π et les nombres premiers

par
Simon Plouffe
19 avril 2023

Résumé

Le point de départ est une fonction due à Dirichlet, la fonction $\beta(s)$

$$\beta(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^s}$$

Si $s = 7$, la valeur est $\frac{61\pi^7}{184320}$, en isolant 61 on trouve tout d'abord une approximation de 61, en effet

$$61 \approx \frac{184320}{\pi^7} = 61.0271871 \ldots$$

Ou plus exactement

$$61 = \frac{2^8\ 6!}{\pi^7}\left[1 - \frac{1}{3^7} + \frac{1}{5^7} - \frac{1}{7^7} \ldots\right]$$

Donc, en inversant cette série on obtient une bonne approximation d'un nombre premier et si on pousse plus loin une égalité. Ici le nombre 61 est le 6ème nombre d'Euler. Le plus grand nombre d'Euler connu qui soit premier est E_{510}, un nombre de 1062 chiffres, il ne semble pas y en avoir d'autres avant E_{100000}. On prend ici les nombres générés par la série $\frac{1}{\cos(x)}$ où tous les E_n sont positifs. Il est à noter également que l'approximation fournie par ce procédé nous donne

$$E_{510} \approx \frac{2^{512}\ 510!}{\pi^{511}}$$

qui est excellente puisque 243 décimales exactes sur 1162. Le but de cet article est de trouver toutes les expressions possibles pouvant représenter un nombre premier.

Les nombres d'Euler, Bernoulli et Tangents

Comme indiqué dans le résumé, le développement de Taylor de la fonction $1/\cos(x)$ fournit les nombres d'Euler et si quelques-uns de ceux -ci sont premiers alors on aura une représentation de ce premier. Reste à trouver quels autres nombres premiers peuvent être représentés. Les nombres Euler-Tangents par exemple sont obtenus avec l'expression

$$\frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}$$

Qui une fois développé en série exponentielle génère les nombres

1, 1, 1, 2, 5, 16, 61, 272, 1385, 7936, 50521, 353792, … (suite A000111 du catalogue OEIS) dont le terme général, $a(n) \approx \frac{2^{n+2}\, n!}{\pi^{n+1}}$. On remarque que 2 est facteur dans l'expression initiale, on peut alors représenter $17 = \frac{272}{16} \approx \frac{32*7!}{\pi^8}$, de même que 277 puisque $a(8) = 1385 \approx \frac{1024*8!}{\pi^9}$ et donc $277 \approx \frac{8257536}{\pi^9}$. On peut donc obtenir une approximation de ce premier ainsi que l'expression exacte en prenant la série. Notre liste des premiers s'allonge.

La liste jusqu'à maintenant est 2, 5, 17, 31, 61, 277, 691 et E_{510}.

Les expressions sont toujours de la forme

$$p \approx \frac{c^m k!}{d\pi^n} \tag{1}$$

Où c et d sont des constantes, dans les exemples ci-haut , c=2 et d peut être entier ou algébrique. Ces quelques premiers ne sont que la pointe de l'iceberg pour une raison évidente. Il est facile de générer des nombres du même genre que Euler ou Bernoulli avec d'autres expressions trigonométriques comme

$$\frac{\sin(x)+\cos(3x)}{\cos(4x)}$$

Le développement en série de Taylor donne la suite : 1, 1, 7, 47, 497, 6241, 95767, 1704527, 34741217, …
On y voit 7, 47. Donc si on peut calculer le terme général a(n) de cette suite on pourra ajouter les premiers trouvés à la liste. En effet, le terme général est

$$a(n) \approx \frac{8^n \Gamma(n)}{2\sqrt{4+2\sqrt{2}}\,\pi^n}$$

Qu'on trouve de cette façon.

1) On développe en série l'expression trigonométrique
2) On collecte les coefficients avec n !
3) On calcule $a(n+1)/a(n)$.
4) On calcule les différences terme à terme pour trouver la constante $8/\pi$.
5) On remonte à l'envers (retro-engineering) pour isoler la constante d dans l'expression (1).

Ce qui permet d'obtenir que

$$7 \approx \frac{8^3}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}\,\pi^3},\ 47 \approx \frac{8^3 4!}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}\,\pi^4}$$

Le 200ème terme est de l'ordre de 10^{454} et $a(200)$ a une précision de 95 chiffres décimaux.

