The many faces of the polygamma function

by
Simon Plouffe
April 1, 2016

Abstract

A survey is made based on finite sums of the polygamma function with rational arguments which are

$$D_{k,j}^{n} = \sum_{(m,n)=1} \chi_j(n)\psi\left(k, \frac{m}{n}\right)$$

Where, $\chi_j(n)$ is the j'th Dirichlet character and $\psi\left(k, \frac{m}{n}\right)$ is the polygamma function of order k. We use this representation to rewrite identities using a new notation for linear combinations of mathematical constants. Identities are given for prime numbers using irrational constants. For negative argument n we use the generalization of Espinosa and Moll[6], well implemented into Maple CAS.

Résumé

Une série d'identités basées sur des sommes de valeurs de la fonction polygamma ψ(a/b) est présentée où (a, b)=1. On considère ici les sommes finies

$$D_{n,j}^{k} = \sum_{(m,n)=1} \chi_j(n)\psi\left(k, \frac{m}{n}\right)$$

Où $\psi\left(k, \frac{m}{n}\right)$ est la fonction polygamma d'ordre k et $\chi_j(n)$ est le j'ième caractère de Dirichlet.

Pour k positif, ces sommes sont équivalentes aux séries L de Dirichlet, pour $k < 0$, nous prenons la définition de Espinosa et Moll [6]qui est plus adaptée. Nous adoptons aussi une représentation standard pour les identités avec les constantes mathématiques. Enfin, une série de résultats sont présentés pour les sommes d'inverses de coefficients binomiaux et des représentations des nombres premiers comme sommes de constantes irrationnelles. Pour des arguments négatifs n, nous utilisons la généralisation de Espinosa et Moll [6], bien implantée dans le logiciel de calcul symbolique Maple.

Introduction

Une nouvelle notation est utilisée pour les combinaisons linéaires de constantes qui ne tient pas compte des coefficients mais seulement des constantes impliquées.

Au lieu d'avoir, X une constante comme combinaison linéaire de constantes C_i.

$$X = \sum_i^k a_i C_i$$

On note que $X \equiv [C_{1,} C_{2,} C_{3,} \dots , C_k]$. Par exemple,

$$\pi = 4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$$

Est noté $\pi \equiv [\arctan\left(\frac{1}{5}\right), \arctan\left(\frac{1}{239}\right)]$. Sachant qu'il est toujours assez aisé de retrouver les coefficients (4 et -1) de cette combinaison linéaire.

De cette façon les identités peuvent être réécrites plus succintement.

Table des valeurs de $D_{n,j}^k$

D value	Expression	Classical expression
$D_{2,1}^0$	$\psi\left(\frac{1}{2}\right)$	$-\gamma - 2\ln(2)$
$D_{1,1}^3$	$\psi\left(1,\frac{1}{3}\right) + \psi\left(1,\frac{2}{3}\right)$	$\frac{4}{3}\pi^2$
$D_{1,2}^3$	$\psi\left(1,\frac{1}{3}\right) - \psi\left(1,\frac{2}{3}\right)$	
$D_{1,1}^4$	$\psi\left(1,\frac{1}{4}\right) + \psi\left(1,\frac{3}{4}\right)$	$2\pi^2$
$D_{1,2}^4$	$\psi\left(\frac{1}{4}\right) - \psi\left(\frac{3}{4}\right)$	$16G$

