# On a strange class of algebraic numbers

by
Simon Plouffe
March 16, 2014

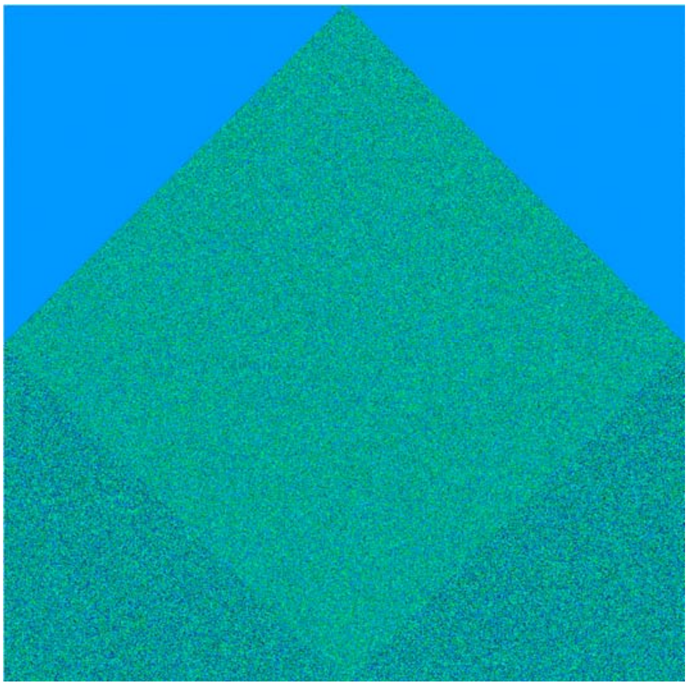

## Résumé

La formule d'itération de Mandelbrot $Z_{n+1} = Z_n^2 + c$ converge vers un nombre algébrique de degré 4 si c est un rationnel simple. Mais en regardant de près certains nombres algébriques en binaire on voit apparaître un motif assez évident et très persistant.

## Abstract

The iteration formula $Z_{n+1} = Z_n^2 + c$ of Mandelbrot will give an algebraic number of degree 4 when it converges most of the time. If we take a good look at some of these algebraic numbers: some of them have a very persistent pattern in their binary expansion.


The first 270 million bits of $1 + \frac{\sqrt{2\cdot 4^{8192} + 2\sqrt{16^{8192}+1}}}{2^{16386}}$



# Introduction

L'idée de départ était basée sur une observation ou question. Sachant que la plupart du temps, étant donné un c rationnel et simple, le résultat de l'itération donne un nombre algébrique. La question étant : si la frontière de l'ensemble de Mandelbrot est composée de nombres algébriques alors si on prend une série de nombres algébriques proches de la frontière auront-ils un motif dans leur développement en binaire ?

La question se posait puisqu'en observant la vitesse à laquelle l'itération converge vers ces nombres algébriques est géométrique. L'observation donc de nombres algébriques en binaire a permis de découvrir une formule qui lorsqu'évaluée donne naissance à des motifs très persistants.

$$f(n) = 1 + \frac{\sqrt{2 \cdot 4^{\mathrm{n}} + 2\sqrt{16^{\mathrm{n}} + 1}}}{2^{2\mathrm{n}+2}} \tag{1}$$

Si n est de l'ordre de 1000, le motif persiste et est très nettement visible jusqu'au millionième bit, si n est de l'ordre de 32000 le motif persiste jusqu'au milliardième bit. J'ai pu tester jusqu'au 3,2 milliardième bit. Si n est de l'ordre du million soit: $2^{20}$, on a alors les $2^{40}$ premiers bits qui sont prévisibles pour un peu plus que la moitié des valeurs, c'est-à-dire les premiers 1000 milliards de bits.

