Tout sur

Présenté par Simon Plouffe
Journée internationale de π
Au Lycée Winston Churchill
14 mars 2017

Petit poème sur π

Si la circonférence est fière
d'être égale à $2\pi R$
Le cercle est tout heureux
d'être égal à πR^2
Le volume de toute Terre
de toute sphère
qu'elle soit de pierre ou de bois
est égal à quatre tiers de πR^3

Formulaire de la physique

$$F = ma$$

$$F = G\frac{mM}{r^2}$$

$$v = \sqrt{2gh}$$

$$E = \frac{mv^2}{2}$$

$$E = mc^2$$

Mais Heisenberg a trouvé

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{h}{4\pi}$$

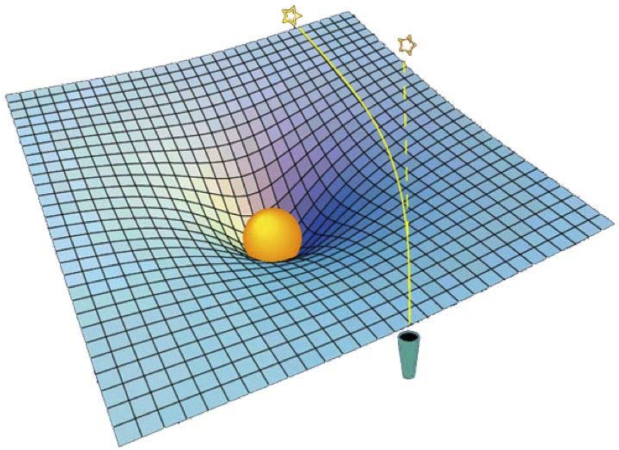
Le principe d'incertitude

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

Coulomb a trouvé aussi

Einstein a trouvé ça :

$$G_{\mu\nu} + \Lambda_{g_{\mu\nu}} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$



Qui veut dire en dessin



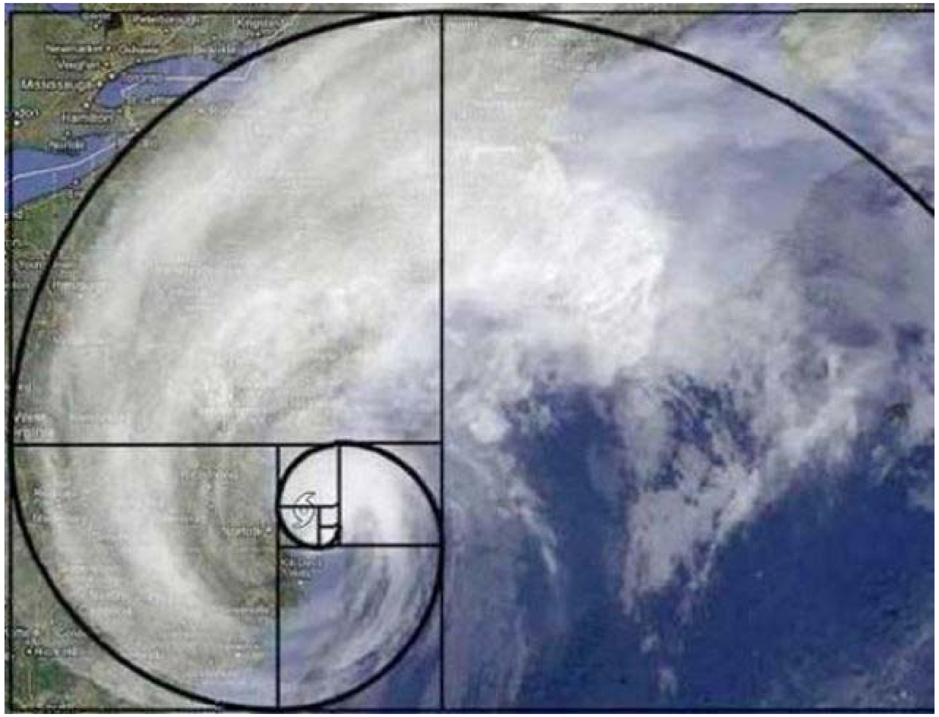
Que vient faire le π
Dans ces formules ?

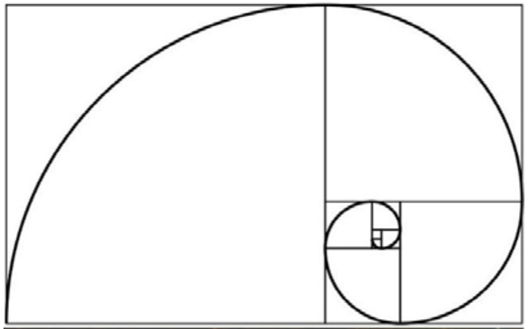
Plus généralement, une constante mathématique c'est quoi ?

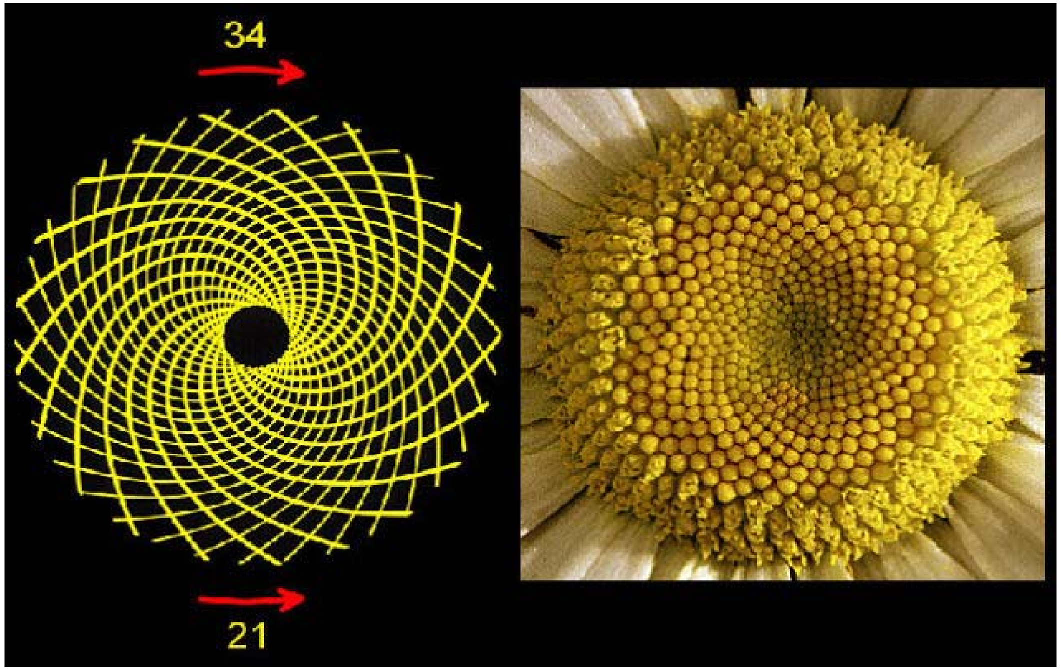
Comme par exemple, le nombre d'or : $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ou 1,6180339887…

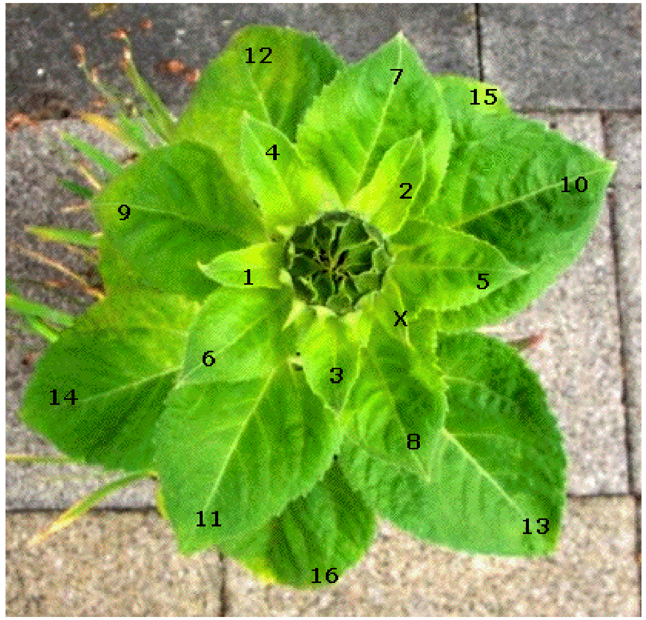
95 % de tout ce qui pousse sur terre est tributaire de ce nombre.