$D^5_{0,3}$	$\psi\left(\frac{1}{5}\right)-\psi\left(\frac{2}{5}\right)-\psi\left(\frac{3}{5}\right)+\psi\left(\frac{4}{5}\right)$	$-2\ln(\phi)\sqrt{5}$
$D^5_{0,1}$	$\psi\left(\frac{1}{5}\right)+\psi\left(\frac{2}{5}\right)+\psi\left(\frac{3}{5}\right)+\psi\left(\frac{4}{5}\right)$	$-4\gamma-4\ln(5)\ -\ln(5-\sqrt{5})-\ln(5+\sqrt{5})$
$D^5_{1,1}$	$\psi\left(1,\frac{1}{5}\right)+\psi\left(1,\frac{2}{5}\right)+\psi\left(1,\frac{3}{5}\right)+\psi\left(1,\frac{4}{5}\right)$	$4\pi^2$
$D^6_{-1,2}$	$\psi\left(-1,\frac{1}{6}\right)-\psi\left(-1,\frac{5}{6}\right)$	$\ln(\frac{2\pi}{\Gamma\left({}^5/_6\right)^2})$
$Li_1({}^1/_2)$	$D^4_{-1,1}=\psi\left(-1,\frac{1}{4}\right)+\psi\left(-1,\frac{3}{4}\right)$	$\ln(2)$
$Li_2({}^1/_2)$	$(D^4_{-1,1})^2, D^4_{1,1}$	$\frac{\pi^2}{12}-\frac{\ln(2)^2}{2}$
$Li_3({}^1/_2)$	$D^4_{-1,1}D^4_{1,1}, (D^4_{-1,1})^3, D^4_{2,1}$	$\frac{7}{8}\zeta(3)-\frac{\pi^2\ln(2)}{12}+\frac{\ln(2)^3}{6}$
$Li_4({}^1/_2)$	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n n^4}$	
$D^4_{-1,2}$	$\psi\left(-1,\frac{1}{4}\right)-\psi\left(-1,\frac{3}{4}\right)$	$\ln(\frac{\pi\sqrt{2}}{\Gamma\left({}^3/_4\right)^2})$
$D^8_{-1,4}$	$\psi\left(-1,\frac{1}{8}\right)-\psi\left(-1,\frac{3}{8}\right)-\psi\left(-1,\frac{5}{8}\right)+\psi\left(-1,\frac{7}{8}\right)$	$\ln(\frac{2\pi^2\sqrt{2}}{\Gamma\left({}^5/_8\right)^2\Gamma\left({}^7/_8\right)^2})$
$D^4_{-2,1}$	$\psi\left(-2,\frac{1}{4}\right)+\psi\left(-2,\frac{3}{4}\right)$	$\frac{\ln(\text{Glaisher}-\text{Kinkelin})}{4}$

Sum	Linear combination	Classic expression or OEIS reference
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{\binom{2n}{n}}$	$D_{0,2}^3, 1$	For all k ≥ 0
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\binom{2n}{n} n^5}$	$D_{0,2}^3 D_{3,2}^3, D_{4,1}^4, D_{4,1}^2 D_{1,1}^4$	
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\binom{2n}{n} n^3}$	$D_{2,1}^3$	
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\binom{2n}{n} n^2}$	$(D_{0,3}^5)^2$	
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\binom{2n}{n} n}$	$D_{0,3}^5$	
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\binom{2n}{n} n^2}$	$D_{1,1}^3$	
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\binom{2n}{n} n^3}$	$D_{0,2}^3 D_{1,2}^3, D_{2,1}^3$	
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\binom{2n}{n} n^3}$	$D_{2,1}^3$	

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\binom{2n}{n}n^4}$	$D_{3,1}^4$	
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\binom{2n}{n}n^5}$	$D_{0,2}^3 D_{3,2}^3, D_{2,1}^4 D_{1,1}^4$	
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\binom{2n}{n}n^6}$	$D_{5,1,}^4 (D_{2,1}^4)^2, D_{1,1}^4 D_{3,1}^4$	
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\binom{2n}{n}n^7}$	$D_{0,2}^3 D_{5,2}^3, D_{6,1}^4 D_{4,1}^4, D_{6,1}^4, D_{2,1}^4 D_{3,1}^4$	
$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\binom{2n}{n}(2n+1)^2}$	$D_{1,2}^4, D_{-1,4}^{12} D_{0,2}^4$	
$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\binom{2n}{n}(2n+1)^2}$	$D_{1,1}^3, D_{-1,3}^5$	
$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}^2\frac{1}{2^{4n}(2n+1)}$	$D_{-2,2}^4$	$\frac{4G}{\pi}$
$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{\binom{2n}{n}(2n+1)}$	$D_{0,4}^{12}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\binom{2n}{n}n^6}$		

