1a

Les décimales de π

ou

La petite histoire
de la longue division

par
Simon Plouffe

L'exposé se trouve ici :
http://www.lacim.uqam.ca/~plouffe/articles/division.doc
ou
http://www.lacim.uqam.ca/~plouffe/articles/division.pdf
qui est plus petit.

1b

0) Les nombres rationnels et les autres

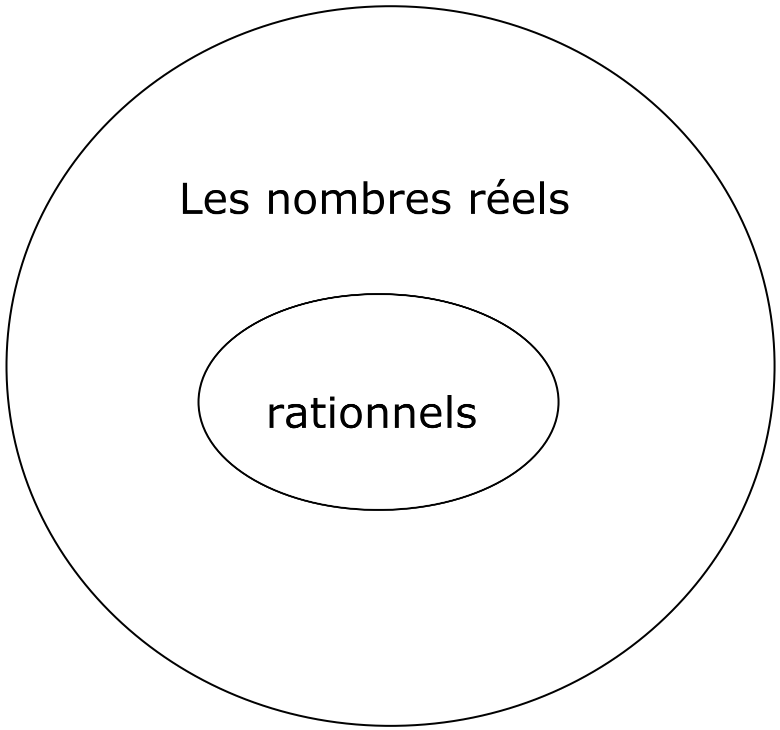
1) Calcul de 1/n et la représentation sur le disque unité

2) Le calcul de 1/n est très facile

3) π est un log: $\pi = \frac{\log(-1)}{i}$ et quelques polylogs.

4) L'inverseur 2007 et les programmes *Integer Relations*, PSLQ ou LLL

0) Les nombres rationnels et les autres



Que sait-on sur les décimales des nombres réels en général (transcendants, algébriques, rationnels)?

très peu, nicht viel,
not much, no mucho

Les nombres transcendants sont les réels qui ne sont pas algébriques comme $\sqrt{2}$ =

1.41421356237309504880… et sont les plus nombreux

La plupart des réels sont transcendants… mais la plupart des réels avec lesquels les humains travaillent sont en fait rationnels.

Quelques calculs connus :

Le Seti : 10^{21}

Le film Némo (disney) : 10^{18}

Shrek III : 20 million d’heures de CPU ou $\approx 10^{19}$

$\pi(x)$: 10^{21} , le nombre de nombres premiers, Zimmerman et Deléglise

Limite ultime de Feynman : 10^{121}

Une mole ou 18 ml d’eau = 6.02×10^{23} molécules.

Un peu d’histoire

1844 : Liouville imagine un nombre β qui ne peut pas être algébrique (racine d’une équation).

$$\beta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}} = 0.11000100\ 0000000000\ 000001...$$

Il est transcendant et surtout très proche des rationnels.
Puis peu après quelques nombres issus de l'analyse classique ont été démontrés comme faisant partie de cette classe (se dont on se doutait).

1873 Hermite : e = 2.718281828459045…

1882 Lindemann : π = 3.14159265358979…
1934 Gelfond a^b est trans. si a est algébrique (pas 0 ou 1) et b algébrique irrationnel, par exemple : $2^{\sqrt{2}}$ est tr.
Champernowne : Le nombre 0.12345678910111213… est tr. mais aussi les nombre P(0)P(1)P(2)P(3)… ou P(n) est un pol. à valeurs entières.