Formes de spirales (logarithmiques) dans la nature









Formes diverses sur les plantes, fleurs, nautile

Mais revenons à π

Leibniz, Newton et Euler ont trouvé

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$$

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$$

$$\frac{\pi^4}{90} = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots$$

$$\frac{\pi^2}{6} \quad \frac{\pi^4}{90} \quad \frac{\pi^8}{9450} \quad \frac{\pi^{10}}{93555}$$

$$\frac{691\pi^{12}}{638512875} \quad \frac{2\pi^{14}}{18243225} \quad \frac{3617\pi^{16}}{325641566250} \cdots$$

Ah oui, ces nombres sont bizarres un peu mais nous y reviendrons…

$$1, \frac{1}{6}, -\frac{1}{30}, \frac{1}{42}, -\frac{1}{30}, \frac{5}{66}, -\frac{691}{2730}, \frac{7}{6}, -\frac{3617}{510}, \frac{43867}{798}$$

$$, -\frac{174611}{330}, \frac{854513}{138}, -\frac{236364091}{2730}, \frac{8553103}{6},$$

$$-\frac{23749461029}{870}, \frac{8615841276005}{14322}, -\frac{7709321041217}{510}$$

Ils sont mêmes assez irréguliers.

$$\frac{8615841276005}{14322} = \frac{5 \cdot 1001259881 \cdot 1721}{2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 31}$$

$$\pi = \frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \frac{4}{13} - \cdots$$

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdots$$

De François Viète, vendéen célèbre

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$$

$$\pi = 3 + \frac{4}{2 \times 3 \times 4} - \frac{4}{4 \times 5 \times 6} + \frac{4}{6 \times 7 \times 8} \cdots.$$

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k)!(1103 + 26390k)}{k!^4 (396^{4k})}.$$

$$\frac{1}{\pi} = \frac{12}{640320^{3/2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(6k)!(13591409 + 545140134k)}{(3k)!(k!)^3(-640320)^{3k}}.$$

Utilisée dans un calcul récent à 22 459 000 000 000 de décimales

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k} \left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6} \right)$$

Utilisée souvent pour vérifier le calcul précédent

Mathématiciens qui ont calculé π

$$\sqrt{\varphi+2}-\varphi=\cfrac{e^{-2\pi/5}}{1+\cfrac{e^{-2\pi}}{1+\cfrac{e^{-4\pi}}{1+\cfrac{e^{-6\pi}}{1+\cdots}}}}$$

$$\pi=\frac{9801}{2\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)!}{(n!)^4}\times\frac{1103+26390n}{(4\times 99)^{4n}}}$$

$$1+\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}+\cdots+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{3}{1+\cfrac{4}{1+\cfrac{5}{1+\cdots}}}}}}=\sqrt{\frac{e\pi}{2}}.$$

$$\pi = 3 + \frac{1}{60}\left(8 + \frac{2\cdot 3}{7\cdot 8\cdot 3}\left(13 + \frac{3\cdot 5}{10\cdot 11\cdot 3}\left(18 + \frac{4\cdot 7}{13\cdot 14\cdot 3}(23 + \ldots)\right)\right)\right).$$

$$\pi = \frac{22}{7} - \int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,dx$$

$$\pi = \frac{355}{113} - \frac{1}{3164}\int_0^1 \frac{x^8(1-x)^8\left(25+816x^2\right)}{1+x^2}\,dx.$$

$$\pi = 72\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(e^{\pi n}-1)} - 96\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(e^{2\pi n}-1)} + 24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(e^{4\pi n}-1)}$$

Trouvée en 2006

$$\frac{1}{\pi} = 8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^{\pi n}-1} - 40\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^{2\pi n}-1} + 32\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^{4\pi n}-1}$$

$$24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{13}}{e^{2\pi n}-1}=1$$

$$691=16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{11}}{e^{\pi n}-1}-65536\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{11}}{e^{4\pi n}-1}$$

$$17=32\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{7}}{e^{\pi n}-1}-8192\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{7}}{e^{4\pi n}-1}$$

$$\zeta(3)=28\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3}(e^{\pi n}-1)}-37\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3}(e^{2\pi n}-1)}+7\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3}(e^{4\pi n}-1)}$$

$$240\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{22807}}{e^{2\pi n}-1}$$ = Un nombre premier de 71299 chiffres

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{3}}{e^{2\pi n/7}-1}=10.00000000000000019016176788866 3\ldots$$ Trouvée en 2011

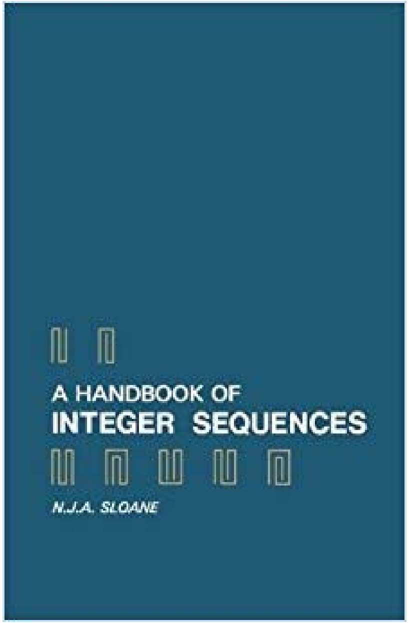
$$\sum\nolimits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{3}}{e^{2\pi n/13}-1}\cong 119.0000000000000000000000000000000000959374585\ldots$$

$$24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{673}}{e^{2\pi n}-1} = \text{Un nombre premier de 1077 chiffres}$$

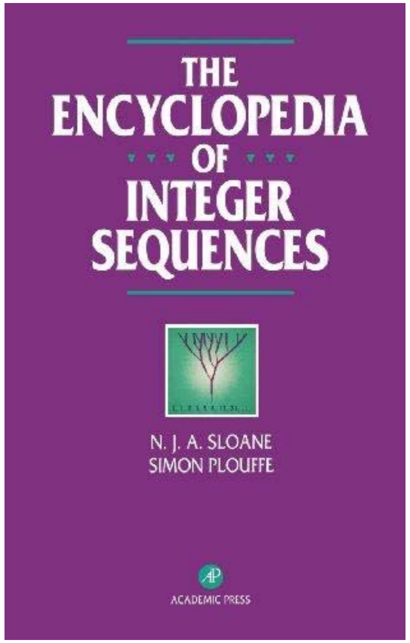
1563446816161537233641320372599653976110377965548710134709703245308959365199442360713700629818872947028243283443123804
961857283918411058648642746089684384789646208236356952050107673130817443939141393630454726434596660228236213301560397333559708019089071092539388093165506910192478651317435394388
1396997454494273171634168373479885260287653158004367339634419574168828404856357321510529058795131127592194626639193386
8079998193052248688135846940671105000759316351346147871029899654133461047064471045769433733727319978799596019791088050
4294193861598871013719474143231771086353286974084185733739470911761471693984969663219714226483192311728026373500589409
0565952326093278981050692637258189939532652927187096882689145678746297584626396587598089692941429338737103597691889111
2386004456615428997681787994932073873732563770756909107851724554892097227673806866069118705062854539463887600192092184
0285422737791329848290481296146389756189366830754105407805732708309245136147902948111237708008554502494688597633551904
7861272800174304789963399362754385251261457670397713346535709232003605915

Mais quel est le motif dans toutes ces formules ?

Pour le nombre π il n'y a pas de motif de façon générale.



