$

et donne la relation

$$-6I_5^{(2)} + 5I_6^{(2)} + 5I_{11}^{(2)} = \frac{23\pi^3}{160} - \frac{\pi\ln^2(2)}{8}$$

Si, au lieu de soustraire les égalités obtenues précédemment, on les additionne, on obtient :

$$\begin{aligned}
&L_3\left(\frac{1-i}{8}\right) + L_3\left(\frac{1+i}{8}\right) + 2L_3\left(\frac{-1+i}{2}\right) + 2L_3\left(\frac{-1-i}{2}\right) \\
&\quad = 4L_3\left(\frac{1+i}{4}\right) + 4L_3\left(\frac{1-i}{4}\right) + 4L_3\left(-\frac{i}{2}\right) + 4L_3\left(\frac{i}{2}\right) + 2L_3\left(\frac{1-i}{2}\right) + 2L_3\left(\frac{1+i}{2}\right) \\
&\qquad - 7\zeta(3) - \frac{5}{8}\ln^3(2) + \frac{15\pi^2\ln(2)}{32}
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$-\frac{1}{2}J_5^{(2)} - I_3^{(2)} = \frac{15}{32}\pi^2\ln(2) - \frac{5}{8}\ln^3(2) - 7\zeta(3) - 2J_3^{(2)} - I_4^{(2)} - 2J_1^{(2)}$$

et fournit

$$I_{10}^{(2)} = -\frac{959}{400}\zeta(3) + \frac{2\pi^2\ln(2)}{15} - \frac{\ln^3(2)}{6} - \frac{1}{8}L_3\left(-\frac{1}{4}\right)$$

4.4 Calcul de $I_7^{(2)}$

Comme pour le calcul de $I_7^{(1)}$, l'équation de Kummer pour le polylogarithme d'ordre 3 avec $(x,y) = \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, puis la formule d'inversion avec $z = 1 - i\sqrt{3}$ conduit immédiatement à

$$\begin{aligned}
I_7^{(2)} &= -\frac{49}{72}\zeta(3) + \frac{\pi^2\ln(2)}{18} - \frac{\ln^3(2)}{12} - \frac{1}{2}L_3\left(-\frac{1}{2}\right) \\
&= -\frac{35}{144}\zeta(3) + \frac{\pi^2\ln(2)}{72} - \frac{1}{8}L_3\left(\frac{1}{4}\right)
\end{aligned}$$

4.5 Application à la détermination de formules BBP

Considérons maintenant la forme linéaire $\mathcal{L}_2(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{11}) = \alpha_1 I_1^{(2)} + ... + \alpha_{11} I_{11}^{(2)}$. Alors les résultats précédents permettent d'affirmer que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_2(\alpha_1,...,\alpha_{11}) &= \left(-\frac{7}{16}\alpha_1 - \frac{35}{16}\alpha_4 + \frac{35}{16}\alpha_3 - \frac{119}{48}\alpha_8 - \frac{49}{72}\alpha_7 - \frac{959}{400}\alpha_{10}\right)\zeta(3) \\
&+ \left(\frac{23}{800}\alpha_{11} + \frac{1}{32}\alpha_9\right)\pi^3 \\
&+ \left(-\frac{5}{48}\alpha_3 + \frac{5}{48}\alpha_4 + \frac{1}{18}\alpha_7 + \frac{5}{36}\alpha_8 + \frac{2}{15}\alpha_{10} + \frac{1}{24}\alpha_1\right)\pi^2\ln(2) \\
&+ \left(-\frac{1}{40}\alpha_{11} - \frac{1}{24}\alpha_9\right)\pi\ln^2(2) \\
&+ \left(-\frac{1}{12}\alpha_1 - \frac{1}{12}\alpha_4 + \frac{1}{12}\alpha_3 - \frac{1}{6}\alpha_8 - \frac{1}{12}\alpha_7 - \frac{1}{6}\alpha_{10}\right)\ln^3(2) \\
&+ \left(-\frac{1}{2}\alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_7\right)L_3\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{8}\alpha_3 - \frac{1}{8}\alpha_{10}\right)L_3\left(-\frac{1}{4}\right) \\
&+ \left(\alpha_5 + \frac{1}{3}\alpha_9 + \frac{6}{5}\alpha_{11}\right)I_5^{(2)} + (\alpha_6 - \alpha_{11})\,I_6^{(2)}
\end{aligned}$$

4.5.1 Formules pour π^3

Si l'on cherche des formules pour π^3 on annule les coefficients des $\zeta(3), \pi^2\ln(2)$ ...pour obtenir

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{60}\alpha_9\pi^3 &= \left(-\frac{139}{75}\alpha_{10} - \frac{37}{27}\alpha_8\right)I_1^{(2)} + \left(-\frac{1}{3}\alpha_8 - \frac{21}{25}\alpha_{10}\right)I_2^{(2)} - \alpha_{10}I_3^{(2)} + \left(-\frac{149}{75}\alpha_{10} - \frac{26}{27}\alpha_8\right)I_4^{(2)} \\
&+ \frac{5}{3}\alpha_9 I_5^{(2)} - \frac{5}{3}\alpha_9 I_6^{(2)} + \left(\frac{1}{3}\alpha_8 + \frac{21}{25}\alpha_{10}\right)I_7^{(2)} + \alpha_8 I_8^{(2)} + \alpha_9 I_9^{(2)} + \alpha_{10} I_{10}^{(2)} - \frac{5}{3}\alpha_9 I_{11}^{(2)}
\end{aligned}$$

On ne peut pas choisir $\alpha_9 = 0$, ce qui impose d'utiliser un dénominateur en $y^{120} - 2^{60}$ pour les formules BBP donnant π^3. En toute généralité, on obtient ainsi une formule BPP pour π^3 ayant deux paramètres (α_4 et α_{10}), formule que le lecteur pourra établir. La formule la plus simple est alors obtenue pour $[\alpha_i] = (0,0,0,0,5,-5,0,0,3,0,-5)$ et a 90 termes. Afin de l'écrire, on introduit les polynômes Π_k définies par $I_k^{(0)} = \int_0^1 \frac{\Pi_k(y)}{y^{120}-2^{60}}dy$, par exemple $\Pi_1(y) = \frac{2y\left(y^{120}-2^{60}\right)}{y^2-2}$.
On a alors

$$\begin{aligned}
\pi^3 &= \frac{5}{2^{67}}BBP_2\left(2^{60},120,P(y)\right) \\
\text{où } P(y) &= 5(\Pi_5 - \Pi_6 - \Pi_{11}) + 3\Pi_9
\end{aligned}$$

Cette égalité peut s'écrire autrement.
En effet $\mathcal{L}_2(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{11}) = \mathcal{L}_2(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3-\alpha_{10},\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6-\alpha_{11},\alpha_7,\alpha_8,\alpha_9,0,0) +$
$\mathcal{L}_2(0,0,\alpha_{10},0,0,-\alpha_{11},0,0,0,\alpha_{10},\alpha_{11})$
Mais $\mathcal{L}_2(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3-\alpha_{10},\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6-\alpha_{11},\alpha_7,\alpha_8,\alpha_9,0,0) = \int_0^1 \frac{\ln(y)P_1(y)}{y^{24}-2^{12}}$ et

$\mathcal{L}_2(0,0,\alpha_{10},0,0,-\alpha_{11},0,0,0,\alpha_{10},\alpha_{11}) = \int_0^1 \frac{\ln(y)P_2(y)}{y^{40}-2^{20}}$ où P_2 a 8 coefficients non nuls en général, et seulement 6 si $\alpha_{10}=0$ ou $\alpha_{11}=0$ ou $\alpha_{10}+\alpha_{11}=0$.
Si l'on applique cette remarque ici, on a
$\mathcal{L}_2(0,0,0,0,5,-5,0,0,3,0,-5) = \mathcal{L}_2(0,0,0,0,0,5,0,0,0,0,-5) + \mathcal{L}_2(0,0,0,0,5,-10,0,0,3,0,0)$
ce qui donne

$$\begin{aligned}
\pi^3 &= -\frac{125}{2^{14}}BPP_2\left(2^{20},40,y^{34}+8y^{29}+32y^{24}-1024y^{14}-8192y^9-32768y^4\right)-\frac{5}{2^7}BPP_2\left(2^{12},24,P(y)\right)\\
&= -\frac{125}{2^{14}}BPP_2\left(2^{20},8,y^6+8y^5+32y^4-1024y^2-8192y-32768\right)-\frac{5}{2^7}BPP_2\left(2^{12},24,P(y)\right)\\
\text{où } P(y) &= y^{22}-12\,y^{21}+11\,y^{20}-4\,y^{18}+84\,y^{17}-8\,y^{16}+88\,y^{14}-192\,y^{13}+32\,y^{12}\\
&\quad -64\,y^{10}+768\,y^9-704\,y^8+256\,y^6-5376\,y^5+512\,y^4-5632\,y^2+12288\,y-2048
\end{aligned}$$

Cette formule peut aussi s'écrire

$$\begin{aligned}
\pi^3 &= \frac{5}{2}BPP_2\left(-2^6,12,y^{10}-12y^9+11y^8-4y^6+84y^5-8y^4+88y^2-192y+32\right)\\
&\quad +\frac{1}{16}BPP_2\left(-2^{10},4,y^2+8y+32\right)
\end{aligned}$$