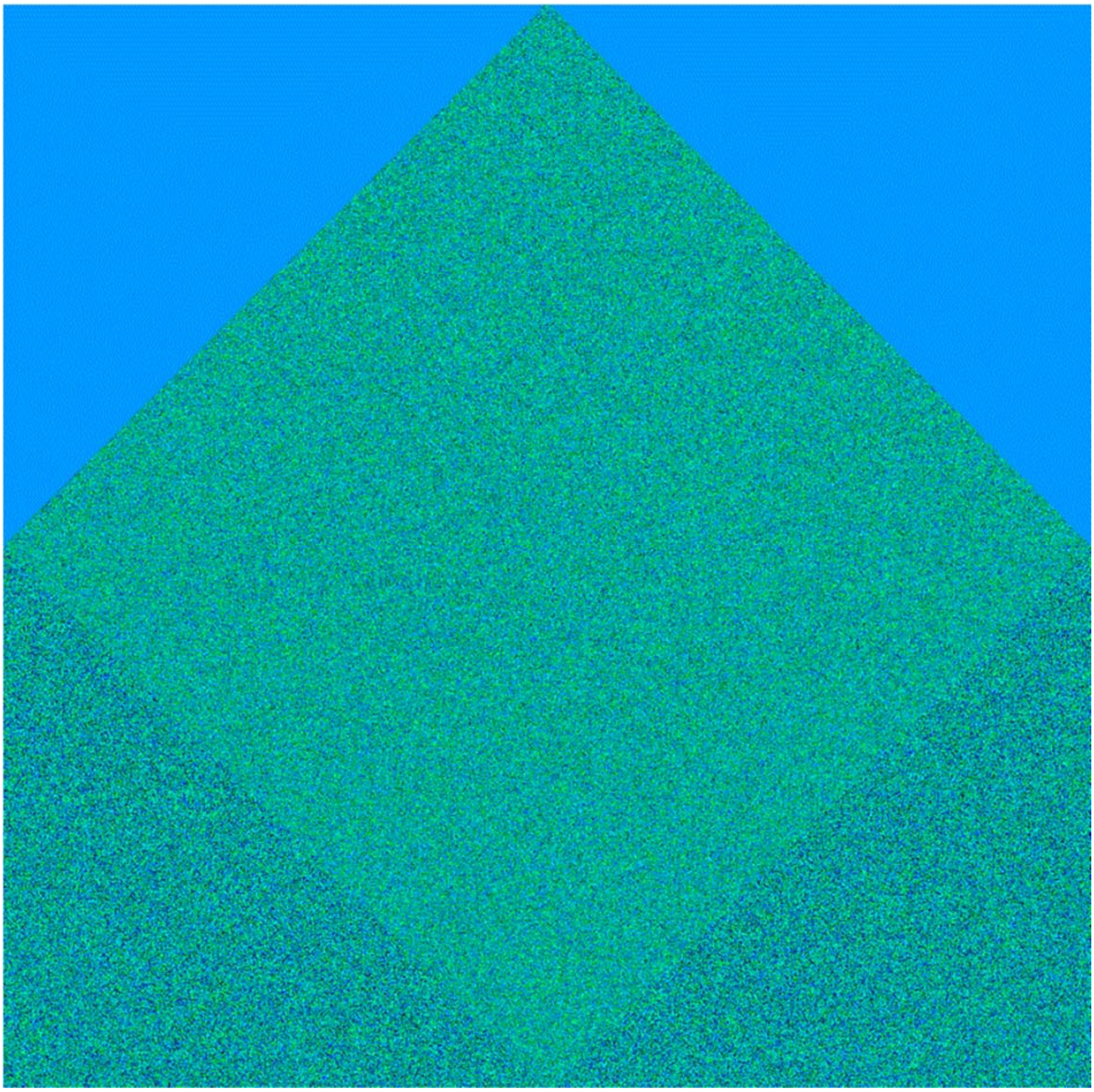
Ces nombres sont étranges de plusieurs façons.

1) Leur développement en binaire est assez visiblement fait de longues suites de 0 et de 1.
2) Le développement en fraction continuée est très chaotique même en base 10.
3) On peut prédire un peu plus de la moitié du développement en binaire qui obéit toujours à la même règle.
4) On peut tracer un graphique ou représenter à l'aide d'une image bitmap et prédire assez exactement quel sera le motif.
5) Le log et l'exponentielle de f(n) donnent aussi naissance à un motif qui semble persister moins longtemps mais qui est très visible et possède les mêmes propriétés génériques, comme d'avoir des quotients partiels en base 2 ou 10 très élevés.
6) L'étendue du motif en binaire est de l'ordre du carré de n.
7) Cette fonction semble unique et générique, je n'ai pas pu trouver d'autres exemples qui soient meilleurs en termes d'étendue.

