Le fabuleux nombre

Conférences : Science et citoyen
Jeudi le 25 avril 2019
IUT Nantes

….dernières nouvelles…

14 mars 2019 (le jour de π)

Google annonce avoir effectué le calcul du nombre π à 31415926535897 décimales : $\pi * 10^{13}$

- Le calcul a pris 112 jours
- On peut télécharger ici (mais c'est très long) https://pi.delivery/
- La vérification du calcul a été faite avec ma formule de π en 28 heures.
- 31415926535897 décimales c'est 31.4 TB de données ou si vous voulez 628300 boites de papier ou 142 conteneurs de 67 m^3 bien remplis.
- La machine est une machine virtuelle (96 serveurs), 1.4 TB de mémoire RAM: un monstre. Programme utilisé : Y-cruncher.

Détails ici : taper 'google 31.4 trillion digits pi'

Petit poème sur π

Si la circonférence est fière
d'être égale à $2 \pi r$
le cercle est tout heureux
d'être égal à πr^2
le volume de toute terre
de toute sphère
qu'elle soit de pierre ou de bois
est égale à quatre tiers de πr^3

Quelques formules de la mécanique classique

$$F = ma$$

$$F = G\frac{mM}{r^2}$$

$$v = \sqrt{2gh}$$

$$E = \frac{mv^2}{2}$$

$$E = mc^2$$

Heisenberg a trouvé

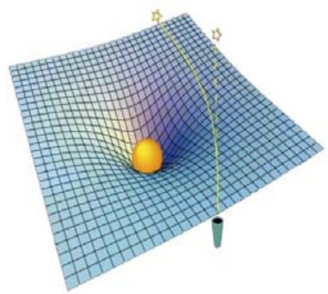
$$\Delta x \Delta p \geq \frac{h}{4\pi}$$

Le principe d’incertitude

Einstein 1916 a trouvé

$$G_{\mu\nu} + \Lambda_{g_{\mu\nu}} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Qui veut dire ceci en dessin



La loi de Coulomb

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

$$n\,! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$

$$\zeta(2) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\zeta(4) = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{90}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_{2n}}{n^2 \binom{2n}{n}} = \frac{4\pi^2}{25\sqrt{5}}$$

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1$$

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$$

$$\frac{\pi}{4} = 2\arctan\frac{1}{2} - \arctan\frac{1}{7}$$

$$\frac{\pi}{4} = 2\arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{7}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdots = \frac{2}{\pi}$$

Formule de Viète 1593 (le plus célèbre Vendéen)

$$V^{(n)}[r] = \frac{\pi^{n/2} r^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$

Le zoo des formules de π

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}(x)\, dx \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{2^{4n}}{n\binom{2n}{n}^2} \qquad \sqrt{2}+\sqrt{3} = 3.146^{+} \qquad 4\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \qquad 3+\cfrac{1^2}{6+\cfrac{3^2}{6+\cfrac{5^2}{6+\cfrac{7^2}{6+\ddots}}}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1} n!^2}{(2n+1)!} \qquad \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \sqrt{12}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-3)^{-k}}{2k+1} \qquad 6\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \qquad \sqrt[3]{31} = 3.1413^{+} \qquad \frac{7^7}{4^9} = 3.14156^{+}$$

$$2+\frac{2}{3}+\frac{4}{15}+\frac{4}{35}+\frac{16}{315}+\frac{16}{693}+\frac{32}{3003}+\frac{32}{6435}+\frac{256}{109395}+\frac{256}{230945}+\cdots \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{\binom{2n}{n}(2n+1)}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k}\left(\frac{4}{8k+1}-\frac{2}{8k+4}-\frac{1}{8k+5}-\frac{1}{8k+6}\right) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(2k+1)!!} \qquad 20\arctan\left(\frac{1}{7}\right)+8\arctan\left(\frac{3}{79}\right)$$

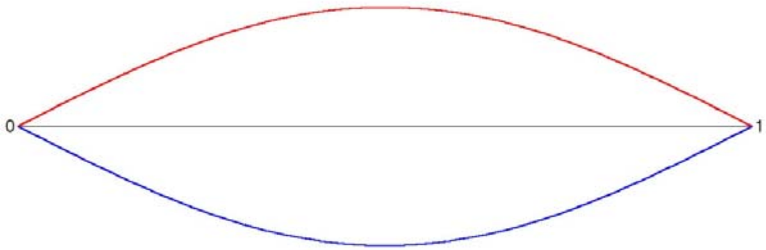
$$\sqrt[4]{\frac{2143}{22}} = 3.141592652^{+} \qquad \frac{355}{113} = 3.1415929^{+} \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\int_{t}^{\infty} e^{-t^2-1/2x^2+xt}\, dx\, dt$$

$$\arctan(1) \qquad \frac{7^7}{4^9} = 3.14156^{+} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k k!^2}{(2k+1)!} \qquad 8\arctan\left(\frac{1}{2}\right)-4\arctan\left(\frac{1}{7}\right)$$

$$\frac{\ln(640320^3+744)}{\sqrt{163}} = 3.14159265358979323846264338327 9^{+} \qquad \frac{22}{7} = 3.143^{+} \qquad \sqrt{15}-\sqrt{3}+1 = 3.140^{+}$$

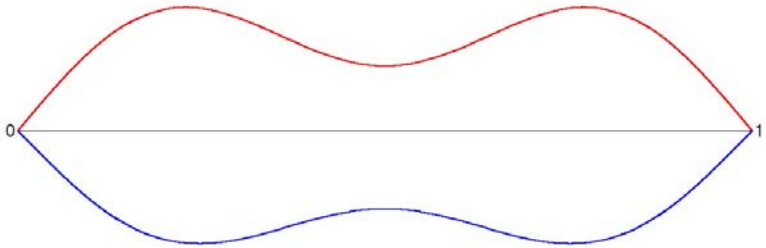
$$\lim_{n\to\infty} \frac{4}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{n^2-k^2} \qquad \sqrt{7+\sqrt{6+\sqrt{5}}} = 3.1416^{+} \qquad \frac{2\sqrt{2}}{9801}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k)!(1103+26390k)}{(k!)^4 396^{4k}} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3\cdot\binom{2n}{n}}{16^n(2n+1)}$$

Qu'on retrouve aussi dans les fameuses séries de Fourier (1848)



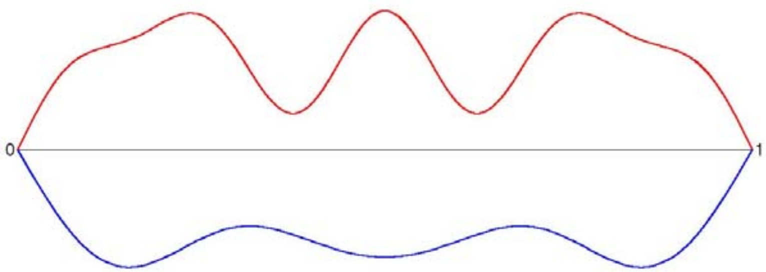
$0{,}19\sin(\pi x)$

$-0.19\sin(\pi x)$



$0{,}19\sin(\pi x) + 0.086\sin(3\pi x)$

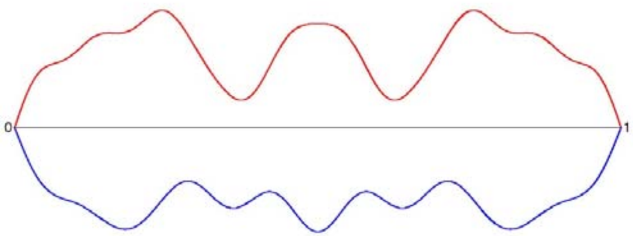
$-0.19\sin(\pi x) - 0.065\sin(3\pi x)$



$0{,}19\sin(\pi x) + 0.086\sin(3\pi x) + 0.044\sin(5\pi x)$
$- 0.035\sin(7\pi x) + 0.038\sin(9\pi x)$

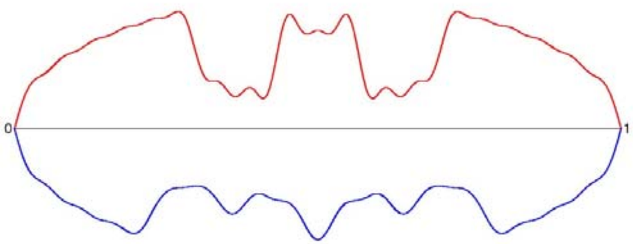
$-0.19\sin(\pi x) - 0.065\sin(3\pi x) - 0.05\sin(5\pi x)$
$- 0.0028\sin(7\pi x) + 0.002\sin(9\pi x)$