En examinant d'autres fonctions comme celles rencontrées plus haut, on y retrouve d'autres nombres premiers, voici quelques exemples. Toutes les expressions sont développées en série génératrice exponentielle. En **gras**, un terme sur 2 est considéré. *Annnnnn* se réfère à l'Encyclopédie en ligne des suites d'entiers : OEIS.org.

Fonction	Suite	Terme général	Premiers	Exemple
$\boldsymbol{\frac{\sin(x)}{\cos(2x)}}$	A000464 1, 11, 361, 24611, 2873041, 512343611,	$\frac{(2n+1)!\,2^{4n+7/2}}{\pi^{2n+2}}$	11,13, 19	$11 \approx \frac{768\sqrt{2}}{\pi^4}$
$\frac{1-2\cos(x)}{1-\sin(x)}$	A000708 -1, -1, 0, 1, 6, 29, 150, 841, 5166, 34649,	$\frac{2^n\,n!}{\pi^n}$	3, 29,	
$\boldsymbol{\frac{\cos(x)}{\cos(2x)}}$	A000281 1, 3, 57, 2763, 250737,	$\frac{\sqrt{2}\,2^n\,(2n)!\,4^{2k}}{\pi^{2n+1}}$	3, 19,	$3 \approx \frac{64\sqrt{2}}{\pi^3}$
$\boldsymbol{\frac{1}{\cos(x)}}$	A000364 1, 5, 61, 1385,	$\frac{2^{n+2}\,n!}{\pi^{n+1}}$	5, 61, 277,	$61 \approx \frac{2^8\,6!}{\pi^7}$
$\frac{\sin(x)+\cos(3x)}{\cos(4x)}$	A006873 1, 1, 7, 47, 497, 6241,	$\frac{8^n\Gamma(n)}{2\sqrt{4+2\sqrt{2}}\,\pi^n}$	7, 47,	$7 \approx \frac{8^3}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}\,\pi^3}$
$\frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}$	A000111 1, 1, 1, 2, 5, 16, 61, 272, …	$\frac{2^{n+2}\,n!}{\pi^{n+1}}$	2, 5, 17,	$17 \approx \frac{32*7!}{\pi^8}$

$\dfrac{\cos(x)+\cos(2x)+\cos(3x)}{\cos(x)}$	3, 11, 29, 191, 871, 52571,	$\dfrac{2^{2n}\,(2n-2)!}{\pi^{(2n-1)}}$	3, 11, 29, 191, 52571	$52571 \approx \dfrac{2^{12}\,10!}{\pi^{11}}$
$\dfrac{\cos(2x)+\sin(2x)}{\cos(2x)}$	A012393 2,16,512,34816,4063232,	$\dfrac{2^{4n}\,(2n-1)!}{\pi^{2n}}$	17,31,691	$691 \approx \dfrac{2^{4}\,11!}{\pi^{12}}$

On pourrait continuer les exemples pour trouver d'autres nombres premiers, ces quelques fonctions sont parmi les plus simples. En plus des nombres premiers isolés si un terme est composé de 2 facteurs, il est toujours possible d'obtenir une nouvelle identité comme dans le cas du 8ème nombre d'Euler : 1385 qui est $5 \cdot 277$, étant donné qu'on a déjà 5 cela fournit une approximation pour 277. Le procédé fonctionne mais il est un peu fastidieux d'aller décrocher un premier quelconque et illusoire de trouver une expression pour chaque nombre premier. Pour l'instant, cette courte liste n'est qu'une suite d'expressions exotiques donnant presqu'un nombre premier.

Autres formes donnant des nombres premiers

Ramanujan a trouvé cette formule avec les nombres de Bernoulli et une somme inusitée.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{4k+1}}{e^{2\pi n}-1} = \frac{B_{4n+2}}{2(4n+2)} \qquad (2)$$

Ce qui donne pour $4k+1=13$, l'identité

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{13}}{e^{2\pi n}-1} = \frac{1}{24}$$

Si k est bien plus élevé, on a

$$24\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{673}}{e^{2\pi n}-1} = 1563446\ \ldots\ 036059151$$

Un nombre premier de 1077 chiffres, avec l'exposant 22607 on en a un de 71299 chiffres, c'est le plus grand connu de ce type. Ce qui est remarquable pour cette somme est l'affinité avec encore une fois le nombre π. Remarquables également en raison de la précision exceptionnelle.