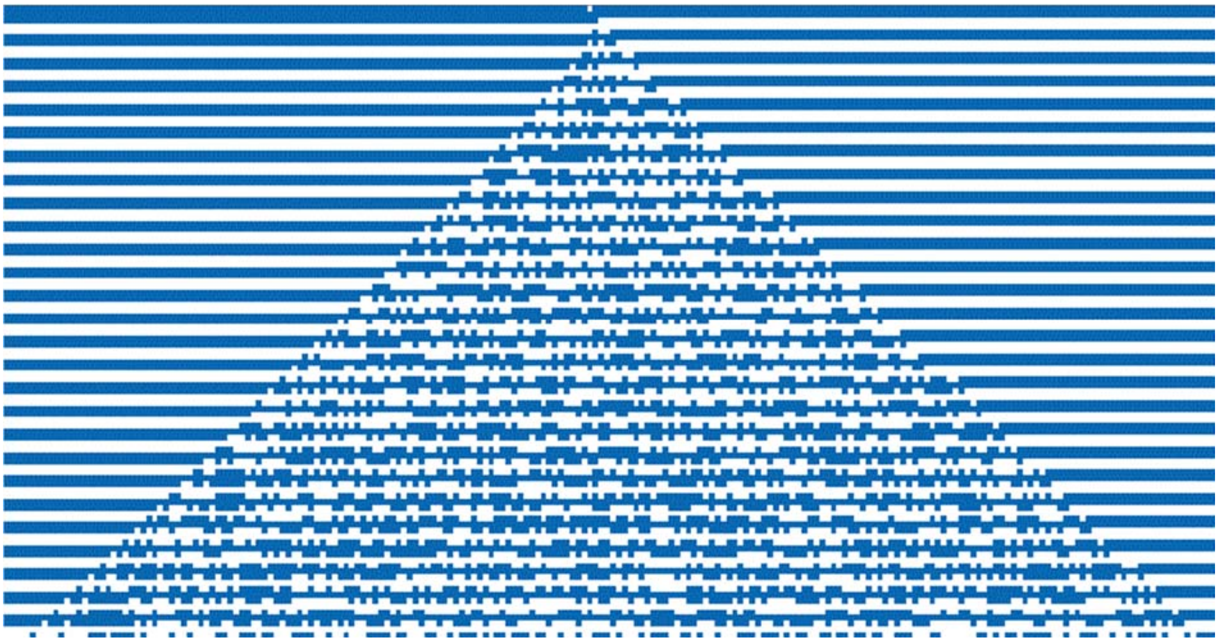
Voici l’image du développement binaire, ici n=100.

f(100)=1.0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
00000000000000000000000000100000000000000000000000000000000000000000000000000000
00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
00000000000000000000000001111111111111111111111111111111111111111111111111111111
11111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
11111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
11111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
11111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
11111111111111111111101100000000000000000000000000000000000000000000000000000000
00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
00000000000000000101001111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
11111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
11111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
11111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
11111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
11111111111110010100110000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
00000000100101111110111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
11111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
11111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
11111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
11111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
11110001101001011110000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000010
11010101011111001111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
111111111…

Le motif cesse apparemment d’être visible au 10000ème bit. Si on prend une valeur bien plus grande de n on peut faire une image graphique qui résume bien.
Ici n=8192, bleu = 0, blanc = 1, le pas de l’image est 16385.



Le graphique ou dessin est en fausses couleurs pour bien voir la coupure.



Le même dessin aux environs de la position 270 000 000 en binaire, on distingue encore le motif qui se termine en pointe. Ici bleu = 0 et blanc = 1.