4.5.2 Formules pour $\pi\ln^2(2)$

Pour obtenir une formule BBP simple pour $\pi\ln^2(2)$, on applique la même idée que pour π^3 (le problème s'avère être le même, il faut utiliser I_{11} ce qui donne un dénominateur en $y^{120}-2^{60}$ et donne une expression à deux paramètres)
On obtient ainsi avec $[\alpha_i] = (0,0,0,0,67,-75,0,0,69,0,-75)$

$$\begin{aligned}
\pi\ln^2(2) &= -\frac{375}{2^{16}}BPP_2\left(2^{20},40,y^{34}+8y^{29}+32y^{24}-1024y^{14}-8192y^9-32768y^4\right)-\frac{1}{2^9}BPP_2\left(2^{12},24,P(y)\right)\\
&= -\frac{3}{2^{16}}BPP_2\left(2^{20},8,y^6+8y^5+32y^4-1024y^2-8192y-32768\right)-\frac{1}{2^9}BPP_2\left(2^{12},24,P(y)\right)\\
\text{où } P(y) &= 7\,y^{22}-148\,y^{21}+221\,y^{20}-28\,y^{18}+1420\,y^{17}-56\,y^{16}+1768\,y^{14}-2368\,y^{13}+224\,y^{12}-448\,y^{10}\\
&\quad +9472\,y^9-14144\,y^8+1792\,y^6-90880\,y^5+3584\,y^4-113152\,y^2+151552\,y-14336
\end{aligned}$$

Cette formule peut aussi s'écrire

$$\begin{aligned}
\pi\ln^2(2) &= \frac{1}{8}BPP_2\left(-2^6,12,7y^{10}-148y^9+221y^8-28y^6+1420y^5-56y^4+1768y^2-2368y+224\right)\\
&\quad +\frac{3}{64}BPP_2\left(-2^{10},4,y^2+8y+32\right)
\end{aligned}$$

Comparer avec celles obtenues pour π^3.

4.5.3 Formules pour $\zeta(3)$

Pour $\zeta(3)$, on obtient, si l'on cherche un dénominateur en $y^{24}-2^{12}$,

$$\left(-\frac{91\alpha_8}{144}-\frac{21\alpha_4}{32}\right)\zeta(3) = \left(2\alpha_8+\frac{7}{2}\alpha_4\right)I_1^{(2)}+\left(\frac{9}{2}\alpha_4+4\alpha_8\right)I_2^{(2)}+\alpha_4 I_4^{(2)}-\left(\frac{9}{2}\alpha_4+4\alpha_8\right)I_7^{(2)}+\alpha_8 I_8^{(2)} \quad (18)$$

Ce qui donne la formule générale

$$\begin{aligned}
\left(\frac{91\alpha_8}{144}+\frac{21\alpha_4}{32}\right)\zeta(3) &= \frac{1}{2^{10}}BBP_2\left(2^{12},24,P(y)\right)\\
\text{où } P(y) &= (\alpha_8+\alpha_4)\,y^{22}+(-12\,\alpha_8-11\,\alpha_4)\,y^{21}+(4\,\alpha_8-2\,\alpha_4)\,y^{20}+(46\,\alpha_4+44\,\alpha_8)\,y^{19}\\
&\quad+(-4\,\alpha_8-4\,\alpha_4)\,y^{18}+(48\,\alpha_8+64\,\alpha_4)\,y^{17}+(8\,\alpha_4+8\,\alpha_8)\,y^{16}\\
&\quad+(144\,\alpha_8+216\,\alpha_4)\,y^{15}+(-32\,\alpha_8+16\,\alpha_4)\,y^{14}+(-176\,\alpha_4-192\,\alpha_8)\,y^{13}\\
&\quad+(-32\,\alpha_8-32\,\alpha_4)\,y^{12}+(-128\,\alpha_4-256\,\alpha_8)\,y^{11}+(-64\,\alpha_8-64\,\alpha_4)\,y^{10}\\
&\quad+(-768\,\alpha_8-704\,\alpha_4)\,y^{9}+(128\,\alpha_4-256\,\alpha_8)\,y^{8}+(3456\,\alpha_4+2304\,\alpha_8)\,y^{7}\\
&\quad+(256\,\alpha_4+256\,\alpha_8)\,y^{6}+(4096\,\alpha_4+3072\,\alpha_8)\,y^{5}+(-512\,\alpha_8-512\,\alpha_4)\,y^{4}\\
&\quad+(11264\,\alpha_8+11776\,\alpha_4)\,y^{3}+(-1024\,\alpha_4+2048\,\alpha_8)\,y^{2}\\
&\quad+(-12288\,\alpha_8-11264\,\alpha_4)\,y+2048\,\alpha_4+2048\,\alpha_8
\end{aligned}$$

La formule BPP la plus simple est obtenue pour
$[\alpha]=(-3,-1,0,-2,0,0,1,2,0,0,0)$

$$\begin{aligned}
\zeta(3) &= \frac{9}{224}BPP_2\left(2^{12},24,P(y)\right)\ \text{ où } P(y)=y^{21}-6\,y^{20}+2\,y^{19}+16\,y^{17}+72\,y^{15}+48\,y^{14}+16\,y^{13}\\
&\quad+128\,y^{11}+64\,y^{9}+384y^{8}+1152\,y^{7}+1024\,y^{5}+512\,y^{3}-3072\,y^{2}+1024\,y
\end{aligned}$$

On peut aussi utiliser la remarque suivante :
$\mathcal{L}_2(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6,\alpha_7,0,0,0,0,)=\mathcal{L}_2(0,\alpha_7,0,0,0,0,\alpha_7,0,0,0,0,)$
$+\mathcal{L}_2(\alpha_1,\alpha_2-\alpha_7,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6,0,0,0,0,0,)$
Mais $\mathcal{L}_2(0,\alpha_7,0,0,0,0,\alpha_7,0,0,0,0,)=\frac{\alpha_7}{36}\int_0^1\frac{\ln^2(u)}{u+8}\,du=-\frac{\alpha_7}{18}L_3\left(-\frac{1}{8}\right)$ et
$\mathcal{L}_2(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6,0,0,0,0,0,)=\int_0^1\frac{P_2(y)\ln^2(y)}{y^8-2^4}dy$
Si on impose alors $\alpha_8=\alpha_{10}$ dans (18), on a $\mathcal{L}_2(\frac{7}{2}\alpha_4,\frac{9}{2}\alpha_4,0,\alpha_4,0,0,-\frac{9}{2}\alpha_4,0,0,0,0)=\frac{-21}{32}\alpha_4\zeta(3)$
$=\mathcal{L}_2(\frac{7}{2}\alpha_4,\frac{18}{2}\alpha_4,0,\alpha_4,0,0,-\frac{9}{2}\alpha_4,0,0,0,0)+\mathcal{L}_2(0,\frac{-9}{2}\alpha_4,0,0,0,0,-\frac{9}{2}\alpha_4,0,0,0,0)$ ce qui donne

$$\begin{aligned}
\zeta(3) &= \frac{4}{21}BPP_2\left(2^4,8,27y^7+2y^6-22y^5-4y^4+92y^3-8y^2-88y+16\right)-\frac{8}{21}L_3\left(-\frac{1}{8}\right)\\
&= \frac{4}{21}BPP_2\left(2^4,8,27y^7+2y^6-22y^5-4y^4+92y^3-8y^2-88y+16\right)-\frac{1}{21}BBP_2(-8,1,1)
\end{aligned}$$

Enfin la formule la plus simple pour un dénominateur en $y^{120}-2^{60}$ est obtenue avec
$[\alpha_i]=(8,4,5,9,0,0,-4,1,0,-5,0)$ et contient 67 termes.

4.5.4 Formules pour $\pi^2 \ln(2)$

On obtient la formule générale suivante

$$\begin{aligned}
\left(\frac{3}{80}\alpha_4+\frac{13}{360}\alpha_8\right)\pi^2\ln(2) &= \frac{1}{5\times 2^{10}}BPP_2\left(2^{12},24,P(y)\right)\\
\text{où } P(y) &= (5\,\alpha_8+5\,\alpha_4)\,y^{22}+(-82\,\alpha_4-86\,\alpha_8)\,y^{21}+(20\,\alpha_8-10\,\alpha_4)\,y^{20}\\
&\quad+(376\,\alpha_8+392\,\alpha_4)\,y^{19}+(-20\,\alpha_8-20\,\alpha_4)\,y^{18}+(536\,\alpha_4+448\,\alpha_8)\,y^{17}\\
&\quad+(40\,\alpha_8+40\,\alpha_4)\,y^{16}+(1728\,\alpha_4+1344\,\alpha_8)\,y^{15}+(80\,\alpha_4-160\,\alpha_8)\,y^{14}\\
&\quad+(-1376\,\alpha_8-1312\,\alpha_4)\,y^{13}+(-160\,\alpha_8-160\,\alpha_4)\,y^{12}+(-1280\,\alpha_8-640\,\alpha_4)\,y^{11}\\
&\quad+(-320\,\alpha_8-320\,\alpha_4)\,y^{10}+(-5504\,\alpha_8-5248\,\alpha_4)\,y^{9}+(640\,\alpha_4-1280\,\alpha_8)\,y^{8}\\
&\quad+(21504\,\alpha_8+27648\,\alpha_4)\,y^{7}+(1280\,\alpha_8+1280\,\alpha_4)\,y^{6}+(34304\,\alpha_4+28672\,\alpha_8)\,y^{5}\\
&\quad+(-2560\,\alpha_8-2560\,\alpha_4)\,y^{4}+(100352\,\alpha_4+96256\,\alpha_8)\,y^{3}\\
&\quad+(-5120\,\alpha_4+10240\,\alpha_8)\,y^{2}+(-88064\,\alpha_8-83968\,\alpha_4)\,y+10240\,\alpha_4+10240\,\alpha_8
\end{aligned}$$