En effet, il n'est pas difficile d'établir qu'en général on aura cette approximation

$$\frac{k!}{(r\pi)^{k+1}} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{k}}{e^{r\pi n}-1} \qquad (3)$$

Donc, si le résultat de la somme infinie est premier on aura une autre représentation de ces approximations. Si k est élevé, l'approximation est spectaculaire, ici avec l'exposant 673 a 202 décimales exactes.

Ces sommes (2) sont connues, ce qui l'est moins est d'étendre la formule de Ramanujan à deux termes.

En reprenant un exemple avec 691 on a (691 est le numérateur du 12ème nombre de Bernoulli).

$$691 = 16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{11}}{e^{\pi n}-1} - 2^{16}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{11}}{e^{4\pi n}-1} \tag{4}$$

La première somme fournit déjà une bonne approximation de $691 \approx \frac{2^4 11!}{\pi^{12}}$, encore une fois, cette approximation peut être rendue exacte en rajoutant soit le terme qui manque ou une partie de la série du 2ème membre de l'équation. Cette équation a une forte ressemblance à une donnée par Jean-Pierre Serre (cours d'arithmétique p.157).

$$Eis_6 = 1 + \frac{65520}{691}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{11}(n)q^n \tag{5}$$

En déguisé les séries (2) sont des séries d'Eisenstein où la variable q^n devient $e^{q\pi n}$. L'identité (4) avec 691 est juste un réécriture de (5).

Une analyse sommaire de l'identité (2) et de (3) montrent qu'on a soit 1 terme soit 2 termes qui donnent un rationel, par exemple

$$1 = 24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{3}}{e^{\pi n}-1} - 264\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{3}}{e^{2\pi n}-1} \tag{6}$$

On peut en obtenir une infinité comme (6) si l'exposant est de la forme $4k-1$. Les coefficients grossissent avec k, lorsque k = 5 on a

$$\begin{gathered} 221930581 = 16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{19}}{e^{\pi n}-1} - 2^{24}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{19}}{e^{4\pi n}-1} \\ 221930581 \approx \frac{1946319750384384375}{\pi^{20}} = 221930369.2868\ldots \end{gathered} \tag{7}$$

Mais $221930581 = 31 \cdot 41 \cdot 283 \cdot 617$, n'est pas premier. Encore une fois, ces exemples tombent aussi dans la catégorie d'expressions exotiques isolées. Les approximations sont très précises mais il y a trop peu d'exemples. Donc, on est limité aux quelques cas de premiers apparaissant dans ces sommes à 2 termes. Mais il y a une astuce, en prenant la somme ou la différence de 2 évaluations différentes (k différent). Par exemple

$$31 = -504 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{e^{\pi n} - 1} - 32256 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{e^{4\pi n} - 1} + 64 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^7}{e^{\pi n} - 1} - 2^{14} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^7}{e^{4\pi n} - 1}$$

Qui fournit l'approximation

$$31 \approx \frac{61425}{\pi^6} - \frac{321300}{\pi^8} = 30.0299856\ldots$$

Les approximations sont ici moins spectaculaires par contre ce qu'on y gagne c'est la généralité. En combinant donc 4 termes du type et avec r = 1 ou 4 et k impair.

$$S(k,r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{e^{r\pi n} - 1}$$

on obtient assez facilement plusieurs représentations pour chaque premier même à partir de 3. 2 ayant été obtenu avec les nombres Tangents. Non seulement ça fonctionne assez bien pour tous les premiers jusqu'à 1000000 mais en plus on peut choisir un premier arbitraire.

Un test a été fait avec les premiers de la forme $10^m + c_m$, avec m = 1 jusqu'à 101. Ce sont les premiers nombres premiers supérieurs à 10^m, si m = 100 alors $c_m = 267$. C'est la suite 2, 11, 101, 1009, … (la suite A003617 du OEIS).

Exemple avec m = 18,

$$10^{18} + 3 \approx -\frac{57780097674288877833539343 75}{8\,\pi^{20}} + \frac{1246249957994342793434971153125}{8\,\pi^{24}}$$

Qui est 1000000676938336801.2703…

La vraie valeur de ce premier est

$$\begin{aligned} 10^{18} + 3 = 5937369506 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{19}}{e^{\pi n} - 1} - 6225783167123456 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{19}}{e^{4\pi n} - 1} \\ - 6025884 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{23}}{e^{\pi n} - 1} + 101097557458944 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{23}}{e^{4\pi n} - 1} \end{aligned}$$

Et pour chacun des termes de cette somme on a l'approximation (3), bien évidemment les coefficients des sommes sont premiers entre eux, deux à deux.

$$\frac{k!}{(r\pi)^{k+1}} \approx S(k,r)$$

qui justement peut être corrigée avec $\zeta(k+1)$ pour donner une valeur exacte, autrement dit

$$S(k,r) = \frac{k!}{(r\pi)^{k+1}}\, \zeta(k+1)$$

qui est rationnelle quand k est impair. Plus exactement lorsque $k = 4n + 1$. Quand $k = 4n + 3$ il faut 2 termes en $S(k, r)$.