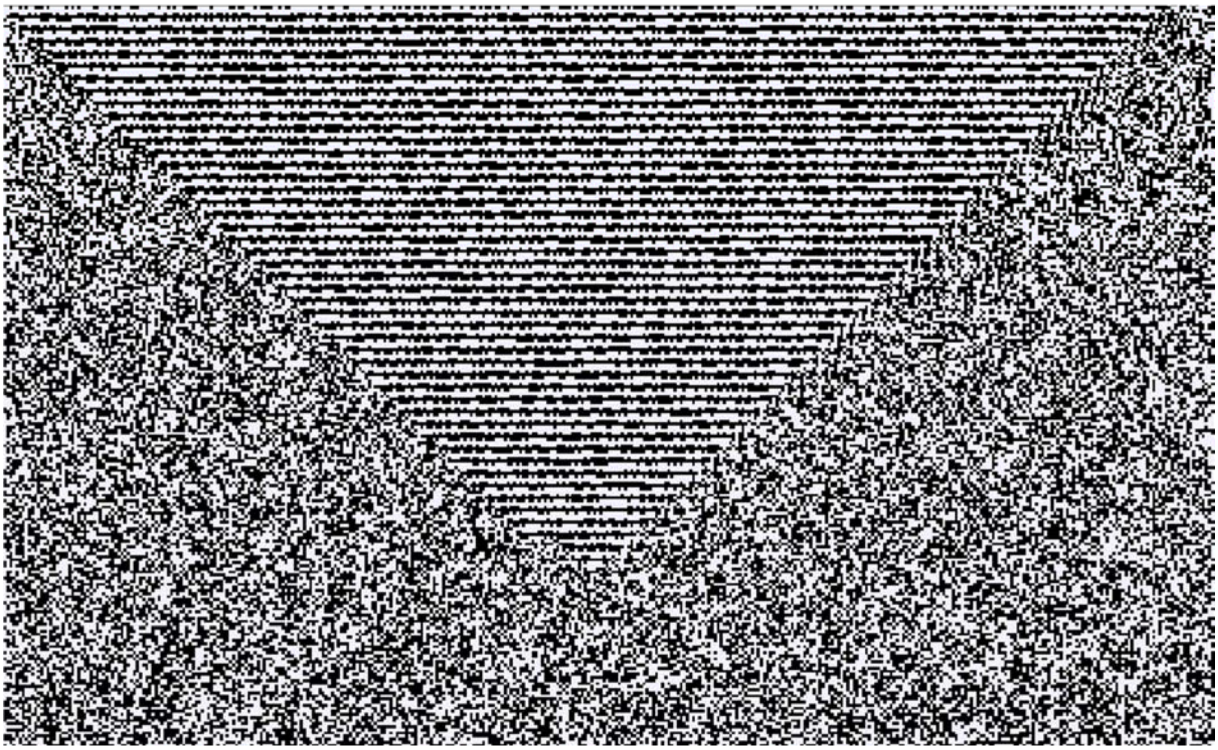
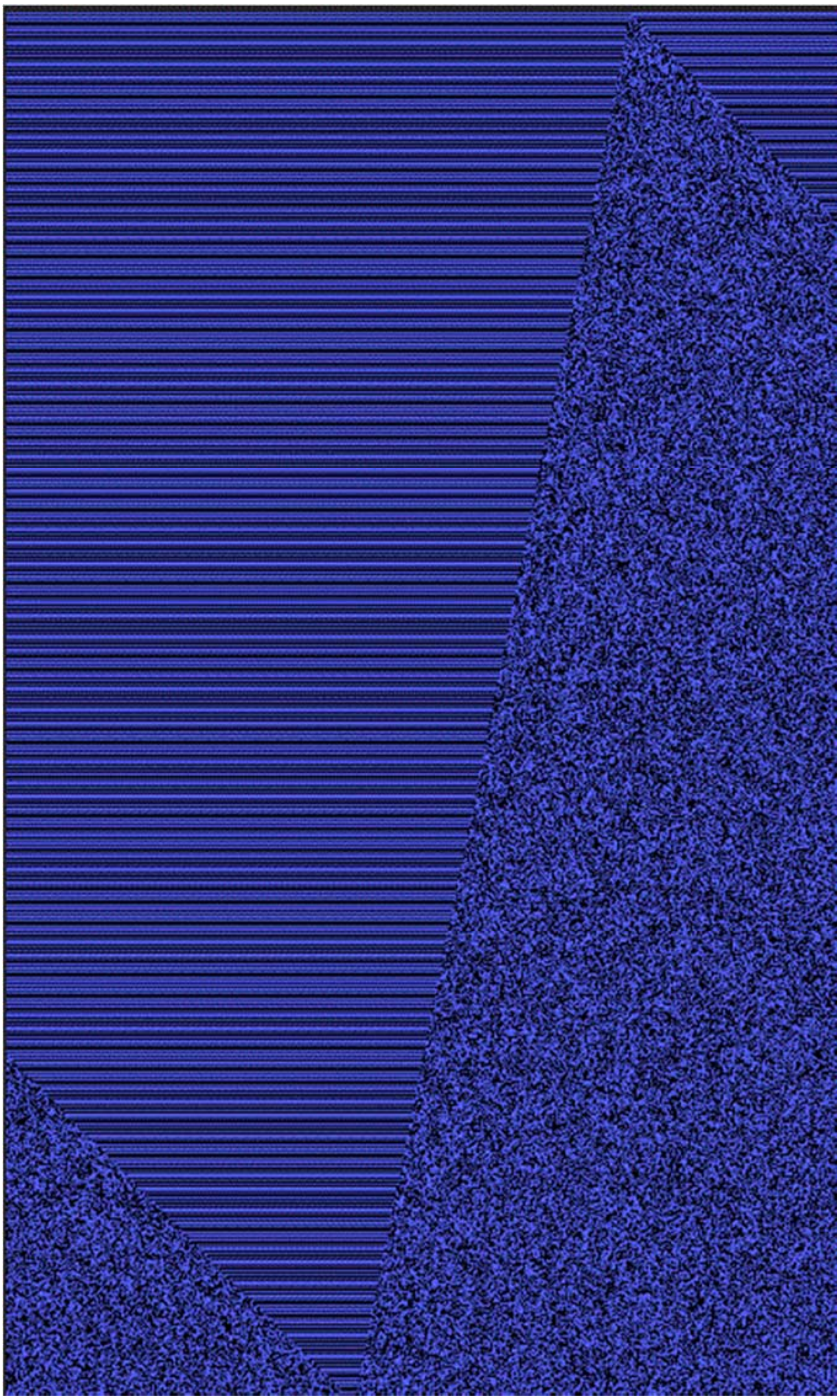
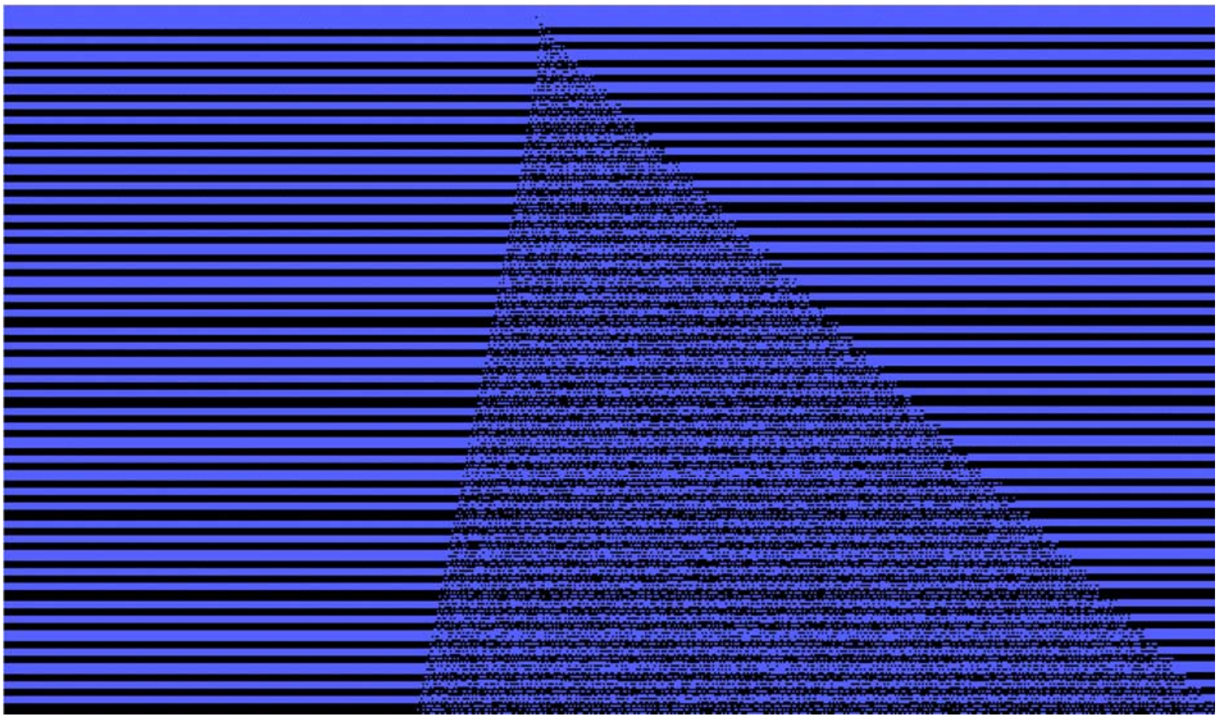