Depuis, on a découvert d'autres nombres éparses qu'on a classé comme des curiosités.

sin(1), $J_0(1)$, log(π), $\Gamma(1/4)$.

La valeur de sin(1) est particulière,

Si on examine le signe de $\sin(2^n)$ on s'aperçoit que le signe suit exactement le développement binaire de $1/2\pi$.

sin(1)=	+.841470984808…
sin(2)=	+.909297426826…
sin(4)=	-.756802495308…
sin(8)=	+.989358246623…
sin(16)=	-.287903316665…
sin(32)=	+.551426681242…
sin(64)=	+.920026038197…
sin(128)=	+.721037710502…
sin(256)=	-.999208034107…
sin(512)=	+.0795184940129…
sin(1024)=	-.158533380044…
sin(2048)=	-.313057012790…
sin(4096)=	-.594641987608…
sin(8192)=	-0.956173152843
sin(16384)=	-0.559938465669
sin(32768)=	+0.927856333414
sin(65536)=	+0.692065453823
sin(131072)=	-0.999113788951

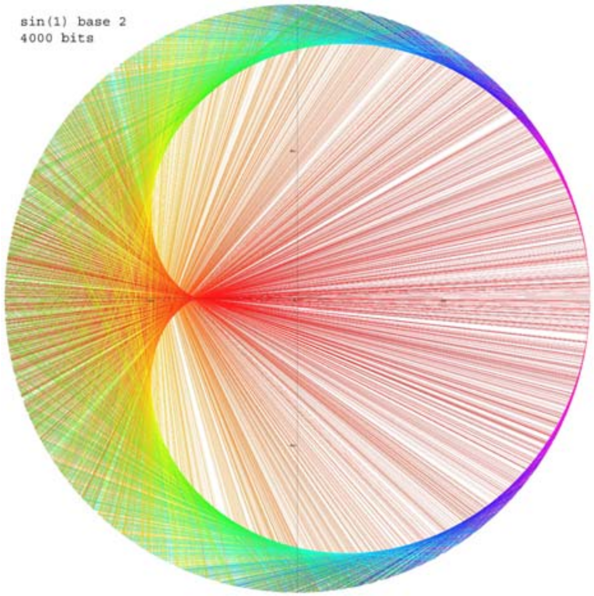
et le développement binaire de $1/2\pi$ est 0,00101000101111100110000001…

4a

Quand le signe de sin(2^n) est + le n'ième bit est 0 sinon le n'ième bit est 1.

Donc on peut avoir le n'ième bit de $1/2\pi$???!, pas tout à fait car on a besoin d'une valeur de sin(1) à une précision arbitraire.

En fait on pourrait peut-être prouver que $1/2\pi$ est normal en base 2 en se basant sur cette propriété étant donné qu'on sait sin(1) irrationnel ?



4b

Quelle est la règle pour les chiffres en colonne ?