Donc, moyennant un petit programme servant à trouver les coefficients des sommes $S(k, r)$ pour chaque premier, on y arrive facilement jusqu'à 1000000 en quelques minutes. Plus la taille du premier augmente plus il y a de sommes exactes candidates et autant d'approximations.

Étant donné que le choix du premier à représenter semble arbitraire il est raisonnable de conjecturer que pour tout premier P on a la somme

$$P = a\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{k_1}}{e^{\pi n}-1} + b\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{k_1}}{e^{4\pi n}-1} + c\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{k_2}}{e^{\pi n}-1} + d\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{k_2}}{e^{4\pi n}-1} \tag{7}$$

Ici k_1 et k_2 sont impairs et différents, a, b, c, et d sont entiers. De plus, le premier P est approximé par

$$P \approx u\frac{k_1!}{(r\pi)^{k_1+1}} + v\frac{k_2!}{(r\pi)^{k_2+1}}$$

Où u et v sont entiers également. Reste à savoir ce que $S(k, r)$ représente exactement. À partir de l'identité de Ramanujan on peut assez facilement trouver celles ave r = 1 ou 4. Bill Gosper avait déjà exploré quelques unes de ces identités dont celle-ci

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{e^{2\pi n/7}-1} = \frac{-1}{240} + \frac{1}{320}\left(301 + 210\sqrt{2}\,7^{1/4} + 120\sqrt{7} + 90\sqrt{2}\,7^{3/4}\right)\frac{\pi^2}{\Gamma(\frac{3}{4})^8}$$

Ce qui permet en s'y inspirant de trouver les valeurs explicites pour r = 1, 2, 4 dans $S(k, r)$.

$S(k,r)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^k}{e^{r\pi n}-1}$	Valeur	Approximation
S(3,1)	$\frac{11}{320}\frac{\pi^2}{\Gamma(3/4)^8}-\frac{1}{240}$	$\frac{6}{\pi^4}$
S(3,2)	$\frac{1}{320}\frac{\pi^2}{\Gamma(3/4)^8}-\frac{1}{240}$	$\frac{3}{8\,\pi^4}$
S(3,4)	$\frac{11}{5120}\frac{\pi^2}{\Gamma(3/4)^8}-\frac{1}{240}$	$\frac{3}{128\,\pi^4}$
S(5,1)	$\frac{3}{64}\frac{\pi^3}{\Gamma(3/4)^{12}}+\frac{1}{504}$	$\frac{120}{\pi^6}$
S(5,2)	$\frac{1}{504}$	$\frac{15}{8\,\pi^6}$
S(5,4)	$\frac{-3}{2^{12}}\frac{\pi^3}{\Gamma(3/4)^{12}}+\frac{1}{504}$	$\frac{15}{2^9\,\pi^6}$
S(7,1)	$\frac{363}{2^{12}\,5}\frac{\pi^4}{\Gamma(3/4)^{16}}-\frac{1}{480}$	$\frac{7!}{\pi^8}$
S(7,2)	$\frac{3}{2^{12}\,5}\frac{\pi^4}{\Gamma(3/4)^{16}}-\frac{1}{480}$	$\frac{315}{2^4\,\pi^8}$
S(7,4)	$\frac{363}{2^{17}\,5}\frac{\pi^4}{\Gamma(3/4)^{16}}-\frac{1}{480}$	$\frac{315}{2^{12}\,\pi^6}$
S(9,1)	$\frac{189}{2^8}\frac{\pi^5}{\Gamma(3/4)^{20}}+\frac{1}{264}$	$\frac{9!}{\pi^{10}}$
S(9,2)	$\frac{1}{264}$	$\frac{2835}{8\,\pi^{10}}$
S(9,4)	$\frac{189}{2^{18}}\frac{\pi^5}{\Gamma(3/4)^{20}}+\frac{1}{264}$	$\frac{2835}{2^{13}\,\pi^{10}}$
S(11,1)	$\frac{393309}{66560}\frac{\pi^6}{\Gamma(3/4)^{24}}-\frac{691}{65520}$	$\frac{11!}{\pi^{12}}$
S(11,2)	$\frac{189}{66560}\frac{\pi^6}{\Gamma(3/4)^{24}}-\frac{691}{65520}$	$\frac{155925}{2^4\,\pi^{12}}$
S(11,4)	$\frac{393309}{2^{22}\,5\,13}\frac{\pi^6}{\Gamma(3/4)^{24}}-\frac{691}{65520}$	$\frac{155925}{2^{16}\,\pi^{12}}$
S(13,1)	$\frac{68607}{2^{10}}\frac{\pi^7}{\Gamma(3/4)^{28}}-\frac{1}{24}$	$\frac{13!}{\pi^{14}}$