En rajoutant des termes jusqu'à 150…



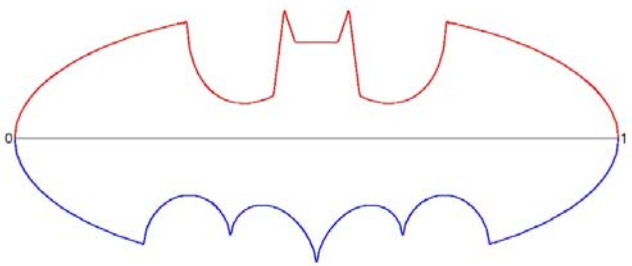
$0{,}19\sin(\pi x) + 0.086\sin(3\pi x) + 0.044\sin(5\pi x)$
$- 0.035\sin(7\pi x) + 0.038\sin(9\pi x) + 0.005\sin(11\pi x) - 0.004\sin(13\pi x) +$
$0.007\sin(15\pi x) + 0.004\sin(17\pi x) + 0.008\sin(19\pi x)$

$-0.19\sin(\pi x) - 0.065\sin(3\pi x) - 0.05\sin(5\pi x)$
$- 0.0028\sin(7\pi x) + 0.002\sin(9\pi x) - 0.001\sin(11\pi x) - 0.024\sin(13\pi x)$
$+ 0.005\sin(15\pi x) - 0.003\sin(17\pi x) - 0.001\sin(19\pi x)$



$0{,}19\sin(\pi x) + 0.086\sin(3\pi x) + 0.044\sin(5\pi x)$
$- 0.035\sin(7\pi x) + 0.038\sin(9\pi x) + 0.005\sin(11\pi x) - 0.004\sin(13\pi x) +$
$0.007\sin(15\pi x) + 0.004\sin(17\pi x) + 0.008\sin(19\pi x) + \ldots$

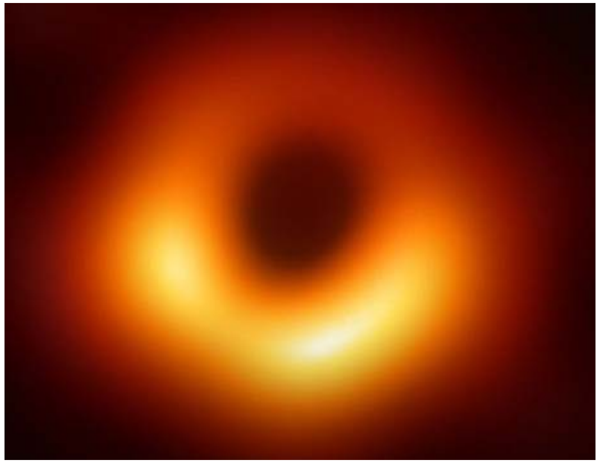
$-0.19\sin(\pi x) - 0.065\sin(3\pi x) - 0.05\sin(5\pi x)$
$- 0.0028\sin(7\pi x) + 0.002\sin(9\pi x) - 0.001\sin(11\pi x) - 0.024\sin(13\pi x)$
$+ 0.005\sin(15\pi x) - 0.003\sin(17\pi x) - 0.001\sin(19\pi x) + \ldots$

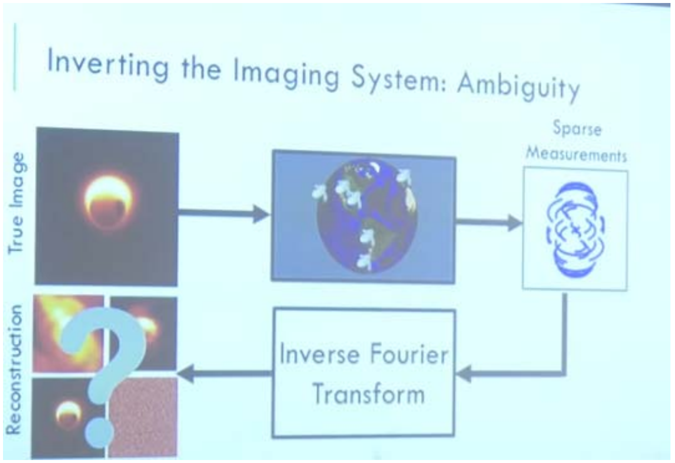


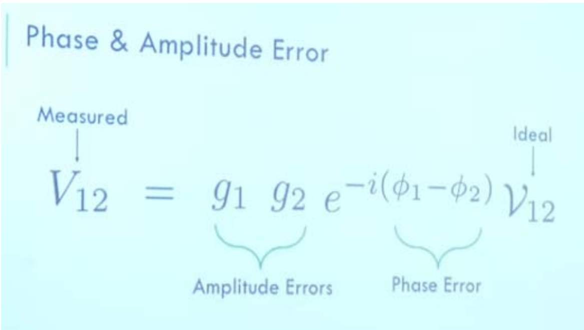
$0{,}19\sin(\pi x) + 0.086\sin(3\pi x) + 0.044\sin(5\pi x)$
$- 0.035\sin(7\pi x) + 0.038\sin(9\pi x) + 0.005\sin(11\pi x) - 0.004\sin(13\pi x) +$
$0.007\sin(15\pi x) + 0.004\sin(17\pi x) + 0.008\sin(19\pi x) + \ldots$

$-0.19\sin(\pi x) - 0.065\sin(3\pi x) - 0.05\sin(5\pi x)$
$- 0.0028\sin(7\pi x) + 0.002\sin(9\pi x) - 0.001\sin(11\pi x) - 0.024\sin(13\pi x)$
$+ 0.005\sin(15\pi x) - 0.003\sin(17\pi x) - 0.001\sin(19\pi x) + \ldots$

Mais ça sert à quoi (et les séries de Fourier, et les reste des formules ?)







Ici on a cherché à calculer la phase et l'amplitude
d'un signal envoyé il y a 53.5 millions d'années.
Beaucoup d'erreurs, de bruit et 5 PB de données (5000 TB = 5 PB).
Voir Katie Bouman et son équipe (200 personnes, 9 téléscopes).

Que vient faire le π dans ces formules ?

Plus généralement, une constante mathématique c’est quoi ?

Comme par exemple, le nombre d’or : $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ou 1,6180339887…

95 % de tout ce qui pousse sur terre est tributaire de ce nombre.

Nombre de sections d’une pomme : 5
Nombre de sections d’une banane : 3
Nombre de spirales d’un ananas : 5 et 8
Nombre de pétales des marguerites : 21
Nombre de feuilles des trèfles 3 ou 5 (mais des fois 4…).

Ces nombres sont les nombres de Fibonacci
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 ,34, 55, 89, 144, 233, …

Nombre de spirales d’un tournesol, 34, 55, 89,…
(on compte d’un côté et de l’autre).

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{2}{1}, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{5}{3}, \quad \frac{8}{5}, \quad \frac{13}{8}, \quad \frac{21}{13}, \quad \frac{34}{21},$$

$$\frac{55}{34}, \quad \frac{89}{55}, \quad \frac{144}{89}, \ldots$$

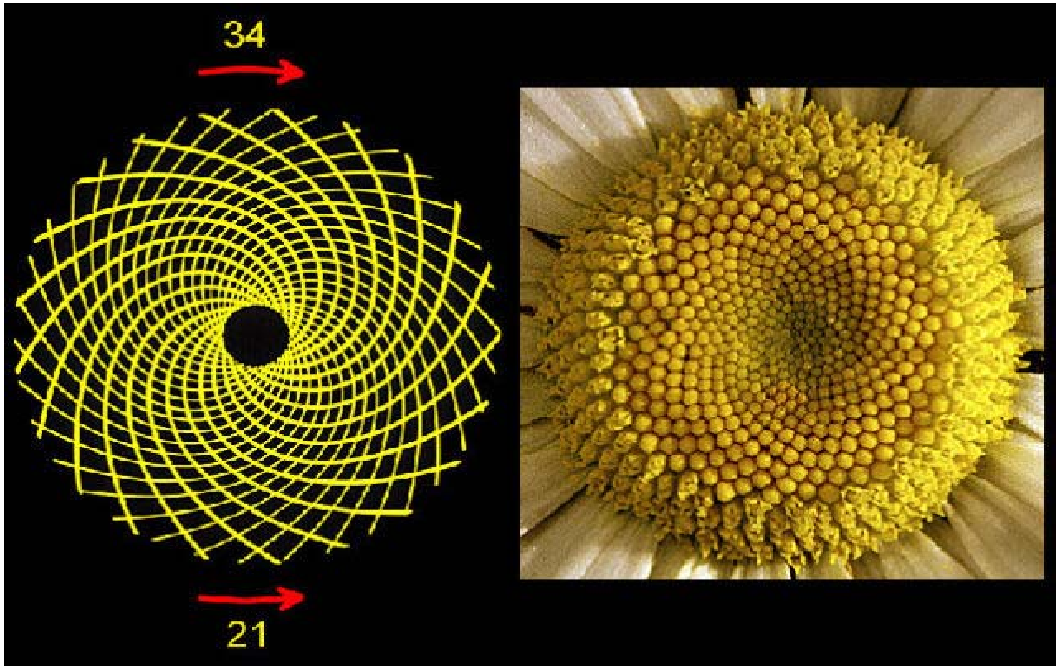
Ce qui fait un ratio de

1., 1., 2., 1.50000, 1.66667, 1.60000, 1.62500, 1.61538, 1.61905, 1.61765, 1.61818, 1.61798,

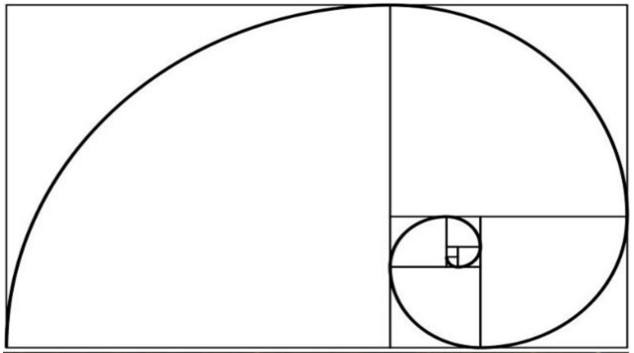
Cette suite de nombres tend vers

$$1.6180339887\ldots = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

La marguerite est un bel exemple



21 et 34 spirales si on compte bien,
Ces spirales sont logarithmiques



Spirales qu’on retrouve dans le nautile ou nautilus, les cactus, et accessoirement la forme de notre galaxie (ici M51).