1973, 2372 suites
1 personne



1995, 5550 suites
2 personnes

THE ON–LINE ENCYCLOPEDIA OF INTEGER SEQUENCES®

2017, 283000 suites
~ 3000 persones

$$\pi = 3 + \frac{1}{8} + \frac{1}{61} + \frac{1}{5020} + \frac{1}{128541455} + \ \ldots ??$$

$$\pi = 3 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 8 \cdot 17} + \frac{1}{8 \cdot 8 \cdot 17 \cdot 19} + \frac{1}{8 \cdot 8 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 300} + \cdots ??$$

La suite 3, 8, 61, 5020, 128541455, …est connue elle est cataloguée dans l'encyclopédie, elle a le numéro A001466
la suite 8, 8, 17, 19, 300, 1992, … aussi (numéro A006784)

Aucune formule explicite pour ces 2 dernières, … rien de rien. …

En tout 283327 sont cataloguées.

THE ON–LINE ENCYCLOPEDIA OF INTEGER SEQUENCES®

La suite A000108 : les nombres de Catalan fait 23 pages.

Les nombres de Catalan =
1, 2, 5, 14, 132, 429, ...

Ici 16000 termes :
http://plouffe.fr/OEISrecurrences/000/b000108.txt

Des centaines d'articles et de propriétés combinatoires.

A000001 = 0,1,1,1,2,1,2,1,5,2,2,1,5,1,2,1,1
A000002= 1,2,2,1,1,2,1,2,2,1,2,2,1,1,2,1,1
A000003= 1,1,1,1,2,2,1,2,2,2,3,2,2,4,2,2,4
A000005= 1,2,2,3,2,4,2,4,3,4,2,6,2,4,4,5,2
A000006= 1,1,2,2,3,3,4,4,4,5,5,6,6,6,6,7,7
A000008= 1,1,2,2,3,4,5,6,7,8,11,12,15,16,1
A000009= 1,1,1,2,2,3,4,5,6,8,10,12,15,18,2
A000010= 1,1,2,2,4,2,6,4,6,4,10,4,12,6,8,8
A000011= 1,1,2,2,4,4,8,9,18,23,44,63,122,1
A000013= 1,1,2,2,4,4,8,10,20,30,56,94,180,
A000014= 0,1,1,0,1,1,2,2,4,5,10,14,26,42,7
A000015= 1,2,3,4,5,7,7,8,9,11,11,13,13,16,
A000016= 1,1,1,2,2,4,6,10,16,30,52,94,172,
A000017= 1,0,0,2,2,4,8,4,16,12,48,80,136,4
A000018= 1,1,2,2,4,8,13,25,44,83,152,286,5
A000019= 1,1,2,2,5,4,7,7,11,9,8,6,9,4,6,22
A000020= 2,1,2,2,6,6,18,16,48,60,176,144,6
A000021= 1,1,2,2,6,9,17,30,54,98,183,341,6
A000022= 0,1,0,1,1,2,2,6,9,20,37,86,181,42
A000023= 1,-1,2,-2,8,8,112,656,5504,49024,
A000024= 1,1,2,2,7,10,20,36,65,118,221,409

```
5.637023214914152672482675372246209136877108960491622478356629721e-1 z031 frac((91478^14)/log(91478))
5.6370573060809292823544511656114152606630000000000000000000000000e7 z004 n_th zero of Riemann Zeta,n=134660787
5.637092041520322063839796611415269184719794255334231716226281070e-1 z008 Simple expressions with first 3 zeros of Zeta(s) Re(2*a/b^2/c^2-1/a^2/b/c+2/a*b-2/a*c)
5.637094289390973895689064846620816166616977249437141526570776400e0 v026 sum(1/((n-17/22)*(n-19/74)*10^n),n=0..infinity)
5.637099542541141526567307398705217623545904439723572454673293739e1 a016 1/18*(-474+728352*2^(1/2))^(1/2)
5.637100219464852478414152635312581030276379589429845762353811245e1 m021 -2*exp(1)^2/gamma^2-2*Pi^2*gamma^2-2/Pi^2*exp(1)^2/gamma-Pi*exp(1)*gamma^2
5.637113689834826131370826015454301913731861141526867576955270230e-2 s005 A114609[n]/((-1)^(n+1)*binomial(2*n,n)*n^3*5^n) with base (-1)^(n+1)*binomial(3*n,n)*n^3*2^n
5.637124205431302536377535774351092250579737050209001777214152607e1 a016 1/53*(-4823+1011240*78^(1/2))^(1/2)
5.637129544135910152114714152636605839894358311655196140580265365 5e-1 z030 frac(n/log(n)),n=90477351
5.637200208606903857141526353811904257835652014500487315062160101e1 e005 Im[EllipticTheta[3,1/4+3*I,Exp[-4*Pi]]]/Im[EllipticTheta[3,2/3+2/3*I,Exp[-4*Pi]]]
5.637249257564308857153423965874677495141526057310155043388572187e-1 r005 Re(z^2+c),c=-1/15+42/61*I,n=20
5.637265185302387659450354291741568141526218900085991763247733280e15 a006 ((1/2+1/2*5^(1/2))^66+(-1/2*5^(1/2)+1/2)^66)*Lucas(1717/19)/fibonacci(81)/sqrt(5)
5.637267360793758923978682912141526093542587987468758936289642174e-2 h028 log(hypergeom([4/9],[7/12,6/5,7/5,7/4],2/9))
5.637288054902513414915613317454474923683283151903077681326070096 9e-1 z030 frac(n/log(n)),n=141526119
5.637297141526094680781990160890944162103625486331690571461905591 8e-2 z030 frac(n/log(n)),n=142313421
5.637323481349147014152676998938406644713406955458164008687472009e-1 s005 A046095[n]/((-1)^(n+1)*binomial(2*n,n)*10^n) with base (-1)^(n+1)*binomial(2*n,n)*n^3*10^n
5.637334141526612062225689405972547047439600623042787038137388331e1 a019 179912813^(7/33)
5.637370892959724556245257164874447477175714152611135306164069952e-3 s005 A203914[n]/((-1)^(n+1)*(exp(2*pi*n)+1)) with base (-1)^(n+1)*binomial(2*n,n)*n^4*2^n
5.637474365467488750353966826968141526644562418168412148154770623e-1 a016 1/2021*(-4866568+1709766*13^(1/2))^(1/2)
5.637477002436141526742086646286836895051107450795270128073881850e-1 a018 -102/41+35/47*43^(3/8)
```

Version longue
17,3 milliards de constantes (64 chiffres de précision)
2,068 TB ou 2068 gigas. dont 3 milliards d'entrées fabriquées à l'aide des suites du premier site. Collection commencée en avril 1986.

http://plouffe.fr/ipgz64/

Version courte
3,1 milliards de constantes (32 décimales), pour les petits disques.