S(13,2)	$\frac{1}{24}$	$\frac{6081075}{2^4\,\pi^{14}}$
S(13,4)	$\frac{68607}{2^{24}}\frac{\pi^7}{\Gamma(3/4)^{28}}+\frac{1}{24}$	$\frac{6081075}{2^{18}\,\pi^{14}}$

Appendice

Table des approximations de premiers à partir de 2.

Premier	Approximation	Valeur
2	$\frac{196}{\pi^4}$	2.0121
103	$\frac{184275}{8\,\pi^6}+\frac{2972025}{4\,\pi^8}$	102.2651
163	$\frac{798525}{8\,\pi^6}+\frac{2168775}{4\,\pi^8}$	160.9663
$10^{18}+3$	$\approx -\frac{577800976742888778335393437 5}{8\,\pi^{20}}+\frac{1246249957994342793434971153125}{8\,\pi^{24}}$	1000000676938336801.2703

Table en brut

$$Premier, S(k,1), S(k,4)\ [vecteur\ qui\ annule\ p]\ Approximation$$

Exemple

$$7\ =\ -228\,S(5,1)+58368\,S(5,4)+33\,S(7,1)+\ 33792\,S(7,4)$$

$$7\approx\frac{4578525}{84\,\pi^8}+\frac{95893875}{8\,\pi^{10}}$$

```
7, 7, 9, [-1, -228, 58368, 33, 33792],  -4578525/4/Pi^8+95893875/8/Pi^10
23, 5, 7, [-1, 63, 4032, 28, -7168],     61425/8/Pi^6+562275/4/Pi^8
29, 5, 7, [-1, 126, 8064, 24, -6144] ,   61425/4/Pi^6+240975/2/Pi^8
31, 5, 7, [-1, 504, 32256, -64, 16384],  61425/Pi^6-321300/Pi^8
31, 7, 9, [-1, -424, 108544, 66, 67584]  -4257225/2/Pi^8+95893875/4/Pi^10
41, 5, 7, [-1, 252, 16128, 16, -4096],    61425/2/Pi^6+80325/Pi^8
47, 5, 7, [-1, 315, 20160, 12, -3072],   307125/8/Pi^6+240975/4/Pi^8
53, 5, 7, [-1, 378, 24192, 8, -2048],    184275/4/Pi^6+80325/2/Pi^8
59, 5, 7, [-1, 441, 28224, 4, -1024],    429975/8/Pi^6+80325/4/Pi^8
71, 5, 11, [-1, 1890, 120960, -4, 16384], 921375/4/Pi^6-638512875/4/Pi^12
71, 5, 7, [-1, 567, 36288, -4, 1024],    552825/8/Pi^6-80325/4/Pi^8
89, 5, 7, [-1, 756, 48384, -16, 4096],   184275/2/Pi^6-80325/Pi^8
89, 7, 9, [-1, -556, 142336, 99, 101376], -11165175/4/Pi^8+287681625/8/Pi^10
97, 3, 9, [-1, -498, 7968, 33, 33792],   -11205/4/Pi^4+95893875/8/Pi^10
97, 5, 7, [-1, 126, 8064, 152, -38912],   61425/4/Pi^6+1526175/2/Pi^8
103, 5, 7, [-1, 189, 12096, 148, -37888], 184275/8/Pi^6+2972025/4/Pi^8
109, 5, 7, [-1, 252, 16128, 144, -36864], 61425/2/Pi^6+722925/Pi^8
109, 7, 9, [-1, -36, 9216, 33, 33792],   -722925/4/Pi^8+95893875/8/Pi^10
113, 3, 9, [-1, -242, 3872, 33, 33792],  -5445/4/Pi^4+95893875/8/Pi^10
113, 5, 7, [-1, 1008, 64512, -32, 8192],  122850/Pi^6-160650/Pi^8
127, 5, 11, [-1, 315, 20160, 2, -8192],   307125/8/Pi^6+638512875/8/Pi^12
127, 5, 7, [-1, 441, 28224, 132, -33792], 429975/8/Pi^6+2650725/4/Pi^8
131, 3, 9, [-1, 46, -736, 33, 33792],     1035/4/Pi^4+95893875/8/Pi^10