Quelques fleurs de la variété des Astéracées
Il y a 23600 espèces de cette plante.
On y trouve les laitues, endives, chicorées, artichaut, cardon, salsifis, topinambour et le fameux tournesol.

Mais revenons à π

Leibniz, Newton et Euler ont trouvé

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$$

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$$

$$\frac{\pi^4}{90} = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots$$

Mathématiciens qui ont calculé π

$$\sqrt{\varphi+2}-\varphi=\cfrac{e^{-2\pi/5}}{1+\cfrac{e^{-2\pi}}{1+\cfrac{e^{-4\pi}}{1+\cfrac{e^{-6\pi}}{1+\cdots}}}}$$

$$\pi=\frac{9801}{2\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)!}{(n!)^4}\times\frac{1103+26390n}{(4\times 99)^{4n}}}$$

$$1+\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}+\cdots+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{3}{1+\cfrac{4}{1+\cfrac{5}{1+\cdots}}}}}}=\sqrt{\frac{e\pi}{2}}.$$

$$\pi = 3 + \frac{1}{60}\left(8 + \frac{2\cdot 3}{7\cdot 8\cdot 3}\left(13 + \frac{3\cdot 5}{10\cdot 11\cdot 3}\left(18 + \frac{4\cdot 7}{13\cdot 14\cdot 3}(23 + \ldots)\right)\right)\right).$$

$$\pi = \frac{22}{7} - \int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,dx$$

$$\pi = \frac{355}{113} - \frac{1}{3164}\int_0^1 \frac{x^8(1-x)^8\left(25+816x^2\right)}{1+x^2}\,dx.$$

$$\frac{\pi}{24} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{3}{q^n-1} - \frac{4}{q^{2n}-1} + \frac{1}{q^{4n}-1}\right)$$

2006

$$\frac{\pi^3}{180} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\left(\frac{4}{q^n-1} - \frac{5}{q^{2n}-1} + \frac{1}{q^{4n}-1}\right)$$

$ici\ q = e^{\pi}$

$$\frac{1}{8\pi} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{q^n-1} - 5\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{q^{2n}-1} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{q^{4n}-1}$$

$$24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{13}}{e^{2\pi n}-1}=1$$

$$691=16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{11}}{e^{\pi n}-1}-65536\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{11}}{e^{4\pi n}-1}$$ 2011

$$17=32\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{7}}{e^{\pi n}-1}-8192\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{7}}{e^{4\pi n}-1}$$

$$\zeta(3)=28\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3}(e^{\pi n}-1)}-37\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3}(e^{2\pi n}-1)}+7\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3}(e^{4\pi n}-1)}$$

$$e^{\pi} - \pi = 19.999099979 \ldots$$

1987 et publiée sur
Sci-math en 1992

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^{2\pi n/7} - 1} = 10.000000000000000190161767888663 \ldots$$

2011

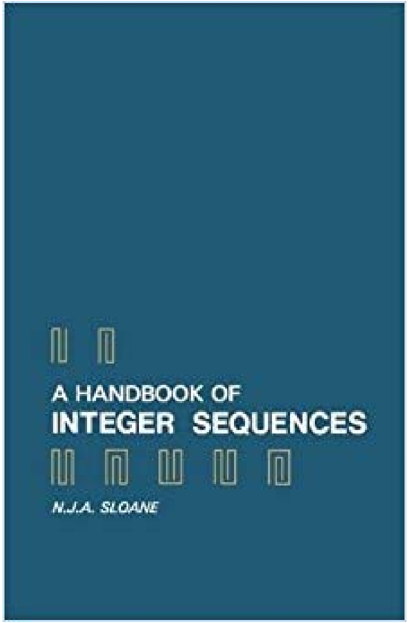
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^{2\pi n/13} - 1} \cong 119.00000000000000000000000000000959374585 \ldots$$

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k} \left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6} \right)$$

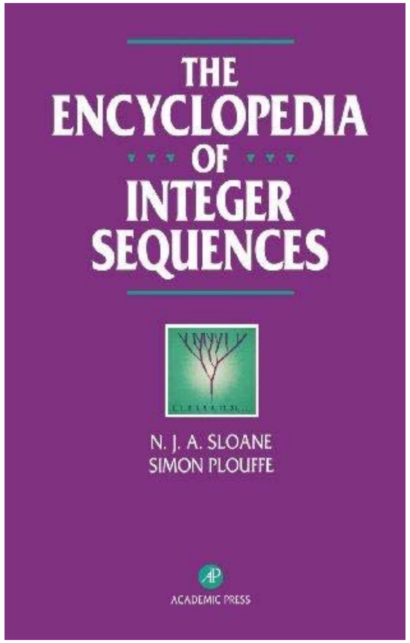
19 sept. 1995 à 0h29, formule qui permet le calcul en binaire en sautant directement

Mais quel est le motif dans toutes ces formules ?

Pour le nombre π il n'y a pas de motif de façon générale.



1973, 2372 suites
1 personne



1995, 5550 suites
2 personnes

THE ON–LINE ENCYCLOPEDIA OF INTEGER SEQUENCES®

Avril 2019
323000 suites
∼ 7000 contributeurs
8000 citations d'articles
7741 références sur Wikipedia EN
1273 références en français

$$\pi = 3 + \frac{1}{8} + \frac{1}{61} + \frac{1}{5020} + \frac{1}{128541455} + \ \ldots ? ?$$ 1979

$$\pi = 3 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 8 \cdot 17} + \frac{1}{8 \cdot 8 \cdot 17 \cdot 19} + \frac{1}{8 \cdot 8 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 300} + \cdots ? ?$$ 1989

La suite 3, 8, 61, 5020, 128541455, …est connue elle est cataloguée
dans l'encyclopédie, elle a le numéro A001466
la suite 8, 8, 17, 19, 300, 1992, … aussi (numéro A006784)

Aucune formule explicite pour ces 2 dernières, … rien de rien. …

En tout 322394 sont cataloguées et 10 à 15000 se rajoutent chaque année.

INVERSE SYMBOLIC CALCULATOR

Please enter a number or a Maple expression:

Run | | Clear

- Simple Lookup and Browser *for any number.*
- Smart Lookup *for any number.*
- Generalized Expansions *for real numbers of at least 16 digits.*
- Integer Relation Algorithms *for any number.*