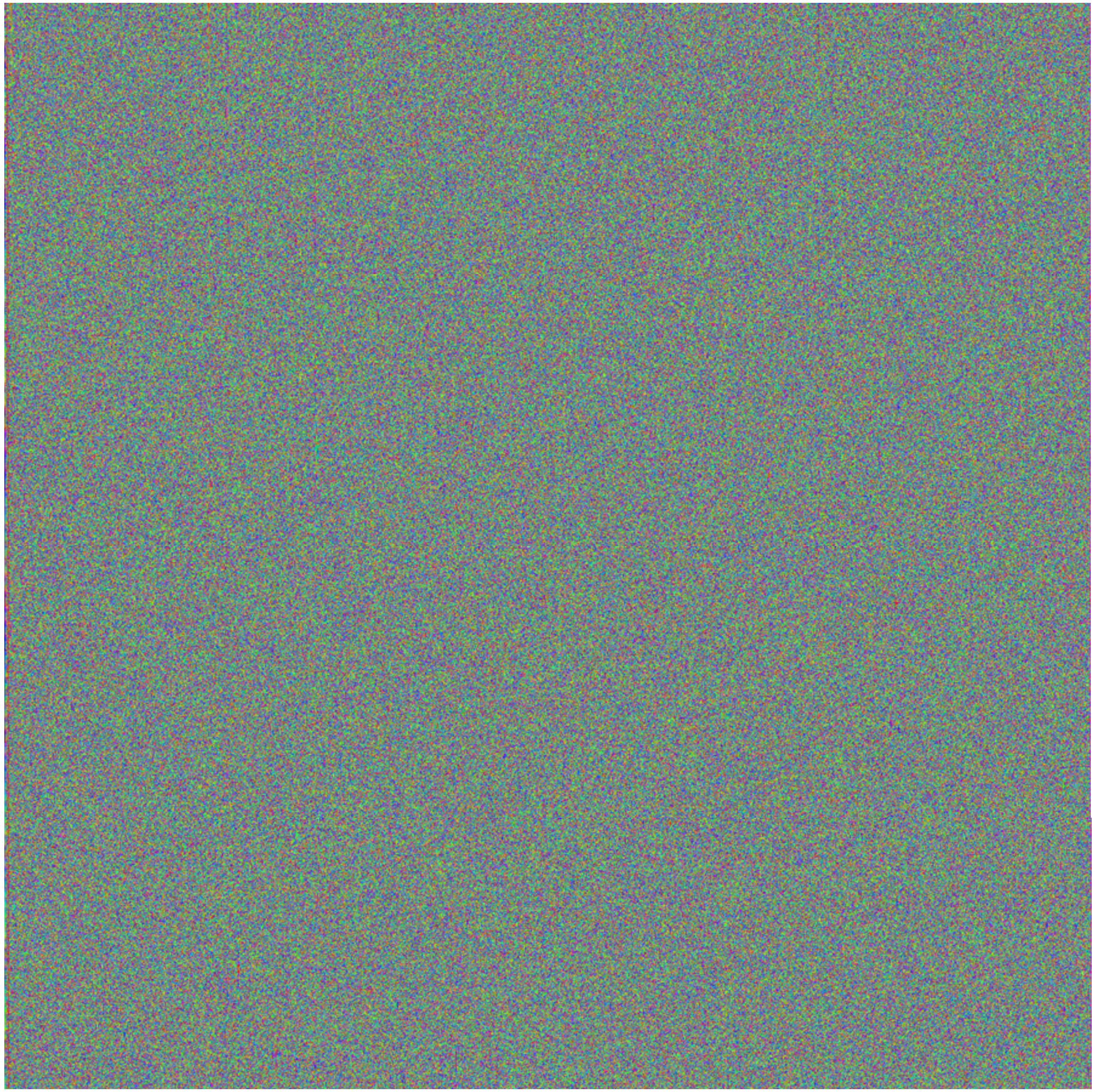
http://plouffe.fr/ipgz/

Suite
des
nombres
$\phi \cdot n^2$
Vue horizontale

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

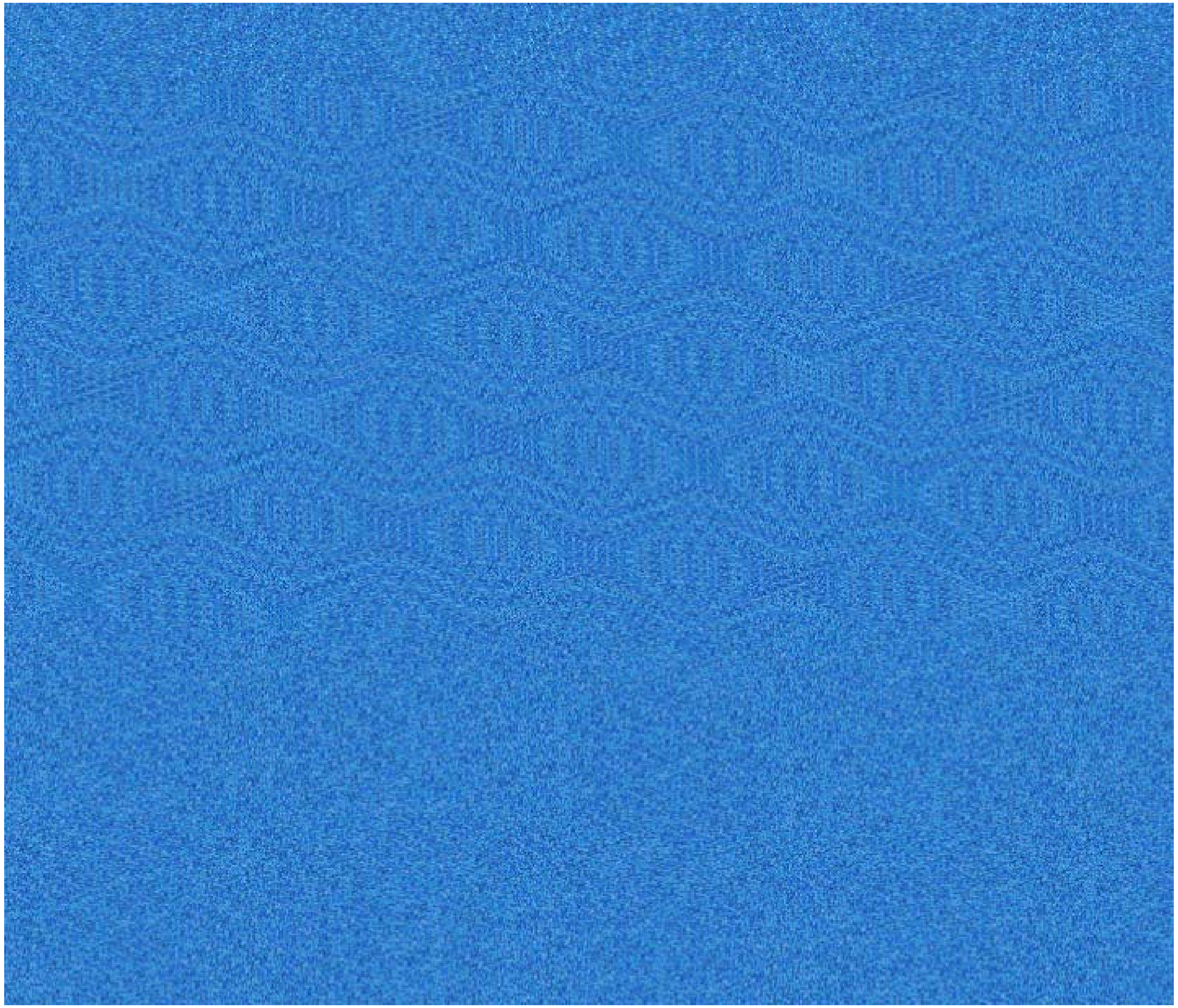
En couleur
Avec les chiffres
de 0 à 9

Vue horizontale
qui ne
ressemble à
rien.