Avec $[\alpha_i]=(-8,-3,0,-5,0,0,3,5,0,0,0)$, on a la formule à 15 termes

$$\begin{aligned}
\pi^2\ln(2) &= \frac{9}{32}BPP_2\left(2^{12},24,P(y)\right)\ \text{ où } P(y)=2\,y^{21}-15\,y^{20}+8\,y^{19}+44\,y^{17}+192\,y^{15}+120\,y^{14}\\
&\quad+32\,y^{13}+320\,y^{11}+128\,y^{9}+960\,y^{8}+3072\,y^{7}+2816\,y^{5}+2048\,y^{3}-7680\,y^{2}+2048\,y
\end{aligned}$$

Cette relation est remarquable, en effet l'égalité (**??**) est obtenue pour $[\alpha_i]=(-3,-1,0,-2,0,0,1,2,0,0,0)$. Cela conduit à poser

$$\begin{aligned}
A &= \mathcal{L}_2(1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)\\
&= -2BPP_2(2,2,y)\\
&= -\frac{1}{4}BPP_2(2,1,1)=\frac{-1}{4}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{2^i(i+1)^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B &= \mathcal{L}_2(0,-1,0,0,0,0,1,0,0,0,0)\\
&= -\frac{1}{2^4}BPP_2\left(2^6,12,y^{11}+4y^9-8y^7-8y^5-32y^3+64y\right)\\
&= \frac{1}{2}BPP_2\left(-2^3,6,y^5+4y^3-8y\right)=\frac{1}{16}BPP_2\left(-2^3,3,y^2+4y+8\right)\\
&= \frac{1}{16}BPP_2\left(-2^3,3,4y+8\right)+\frac{1}{432}BPP_2\left(-2^3,1,1\right)\\
&= \frac{1}{16}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{8^i}\left(-\frac{8}{(3i+1)^3}+\frac{4}{(3i+2)^3}\right)+\frac{1}{432}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{8^i(i+1)^3}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
C &= \mathcal{L}_2\left(0,0,0,-1,0,0,0,1,0,0,0\right)\\
&= -\frac{1}{2^{10}}BPP_2\left(2^{12},24,y^{23}+6y^{20}+8y^{19}-32y^{15}-48y^{14}-64y^{11}-384y^{8}-512y^{7}+2048y^{3}+3072y^{2}\right)\\
&= \frac{1}{2^{4}}BPP_2\left(-2^{6},12,y^{11}+6y^{8}+8y^{7}-32y^{3}-48y^{2}\right)\\
&= \frac{1}{72}BPP_2\left(-2^{6},4,y^{2}-8\right)+\frac{1}{128}BPP_2\left(3,-2^{6},y-4\right)+\frac{1}{2^{10}\times 3^{3}}BPP_2\left(-2^{6},1,1\right)\\
&= \frac{1}{72}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{64^i}\left(-\tfrac{8}{(4i+1)^3}+\tfrac{1}{(4i+3)^3}\right)+\frac{1}{128}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{64^i}\left(-\tfrac{4}{(3i+1)^3}+\tfrac{1}{(3i+2)^3}\right)+\frac{1}{2^{10}\times 3^{3}}\sum_{i=0}^{\infty}\tfrac{(-1)^i}{64^i(i+1)^3}
\end{aligned}
$$

Alors

$$
\begin{aligned}
\frac{\pi^2\ln(2)}{144} &= -8A+3B+5C\\
\frac{\zeta(3)}{144} &= -3A+B+2C\\
\frac{\ln^3(2)}{12} &= -22A+9B+12C
\end{aligned}
$$

Enfin la formule la plus simple avec un dénominateur en $y^{120}-2^{60}$ est obtenue avec
$[\alpha_i]=(42,21,25,46,0,0,-21,4,0,-25,0)$ et comporte 67 termes.

4.5.5 Formules pour $\ln^3(2)$

On a la formule générale

$$
\begin{aligned}
(27\alpha_4+26\alpha_8)\ln^3(2) &= \frac{3}{2^8}BPP_2\left(2^{12},24,P(y)\right)\\
\text{où } P(y) &= (27\,\alpha_4+26\,\alpha_8)\,y^{23}+(12\,\alpha_8+12\,\alpha_4)\,y^{22}+(-240\,\alpha_4-248\,\alpha_8)\,y^{21}\\
&+(-24\,\alpha_4+48\,\alpha_8)\,y^{20}+(1568\,\alpha_8+1632\,\alpha_4)\,y^{19}+(-48\,\alpha_8-48\,\alpha_4)\,y^{18}\\
&+(2280\,\alpha_4+2032\,\alpha_8)\,y^{17}+(96\,\alpha_8+96\,\alpha_4)\,y^{16}+(5888\,\alpha_8+6912\,\alpha_4)\,y^{15}\\
&+(192\,\alpha_4-384\,\alpha_8)\,y^{14}+(-3968\,\alpha_8-3840\,\alpha_4)\,y^{13}+(-384\,\alpha_4-384\,\alpha_8)\,y^{12}\\
&+(192\,\alpha_4-1408\,\alpha_8)\,y^{11}+(-768\,\alpha_4-768\,\alpha_8)\,y^{10}+(-15872\,\alpha_8-15360\,\alpha_4)\,y^{9}\\
&+(-3072\,\alpha_8+1536\,\alpha_4)\,y^{8}+(94208\,\alpha_8+110592\,\alpha_4)\,y^{7}\\
&+(3072\,\alpha_4+3072\,\alpha_8)\,y^{6}+(145920\,\alpha_4+130048\,\alpha_8)\,y^{5}\\
&+(-6144\,\alpha_4-6144\,\alpha_8)\,y^{4}+(401408\,\alpha_8+417792\,\alpha_4)\,y^{3}+(24576\,\alpha_8-12288\,\alpha_4)\,y^{2}\\
&+(-253952\,\alpha_8-245760\,\alpha_4)\,y+24576\,\alpha_4+24576\,\alpha_8
\end{aligned}
$$

et la formule la plus simple est obtenue pour $[\alpha_i]=(-22,-9,0,-12,0,0,9,12,0,0,0)$

$$
\begin{aligned}
\ln^3(2) &= \frac{3}{2^8}BPP_2\left(2^{12},24,P(y)\right)\text{ où } P(y)=y^{23}+8\,y^{21}-72\,y^{20}+64\,y^{19}+248\,y^{17}+1024\,y^{15}+576\,y^{14}\\
&+128\,y^{13}+1600\,y^{11}+512\,y^{9}+4608\,y^{8}+16384\,y^{7}+15872\,y^{5}+16384\,y^{3}-36864\,y^{2}+8192\,y
\end{aligned}
$$

Et celle ayant un dénominateur en $y^{120}-2^{60}$ est donnée par $[\alpha_i]=(-202,-99,-100,-200,0,0,99,0,0,100,0)$

5 Cas des polylogarithmes d'ordre 4

Pour les polylogarithmes d'ordre 4 et 5, on ne dispose plus que d'un seul outil, à savoir l'équation de Kummer. Elle s'écrit, avec $e = 1 - x$, $n = 1 - y$,

$$
\begin{aligned}
L_4\left(-\frac{x^2yn}{e}\right) + L_4\left(-\frac{y^2xe}{n}\right) + L_4\left(\frac{x^2y}{n^2e}\right) + L_4\left(\frac{y^2x}{e^2n}\right) &= 6L_4\left(xy\right) + 6L_4\left(\frac{xy}{en}\right) + 6L_4\left(-\frac{xy}{n}\right) + 6L_4\left(-\frac{xy}{e}\right) \\
&+ 3L_4\left(xn\right) + 3L_4\left(ye\right) + 3L_4\left(\frac{x}{n}\right) + 3L_4\left(\frac{y}{e}\right) + 3L_4\left(-\frac{xn}{e}\right) \\
&+ 3L_4\left(-\frac{ye}{n}\right) + 3L_4\left(-\frac{x}{en}\right) + 3L_4\left(-\frac{y}{en}\right) \\
&- 6L_4\left(x\right) - 6L_4\left(y\right) - 6L_4\left(-\frac{x}{e}\right) - 6L_4\left(-\frac{y}{n}\right) + \frac{3}{2}\ln^2(e)\ln^2(n)
\end{aligned}
$$

et la formule d'inversion

$$L_4\left(z\right) = -L_4\left(\frac{1}{z}\right) - \frac{\pi^2}{12}\ln^2(-z) - \frac{7\pi^4}{360} - \frac{1}{24}\ln^4(-z)$$

On applique alors la méthode suivante :
Utilisation de la formule de Kummer en un couple (x, y) particulier
Elimination des polylogarithmes d'argument de module supérieur à 1 par la formule d'inversion
Simplifications éventuelles à l'aide de la formule de duplication ou des valeurs de L_4 en $1, -1, i$ et $-i$.