NATURAL LOGARITHMS Table 4.2

x	$\ln x$	x	$\ln x$	x	$\ln x$
1.950	0.66782 93725 756554	2.000	0.69314 71805 599453	2.050	0.71783 97931 503168
1.951	0.66834 20616 409742	2.001	0.69364 70556 015964	2.051	0.71832 74790 902436
1.952	0.66885 44879 909007	2.002	0.69414 66808 930288	2.052	0.71881 49273 085231
1.953	0.66936 66518 945419	2.003	0.69464 60566 836812	2.053	0.71930 21380 367965
1.954	0.66987 85536 205910	2.004	0.69514 51832 226184	2.054	0.71978 91115 063665
1.955	0.67039 01934 373291	2.005	0.69564 40607 585325	2.055	0.72027 58479 481979
1.956	0.67090 15716 126256	2.006	0.69614 26895 397438	2.056	0.72076 23475 929187
1.957	0.67141 26884 139392	2.007	0.69664 10698 142011	2.057	0.72124 86106 708201
1.958	0.67192 35441 083186	2.008	0.69713 92018 294828	2.058	0.72173 46374 118579
1.959	0.67243 41389 624037	2.009	0.69763 70858 327974	2.059	0.72222 04280 456524
1.960	0.67294 44732 424259	2.010	0.69813 47220 709844	2.060	0.72270 59828 014897
1.961	0.67345 45472 142092	2.011	0.69863 21107 905150	2.061	0.72319 13019 083220
1.962	0.67396 43611 431713	2.012	0.69912 92522 374928	2.062	0.72367 63855 947682
1.963	0.67447 39152 943240	2.013	0.69962 61466 576544	2.063	0.72416 12340 891148
1.964	0.67498 32099 322741	2.014	0.70012 27942 963706	2.064	0.72464 58476 193163
1.965	0.67549 22453 212246	2.015	0.70061 91953 986463	2.065	0.72513 02264 129961
1.966	0.67600 10217 249748	2.016	0.70111 53502 091222	2.066	0.72561 43706 974468
1.967	0.67650 95394 069220	2.017	0.70161 12589 720747	2.067	0.72609 82806 996312
1.968	0.67701 77986 300617	2.018	0.70210 69219 314172	2.068	0.72658 19566 461827
1.969	0.67752 57996 569885	2.019	0.70260 23393 307004	2.069	0.72706 53987 634060
1.970	0.67803 35427 498971	2.020	0.70309 75114 131134	2.070	0.72754 86072 772777
1.971	0.67854 10281 705832	2.021	0.70359 24384 214840	2.071	0.72803 15824 134471
1.972	0.67904 82561 804437	2.022	0.70408 71205 982797	2.072	0.72851 43243 972366
1.973	0.67955 52270 404783	2.023	0.70458 15581 856084	2.073	0.72899 68334 536425
1.974	0.68006 19410 112898	2.024	0.70507 57514 252191	2.074	0.72947 91098 073356
1.975	0.68056 83983 530852	2.025	0.70556 97005 585025	2.075	0.72996 11536 826616
1.976	0.68107 45993 256761	2.026	0.70606 34058 264916	2.076	0.73044 29653 036422
1.977	0.68158 05441 884799	2.027	0.70655 68674 698630	2.077	0.73092 45448 939753
1.978	0.68208 62332 005204	2.028	0.70705 00857 289367	2.078	0.73140 58926 770357
1.979	0.68259 16666 204287	2.029	0.70754 30608 436777	2.079	0.73188 70088 758759

Le calcul de 1/n est très facile.

Facile, entendons-nous, on peut calculer 1/n à n'importe quelle position si n <<∞.
bien sûr.

Mais revenons au calcul ordinaire de 1/n comme à la petite école avec la longue division.

1.0000000… divisé par 17 est

0,05882352941176470588235294117647...

On remarque que $588^2+2353^2=5882353$ mais c'est juste une coïncidence qui se trouve à être la seule connue de ce type!

Cette trouvaille est une rareté parmi les nombres réels. Dans le domaine de nombres réels : on a jamais rien trouvé d'intéressant dans les quelques 2000 milliards de chiffres calculés et on sait encore moins comment en trouver d'autres à part quelques coïncidences comme $e^{\pi} - \pi = 19.999099979189…$

Propriétés remarquables de certains nombres rationnels

Si on a un n et que $2^{n-1} = 1 \bmod n$ alors à toute fin pratique n est premier. (Carl Pomerance 1980).

C'est une variante du *petit théorème de Fermat*. Il y a des contre-exemples simples et connus, mais si n est très grand ça revient à faire le test de Mersenne. Ça ne donne qu'un premier probable faible en base 2 mais ça suffit pour détecter un nombre premier.

Les décimales de l'inverse d'un premier sont toujours divisées en 2 blocs complémentaires. Par exemple :
05882352 + 94117647 = 99999999
142 + 857 = 999

Étonnante propriété mais peu exploitée :

Si on peut savoir la longueur de la période de l'inverse d'un nombre alors on en a assez pour le factoriser, à quelle moitié de la période est-on ?

En d'autres mots : pour un m composé donné trouver le plus petit n tel que $m^n = 1 \mod m$.

Les <RSA challenge numbers> ne sont plus actifs, terminés depuis le 1er janvier 2008.

Le déplacement latéral du point décimal est trivial dans la base considérée : $1/(17*10^n)$ est trivial à calculer si on sait calculer 1/17.

Comment calcule t-on l'inverse d'un nombre premier à haute précision ?