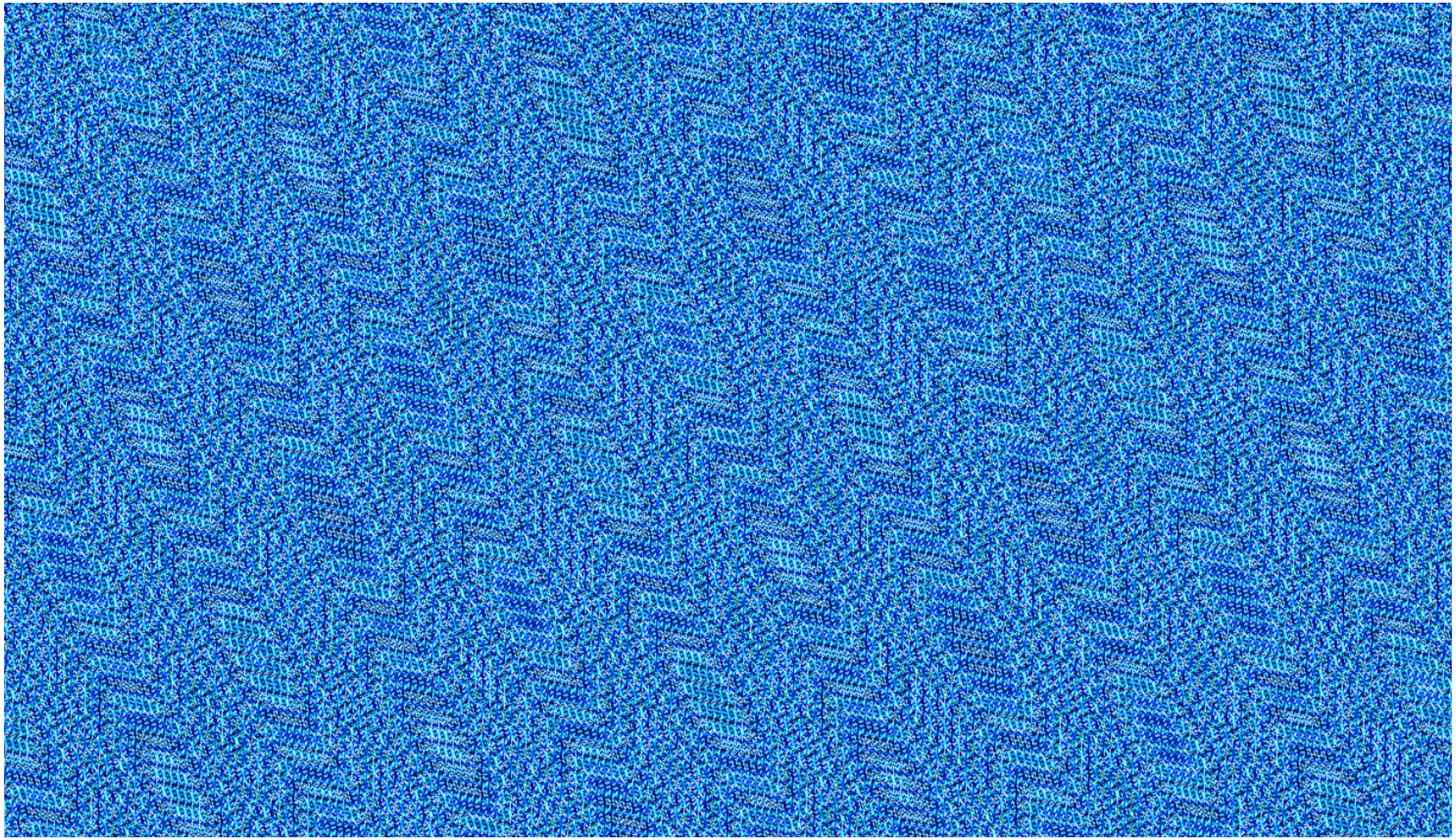


En couleur
Avec les chiffres
de 0 à 9

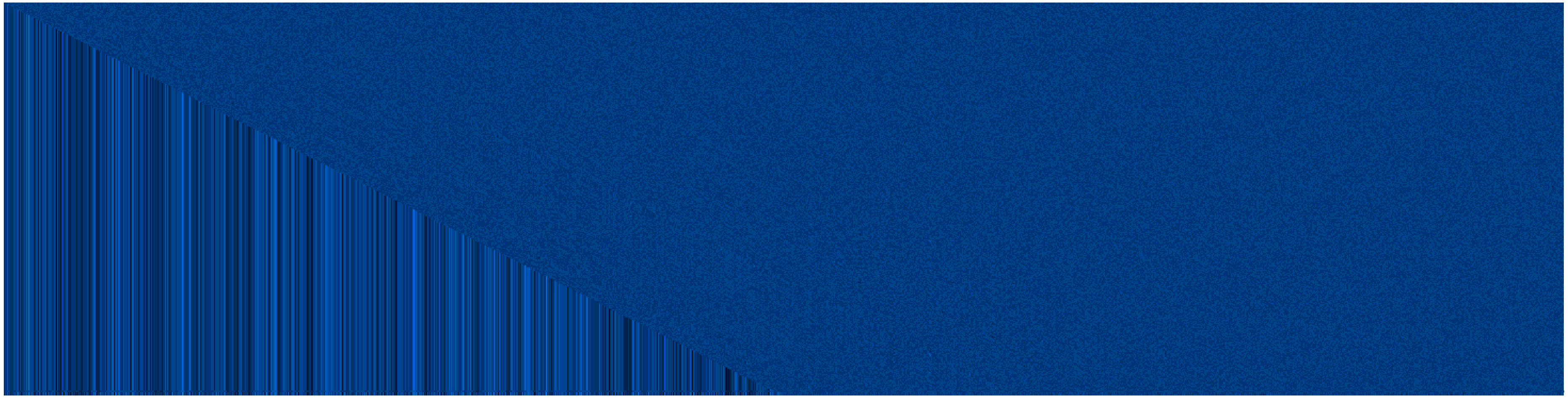
Vue verticale



Autre ligne verticale

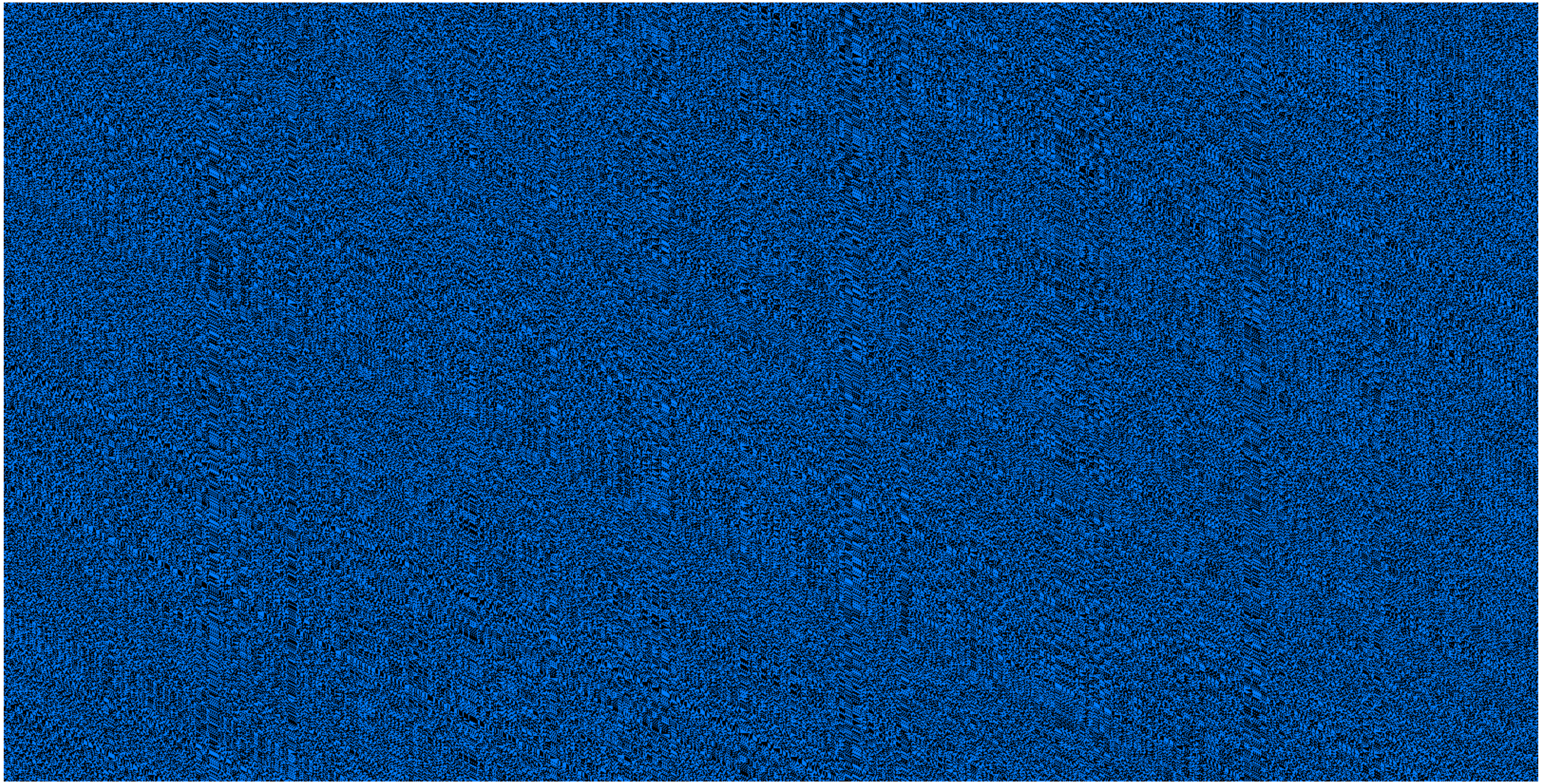


Formule de Viète en binaire vue de loin

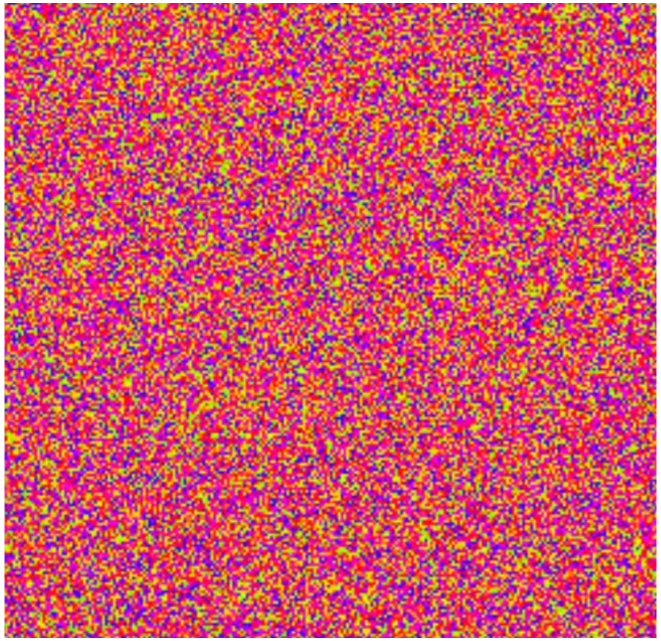


$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdots$$

