Conjectures et séries génératrices issues du OEIS

par Simon Plouffe

13 mai 2023

Résumé

En 1992, mon mémoire de maîtrise en mathématiques était une expérience faire sur les 5500 suites de ce qui allait devenir *The Encyclopedia of Integer Sequences* qui a été publiée en 1995 avec Neil Sloane. Peu après le contenu a été mis sur internet. Dans ce mémoire y figurait 1031 formules trouvées sur un total de 4528 avec un nouveau programme Maple mis au point par moi et François Bergeron (UQAM) et qui plus tard est devenu un programme à même la librairie de Maple appelé GFUN, GFUN pour G. FUNctions.

De 5500 suites d'entiers, on est passé à 362500 au rythme de 10 à 20000 par an en plus. Ce qui a demandé beaucoup d'aide de l'extérieur. Il y a maintenant une bonne vingtaine d'éditeurs, un président (Neil Sloane), une fondation OEIS et des milliers de collaborateurs. Le site internet est l'un des plus connus dans le monde mathématique. J'ai donc refait à plusieurs reprises cet exercice d'essayer de trouver une forme close ou formule permettant de générer chaque suite du catalogue OEIS. Je présente ici les 141208 formules trouvées sur 57138 suites, ce qui représente un taux de succès de 16 %.

Pour être au plus près de la vraie formule connue ou non il est possible de calculer un score basé sur la longueur de la formule trouvée (en nombre de caractères), la taille de toute la suite (habituellement 50 termes environ) et le nombre de termes.

$$Score\ (Annnnnn) = \frac{\ln(nombre\ de\ termes) \cdot longeur\ de\ la\ suite}{longueur\ de\ la\ formule}$$

Ce qui donne un nombre compris entre 0 et 20 le plus souvent. Dès que le seuil de 2.0 n'est pas atteint la formule trouvée est rejetée et est considérée comme un faux positif cela évite la plupart des pièges liées au nombre de termes insuffisants.

Pour ce qui est des techniques qui ont été utilisées on peut consulter mon mémoire de maîtrise original de 1992 sur mon site ou sur le site ArXiv ou ViXra.

La liste des formules se trouve ici : http://plouffe.fr/OEIS/OEIS_conjectured_formulas.pdf. Une version longue plus lisible se trouve au même endroit mais le document fait 27305 pages ici :

http://plouffe.fr/OEIS/OIES_conjectured%20formulas%20long%20version.pdf

Voici un échantillon du document complet :

```
                            OEIS conjectured formulas / Simon PLOUFFE

A000000
A000000 Conjectured formulas of the OEIS by Simon Plouffe as of May 09 2023
A000000 Version 1.0 : August 1992, Current version : 2023 05 08
A000000 There are 57138 unique sequence and more than 141208 expressions.
A000000
A000000
A000000             ln(nbr_of_terms) x length_of_sequence
A000000    Score := -----------------------------------
A000000                  length_of_formula
A000000
A000000
A000000
A000000 If the score is high the reliability of the formula is good.
A000000
A000000 A score near 1 is not good, a score of 20+ is excellent.
A000000 Some formulas are in double for many reasons, the sign or the factorization
A000000 of the expression makes a change in length. The intention of the author
A000000 is to keep the list as clean as possible, with time it will be done...
A000000 These formulas are suggested, most of them are the true ones, in some
A000000 cases the formula found automatically are better than the original
A000000 reference.
A000000
A000000 Some formulas are false positives, in some rare cases, even false
A000000 the formula found is sometimes as interesting as the original.
A000000
A000000 Some formulas appear with the value I (complex),
A000000 it is not an error most of the time. On the other hand,
A000000 to correctly evaluate the series it is necessary to :
A000000 develop in series (ordinary or exponential).
A000000 collect the terms,
A000000 evaluate in floating point,
A000000 evaluate in absolute value.
---------------------------------------------------------------------------------------
OEIS #  Score   Formula                                  Type
---------------------------------------------------------------------------------------
#######################################################################################
A000004 13.1249 [{a(n+1),a(0)=0} ogf]
A000007 12.0781 [{-a(n+1),a(0)=1} ogf]
A000008 25.5586 [x^9+x^4+x+1 ogf_with_Euler_transform]
A000008 5.84027 [1/(x^4-x^3+x^2-x+1)/(x+1)^2/(x^4+x^3+x^2+x+1)^2/(x-1)^4 ogf]
A000009 33.6616 [1/(-x^2+1) ogf_with_Euler_transform]
A000012 15.8359 [{a(n+1)-a(n),a(0)=1} ogf]
A000012 20.0845 [-f(x)*x+f(x)-1 ogf]
A000012 34.3110 [1/(-x+1) lgdogf]
A000012 39.2126 [-1/(x-1) ogf]
A000023 17.0100 [-(1-2*x)/(-x+1) lgdegf]
A000023 26.9652 [(1-2*x)*f(x)+(1-x)*f(x)^2 lgdegf]
A000023 5.07762 [{(2*n+4)*a(n+1)+(n+1)*a(n+2)-a(n+3),a(0)=1,a(1)=-1,a(2)=2} ogf]
```

Références :

[1] Le catalogue des suites d'entier : https://oeis.org/ pour tous les numéros de suites apparaissant dans ce document.

[2] Plouffe Simon, Mémoire de maîtrise 1992 UQAM*, Les approximations de séries génératrices et quelques conjectures.*
https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/0911/0911.4975.pdf

[3] OEIS conjectured formulas, version 2018. https://vixra.org/pdf/1409.0048v6.pdf

[4] Plouffe Simon, Bergeron François, Computing the Generating Function of a Series Given Its First Few Terms https://vixra.org/abs/1409.0095

[5] Les nombres en base exp(Pi), 659 formules reliées à la fonction Gamma et puissances de π. https://vixra.org/abs/2305.0024