On y va, une décimale à la fois et on peut étendre un peu plus en utilisant les résidus, par exemple $10^8 \mod 17$ est 16 et donc en

continuant avec 16/17 = 0.9411764705… on arrive à aller vers la droite avec une calculatrice à 8 chiffres comme celle-ci.

ma première calculette en 1971

On remarque aussi qu'en prenant évidemment des nombres (n) plus grands ça marche à condition que n soit de taille raisonnable mais surtout que la k'ième décimale de 1/n est la solution de

$$10^k = r \mod n$$

Les décimales repartent avec r/n au rang k+1.

Plus précisément : la k'ième décimale est

$$[10*r/n]$$

[] est la partie entière, en d'autres mots.

$$\{10^r / n\} = \{r/n\}$$

Mais en fait quel est le problème avec ça, c'est parfaitement trivial non ?

Pas exactement, c'est lorsque k >> 1 que ça pose un problème, si on y va 1 décimale à la fois…

Y'a un truc qui date de 2200 ans (selon D.E. Knuth, TAOCP, vol 2.) qui permet d'aller plus vite qu'on appele la méthode binaire (Binary Powering Method).

Si on veut calculer 1/257 en partant de la position 1000 on a besoin de calculer :

$$10^{999} = r \bmod 257$$

On a besoin de savoir quel est le r.

On part avec 1, 10^1, 10^2, 10^3, 10^6, 10^7, 10^{14}, 10^{15}, 10^{30}, 10^{31}, 10^{62}, 10^{124}, 10^{248}, 10^{249},

10^{498}, 10^{499}, 10^{998} et finalement 10^{999} qui est 96 mod 257.

Donc, 96/257 = 0.373540… sont les décimales à partir du rang 1000, la 1000ème décimale de 1/257 est 3.

Ceci est permis grâce au truc simple suivant,

$$\text{si } b^m = r \bmod n$$

$$\text{alors } (b^m)^2 = r^2 \bmod n.$$

En multipliant par b et en mettant au carré de façon judicieuse on arrive à 10^{999} en quelques étapes seulement, une dizaine.

En fait la représentation de 999 en binaire contient l'information codée à l'envers pour se rendre à 1000.

C'est comme le *warp speed* dans Star Trek comparé à la méthode '1 décimale à la fois de l'école…'.

1976 : premier programme BASIC pour calculer les inverses des premiers sur un PDP-11, ça utilisait beaucoup de papier…

1987 : découverte de la constante arctan(1/2)/π qui peut être calculée bit par bit à l'aide d'un algortithme n'utilisant que des nombres rationnels. (constante de Plouffe). Cette constante peut-être calculée à 20 bits de précision avec la règle et le compas.

1993 : Premiers programmes pour le calcul d'arctan en base 10 mais sans réaliser que c'était un exploit.

1995 : le 7 août, découverte de l'algorithme pour calculer log(2) en binaire en temps très court et qui ne demande presque pas de mémoire.

1995 : le 11 août, programme en BASIC pour calculer la 100,000,000 ème décimale de log(9/10), le programme a 432 caractères.

1995 : (le 19 septembre à 0h29 heure du pacifique), formule pour π en base 2 ou 16.

1996 : Algorithme pour calculer π en toute base mais qui demande un temps d'exécution de l'ordre de $O(n^3)$.

1997 : première ébauche de la possibilité de calculer π en temps linéaire en n'utilisant que des inverses de premiers.

2007 : toujours en travaux sur le temps linéaire, si ça fonctionne on pourrait se rendre au 10^{22} ième bit de π.

On peut étendre le raisonnement aux logarithmes et polylogarithmes.

La prochaine étape est de réaliser que le nombre log(2) est particulièrement facile à calculer en base 2.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n} = \frac{1}{1*2}+\frac{1}{2*2^2}+\frac{1}{3*2^3}+\ldots=\log(2).$$

C'est une belle série parce que le calcul de 1/n avec $1/2^k$ à la position n n'est qu'un déplacement LATÉRAL du point décimal en binaire! On a juste à savoir calculer (pour chaque terme) 1/n, le reste n'est que du déplacement.