Expressions that are **not** numeric like ln(Pi*sqrt(2)) are evaluated in Maple in symbolic form first, followed by a floating point evaluation followed by a lookup.

```
5.637023214914152672482675372246209136877108960491622478356629721e-1 z031 frac((91478^14)/log(91478))
5.637057306080929282354451165611415260663000000000000000000000000e7 z004 n_th zero of Riemann Zeta,n=134660787
5.637092041520322063839796611415269184719794255334231716226281070e-1 z008 Simple expressions with first 3 zeros of Zeta(s) Re(2*a/b^2/c^2-1/a^2/b/c+2/a*b-2/a*c)
5.637094289390973895689064846620816166616977249437141526570776400e0 v026 sum(1/((n-17/22)*(n-19/74)*10^n),n=0..infinity)
5.637099542541141526567307398705217623545904439723572454673293739e1 a016 1/18*(-474+728352*2^(1/2))^(1/2)
5.637100219464852478414152635312581030276379589429845762353811245e1 m021 -2*exp(1)^2/gamma^2-2*Pi^2*gamma^2-2/Pi^2*exp(1)^2/gamma-Pi*exp(1)*gamma^2
5.637113689834826131370826015454301913731861141526867576955270230e-2 s005 A114609[n]/((-1)^(n+1)*binomial(2*n,n)*n^3*5^n) with base (-1)^(n+1)*binomial(3*n,n)*n^3*2^n
5.637124205431302536377535774351092250579737050209001777214152607e1 a016 1/53*(-4823+1011240*78^(1/2))^(1/2)
5.637129544135910152114714152636605839894358311655196140580265365e-1 z030 frac(n/log(n)),n=90477351
5.637200208606903857141526353811904257835652014500487315062160101e1 e005 Im[EllipticTheta[3,1/4+3*I,Exp[-4*Pi]]]/Im[EllipticTheta[3,2/3+2/3*I,Exp[-4*Pi]]]
5.637249257564308857153423965874677495141526057310155043388572187e-1 r005 Re(z^2+c),c=-1/15+42/61*I,n=20
5.637265185302387659450354291741568141526218900085991763247733280e15 a006 ((1/2+1/2*5^(1/2))^66+(-1/2*5^(1/2)+1/2)^66)*Lucas(1717/19)/fibonacci(81)/sqrt(5)
5.637267360793758923978682912141526093542587987468758936289642174e-2 h028 log(hypergeom([4/9],[7/12,6/5,7/5,7/4],2/9))
5.637288054902513414915613317454474923683283151903077681326070096 9e-1 z030 frac(n/log(n)),n=141526119
5.637297141526094680781990160890944162103625486331690571461905591 8e-2 z030 frac(n/log(n)),n=142313421
5.637323481349147014152676998938406644713406955458164008687472009e-1 s005 A046095[n]/((-1)^(n+1)*binomial(2*n,n)*10^n) with base (-1)^(n+1)*binomial(2*n,n)*n^3*10^n
5.637334141526612062225689405972547047439600623042787038137388331e1 a019 179912813^(7/33)
5.637370892959724556245257164874447477175714152611135306164069952e-3 s005 A203914[n]/((-1)^(n+1)*(exp(2*pi*n)+1)) with base (-1)^(n+1)*binomial(2*n,n)*n^4*2^n
5.637474365467488750353966826968141526644562418168412148154770623e-1 a016 1/2021*(-4866568+1709766*13^(1/2))^(1/2)
5.637477002436141526742086646286836895051107450795270128073881850e-1 a018 -102/41+35/47*43^(3/8)
```

Version longue
17,3 milliards de constantes (64 chiffres de précision)
2,068 TB ou 2068 gigas. dont 3 milliards d'entrées fabriquées à l'aide des suites du premier site. Collection commencée en avril 1986.

http://plouffe.fr/ip/

Version courte
11 333 406 474 constantes (41 décimales), pour les petits disques.

Arriva alors l'ère des calculettes
(pitonneuses au québec)

Ma première calculette en 1971 avec 8 chiffres et les 4 opérations

$$1/7 = 0{,}14285714\ldots$$
$$1/17 = 0{,}0588235294\ldots$$

Avec la division au long on trouve à la main
le reste des décimales.
On trouve $1/17 = 0{,}0588235294117647\dots$
La période est de 16.
Avec $1/13 = 0{,}076923\dots$ (période de 6).
$1/11 = 0{,}0909090$... (période de 2).

Quant aux restes de la division,
1,3,2,6,4,5, … pour 1/7

Et pour 1/17 : 1, 10, 15, 14, 4, 6, 9, 5, 16, 7, 2, 3, 13, …

Ces chiffres sont étranges.
Si on les place en carré (pour 17)

1	10	15	14
4	6	9	5
16	7	2	3
13	11	8	12

Qui ressemble étrangement au fameux carré magique de Dürer

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

1	10	15	14
4	6	9	5
16	7	2	3
13	11	8	12

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

La somme est 34 partout mais pas
avec celui de 1/17 en base 10.
Et si on plaçait ces chiffres
sur un cercle plutôt ?
Oui on remarque que la période
est toujours divisée en 2.

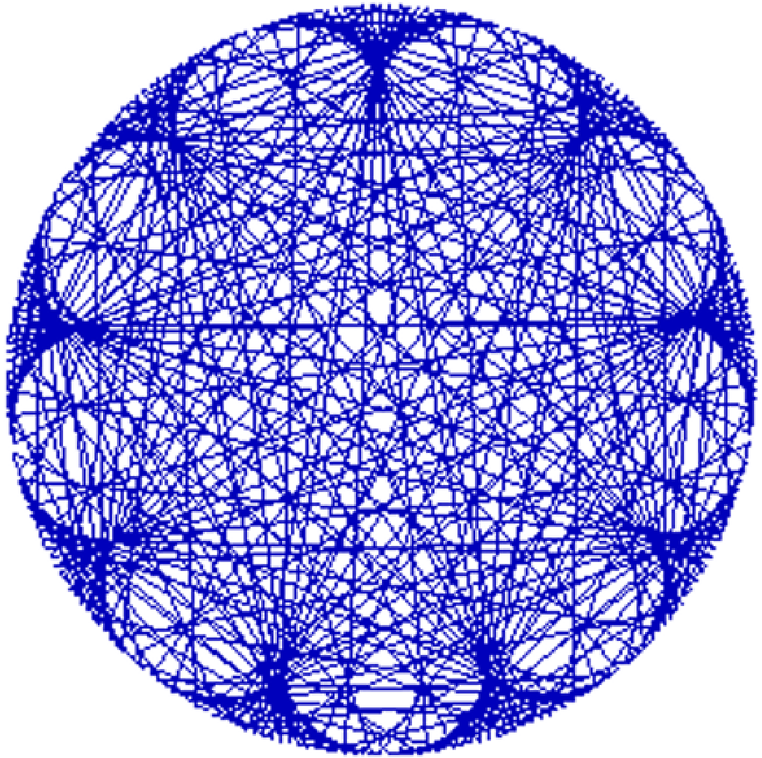
Donc, on en prend un qui donnera (on l'espère) un dessin plus explicite comme 1/257 en base 10.

Pour ce faire on fait un 'mapping' entre le nombre réel et le cercle unité :

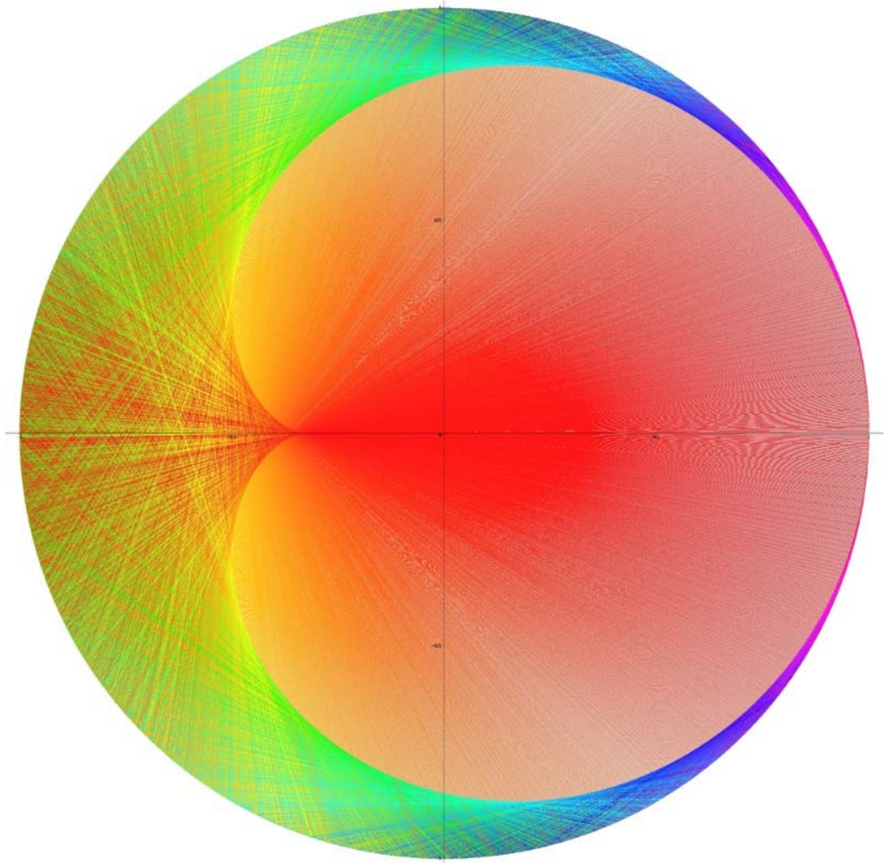
```
1/257 = .003891050583657587548638132295719844357976653
10/257 = .03891050583657587548638132295719844357976653
100/257 = .3891050583657587548638132295719844357976653
{1000/257} = .8910505836575875486381322957198443579766
{10000/257} = .910505836575875486381322957198443579766
```

Que l'on positionne sur le cercle unité.

Que l'on positionne sur le cercle unité.



Mais cette fois fait à l'ordinateur



Une cardioïde

C’est le même dessin qu’on
peut voir en prenant un café.

En fait le développement décimal
à partir du nième chiffre de 1/p est

$$10^n \equiv r \bmod p$$

En effectuant r/p

On a le développement à partir du rang n+1.
Ou en d'autres mots

$$\left\{\frac{10^n}{p}\right\} = \left\{\frac{r}{p}\right\}$$

Sont exactement pareils,
ici { x } est la partie fractionnaire de x
Par exemple, on veut calculer
le développement décimal de

$$\frac{1}{257}$$

À partir du rang 1000.
On doit donc trouver la solution de
$10^{999}\ mod\ 257$ (qui est 96)

Et de là, $96/257 =$
$0.3735408560311284046\ldots$ est le
développement à partir de la 1000ème
décimale.
Dit autrement la 1000ème décimale de $1/257$
est 3.