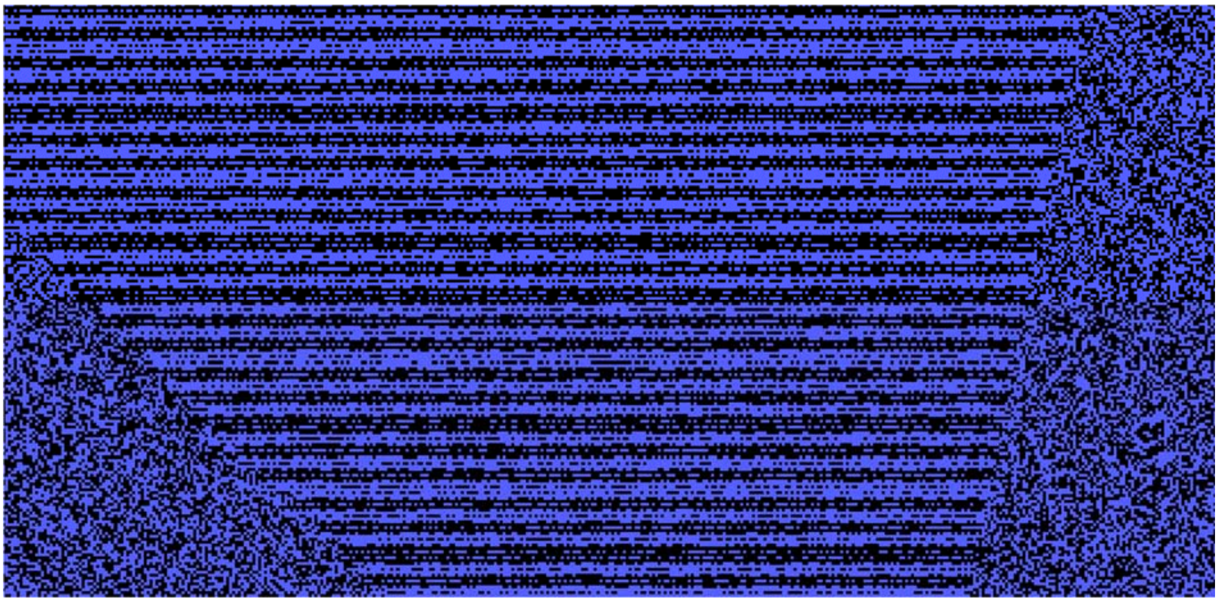
Image des 446 premiers millions de bits de