Formule de Viète en binaire vue de près



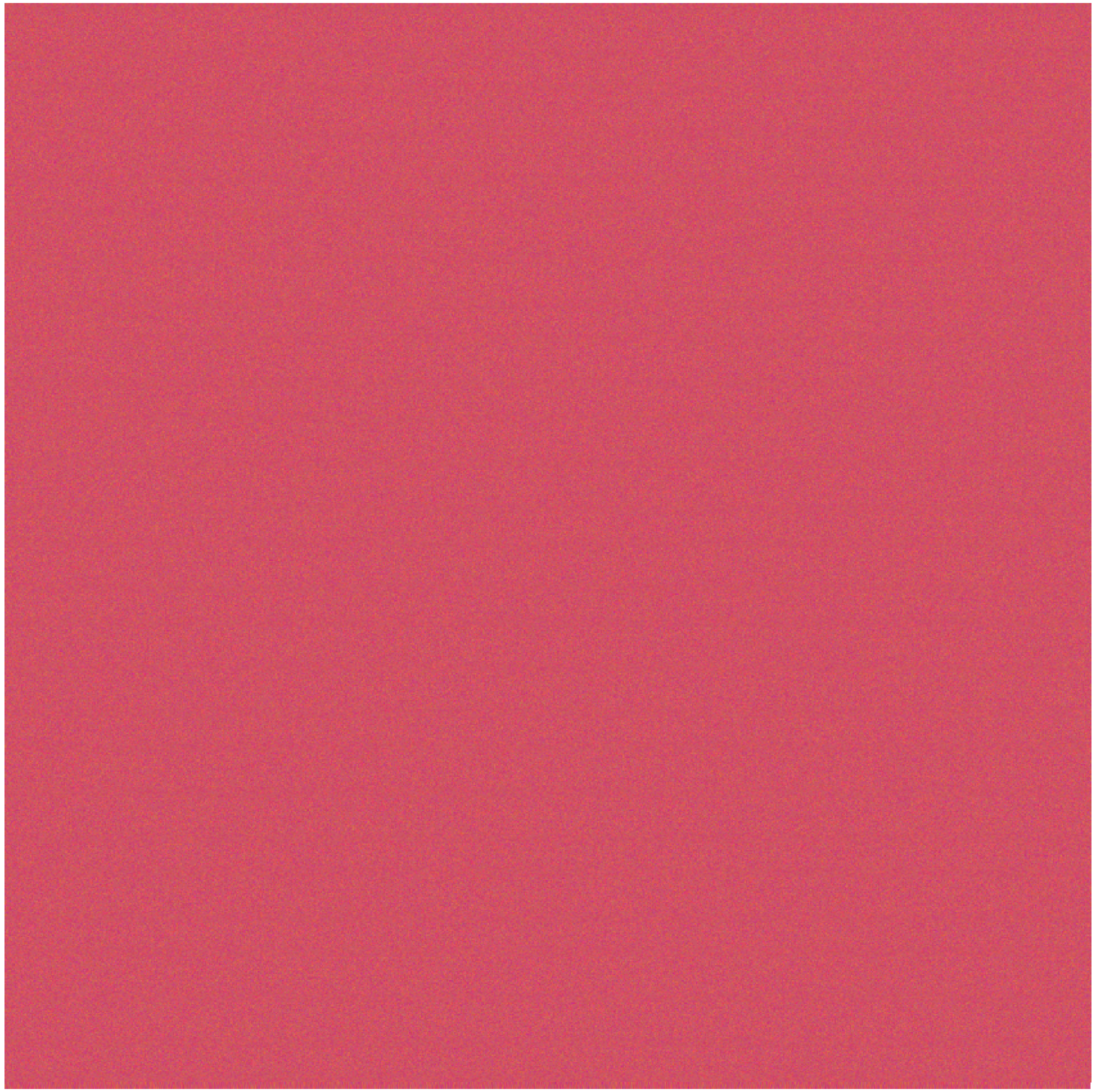
Et si on regardait le nombre π de près ?



Par exemple 100 millions de décimales de π (base 10 colorées).

…On y voit rien du tout.

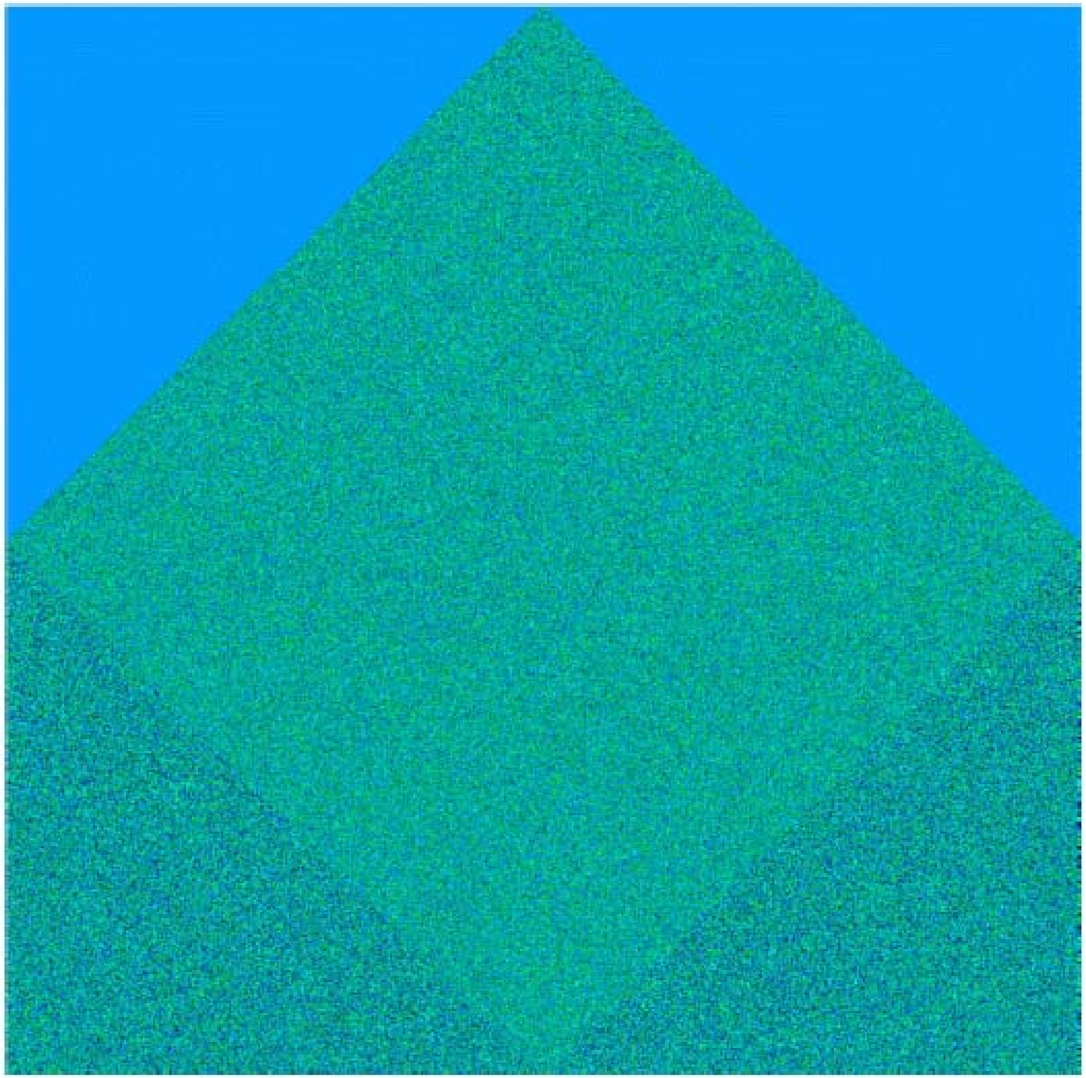
Rien non plus dans les 1000 milliards de premières décimales.