Mais quel est le problème exactement ?
Le problème est lorsque n est très grand.

Il y a un vieux truc qui date de 2200 ans permettant d'y arriver.
(voir D.E. Knuth, The Art of Computer Programming)
Ce livre est la bible de la programmation.

C'est basé sur la formule (en base b)

Si

$$b^n \equiv r \ mod\ p$$

Alors

$$(b^n)^2 \equiv r^2 \ mod\ p$$

Ça revient à dire qu'en mettant au carré et ou en multipliant par 10, on peut arriver en quelques étapes à trouver le 1000ème chiffre.

On évalue :

$$10^0, 10^1, 10^3, 10^6, 10^7, 10^{14}, 10^{15}, 10^{30}, 10^{31}$$
$$, 10^{62}, 10^{124}, 10^{248}, 10^{249}, 10^{498}, 10^{499}, 10^{998}, 10^{999}$$

Qui se trouve à être 96.

On l'a fait en 17 étapes, plutôt que 1000
Pour ceux qui aiment : le codage des exposants est l'écriture de 1000 en base 2 mais lu à l'envers.

Ensuite, il y a des séries qui existent comme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} = \log(2)$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{64} + \frac{1}{64} + \frac{1}{160} + \frac{1}{384} + \frac{1}{896} \dots$$

Mais… ??!!!, si on calcule en base 2, le calcul du nième chiffre de log(2) n'est qu'un déplacement vers la droite ! (1995)

Ensuite : Pi, en fait c'est un logarithme,

$e^{i\pi} + 1 = 0$, donc : $\pi = \frac{\log(-1)}{i}$

Et que arctan(x) est un logarithme aussi.

Arctan(x) $= \frac{1}{2i} (\ln(1 - ix) - \ln(1 + ix))$

Donc, en combinant ces séries 'logs'

et si on prend $(an+b)^2$, on devrait avoir catalan, π^2 et $\pi \cdot \cdots$, $\pi \log(2)$?

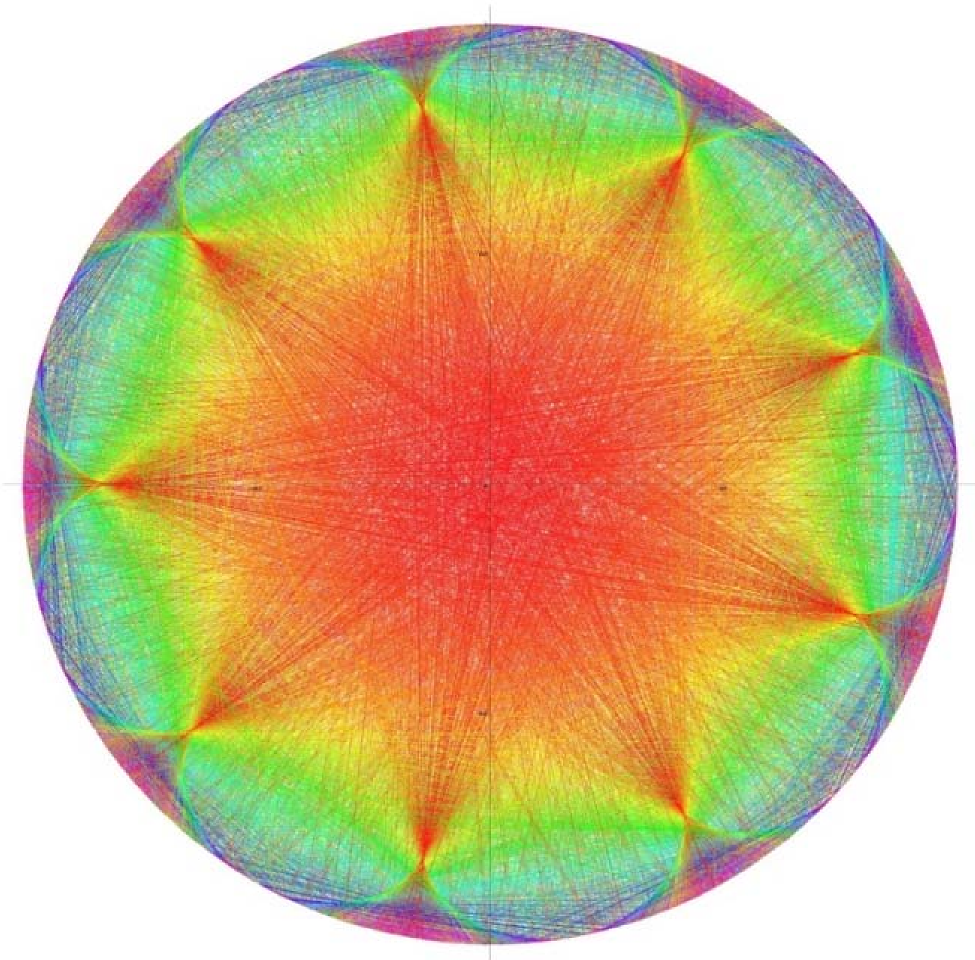
à peu près à 0h29 le 19 sept 95

donc $\pi = 4f(1/4) + 2\operatorname{arctg}(1/2) - \log(5)$

Trouvé le 19 septembre 1995
à 0h29 (heure du pacifique)

0,50000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0,12500000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0,04166666666666666666666666666666666666666666666666666666666666666666666667
0,01562500000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0,00625000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0,00260416666666666666666666666666666666666666666666666666666666666666666667
0,00111607142857142857142857142857142857142857142857142857142857142857142857
0,00048828125000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0,00021701388888888888888888888888888888888888888888888888888888888888888889
0,00009765625000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0,00004438920454545454545454545454545454545454545454545454545454545454545455
0,00002034505208333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333
0,00000939002403846153846153846153846153846153846153846153846153846153846154
0,00000435965401785714285714285714285714285714285714285714285714285714285714
0,00000203450520833333333333333333333333333333333333333333333333333333333333
0,00000095367431640625000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0,00000044878791360294117647058823529411764705882352941176470588235294117647
0,00000021192762586805555555555555555555555555555555555555555555555555555556
0,00000010038677014802631578947368421052631578947368421052631578947368421053
0,00000004768371582031250000000000000000000000000000000000000000000000000000
0,00000002270653134300595238095238095238095238095238095238095238095238095238
0,00000001083720814098011363636363636363636363636363636363636363636363636364
0,00000000518301258916440217391304347826086956521739130434782608695652173913
0,00000000248352686564127604166666666666666666666666666666666666666666666667
0,00000000119209289550781250000000000000000000000000000000000000000000000000
0,00000000057312158437875600961538461538461538461538461538461538461538461538
0,00000000027594742951569733796296296296296296296296296296296296296296296296
0,00000000013304608208792550223214285714285714285714285714285714285714285714
0,00000000006422914307692955280172413793103448275862068965517241379310344828
0,00000000003104408582051595052083333333333333333333333333333333333333333333
0,00000000001502133184863675025201612903225806451612903225806451612903225806
0,00000000000727595761418342590332031250000000000000000000000000000000000000
0,00000000000352773702505863074100378787878787878787878787878787878787878788
0,00000000000171199002686668844784007352941176470588235294117647058823529412
0,00000000000083153801304953438895089285714285714285714285714285714285714286
0,00000000000040421986745463477240668402777777777777777777777777777777777778
0,00000000000019664750308603853792757601351351351351351351351351351351351351
0,00000000000009573628439715034083316200657894736842105263157894736842105263
0,00000000000004664075393707324297000200320512820512820512820512820512820513
0,00000000000002273736754432320594787597656250000000000000000000000000000000
0,00000000000001109139880210888095018340320121951219512195121951219512195122
0,00000000000000541365893912457284473237537202380952380952380952380952380952
0,00000000000000264387994701432627300883448401162790697674418604651162790698
0,00000000000000129189588320018215612931685014204545454545454545454545454545
0,00000000000000063159354289786683188544379340277777777777777777777777777778