$$1+\frac{\sqrt{2\cdot 32^{16383}+3\sqrt{4^{16383}+1}}}{2\cdot 16^{32766}}$$





Zoom sur la partie haute de l'image (en fausse couleur bleue foncée).



Zoom sur la pointe au bas de l'image (en fausse couleur bleue foncée).

## Analyse des résultats et questions ouvertes

La formule (1) est surprenante, la première version trouvée était en fait,

$$G(n) = 1 + \frac{\sqrt{2^{n} + 2\sqrt{2^{2n-2} + 1}}}{2^{n+1}} \tag{2}$$

Qui donnait le motif que pour les n impairs, si n est pair on a bien une valeur près de 1 mais qui dès que les chiffres en binaire commencent se comporte comme la plupart des fonctions irrationnelles, c'est-à-dire sans aucun motif, on ne voit que du gris (ou bleu) selon le choix des couleurs. Il ne semble exister qu'une seule sorte de fonction générique.

Il ne semble pas exister non plus de lien avec la formule de Viète mais ça reste à prouver.

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}} \cdots$$

Même si le motif est très persistant, les nombres obtenus sont très irréguliers au début de leur développement binaire. Une analyse statistique montre qu'ils sont quand même normaux et le lien avec des ensembles comme l'ensemble de Cantor.

La formule

$$H(n) = 1 + \frac{\sqrt{2 \cdot 32^{n} + 3\sqrt{4^{n} + 1}}}{2 \cdot 16^{2n}} \tag{3}$$

Ne donne rien pour certaines valeurs de n et donne des résultats spectaculaires pour n = $2^{k} - 1$.

Les nombres obtenus sont pathologiques si on développe en fraction continuée, la même chose se produit pour l'exponentielle de f(n) , exp(f(n)-1) et ln(f(n)).

Le motif près de la pointe pour f(n) est toujours le même, il est envisageable de trouver une formule générique pour le motif qui pourrait certainement être un automate cellulaire. Il resterait à trouver quelle règle correspond à ce motif.

## Bibliographie


- Adrien Douady, John H. Hubbard : Étude dynamique des polynômes complexes, Société mathématique de France, 2007.
- Carl Sagan *Contact: A Novel*. New York: Simon & Schuster. ISBN 0-671-43400-4. LCCN 85014645. OCLC 12344811.
- Automate cellulaire et ensemble de Mandelbrot sur wikipedia : http://fr.wikipedia.org/wiki/Automate_cellulaire
- http://en.wikipedia.org/wiki/Mandelbrot_set
- Wolfram, Stephen, *A New Kind of Science*. Wolfram Media, Inc., May 14, 2002. ISBN 1-57955-008-8.