131, 5, 7, [-1, 126, 8064, 216, -55296],  61425/4/Pi^6+2168775/2/Pi^8
137, 3, 9, [-1, 142, -2272, 33, 33792],   3195/4/Pi^4+95893875/8/Pi^10
137, 5, 7, [-1, 189, 12096, 212, -54272], 184275/8/Pi^6+4257225/4/Pi^8
139, 5, 11, [-1, 3087, 197568, -6, 24576], 3009825/8/Pi^6-1915538625/8/Pi^12
139, 5, 7, [-1, 567, 36288, 124, -31744], 552825/8/Pi^6+2490075/4/Pi^8
149, 3, 9, [-1, 334, -5344, 33, 33792],   7515/4/Pi^4+95893875/8/Pi^10
149, 5, 7, [-1, 315, 20160, 204, -52224], 307125/8/Pi^6+4096575/4/Pi^8
151, 3, 9, [-1, 366, -5856, 33, 33792],   8235/4/Pi^4+95893875/8/Pi^10
151, 5, 7, [-1, 693, 44352, 116, -29696], 675675/8/Pi^6+2329425/4/Pi^8
```

```
157, 3, 9, [-1, 462, -7392, 33, 33792],   10395/4/Pi^4+95893875/8/Pi^10
157, 5, 7, [-1, 756, 48384, 112, -28672], 184275/2/Pi^6+562275/Pi^8
157, 7, 9, [-1, -428, 109568, 99, 101376], -8594775/4/Pi^8+287681625/8/Pi^10
163, 3, 9, [-1, 558, -8928, 33, 33792],   12555/4/Pi^4+95893875/8/Pi^10
163, 5, 7, [-1, 819, 52416, 108, -27648], 798525/8/Pi^6+2168775/4/Pi^8
167, 7, 9, [-1, -168, 43008, 66, 67584], -1686825/2/Pi^8+95893875/4/Pi^10
167, 9, 11, [-1, 132, 135168, -8, 32768], 95893875/2/Pi^10-638512875/2/Pi^12
173, 3, 9, [-1, 718, -11488, 33, 33792],  16155/4/Pi^4+95893875/8/Pi^10
179, 3, 9, [-1, 814, -13024, 33, 33792],  18315/4/Pi^4+95893875/8/Pi^10
181, 3, 9, [-1, 846, -13536, 33, 33792],  19035/4/Pi^4+95893875/8/Pi^10
181, 5, 7, [-1, 1008, 64512, 96, -24576], 122850/Pi^6+481950/Pi^8
191, 5, 7, [-1, 756, 48384, 176, -45056], 184275/2/Pi^6+883575/Pi^8
```

References/Bibliographie

[1] Encyclopedia of Integer Sequences, N.J.A. Sloane, Simon Plouffe, Academic Press , San Diego 1995.

[2] The OEIS, Online Encyclopedia of Integer Sequences, sequences : sequences A000464, A000111, A000708, A006873, A000364.

[3] Milton Abramowitz and Irene Stegun, Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, New York: Dover Publications , 1972 (original in 1964).

[4] Richard J. Mathar, Table of Dirichlet L-Series and Prime Zeta Modulo Functions for Small Moduli http://arxiv.org/abs/1008.2547

[5] Séries d'Eisenstein https://en.wikipedia.org/wiki/Eisenstein_series

[6] Eric Weinstein, Eisenstein series (MathWorld) : https://mathworld.wolfram.com/EisensteinSeries.html

[7] Apostol, Tom M. *(1990).* Modular Functions and Dirichlet Series in Number Theory *(2nd ed.). New York, NY:* Springer*.* ISBN 0-387-97127-0*.*

[8] Bill Gosper, personnal communication