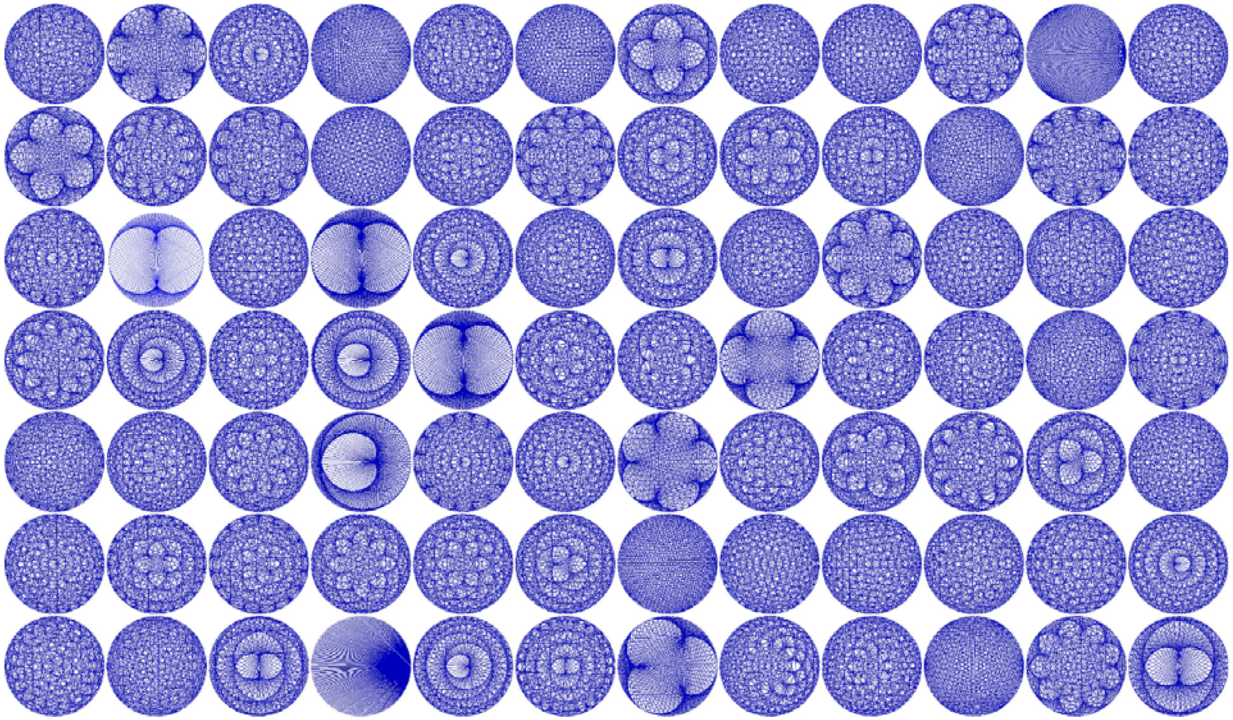
Mais que voit-on avec les décimales de Pi ?
Prenons les premières 10000



Mais alors peut-on trouver
une formule
ou un algorithme pour la
nième décimale de
π (1974) ?
...
Oui la voici

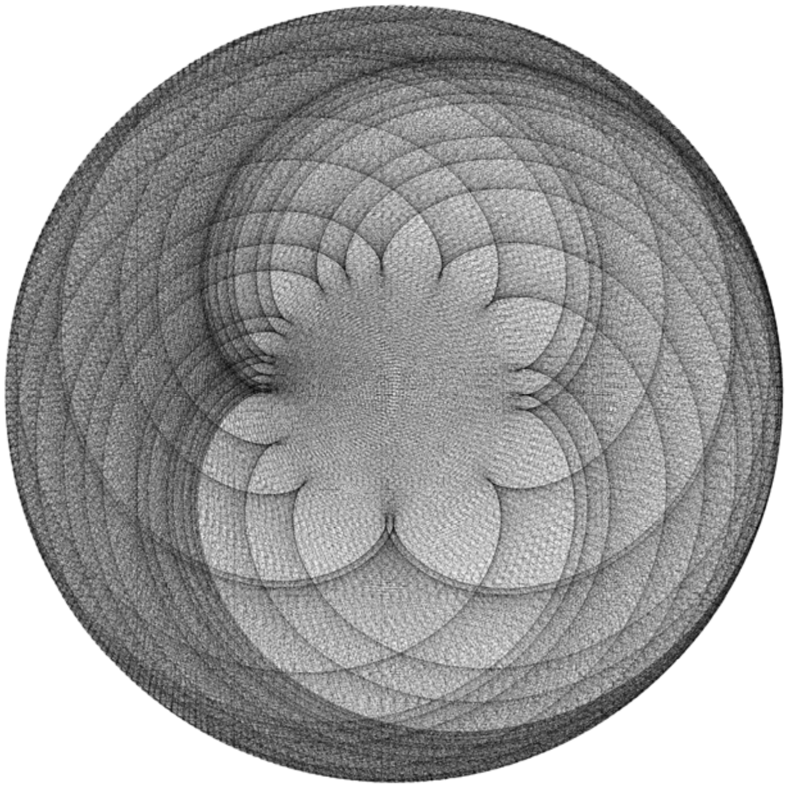
$$\pi = \sum_{\mathbf{k=0}}^{\infty} \left(\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{8k+1}} - \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{8k+4}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8k+5}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8k+6}}\right)\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{16^k}}$$

Revenons aux motifs trouvés en prenant différentes bases.

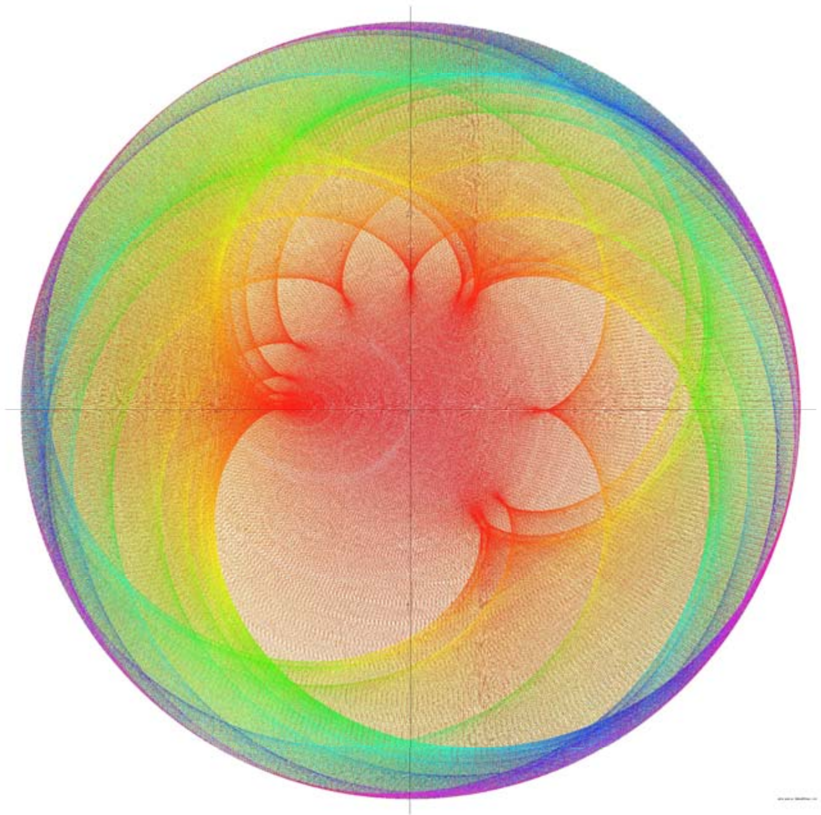


On ne comprend pas exactement ces graphes.
Si on prend une cardioïde dont le bord reflète la lumière qu’est-ce que l’on voit ?

$n2^n \ mod \ 337$



$n2^n \ mod \ 6168$



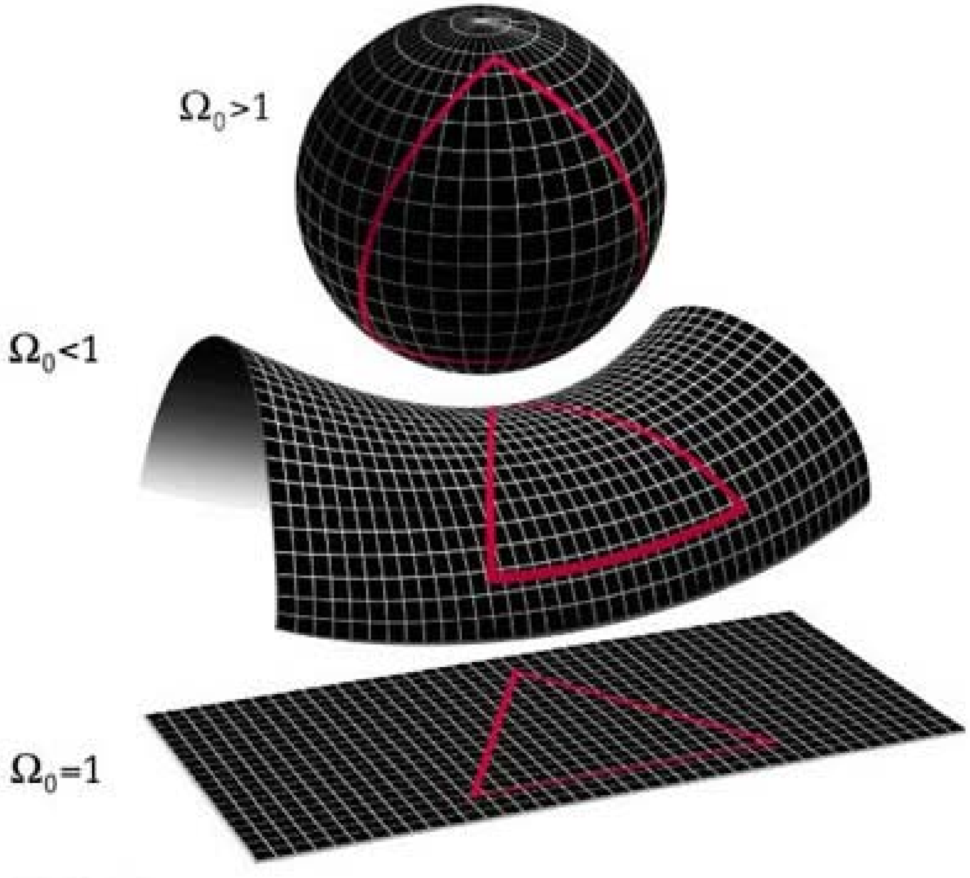
Bon, revenons à π
C'est quoi alors ?