– Avec $(x, y) = (-1, 1 + i)$, on obtient

$$
\begin{aligned}
&22\left(L_4\left(\frac{1-i}{2}\right) + L_4\left(\frac{1+i}{2}\right)\right) - 3\left(L_4\left(\frac{1-i}{4}\right) + L_4\left(\frac{1+i}{4}\right)\right) \\
&\qquad - 7L_4\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{81}{64}L_4\left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{137}{384}\ln^2(2)\pi^2 - \frac{115}{192}\ln^4(2) - \frac{1697}{9216}\pi^4 = 0
\end{aligned}
$$

Ce qui se traduit avec les intégrales $I_k^{(3)}$ et $J_k^{(3)}$ par

$$
\begin{aligned}
\frac{27}{16}J_1^{(3)} + \frac{11}{3}I_4^{(3)} - \frac{1}{2}J_3^{(3)} - 7L_4\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{137}{384}\pi^2\ln^2(2) - \frac{115}{192}\ln^4(2) - \frac{1697}{9216}\pi^4 &= 0 \\
\text{i.e. } \frac{103}{6}I_4^{(3)} - \frac{27}{2}I_8^{(3)} - 7L_4\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{137}{384}\pi^2\ln^2(2) - \frac{115}{192}\ln^4(2) - \frac{1697}{9216}\pi^4 &= 0
\end{aligned}
$$

– Avec $(x, y) = (-1, i)$, on obtient

$$
\begin{aligned}
&9L_4\left(\frac{1-i}{4}\right) + 3L_4\left(\frac{1+i}{4}\right) - 10L_4\left(\frac{1-i}{2}\right) - 2L_4\left(\frac{1+i}{2}\right) - L_4\left(\frac{-1-i}{2}\right) - L_4\left(\frac{1+i}{8}\right) \\
&\qquad - 11L_4\left(\frac{i}{2}\right) - 12L_4\left(i\right) - 6L_4\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{81}{64}L_4\left(-\frac{1}{4}\right) \\
&\qquad - \frac{113}{768}\ln^2(2)\pi^2 + \frac{91}{384}\ln^4(2) + \frac{5653}{92160}\pi^4 + i\left(\frac{47}{25L_4\left(i\right)6}\ln\left(2\right)\pi^3 - \frac{29}{192}\ln^3(2)\pi\right) = 0
\end{aligned}
$$

On obtient une seconde égalité par conjugaison (ou avec $(x,y)=(-1,-i)$). On additionne, ou soustrait les deux égalités obtenues et en remplaçant $L_4(i)$ par $\dfrac{-7\pi^4}{11520}+i\beta(4)$ où $\beta(4)=\displaystyle\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^4}$, cela fournit

$$\begin{aligned}
-\frac{73}{48}J_1^{(3)}+2J_3^{(3)}-\frac{1}{6}I_3^{(3)}-\frac{13}{6}I_4^{(3)}-\frac{1}{6}J_5^{(3)}-12L_4\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{113}{384}\ln^2(2)\pi^2+\frac{1265}{9216}\pi^4+\frac{91}{192}\ln^4(2) &= 0\\
\text{i.e. } \frac{125}{6}I_3^{(3)}-\frac{43}{3}I_4^{(3)}+54I_8^{(3)}-\frac{125}{6}I_{10}^{(3)}-12L_4\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{113}{384}\ln^2(2)\pi^2+\frac{1265}{9216}\pi^4+\frac{91}{192}\ln^4(2) &= 0
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
-\frac{11}{6}J_2^{(3)}+J_4^{(3)}-\frac{4}{3}I_5^{(3)}+\frac{1}{6}J_6^{(3)}-\frac{29}{96}\pi\ln^3(2)+\frac{47}{128}\pi^3\ln(2)-24\beta(4) &= 0\\
\text{i.e. } -16I_5^{(3)}+\frac{125}{6}I_6^{(3)}-27I_9^{(3)}+\frac{125}{6}I_{11}^{(3)}-\frac{29}{96}\pi\ln^3(2)+\frac{47}{128}\pi^3\ln(2)-24\beta(4) &= 0
\end{aligned}$$

– Avec $(x,y)=\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$, on obtient

$$\begin{aligned}
9\left(L_4\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{4}\right)+L_4\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{4}\right)\right)+\frac{57}{4}\left(L_4\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)+L_4\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)\right)&\\
-5L_4\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{9}{8}L_4\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{12}\pi^2\ln^2(2)+\frac{217\pi^4}{1620}-\frac{5}{24}\ln^4(2)&=0
\end{aligned}$$

On utilise alors la formule de multiplication

$$L_4\left(z^3\right)=27\left(L_4\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}z\right)+L_4\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}z\right)+L_4(z)\right)$$

qui avec $z=1$ permet d'affirmer que

$$L_4\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)+L_4\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{13\pi^4}{1215}$$

et que

$$12I_7^{(3)}-5L_4\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{9}{8}L_4\left(\frac{1}{4}\right)-\frac{\pi^4}{54}-\frac{5}{24}\ln^4(2)+\frac{1}{12}\pi^2\ln^2(2)=0$$

– Enfin, avec $(x,y)=\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2},\frac{1+i}{2}\right)$, on obtient

$$\begin{aligned}
9\left(L_4\left(\frac{1}{s_3}\right)+L_4\left(\frac{1}{s_4}\right)\right)-5L_4\left(\frac{1+i}{2}\right)-2L_4\left(\frac{1-i}{2}\right)-L_4\left(\frac{1}{2}\right)&\\
-\frac{349}{55296}\pi^4+\frac{7}{768}\pi^2\ln^2(2)-\frac{5}{384}\ln^4(2)+i\left(\frac{9}{256}\pi^3\ln(2)-\frac{1}{64}\pi\ln^3(2)-\frac{10}{3}\beta(4)\right)&=0
\end{aligned}$$

En considérant la partie réelle et la partie imaginaire de cette expression, on a respectivement

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}I_8^{(3)} - \frac{7}{6}I_4^{(3)} - \frac{349}{27648}\pi^4 - 2L_4\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{7}{384}\pi^2\ln^2(2) - \frac{5}{192}\ln^4(2) &= 0\\ -\frac{3}{2}I_9^{(3)} + \frac{1}{2}I_5^{(3)} + \frac{9}{128}\pi^3\ln(2) - \frac{1}{32}\pi\ln^3(2) - \frac{20}{3}\beta(4) &= 0\end{aligned}$$

5.1 Application à la détermination de formules BBP

On considère maintenant la forme linéaire $\mathcal{L}_3(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{11}) = \alpha_1 I_1^{(3)} + ... + \alpha_{11} I_{11}^{(3)}$. Alors les résultats précédents fournissent

$$\begin{aligned}I_1^{(3)} &= \frac{3}{4}L_4\left(\frac{1}{2}\right),\ I_2^{(3)} = \frac{3}{4}L_4\left(-\frac{1}{2}\right),\ I_3^{(3)} + I_4^{(3)} = \frac{3}{32}L_4\left(-\frac{1}{4}\right)\\ I_4^{(3)} &= \frac{1}{8}\ln^4(2) - \frac{5}{64}\pi^2\ln^2(2) + \frac{15}{4}L_4\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{343}{7680}\pi^4\\ I_7^{(3)} &= \frac{3}{4}L_4\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{5}{288}\ln^4(2) - \frac{1}{144}\pi^2\ln^2(2) + \frac{7}{6}L_4\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{648}\pi^4\\ I_8^{(3)} &= \frac{11}{96}\ln^4(2) - \frac{7}{96}\pi^2\ln^2(2) + \frac{17}{4}L_4\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2237}{51840}\pi^4\\ I_9^{(3)} &= \frac{1}{3}I_5^{(3)} - \frac{1}{48}\pi\ln^3(2) + \frac{3}{64}\pi^3\ln(2) - \frac{40}{9}\beta(4)\\ I_{10}^{(3)} &= \frac{87}{800}\ln^4(2) - \frac{57}{800}\pi^2\ln^2(2) + \frac{411}{100}L_4\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{861}{20000}\pi^4 + \frac{3}{32}L_4\left(-\frac{1}{4}\right)\\ I_{11}^{(3)} &= -I_6^{(3)} + \frac{6}{5}I_5^{(3)} - \frac{1}{80}\pi\ln^3(2) + \frac{69}{1600}\pi^3 ln(2) - \frac{576}{125}\beta(4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_3(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{11}) = &\left(\frac{861}{20000}\alpha_{10} + \frac{343}{7680}\alpha_4 + \frac{2237}{51840}\alpha_8 + \frac{1}{648}\alpha_7 - \frac{343}{7680}\alpha_3\right)\pi^4\\ &+\left(\frac{69}{1600}\alpha_{11} + \frac{3}{64}\alpha_9\right)\pi^3\ln(2)\\ &+\left(-\frac{5}{64}\alpha_4 + \frac{5}{64}\alpha_3 - \frac{57}{800}\alpha_{10} - \frac{1}{144}\alpha_7 - \frac{7}{96}\alpha_8\right)\pi^2\ln^2(2)\\ &+\left(-\frac{1}{80}\alpha_{11} - 1/48\,\alpha_9\right)\pi\ \ln^3(2)\\ &+\left(\frac{87}{800}\alpha_{10} + 1/8\,\alpha_4 + \frac{11}{96}\alpha_8 - 1/8\,\alpha_3 + \frac{5}{288}\alpha_7\right)\ln^4(2)\\ &+\left(-\frac{40}{9}\alpha_9 - \frac{576}{125}\alpha_{11}\right)\beta(4)\\ &+\left(\frac{15}{4}\alpha_4 + \frac{7}{6}\alpha_7 - \frac{15}{4}\alpha_3 + \frac{3}{4}\alpha_1 + \frac{411}{100}\alpha_{10} + \frac{17}{4}\alpha_8\right)L_4\left(\frac{1}{2}\right)\\ &+\frac{3}{4}(\alpha_7 + \alpha_2)L_4\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{32}(\alpha_3 + \alpha_{10})L_4\left(-\frac{1}{4}\right)\\ &+(\alpha_6 - \alpha_{11})I_6^{(3)} + \left(\frac{1}{3}\alpha_9 + \frac{6}{5}\alpha_{11} + \alpha_5\right)I_5^{(3)}\end{aligned}$$