$\lvert E_{2n}\rvert$	$\frac{-D_{2n,2}^{4}}{\pi^{2n+1}4^{n}}$	Euler numbers A000364
$\lvert B_{2n}\rvert$	$\frac{D_{2n-1,1}^{2}4n}{\pi^{2n}(16^{n}-4^{n})}$	Bernoulli numbers A027641, A027642, A00367
$\lvert T_{2n}\rvert$	$\frac{2D_{2n-1,1}^{2}}{\pi^{2n}}$	Tangent numbers A000182
J_{2n} Jordan function	$\frac{D_{1,1}^{n}}{\zeta(2)}$	A007434
J_{3n} Jordan function	$\frac{D_{2,1}^{n}}{2\zeta(3)}$	A059376
J_{5n} Jordan function	$\frac{D_{4,1}^{n}}{24\zeta(5)}$	A059378

n	$D_{n,1}^4$	$D_{n,2}^4$
-4		$\frac{\beta(4)}{\pi^3}$
-3	$\frac{\zeta(3)}{\pi^2}$	
-2	$\ln(\text{Glaisher} - \text{Kinkelin})$	$\frac{Catalan}{\pi}$
-1	$\log(2)$	$\ln\left(\frac{\pi\sqrt{2}}{\Gamma\left({}^3/_4\right)^2}\right)$
0	γ , $\log(2)$	π
1	π^2	Catalan or $\beta(2)$
2	$\zeta(3)$	π^3
3	π^4	$\beta(4)$
4	$\zeta(5)$	π^5

Binomial Sums

k	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\binom{2n}{n} n^k}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\binom{2n}{n} n^k}$
-1	$1, D_{0,2}^3$	$1, D_{0,3}^5$
0	$1, D_{0,2}^3$	$1, D_{0,3}^5$
1	$D_{0,2}^3$	$D_{0,3}^5$
2	$D_{1,1}^3$	$(D_{0,3}^5)^2$
3	$D_{0,2}^3 D_{1,2}^3, D_{2,1}^3$	$D_{2,1}^3$
4	$D_{3,1}^4$	$D_{2,1}^3$
5	$D_{0,2}^3 D_{3,2}^3, D_{2,1}^4 D_{1,1}^4, D_{4,1}^4$	
6	$D_{5,1,}^4 (D_{2,1}^4)^2, D_{1,1}^4 D_{3,1}^4$	
7	$D_{0,2}^3 D_{5,2}^3, D_{6,1}^4 D_{4,1}^4, D_{6,1}^4, D_{2,1}^4 D_{3,1}^4$	
8		

Formulas for primes

$$29 = 432 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(e^{\pi n}-1)} + 132 \sum_{\substack{n=2 \bmod 4 \\ n>0}}^{\infty} \frac{n^3}{(e^{\pi n}-1)}$$

$$564172514549641 = \frac{\sqrt{5}}{5} \frac{\left(\psi\left(19,\frac{1}{5}\right) - \psi\left(19,\frac{2}{5}\right) - \psi\left(19,\frac{3}{5}\right) + \psi\left(19,\frac{4}{5}\right)\right)}{(2\pi)^{20}}$$

$$1150921 = \frac{\sqrt{5}}{5} \frac{\left(\psi\left(11,\frac{1}{5}\right) - \psi\left(11,\frac{2}{5}\right) - \psi\left(11,\frac{3}{5}\right) + \psi\left(11,\frac{4}{5}\right)\right)}{(2\pi)^{12}}$$

$$67 = \sqrt{5} \frac{\left(\psi\left(5,\frac{1}{5}\right) - \psi\left(5,\frac{2}{5}\right) - \psi\left(5,\frac{3}{5}\right) + \psi\left(5,\frac{4}{5}\right)\right)}{(2\pi)^{6}}$$