En d'autres mots: le nombre

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n10^n} = \frac{1}{1\cdot 10}+\frac{1}{2\cdot 10^2}+\frac{1}{3\cdot 10^3}+\ldots=-\log(\frac{9}{10})$$

Peut être calculé très rapidement en base 10 et aussi vite que 1/n.

0,500000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0,125000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0,041666666666666666666666666666666666666666666666666666666667
0,015625000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0,006250000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0,002604166666666666666666666666666666666666666666666666666667
0,001116071428571428571428571428571428571428571428571428571429
0,000488281250000000000000000000000000000000000000000000000000
0,000217013888888888888888888888888888888888888888888888888889
0,000097656250000000000000000000000000000000000000000000000000
0,000044389204545454545454545454545454545454545454545454545455
0,000020345052083333333333333333333333333333333333333333333333
0,000009390024038461538461538461538461538461538461538461538462
0,000004359654017857142857142857142857142857142857142857142857
0,000002034505208333333333333333333333333333333333333333333333
0,000000953674316406250000000000000000000000000000000000000000
0,000000448787913602941176470588235294117647058823529411764706
0,000000211927625868055555555555555555555555555555555555555556
0,000000100386770148026315789473684210526315789473684210526316
0,000000047683715820312500000000000000000000000000000000000000
0,000000022706531343005952380952380952380952380952380952380952
0,000000010837208140980113636363636363636363636363636363636364
0,000000005183012589164402173913043478260869565217391304347826
0,000000002483526865641276041666666666666666666666666666666667
0,000000001192092895507812500000000000000000000000000000000000
0,000000000573121584378756009615384615384615384615384615384615
0,000000000275947429615697337962962962962962962962962962962963
0,000000000133046082087925502232142857142857142857142857142857
0,000000000064229143076929552801724137931034482758620689655172
0,000000000031044085820515960520833333333333333333333333333333
0,000000000015021331848636750252016129032258064516129032258065
0,000000000007275957614183425903320312500000000000000000000000
0,000000000003527737025068630741003787878787878787878787878788
0,000000000001711990026866688447840073529411764705882352941176
0,000000000000831539013049534388950892857142857142857142857143
0,000000000000404219867454634772406684027777777777777777777778
0,000000000000196647503086903853792757601351351351351351351351
0,000000000000095736284397150340833162006578947368421052631579
0,000000000000046640753937073242970002003205128205128205128205
0,000000000000022737367544323205947875976562500000000000000000
0,000000000000011091398802106880950183403201219512195121951220
0,000000000000005413658939124572844732375372023809523809523810
0,000000000000002643879947014326273008834484011627906976744186
0,000000000000001291895883200182156129316850142045454545454545
0,000000000000000631593542897866831885443793402777777777777778

Calcul de $\frac{1}{n2^n}$ à la $10^{\text{ème}}$ position.

10a

Tableau pour le calcul de log(2) à la 10ème position et vu que $1/(k2^k)$, le terme général de la série qui est convergente est aussi petit qu'on veut alors on arrive à avoir une erreur en deça du résultat escompté.

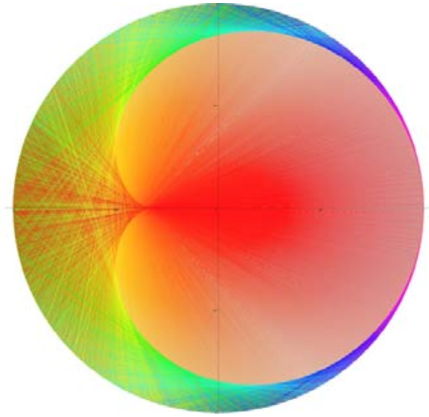
Mais pourquoi le calcul de 1/n avait-il un intérêt si grand au départ ?