5.1.1 Formules pour π^4, $\pi^2 \ln^2(2)$ et $\ln^4(2)$

Pour π^4. La formule la plus simple (et la seule associée à un dénominateur en $y^{24}-2^{12}$) est obtenue pour $[\alpha_i] = (37, 9, 0, 26, 0, 0, -9, -27, 0, 0, 0)$ et donne

$$\begin{aligned}
\pi^4 &= \frac{27}{164} BPP_3\left(2^{12}, 24, P(y)\right) \text{ où } P(y) = y^{22} - 38\,y^{21} + 160\,y^{20} - 8\,y^{19} - 4\,y^{18} - 368\,y^{17} + 8\,y^{16} \\
&\quad -1728\,y^{15} - 1280\,y^{14} - 608\,y^{13} - 32\,y^{12} - 3584\,y^{11} - 64\,y^{10} - 2432\,y^9 - 10240\,y^8 \\
&\quad -27648\,y^7 + 256\,y^6 - 23552\,y^5 - 512\,y^4 - 2048\,y^3 + 81920\,y^2 - 38912\,y + 2048
\end{aligned}$$

Il existe une formule à deux paramètre ayant un dénominateur en $y^{120}-2^{60}$, la plus simple est donnée par $[\alpha_i] = (34, 18, 25, 41, 0, 0, -18, 18, 0, -25, 0)$

Pour $\pi^2 \ln^2(2)$ La formule la plus simple est obtenue pour
$[\alpha_i] = (-10381, -3303, 0, -6836, 0, 0, 3303, 6957, 0, 0, 0)$ et donne

$$\begin{aligned}
\pi^2 \ln^2(2) &= \frac{1}{1312} BPP_3\left(2^{12}, 24, P(y)\right) \text{ où } P(y) = 121\,y^{22} - 7550\,y^{21} + 41500\,y^{20} - 12776\,y^{19} - 484\,y^{18} \\
&\quad -109472\,y^{17} + 968\,y^{16} - 492480\,y^{15} - 332000\,y^{14} - 120800\,y^{13} - 3872\,y^{12} - 905984\,y^{11} \\
&\quad -7744\,y^{10} - 483200\,y^9 - 2656000\,y^8 - 7879680\,y^7 + 30976\,y^6 - 7006208\,y^5 - 61952\,y^4 \\
&\quad -3270656\,y^3 + 21248000\,y^2 - 7731200\,y + 247808
\end{aligned}$$

Pour $\ln^4(2)$ Avec $[\alpha_i] = (-18932, -6849, 0, -11176, 0, 0, 6849, 11322, 0, 0, 0)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\ln^4(2) &= -\frac{1}{6560} BPP_3\left(2^{12}, 24, P(y)\right) \text{ où } P(y) = 615\,y^{23} - 146\,y^{22} + 10468\,y^{21} - 67640\,y^{20} + 40528\,y^{19} \\
&\quad +584\,y^{18} + 206248\,y^{17} - 1168\,y^{16} + 882048\,y^{15} + 541120\,y^{14} + 167488\,y^{13} + 4672\,y^{12} \\
&\quad +1507264\,y^{11} + 9344\,y^{10} + 669952\,y^9 + 4328960\,y^8 + 14112768\,y^7 - 37376\,y^6 + 13199872\,y^5 \\
&\quad +74752\,y^4 + 10375168\,y^3 - 34631680\,y^2 + 10719232\,y - 299008
\end{aligned}$$

5.1.2 Le cas de $\beta(4)$, $\pi \ln^3(2)$ et $\pi^3 \ln(2)$

Il n'est pas possible de déterminer des formules BBP pour ces constantes, on ne trouve que deux relations indépendantes qui sont :

$$\begin{aligned}
-5I_5^{(3)} + 5I_6^{(3)} - 3I_9^{(3)} + 5I_{11}^{(3)} &= -\frac{728}{75}\beta(4) + \frac{3}{40}\pi^3 \ln(2) \\
-67I_5^{(3)} + 75I_6^{(3)} - 69I_9^{(3)} + 75I_{11}^{(3)} &= -\frac{584}{15}\beta(4) + \frac{1}{2}\pi \ln^3(2)
\end{aligned}$$

Cela montre qu'il suffit de trouver une formule BPP pour l'une des trois constantes $\beta(4)$, $\pi^3 \ln(2)$ et $\pi^3 \ln(2)$ pour en déduire une pour les deux autres.

6 Cas des polylogarithmes d'ordre 5

Broadhurst dans [3] exhibe des relations entre les intégrales I_k et J_k à l'aide de l'équation de Kummer (relations (65) à (67). Puis découvre deux égalités de façon numérique (relations (68) et (69)). Il prouve alors

la relation (68) en utilisant les séries hypergéométriques et les sommes d'Euler. Il en déduit alors quatre égalités pour $\zeta(5)$ (relation (70))
On peut établir ces quatre égalités directement à l'aide de la formule de Kummer qui s'écrit avec $n=1-x,\ e=1-y,\ a=-\frac{x}{n},\ b=-\frac{y}{e}$

$$\begin{aligned}
& L_5\left(\frac{xa}{yb}\right)+L_5\left(\frac{ae}{nb}\right)+L_5\left(\frac{xn}{ye}\right)+L_5\left(\frac{xab}{e}\right)+L_5\left(\frac{xne}{b}\right)\\
& +L_5\left(\frac{ayb}{n}\right)+L_5\left(\frac{a}{nye}\right)+L_5\left(xaye\right)+L_5\left(xnyb\right)\\
& -9\,L_5(xy)-9\,L_5(xb)-9\,L_5(xe)-9L_5(ay)-9L_5(ab)-9\,L_5(ae)\\
& -9\,L_5(ny)-9\,L_5(nb)-9L_5(ne)\\
& -9\,L_5(\frac{x}{y})-9\,L_5(\frac{x}{b})-9\,L_5(\frac{x}{e})-9L_5(\frac{a}{y})-9\,L_5(\frac{a}{b})-9\,L_5(\frac{a}{e})\\
& -9L_5(\frac{y}{n})-9\,L_5(\frac{b}{n})-9\,L_5(\frac{e}{n})\\
& +18L_5(x)+18\,L_5(a)+18\,L_5(n)+18\,L_5(y)+18\,L_5(b)+18\,L_5(e)-18\,L_5(1)\\
= & \frac{3}{10}\ln^5(n)+\frac{3}{4}\ln(\frac{y}{x})\ln^4(n)+\frac{3}{2}\ln(\frac{y^3}{e})\ln^2(n)\ln^2(e)+\frac{\pi^2}{2}\ln(\frac{n}{e^3})\ln^2(n)+\frac{\pi^4}{5}\ln(n)
\end{aligned}$$

On applique alors la même démarche que pour les polylogarithmes d'ordre 4.

- Avec $(x,y)=\left(\frac{1}{2},\frac{1-i}{2}\right)$, on obtient, compte tenu de $L_5(i)=-\dfrac{15}{512}\zeta(5)+\dfrac{5i\pi^5}{1236}$,

$$\begin{aligned}
+16\left(L_5\left(\frac{-1+i}{2}\right)+L_5\left(\frac{-1-i}{2}\right)\right)+18\left(L_5\left(\frac{1+i}{4}\right)+L_5\left(\frac{1-i}{4}\right)\right)-\left(L_5\left(\frac{1-i}{8}\right)+L_5\left(\frac{1+i}{8}\right)\right)\\
-\frac{7}{8}L_5\left(-\frac{1}{4}\right)-37L_5\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{279}{8}\zeta(5)-\frac{977}{6144}\pi^4\ln(2)+\frac{97}{768}\pi^2\ln^3(2)-\frac{15}{128}\ln^5(2)=0
\end{aligned}$$

  ce qui donne

$$\begin{aligned}
-\frac{2}{3}I_3^{(4)}+\frac{1}{24}J_5^{(4)}-\frac{3}{4}J_3^{(4)}-\frac{7}{8}L_5\left(-\frac{1}{4}\right)-37L_5\left(\frac{1}{2}\right)\\
+\frac{279}{8}\zeta(5)-\frac{977}{6144}\pi^4\ln(2)+\frac{97}{768}\pi^2\ln^3(2)-\frac{15}{128}\ln^5(2)=0
\end{aligned}$$

  Ce qui se simplifie en, en utilisant $I_3^{(4)}+I_4^{(4)}=-\frac{3}{32}L_5\left(-\frac{1}{4}\right)$

$$\begin{aligned}
\frac{283}{8}I_4^{(4)}-\frac{243}{4}I_8^{(4)}+\frac{625}{24}I_{10}^{(4)}+\frac{625}{256}L_5\left(-\frac{1}{4}\right)-37L_5\left(\frac{1}{2}\right)\\
+\frac{279}{8}\zeta(5)-\frac{977}{6144}\pi^4\ln(2)+\frac{97}{768}\pi^2\ln^3(2)-\frac{15}{128}\ln^5(2)=0
\end{aligned}$$