$$61 = \frac{\psi\left(6,\frac{1}{4}\right) - \psi\left(6,\frac{3}{4}\right)}{\pi^7 2^6}$$

$$41 = \frac{\psi\left(7,\frac{1}{3}\right) + \psi\left(7,\frac{2}{3}\right)}{\pi^8 2^8}$$

$$691 = \frac{\psi\left(11,\frac{1}{2}\right)}{\pi^{12} 2^8}$$

$$17 = \frac{\psi\left(7,\frac{1}{2}\right)}{\pi^8 2^3}$$

$$E_{2n} = \frac{-1}{2}\left(\frac{\psi\left(n,\frac{1}{8}\right) - \psi\left(n,\frac{3}{8}\right) + \psi\left(n,\frac{5}{8}\right) - \psi\left(n,\frac{7}{8}\right)}{\pi^{n+1} 4^n}\right)$$

$$E_{38} = \frac{-1}{2}\left(\frac{\psi\left(38,\frac{1}{8}\right) - \psi\left(38,\frac{3}{8}\right) + \psi\left(38,\frac{5}{8}\right) - \psi\left(38,\frac{7}{8}\right)}{\pi^{39} 4^{38}}\right)$$

= 23489580527043108252017828576198947741

$$E_{454} = \frac{-1}{2}\left(\frac{\psi\left(454, \frac{1}{8}\right) - \psi\left(454, \frac{3}{8}\right) + \psi\left(454, \frac{5}{8}\right) - \psi\left(454, \frac{7}{8}\right)}{\pi^{455} 4^{454}}\right)$$

= 84692691911699…5491581 (922 digits).

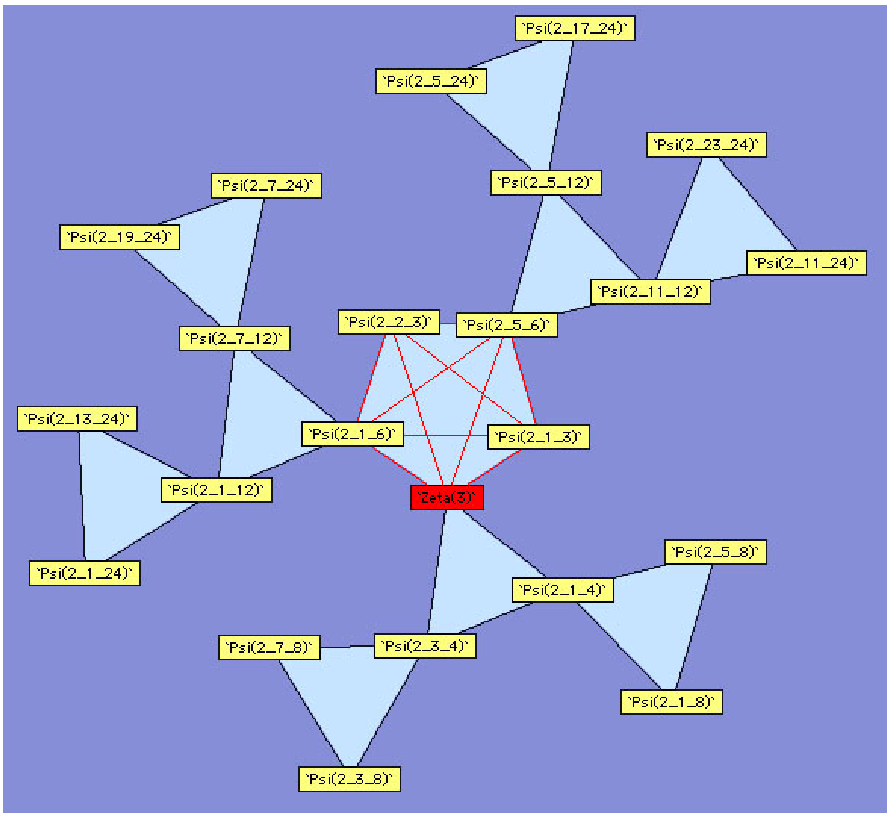
=

$$E_{510} = \frac{-1}{2}\left(\frac{\psi\left(510, \frac{1}{8}\right) - \psi\left(510, \frac{3}{8}\right) + \psi\left(510, \frac{5}{8}\right) - \psi\left(510, \frac{7}{8}\right)}{\pi^{511} 4^{510}}\right)$$