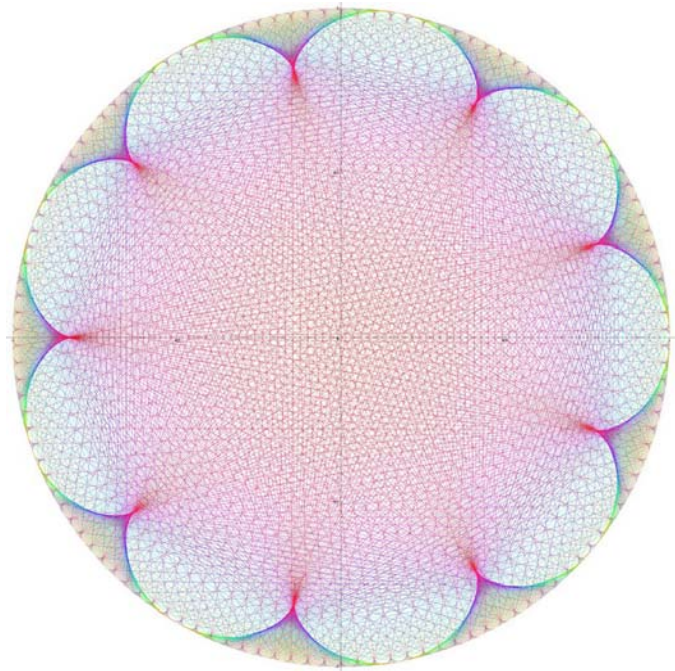
C'est que les résidus successifs pour un premier comme avec 17 ou 257 sont curieusement 'arrangés' dans le désordre.
Si on prend une base comme 2 ou 10 et qu'on fait une liste de tous les résidus mod p, on peut en faire un graphe sur le cercle unité, i.e..

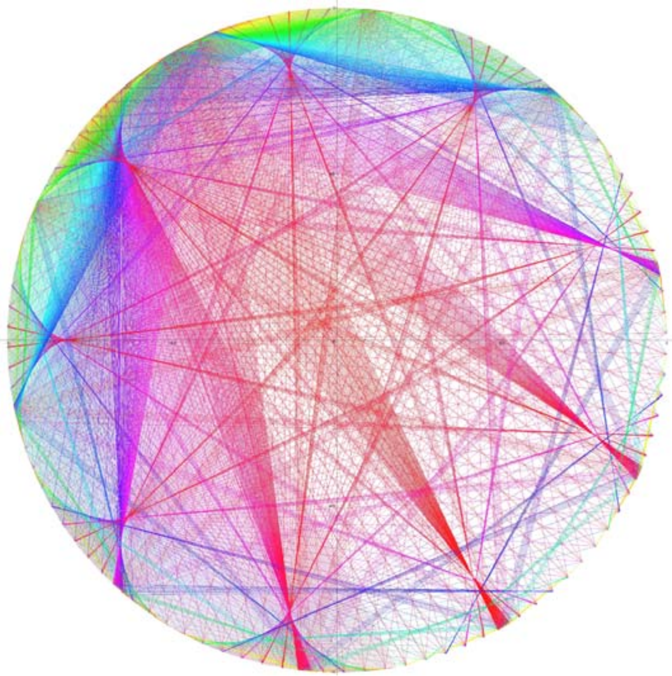
On pose,
$b^k = r \bmod n$, avec k=1..(p-1) et pour chaque r :

On pose $r/p \to \exp(2\pi i r/p)$.

10b







Respectivement on a :

1) 2^n mod 10037
2) 10^n, mod 1229
3) les 9950 premières décimales de pi
4) 1/8219 en base 10 ou 10^n mod 8219
5) un nombre pathologique en base 10 (Champernowne).

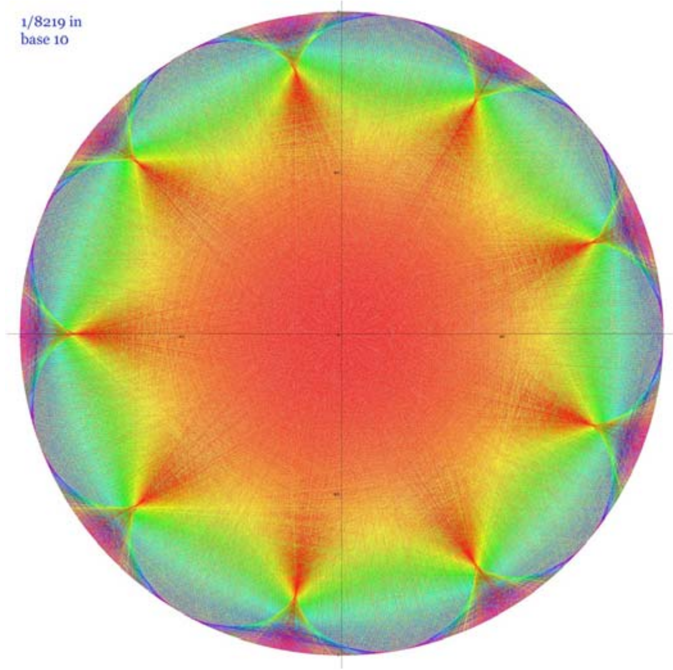
La couleur est proportionnelle à la longueur.