– Avec $(x,y)=(-1,1+i)$ on obtient

$$\begin{aligned}-36\left(L_5\left(\frac{1+i}{2}\right)+L_5\left(\frac{1-i}{2}\right)\right)-2\left(L_5\left(\frac{1+i}{4}\right)+L_5\left(\frac{1-i}{4}\right)\right)\\
+18L_5\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{81}{128}L_5\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{4371}{128}\zeta(5)-\frac{349}{3072}\pi^4\ln(2)+\frac{7}{128}\pi^2\ln^3(2)-\frac{3}{64}\ln^5(2)=0\end{aligned}$$

qui se traduit par

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}I_4^{(4)}+\frac{1}{12}J_3^{(4)}+18L_5\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{81}{128}L_5\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{4371}{128}\zeta(5)-\frac{349}{3072}\pi^4\ln(2)+\frac{7}{128}\pi^2\ln^3(2)-\frac{3}{64}\ln^5(2)&=0\\
\text{i.e. }-\frac{21}{4}I_4^{(4)}+\frac{27}{4}I_8^{(4)}+18L_5\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{4371}{128}\zeta(5)-\frac{349}{3072}\pi^4\ln(2)+\frac{7}{128}\pi^2\ln^3(2)-\frac{3}{64}\ln^5(2)&=0\end{aligned}$$

– Avec $(x,y)=\left(\frac{1+i}{2},\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)$, on obtient

$$\begin{aligned}27\left(L_5\left(\frac{1}{s_1}\right)+L_5\left(\frac{1}{s_2}\right)+L_5\left(\frac{1}{s_3}\right)+L_5\left(\frac{1}{s_4}\right)\right)-21\left(L_5\left(\frac{1+i}{2}\right)+L_5\left(\frac{1-i}{2}\right)\right)\\
-36L_5\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)-18L_5\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)+27\left(L_5\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)+L_5\left(\frac{-\sqrt{3}-i}{2}\right)\right)\\
-3L_5\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{4743}{256}\zeta(5)+\frac{349}{18432}\pi^4\ln(2)-\frac{7}{768}\pi^2\ln^3(2)+\frac{1}{128}\ln^5(2)+i\frac{2933}{20736}\pi^5=0\end{aligned}$$

On simplifie cette égalité à l'aide de $L_5\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{25}{54}\zeta(5)+\frac{17}{5832}i\pi^5$ et de la formule de multiplication $L_5\left(z^3\right)=81L_5\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}z\right)+81L_5\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}z\right)+81L_5(z)$, qui avec $z=i$ permet d'obtenir $L_5\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)+L_5\left(\frac{-\sqrt{3}-i}{2}\right)=\frac{25}{864}\zeta(5))-\frac{205}{62208}i\pi^5$.
Ainsi

$$\frac{7}{8}I_4^{(4)}-\frac{9}{8}I_8^{(4)}-3L_5\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1457}{256}\zeta(5)+\frac{349}{18432}\pi^4\ln(2)-\frac{7}{768}\pi^2\ln^3(2)+\frac{1}{128}\ln^5(2)=0$$

– Avec $(x,y)=\left(-1,\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)$, on obtient

$$\begin{aligned}54\left(L_5\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{4}\right)+L_5\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{4}\right)\right)-30L_5\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{27}{8}L_5\left(\frac{1}{4}\right)\\
+\frac{877}{24}\zeta(5)+\frac{1}{9}\pi^4\ln(2)-\frac{1}{6}\pi^2\ln^3(2)+\frac{1}{4}\ln^5(2)=0\end{aligned}$$

ce qui donne

$$I_7^{(4)}=-\frac{3}{2}L_5\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{144}\ln^5(2)-\frac{1}{216}\pi^2\ln^3(2)-\frac{7}{2}L_5\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{324}\pi^4\ln(2)-\frac{403}{864}\zeta(5)$$

Remarque 4 *La relation* (68) *prouvée par Broadhurst correspond au calcul de* $I_4^{(4)}$. *Le calcul donné ici semble beaucoup plus simple.*

6.1 Application à la détermination de formules BBP

On considère maintenant la forme linéaire $\mathcal{L}_4(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{11}) = \alpha_1 I_1^{(4)} + ... + \alpha_{11} I_{11}^{(4)}$. Les résultats précédents donnent

$$\begin{aligned}
I_1^{(4)} &= -\frac{3}{2}L_5\left(\frac{1}{2}\right),\ I_2^{(4)} = -\frac{3}{2}L_5\left(-\frac{1}{2}\right),\ I_3^{(4)} + I_4^{(4)} = -\frac{3}{32}L_5\left(-\frac{1}{4}\right) \\
I_4^{(4)} &= \frac{1}{20}\ln^5(2) - \frac{5}{96}\pi^2\ln^3(2) - \frac{15}{2}L_5\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{343}{3840}\pi^4\ln(2) - \frac{6417}{256}\zeta(5) \\
I_7^{(4)} &= -\frac{3}{2}L_5\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{144}\ln^5(2) - \frac{1}{216}\pi^2\ln^3(2) - \frac{7}{2}L_5\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{324}\pi^4\ln(2) - \frac{403}{864}\zeta(5) \\
I_8^{(4)} &= \frac{11}{240}\ln^5(2) - \frac{7}{144}\pi^2\ln^3(2) - \frac{17}{2}L_5\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2237}{25920}\pi^4\ln(2) - \frac{56575}{2304}\zeta(5) \\
I_{10}^{(4)} &= \frac{87}{2000}\ln^5(2) - \frac{19}{400}\pi^2\ln^3(2) - \frac{411}{50}L_5\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{861}{10000}\pi^4\ln(2) - \frac{3931389}{160000}\zeta(5) - \frac{3}{32}L_5\left(-\frac{1}{4}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_3(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{11}) &= \left(-\frac{56575}{2304}\alpha_8 - \frac{6417}{256}\alpha_4 + \frac{6417}{256}\alpha_3 - \frac{3931389}{160000}\alpha_{10} - \frac{403}{864}\alpha_7\right)\zeta(5) \\
&\left(\frac{2237}{25920}\alpha_8 + \frac{1}{324}\alpha_7 - \frac{343}{3840}\alpha_3 + \frac{861}{10000}\alpha_{10} + \frac{343}{3840}\alpha_4\right)\pi^4\ln(2) \\
&+\left(-\frac{5}{96}\alpha_4 - \frac{1}{216}\alpha_7 + \frac{5}{96}\alpha_3 - \frac{7}{144}\alpha_8 - \frac{19}{400}\alpha_{10}\right)\pi^2\ln^3(2) \\
&+\left(\frac{11}{240}\alpha_8 + 1/20\,\alpha_4 - 1/20\,\alpha_3 + \frac{87}{2000}\alpha_{10} + \frac{1}{144}\alpha_7\right)\ln^5(2) \\
&-\frac{3}{2}(\alpha_2+\alpha_7)L_5\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{3}{32}(\alpha_{10}+\alpha_3)L_5\left(-\frac{1}{4}\right) \\
&+\left(\frac{15}{2}\alpha_3 - \frac{15}{2}\alpha_4 - \frac{411}{50}\alpha_{10} - \frac{17}{2}\alpha_8 - \frac{3}{2}\alpha_1 - \frac{7}{3}\alpha_7\right)L_5\left(\frac{1}{2}\right) \\
&+\alpha_5 I_5^{(4)} + \alpha_6 I_6^{(4)} + \alpha_9 I_9^{(4)} + \alpha_{11} I_{11}^{(4)}
\end{aligned}$$

6.1.1 Formules pour $\zeta(5), \pi^4\ln(2), \pi^2\ln^3(2)$ et $\ln^5(2)$

On en déduit des formules BBP pour les constantes $\zeta(5), \pi^4\ln(2), \pi^2\ln^3(2)$ et $\ln^5(2)$. On rappelle que les polynômes Π_k sont définis par $I_k^{(0)} = \int_0^1 \frac{\Pi_k(y)}{y^{120}-2^{60}}dy$.
On obtient alors
avec $[\alpha_i] = (311416, 168912, 239375, 382643, 0, 0, -168912, 96489, 0, -239375, 0)$

$$\begin{aligned}
\pi^4\ln(2) &= \frac{27}{2021\times 2^{52}}BPP_4\left(2^{60}, 120, P(y)\right) \\
\text{où } P &= 311416\Pi_1 + 168912(\Pi_2 - \Pi_7) + 239375(\Pi_3 - \Pi_{10}) + 382643\Pi_4 + 96489\Pi_8
\end{aligned}$$

avec $[\alpha_i] = (22046536, 11642616, 15741875, 26174255, 0, 0, -11642616, 5323725, 0, -15741875, 0)$

$$\begin{aligned}
\pi^2 \ln^3(2) &= \frac{3}{2021 \times 2^{55}} BPP_4\left(2^{60}, 120, P(y)\right) \\
\text{où } P &= 22046536\Pi_1 + 11642616(\Pi_2 - \Pi_7) + 15741875(\Pi_3 - \Pi_{10}) + 26174255\Pi_4 + 5323725\Pi_8
\end{aligned}$$

avec $[\alpha_i] = (32556, 17892, 25625, 40413, 0, 0, -17892, 10899, 0, -25625, 0)$

$$\begin{aligned}
\zeta(5) &= \frac{9}{31 \times 2021 \times 2^{51}} BPP_4\left(2^{60}, 120, P(y)\right) \\
\text{où } P &= 32556\Pi_1 + 17892(\Pi_2 - \Pi_7) + 25625(\Pi_3 - \Pi_{10}) + 40413\Pi_4 + 10899\Pi_8
\end{aligned}$$

avec $[\alpha_i] = (12347068, 6435126, 8249375, 14111819, 0, 0, -6435126, 2392497, 0, -8249375, 0)$

$$\begin{aligned}
\ln^5(2) &= \frac{1}{2021 \times 2^{54}} BPP_4\left(2^{60}, 120, P(y)\right) \\
\text{où } P &= 12347068\Pi_1 + 6435126(\Pi_2 - \Pi_7) + 8249375(\Pi_3 - \Pi_{10}) + 14111819\Pi_4 + 2392497\Pi_8
\end{aligned}$$