= 161118434469171090858021… 090858021 = (1062 digits).

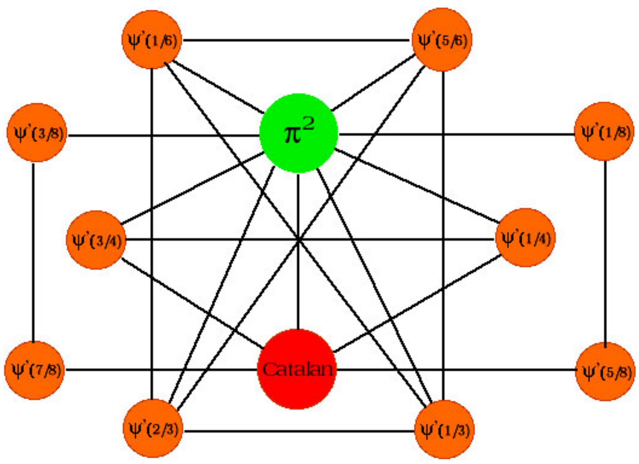
Integer relations with the function $\psi(2, {}^{a}/_{b})$

Example : $[\,\psi(2, {}^{2}/_{3}), \psi\left(2, {}^{5}/_{6}\right)] \;\equiv\; \zeta(3)$



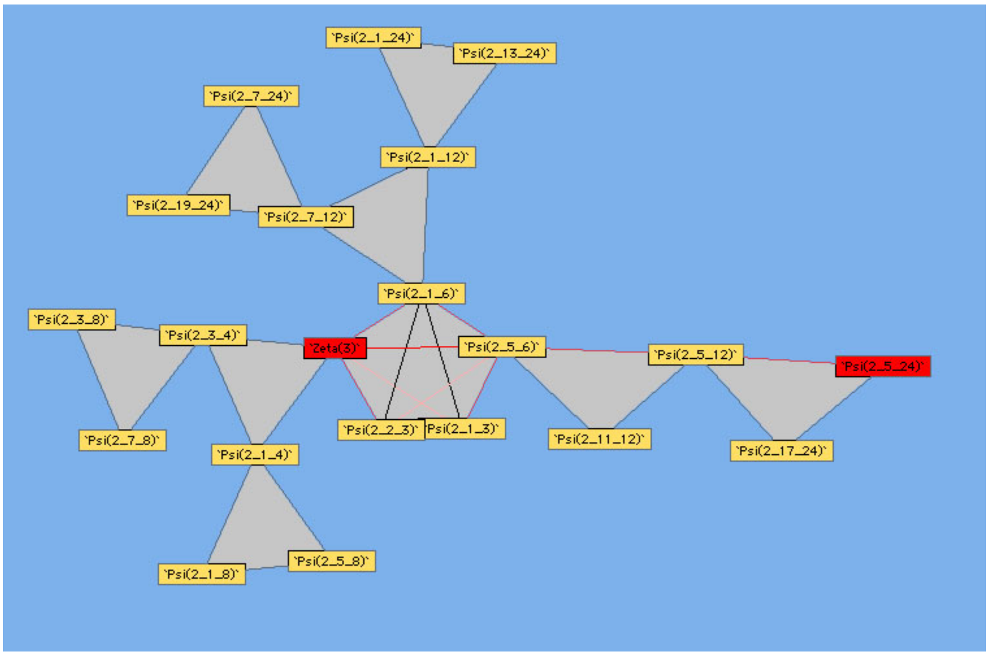
Integer relations with the function $\psi(1, {}^{a}/_{b})$