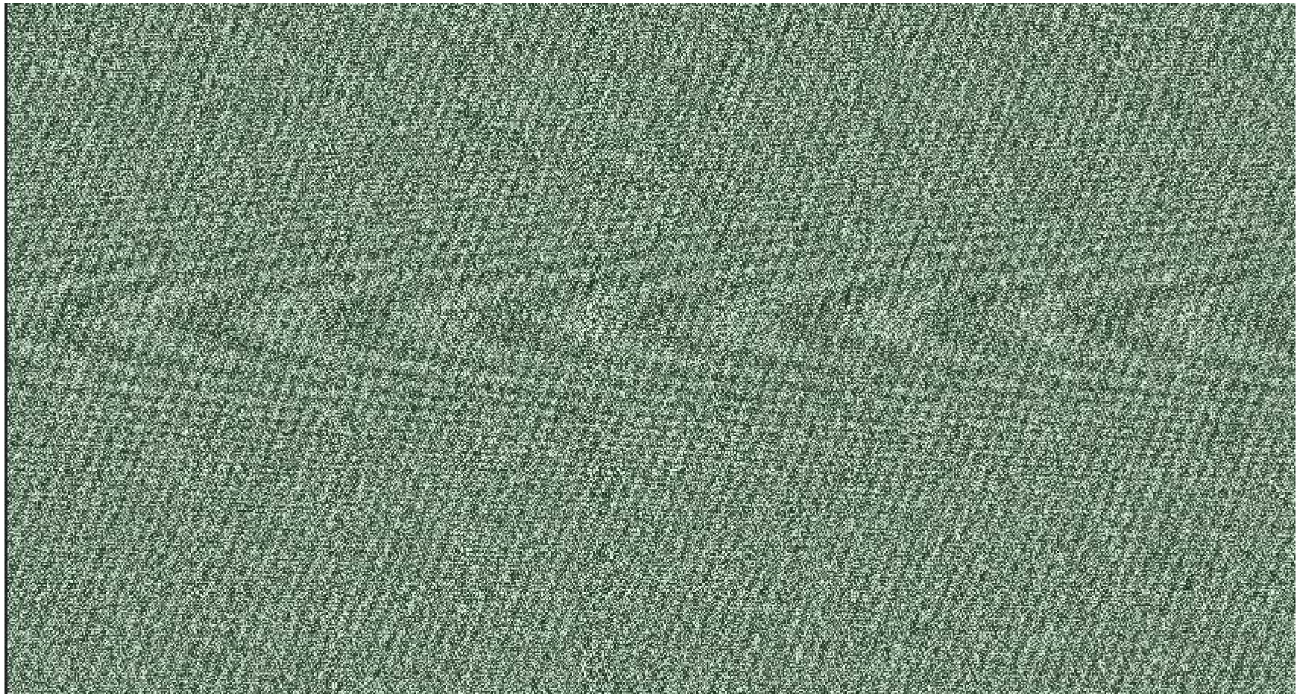


Les premiers 270 millions de bits de

$$1+\frac{\left(16^{4n}+1\right)^{1/4}}{16^{n+1}}$$

Quand n = 1024 en binaire





Racines complexes de la fonction $\zeta(x)$

Les zéros (ou racines) de la fonction Zeta sont une superposition d'ondes

La première onde est à $\frac{2\pi}{\ln(2)}$.