6.1.2 Simplifications de ces formules

Ces formules peuvent se simplifier en faisant apparaître le terme $I_3^{(4)} + I_{10}^{(4)}$. Par exemple $\pi^4 \ln(2) = \left(311416 I_1^{(4)} + 168912 I_2^{(4)} + 2 \times 239375 I_3^{(4)} + 382643 I_4^{(4)} - 168912 I_7^{(4)} + 96489 I_8^{(4)}\right) - 239375\left(I_3^{(4)} + I_{10}^{(4)}\right)$ ce qui donne

$$\begin{aligned}
\pi^4 \ln(2) &= \frac{27}{16168} BPP_4\left(2^{12}, 24, P(y)\right) + \frac{10341}{4042} BBP_4\left(-2^{10}, 4, y^3 + 4y^2 - 128\right) \\
\text{où } P(y) &= 1196875y^{23} + 382y^{22} - 52816y^{21} + 578170y^{20} - 462656y^{19} - 1528y^{18} + 3842624y^{17} \\
&\quad +3056y^{16} + 22626304y^{15} - 4625360y^{14} - 845056y^{13} - 12224y^{12} - 58359488y^{11} \\
&\quad -24448y^{10} - 3380224y^{9} - 37002880y^{8} + 362020864y^{7} + 97792y^{6} + 245927936y^{5} \\
&\quad -195584y^{4} - 118439936y^{3} + 296023040y^{2} - 54083584y + 782336
\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}
\pi^2 \ln^3(2) &= \frac{3}{129344} BPP_4\left(2^{12}, 24, P(y)\right) + \frac{75561}{32336} BBP_4\left(-2^{10}, 4, y^3 + 4y^2 - 128\right) \\
\text{où } P(y) &= 78709375\,y^{23} + 14230\,y^{22} - 2477392\,y^{21} + 31913890\,y^{20} - 28010048\,y^{19} - 56920\,y^{18} \\
&\quad +269513216\,y^{17} + 113840\,y^{16} + 1562656768\,y^{15} - 255311120\,y^{14} - 39638272\,y^{13} \\
&\quad -455360\,y^{12} - 3705698240\,y^{11} - 910720\,y^{10} - 158553088\,y^{9} - 2042488960\,y^{8} \\
&\quad +25002508288\,y^{7} + 3642880\,y^{6} + 17248845824\,y^{5} - 7285760\,y^{4} - 7170572288\,y^{3} \\
&\quad +16339911680\,y^{2} - 2536849408\,y + 29143040
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\zeta(5) &= \frac{9}{250604} BPP_4\left(2^{12}, 24, P(y)\right) + \frac{369}{62651} BBP_4\left(-2^{10}, 4, y^3 + 4y^2 - 128\right) \\
\text{où } P(y) &= 128125\,y^{23} + 62\,y^{22} - 6456\,y^{21} + 65270\,y^{20} - 49696\,y^{19} - 248\,y^{18} + 403584\,y^{17} \\
&\quad +496\,y^{16} + 2385664\,y^{15} - 522160\,y^{14} - 103296\,y^{13} - 1984\,y^{12} - 6323008\,y^{11} \\
&\quad -3968\,y^{10} - 413184\,y^{9} - 4177280\,y^{8} + 38170624\,y^{7} + 15872\,y^{6} + 25829376\,y^{5} \\
&\quad -31744\,y^{4} - 12722176\,y^{3} + 33418240\,y^{2} - 6610944\,y + 126976
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\ln^5(2) &= \frac{1}{64672} BPP_4\left(2^{12}, 24, P(y)\right) + \frac{13199}{16168} BBP_4\left(-2^{10}, 4, y^3 + 4y^2 - 128\right) \\
\text{où } P(y) &= 41307505\,y^{23} + 5566\,y^{22} - 1046368\,y^{21} + 14343850\,y^{20} - 12003008\,y^{19} - 22264\,y^{18} \\
&\quad +150257552\,y^{17} + 44528\,y^{16} + 854966272\,y^{15} - 114750800\,y^{14} - 16741888\,y^{13} \\
&\quad -178112\,y^{12} - 1886951744\,y^{11} - 356224\,y^{10} - 66967552\,y^{9} - 918006400\,y^{8} \\
&\quad +13679460352\,y^{7} + 1424896\,y^{6} + 9616483328\,y^{5} - 2849792\,y^{4} - 3072770048\,y^{3} \\
&\quad +7344051200\,y^{2} - 1071480832\,y + 11399168
\end{aligned}
$$

7 Quelques conjectures

Si l'on observe en détail les résultats obtenus, il semble judicieux d'introduire les fonctions suivantes

$$
\begin{aligned}
A(n) &= \frac{2^n}{n!}\left(104 I_4^{(n)} - 5589 I_7^{(n)}\right) \\
B(n) &= \frac{2^n}{n!}\left(14091 I_4^{(n)} - 14375 I_{10}^{(n)}\right) \\
C(n) &= \frac{2^n}{n!}\left(1825 I_4^{(n)} - 1863 I_8^{(n)}\right) \\
D(n) &= \frac{2^n}{n!}\left(I_{11}^{(n)} + I_6^{(n)} - \frac{534}{625} I_5^{(n)} - \frac{648}{625} I_9^{(n)}\right) \\
E(n) &= 157248\, A(n) + 57875\, B(n) \\
F(n) &= 159\, A(n) + 463\, C(n)
\end{aligned}
$$

En effet, on a alors prouvé que

$$
\begin{aligned}
A(4) &= +2585 L_5\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{5589}{2^4} L_5\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{2689}{5!}\ln^5(2) + \frac{491}{6\times 3!}\pi^2\ln^3(2) - \frac{3821}{720}\pi^4\ln(2) \\
A(3) &= -2585 L_4\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{5589}{2^3} L_4\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{2689}{4!}\ln^4(2) + \frac{491}{6\times 2}\pi^2\ln^2(2) - \frac{3821}{720}\pi^4 \\
A(2) &= +2585 L_3\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{5589}{4} L_3\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{2689}{3!}\ln^3(2) + \frac{491}{6}\pi^2\ln(2) \\
A(1) &= -2585 L_2\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{5589}{2} L_1\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{2689}{2}\ln^2(2) + \frac{491}{6}\pi^2 \\
A(0) &= +2585 L_1\left(\frac{1}{2}\right) + 5589 L_1\left(\frac{1}{4}\right) - 2689\ln(2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B(4) &= +8320L_5\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{14375}{2^4}L_5\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{6339}{5!}\ln^5(2)-\frac{1635}{8\times 3!}\pi^2\ln^3(2)+\frac{26831}{1920}\pi^4\ln(2)\\
B(3) &= -8320L_4\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{14375}{2^3}L_4\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{6339}{4!}\ln^4(2)-\frac{1635}{8\times 2}\pi^2\ln^2(2)+\frac{26831}{1920}\pi^4\\
&\quad ...
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C(4) &= 1432L_5\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{469}{5!}\ln^5(2)-\frac{431}{24\times 3!}\pi^2\ln^3(2)+\frac{8563}{5760}\pi^4\ln(2)\\
C(3) &= -1432L_4\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{469}{4!}\ln^4(2)-\frac{431}{24\times 2}\pi^2\ln^2(2)+\frac{8563}{5760}\pi^4\ln(2)\\
&\quad ...
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D(3) &= \frac{91}{1250\times 3!}\pi\ln^3(2)-\frac{73}{10000}\pi^3\ln(2)\\
D(2) &= \frac{91}{1250\times 2}\pi\ln^2(2)-\frac{73}{10000}\pi^3\\
&\quad ...
\end{aligned}
$$

Numériquement, on a déterminé les conjectures suivantes :

Conjecture 1

$$
\begin{aligned}
A(5) &= -2585L_6\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{5589}{2^5}L_6\left(\frac{1}{4}\right)-\frac{2689}{6!}\ln^6(2)+\frac{491}{6\times 4!}\pi^2\ln^4(2)\\
&\quad -\frac{3821}{720\times 2}\pi^4\ln^2(2)+\frac{253943}{120960}\pi^6\\
A(6) &= 2585L_7\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{5589}{2^6}L_7\left(\frac{1}{4}\right)-\frac{2689}{7!}\ln^7(2)+\frac{491}{6\times 5!}\pi^2\ln^5(2)\\
&\quad -\frac{3821}{720\times 3!}\pi^4\ln^3(2)+\frac{253943}{120960}\pi^6\ln(2)-\frac{4998085}{768}\zeta(7)
\end{aligned}
$$