Un peu de géométrie

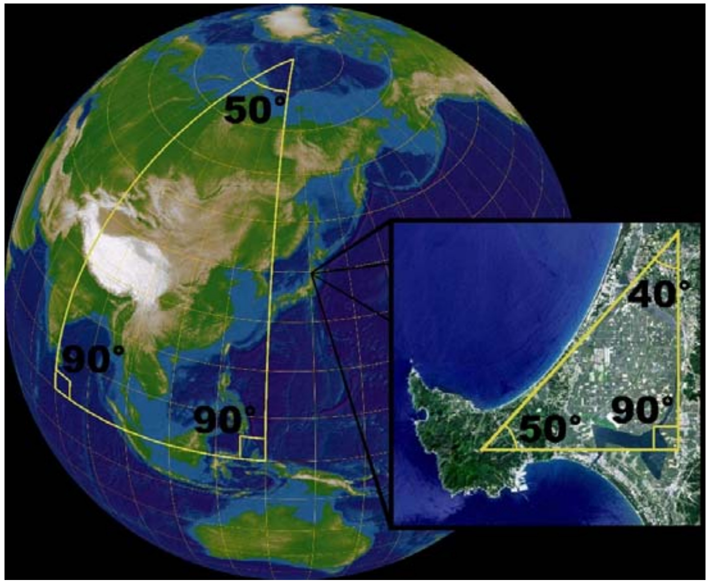
La somme des angles d'un triangle est égale à 180 degrés (ou π).

Oui c'est vrai si l'univers est plat (C.F. Gauss 1820)

Il fait un relevé précis du triangle formé par les pics montagneux de Brocken, Hohehagen et Inserberg, dans le sud de l'Allemagne.

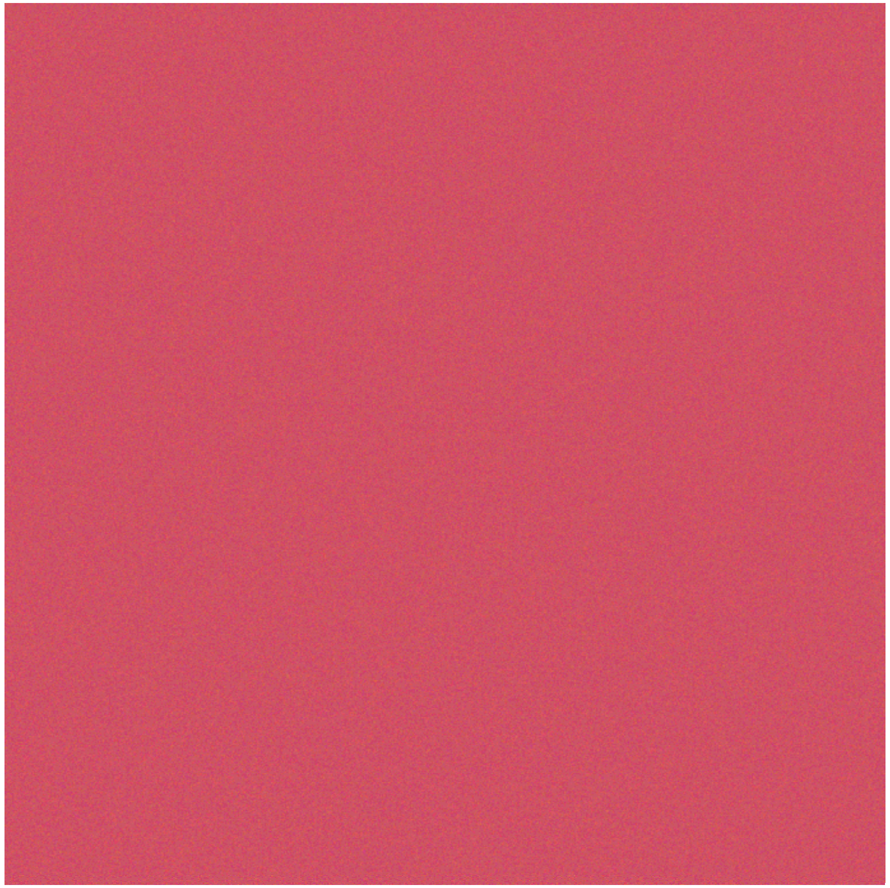


3 univers possibles
Oui l'univers est courbé



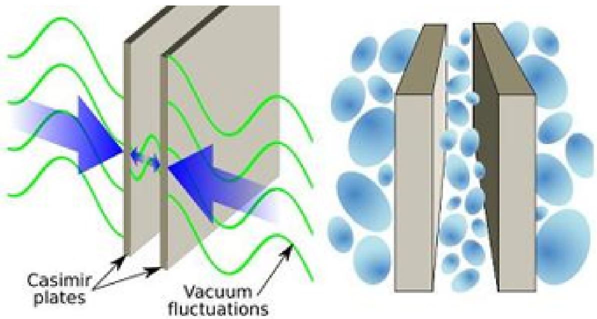
Eddington a calculé que la masse de 1 tonne à 1 mètre de distance change la courbure de l'espace : π est différent à la 24ème décimale.

$100\ millions\ de\ décimales\ de\ \pi$



Un certain Casimir en 1948 s'est posé la question

S'est dit, qu'est-ce qui se passe si on rapproche 2 plaques de métal dans le vide ?



On trouve des motifs qui sont apparentés à quelque chose de connu en mathématiques pures

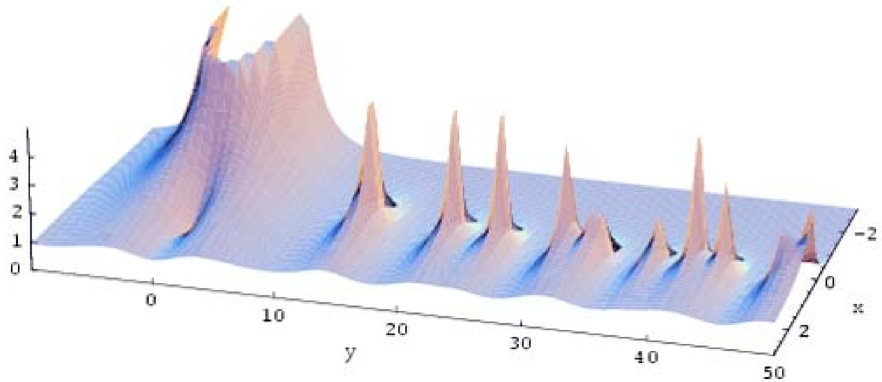
La fameuse fonction Zeta

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{90}$$

$$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} + \cdots = \frac{\pi^6}{945}$$

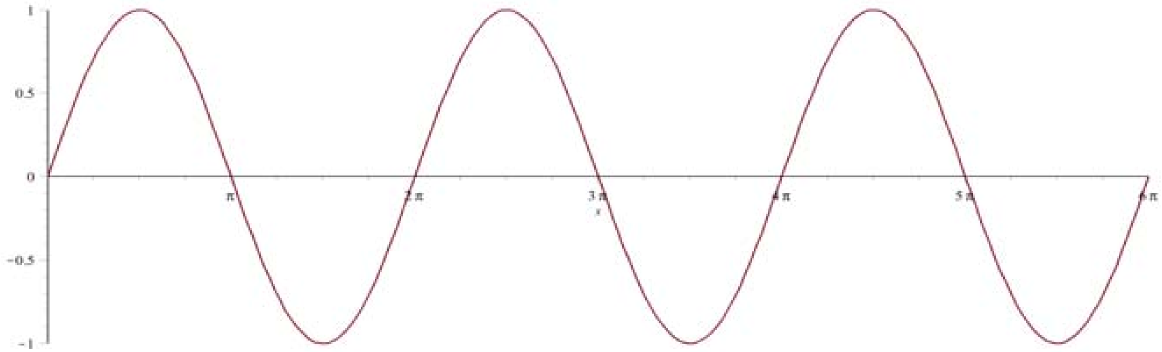
Donc on connait les valeurs à 2, 4, 6, …



Un peu compliquée

Elle a plein de *racines*

Comme la fonction sinus



La fonction a des racines aux multiples de π

On dit aussi des *zéros,* là où elle s'annule.