Suite
des
Nombres

$$\frac{F_n}{\phi^2(F_{n-2)}+F_{n+2})}$$

$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

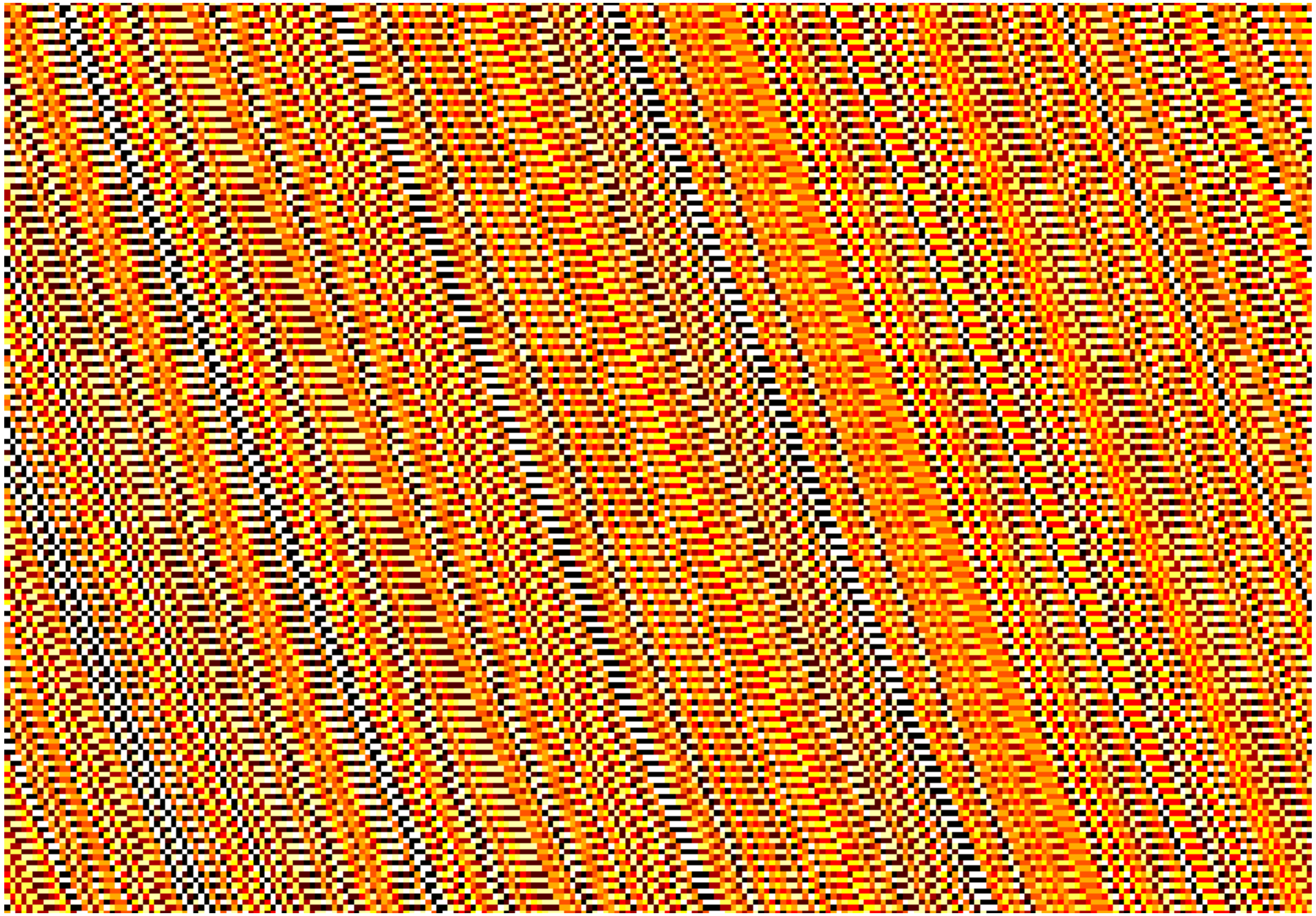
En base 10 colorée

Suite
des
Nombres

$$\frac{F_n}{\phi^2(F_{n-2)}+F_{n+2})}$$

$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Vu de près

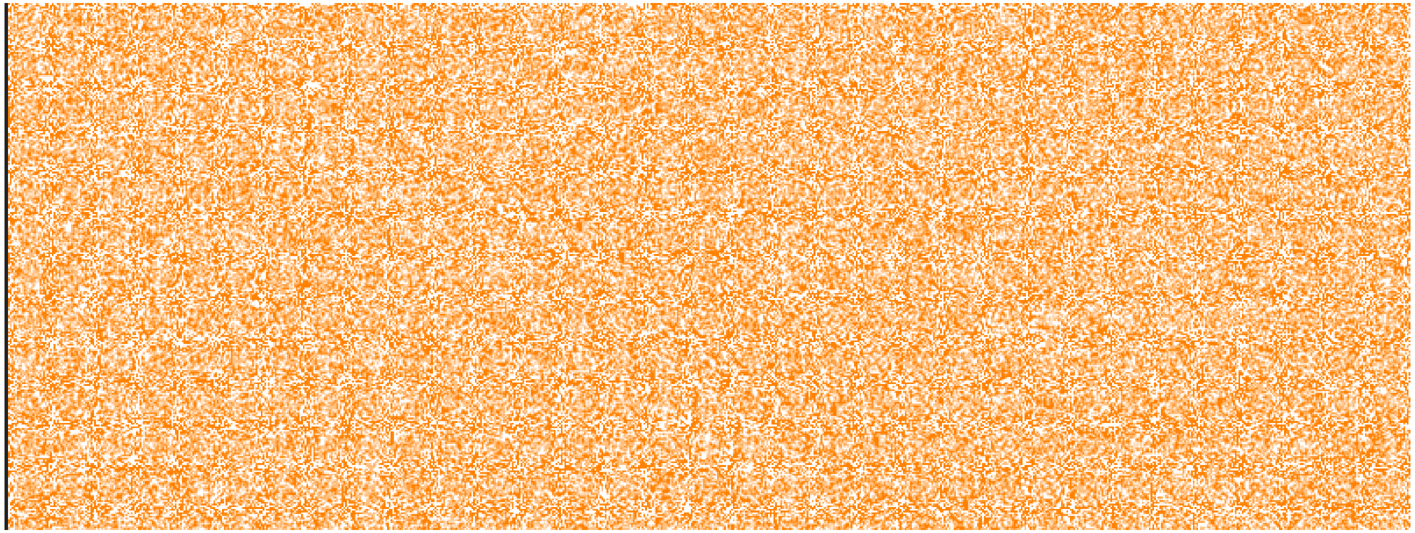


Suite
des
Nombres

$$\frac{F_n}{\phi^2(F_{n-2)}+F_{n+2})}$$

$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

En base 2 colorée
Vu de loin

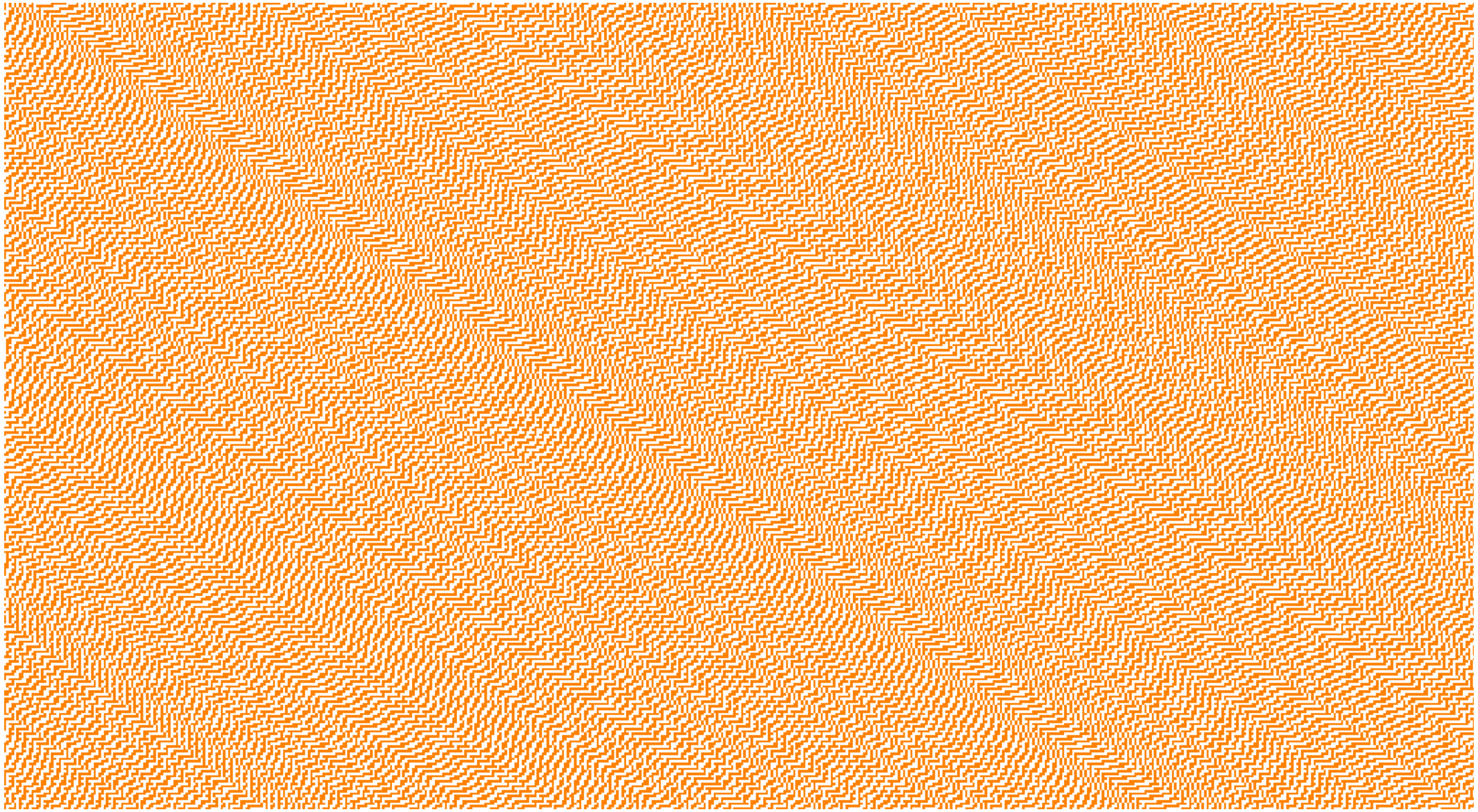


Suite
des
Nombres

$$\frac{F_n}{\phi^2(F_{n-2)}+F_{n+2})}$$

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Vu de près en binaire



Recherche de motif dans les 1000 milliards de premières décimales de π

Aucun motif simple fabriqué à l’aide de rationnels.

00000000000000000000000000000
00418410041841004184100418410
00421940928270042194092827004
00429184549356223175965665236
00432900432900432900432900432
00436681222707423580786026200
00440528634361233480176211453
00448430493273542600896860986
00452488687782805429864253393
...

Le filtre examine 166 millions de chiffres/seconde :
1000 milliards en moins de 2 heures : rien trouvé pour l’instant

Merci de
votre
attention

Thank you
for your
attention