Conjecture 2

$$
\begin{aligned}
B(5) &= -8320L_6\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{14375}{2^5}L_6\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{6339}{6!}\ln^6(2)-\frac{1635}{8\times 4!}\pi^2\ln^4(2)\\
&\quad +\frac{26831}{1920\times 2}\pi^4\ln^2(2)-\frac{9152137}{1612800}\pi^6\\
B(6) &= 8320L_7\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{14375}{2^6}L_7\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{6339}{7!}\ln^7(2)-\frac{1635}{8\times 5!}\pi^2\ln^4(2)\\
&\quad +\frac{26831}{1920\times 3!}\pi^4\ln^3(2)-\frac{9152137}{1612800}\pi^6\ln(2)+\frac{1768221}{100}\zeta(7)
\end{aligned}
$$

Conjecture 3

$$
\begin{aligned}
C(5) &= -1432L_6\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{469}{6!}\ln^6(2)-\frac{431}{24\times 4!}\pi^2\ln^4(2)+\frac{8563}{5760\times 2}\pi^4\ln^2(2)-\frac{286189}{414720}\pi^6\\
C(6) &= 1432L_7\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{469}{7!}\ln^7(2)-\frac{431}{24\times 5!}\pi^2\ln^5(2)+\frac{8563}{5760\times 3!}\pi^4\ln^3(2)-\frac{286189}{414720}\pi^6\ln(2)+\frac{572135}{256}\zeta(7)
\end{aligned}
$$

Conjecture 4

$$\begin{aligned}
D(4) &= \frac{91}{1250\times 4!}\pi\ln^4(2)-\frac{73}{10000\times 2}\pi^3\ln^2(2)+\frac{1567}{480000}\pi^5\\
D(5) &= \frac{91}{1250\times 5!}\pi\ln^5(2)-\frac{73}{10000\times 3!}\pi^3\ln^3(2)+\frac{1567}{480000}\pi^5\ln(2)-\frac{31232}{9375}\beta(6)
\end{aligned}$$

où $\beta(6)=\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^6}$
La conjecture sur $D(5)$ *n'apparaît pas dans l'article de Broadhurst [3]*

Il peut être tentant de conjecturer par exemple que $A(7) = ... - \frac{4998085}{768}\zeta(7)\ln(2)+r\pi^8$ où r est un rationnel. Numériquement, cela ne semble pas se vérifier. Tout se passe comme si la présence d'un terme de la forme $\zeta(2p+1)$ où $\beta(2p)$ bloque le passage à l'ordre suivant.
La solution réside dans l'élimination de $\zeta(7)$,d'où l'intérêt des fonctions $E(n)$, $F(n)$ qui n'ont pas le terme $\zeta(7)$ dans $E(6)$ et $F(6)$.
On peut alors énoncer de nouvelles conjectures.

Conjecture 5

$$\begin{aligned}
E(5) &= -888006080L_6\left(\frac{1}{2}\right)-27464346L_6\left(\frac{1}{4}\right)-\frac{831953125}{32}L_6\left(-\frac{1}{4}\right)-\frac{18656749}{240}\ln^6(2)\\
&\quad+\frac{2773133}{64}\pi^2\ln^4(2)-\frac{49408163}{3840}\pi^4\ln^2(2)+\frac{549424529}{322560}\pi^6\\
E(6) &= +888006080L_7\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{27464346}{2}L_7\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{831953125}{64}L_7\left(-\frac{1}{4}\right)-\frac{18656749}{240\times 7}\ln^7(2)\\
&\quad+\frac{2773133}{64\times 5}\pi^2\ln^5(2)-\frac{49408163}{3840\times 3}\pi^4\ln^3(2)+\frac{549424529}{322560}\pi^6\ln(2)\\
E(7) &= -888006080L_8\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{27464346}{4}L_8\left(\frac{1}{4}\right)-\frac{831953125}{128}L_8\left(-\frac{1}{4}\right)-\frac{18656749}{1680\times 8}ln^8(2)\\
&\quad+\frac{2773133}{320}\pi^2\ln^6(2)-\frac{49408163}{11520\times 4}\pi^4\ln^4(2)+\frac{549424529}{322560\times 2}\pi^6\ln^2(2)-\frac{35216874787}{51609600}\pi^8\\
E(8) &= 888006080L_9\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{27464346}{8}L_9\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{831953125}{256}L_9\left(-\frac{1}{4}\right)-\frac{18656749}{13440\times 9}ln^9(2)\\
&\quad+\frac{2773133}{1920\times 7}\pi^2\ln^7(2)-\frac{49408163}{46080\times 5}\pi^4\ln^5(2)+\frac{549424529}{645120\times 3}\pi^6\ln^3(2)-\frac{35216874787}{51609600}\pi^8\ln(2)\\
&\quad+\frac{26853172129}{1280}\zeta(9)
\end{aligned}$$

Conjecture 6

$$F(5) = -1074031 L_6\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{888651}{32} L_6\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{52601}{180}\ln^6(2) + \frac{112723}{576}\pi^2\ln^4(2) - \frac{895643}{11520}\pi^4\ln^2(2) + \frac{41507939}{2903040}\pi^6$$

$$F(6) = 1074031 L_7\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{888651}{64} L_7\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{52601}{180\times 7}\ln^7(2) + \frac{112723}{576\times 5}\pi^2\ln^5(2) - \frac{895643}{11520\times 3}\pi^4\ln^3(2) + \frac{41507939}{2903040}\pi^6\ln(2)$$

$$F(7) = -1074031 L_8\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{888651}{128} L_8\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{52601}{1260\times 8}\ln^8(2) + \frac{112723}{2880\times 6}\pi^2\ln^6(2) - \frac{895643}{34560\times 4}\pi^4\ln^4(2) + \frac{41507939}{2903040\times 2}\pi^6\ln^2(2) - \frac{30443634601}{4180377600}\pi^8$$

$$F(8) = 1074031 L_9\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{888651}{256} L_9\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{52601}{10080\times 9}\ln^9(2) + \frac{112723}{17280\times 7}\pi^2\ln^7(2) - \frac{895643}{138\,240\times 5}\pi^4\ln^5(2) + \frac{41507939}{5806\,080\times 3}\pi^6\ln^3(2) - \frac{30443634601}{4180377600}\pi^8\ln(2) + \frac{26613434435}{110592}\zeta(9)$$

On considère donc maintenant la fonction $G(n)$ définie par

$$G(n) = 52175\, E(n) - 4548528\, F(n)$$

Alors les deux dernières conjectures se traduisent par

$$G(8) = 41446457147632 L_9\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2613276132867}{16} L_9\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{43407154296875}{256} L_9\left(-\frac{1}{4}\right) - \frac{654406383971}{120960}\ln^9(2) + \frac{87718911859}{13440}\pi^2\ln^7(2) - \frac{1219918483357}{230400}\pi^4\ln^5(2) + \frac{7688444493487}{1935360}\pi^6\ln^3(2) - \frac{383664866612311}{154828800}\pi^8\ln(2)$$

qui ne fait plus intervenir $\zeta(9)$.
On peut alors énoncer la conjecture suivante.

Conjecture 7

$$G(9) = -41446457147632 L_{10}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2613276132867}{32} L_{10}\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{43407154296875}{512} L_9\left(-\frac{1}{4}\right) - \frac{654406383971}{120960\times 10}\ln^{10}(2) + \frac{87718911859}{13440\times 8}\pi^2\ln^8(2) - \frac{1219918483357}{230400\times 6}\pi^4\ln^6(2) + \frac{7688444493487}{1935360\times 4}\pi^6\ln^4(2) - \frac{383664866612311}{154828800\times 2}\pi^8\ln^2(2) + \frac{8463651247892815}{6306398208}\pi^{10}$$

$$
\begin{aligned}
G(10) = {} & 41446457147632 L_{11}\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{2613276132867}{64} L_{11}\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{43407154296875}{1024} L_{10}\left(-\frac{1}{4}\right) \\
& - \frac{654406383971}{1209600 \times 11} \ln^{11}(2) + \frac{87718911859}{107\,520 \times 9} \pi^2 \ln^9(2) - \frac{1219918483357}{1\,382\,400 \times 7} \pi^4 \ln^7(2) \\
& + \frac{7688444493487}{7\,741\,440 \times 5} \pi^6 \ln^5(2) - \frac{383664866612311}{309\,657\,600 \times 3} \pi^8 \ln^3(2) + \frac{8463651247892815}{6306398208} \pi^{10} \ln(2) \\
& - \frac{81972669830152829}{184320} \zeta(11)
\end{aligned}
$$

En conclusion, on retrouve les résultats conjecturés et démontrés dans [3] mais par une approche différente qui privilégie les intégrales et la recherche de formules BBP .

Références

[1] D.BAILEY, J.BORWEIN, P.BORWEIN et S.PLOUFFE, *The Quest for Pi*, in *The Mathématical Intelligencer*, vol.18,n°1, 1997

[2] D.BAILEY, P.BORWEIN, et S.PLOUFFE, *On The Rapid Computation of Various Polylogarithmic Constants*, 1996
http ://www.cecm.sfu/personal/pborwein/

[3] D.J.BROADHURST, *Polylogarithmic ladders, hypergeometric series and the ten millionth digits of* $\zeta(3)$ *and* $\zeta(5)$, preprint, March 1998.
http ://front.math.ucdavis.edu/math.CA/9803067

[4] L.LEWIN, *Structural Properties of Polylogarithms,* 1991 AMS

[5] B.GOUREVITCH, *Une formule BBP pour* $\zeta(3)$.
http ://www.multimania.com/bgourevitch/perso/zeta.ps

[6] V.ADAMCHIK, *Pi : A 2000-Year Search Changes Direction,* in *Education and Research*, vol. 5, n°.1, 1996