Si on compte où il y a une racine pour chaque entier on a

0,0,1,0,0,1,0,0,1,0,0,1,0,0,1, …

Les racines ou zéros se situent à

3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 25, 28, 31, 34, 37, …

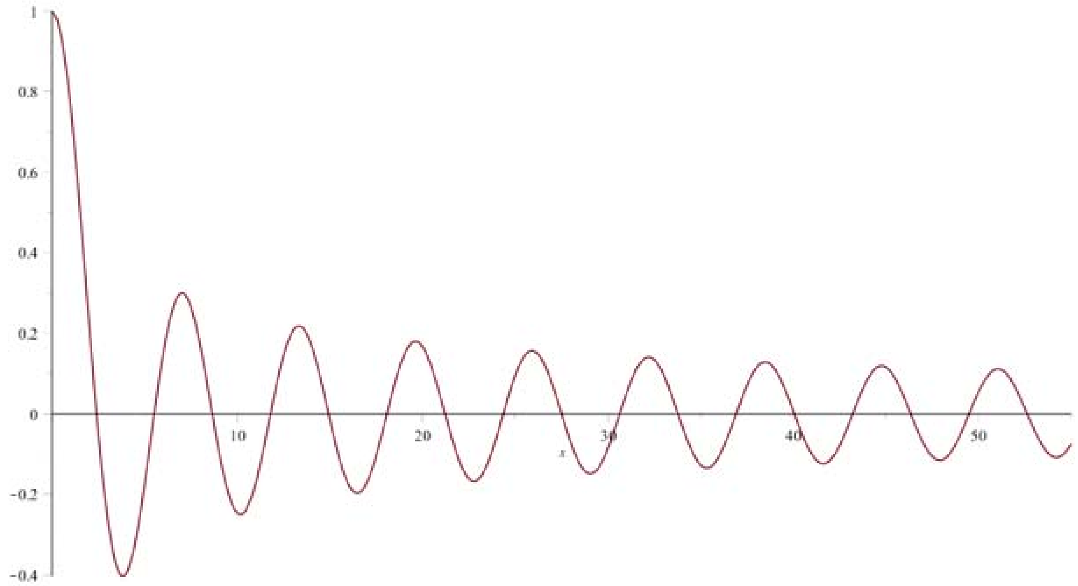
Une façon plus synthétique est d'écrire
que si α = $1/\pi$ alors

$$h(n, \alpha) = [(n + 1)\alpha] - [n\alpha]$$

Donnera la fonction qui positionne les zéros.
[ ] étant la partie entière.

Mais bon, cette formule n'est pas une découverte.

Prenons un exemple moins trivial avec la fonction de Bessel.

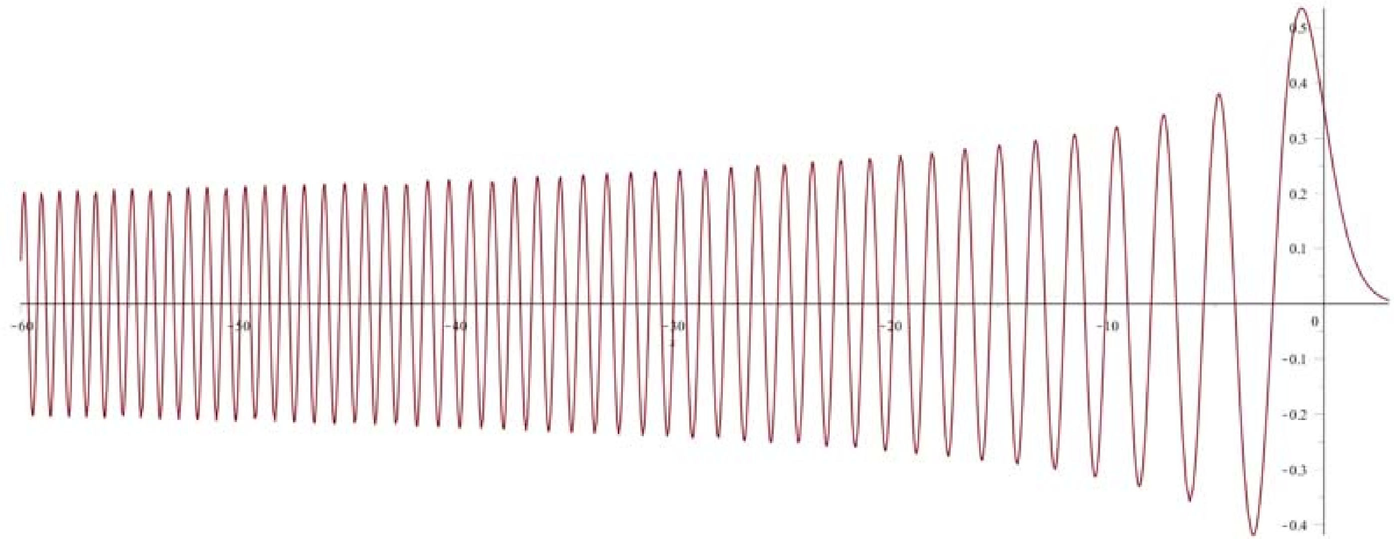


Les zéros se situent à des multiples de π, enfin pas tout à fait.
La fonction est dans ce cas

$$B(n) = h\left(n, \frac{4n}{\pi(4n-1)}\right)$$

Encore le nombre π qui pointe son nez.

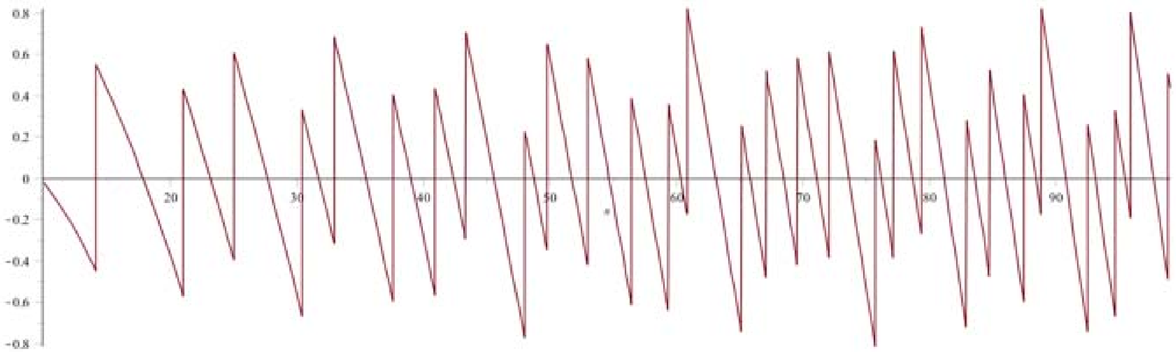
La fonction de Airy.



$$A(n) = h\left(n, \frac{2n^{3/2}}{3\pi}\right)$$

Toujours aussi omniprésent pour tout ce qui est une onde.

La fonction Zeta a aussi des racines



Mais qui sont passablement plus compliqués

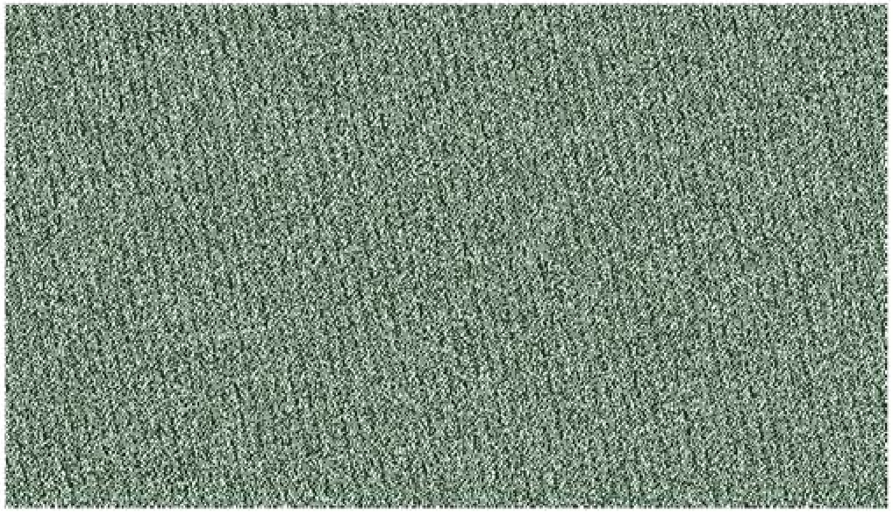
```
1 :  14,1347…
2 :  21,0220…
3 :  25,0108…
4 :  30,4248…
5 :  32,9350…
6 :  37,5861…
7 :  40,9187…
8 :  43,3270…
```

Mais revenons à sin(x)

On fait une liste des endroits où il y a une racine

On code chaque chiffre par une couleur

Quand on est autour de 36 millions on voit apparaître



!, il y a un motif !, la période est $\frac{2\pi}{\log(2)}$ = 9,06…

Avec un programme comme Photoshop on peut représenter 1 image avec 90 milliards de pixels

Soit 300 000 x 300 000