Example : $[\,\psi(1, {}^{1}/_{6}), \psi(1, {}^{1}/_{3})] \;\equiv \pi^2$



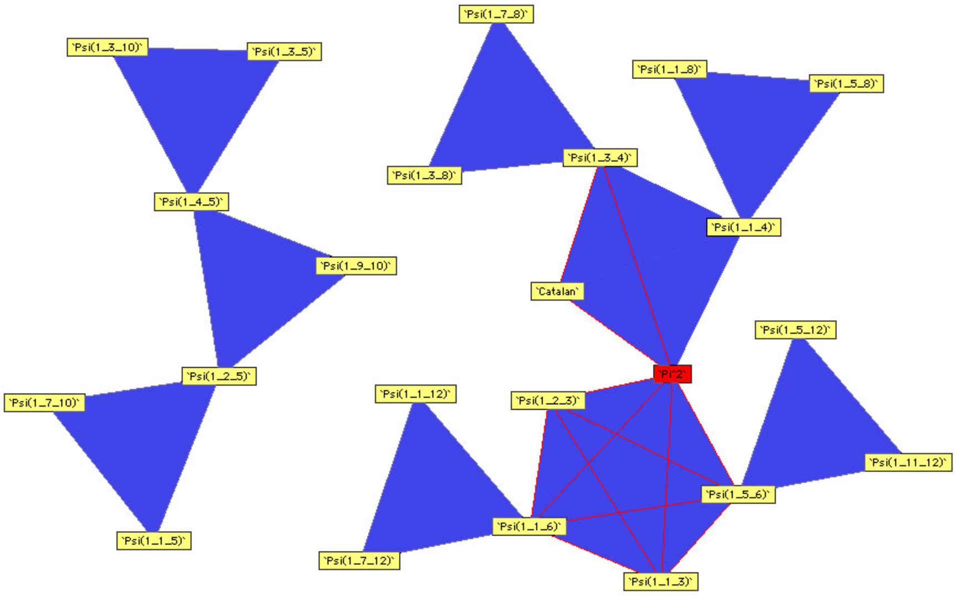
Integer relations with the function $\psi(2, {}^{a}/_{b})$

Example : $[\,\psi(2, {}^{1}/_{4}), \psi(2, {}^{3}/_{4})] \equiv \zeta(3)$



Integer relations with the function $\psi(1, {}^{a}/_{b})$

Example : $[\,\psi\left(1, {}^{3}/_{10}\right), \psi\left(1, {}^{3}/_{5}\right), \psi\left(1, {}^{4}/_{5}\right)] \equiv 0$



References

[1] Milton Abramowitz and Irene Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, New York: Dover Publications , 1972 (original in 1964).

[2] Steven Finch, Central binomial coefficients, http://www.people.fas.harvard.edu/~sfinch/csolve/cbc.pdf

[3] Eric Weissstein, Dirichlet L-series, http://mathworld.wolfram.com/DirichletL-Series.html

[4] Wikipedia : Dirichlet Character http://en.wikipedia.org/wiki/Dirichlet_character

[5] Psi or polygamma function , Maple 18, http://www.maplesoft.com/support/help/maple/view.aspx?path=Psi

[6] Espinosa, O., and Moll, V. A Generalized Polygamma Function. Integral Transforms and Special Functions, (April 2004): 101-115.

[7] Simon Plouffe, The Art of Inspired Guessing, http://www.plouffe.fr/simon/inspired.html also on the vixra site http://vixra.org/author/simon_plouffe and on the ArXiv site http://arxiv.org/find/all/1/all:+AND+simon+plouffe/0/1/0/all/0/1

[8] Richard J. Mathar, Table of Dirichlet L-Series and Prime Zeta Modulo Functions for Small Moduli http://arxiv.org/abs/1008.2547