En prenant les cercle unité pour représenter une fonction de [0,1] → [0,1] on a qu'à

tracer les points successifs et voir ce qui se passe avec la distribution.

Il y en a d'autres ici :

http://www.lacim.uqam.ca/%7Eplouffe/distributions%20modulo%201/

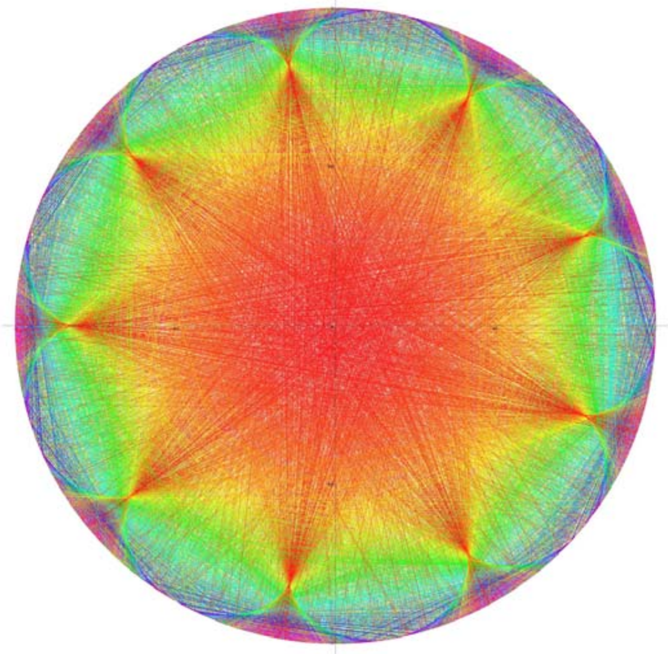


En fait les droites succ. représentent les décimales vues ‘graphiquement’, étant donné que le développement de 1/p en base b est toujours périodique.

Le nombre de pics est b-1.

Donc avec un rationnel on obtient un dessin assez joli. Mais alors avec Pi en base 10 qu’obtient-on ???!

Ceci :



Il y a bien 9 pics comme prévu mais pas de motif malheureusement.

Mais… π est irrationnel on le sait, mais pourquoi ne pourrait-on pas prévoir les décimales comme avec 1/p en base 2 ou 10 ???

Je me suis posé la question depuis 1974.

Les décimales des inverses des premiers sont mathématiquement prévisibles et font de beaux dessins mais pourquoi les décimales de π sont elles mélangées au hasard ?

Il y a de belles identités pour π qui existent déjà mais…

La série pour le log est

$$-\log(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6} + .$$

En posant x=1/2 on trouve log(2), si on prend un terme sur 2, on se retrouve avec

$$\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

et log(3).

La série arctan(x) est une autre variante du log.

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \frac{(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{2n+1}$$

Donc on peut calculer arctan(1/2) également, en base 2 évidemment…

Et avec le nombre π ?

On connaît la série d'Euler :

$$\frac{\pi}{4} = \arctan(\frac{1}{2}) + \arctan(\frac{1}{3})$$

Ça donne π en base 2 et 3 en même temps ?, impossible.

Mais y'a-t-il moyen d'avoir la série qu'on veut pour un nombre réel ?

Ça prend des outils modernes comme l'algorithme LLL ou PSLQ qu'on appelle aussi 'Integer Relation Algorithms'.

Mais… on a log(9/10) en base 10, log(5) en base 2 mais on a toujours pas log(2) en base 10 à cause de la série log(2), y'a comme pas moyen.

On peut combiner des logs, ça on sait faire et après tout π est un logarithme aussi non ?

Oui c'est : $\pi = \log(-1)/i$,… la fameuse formule d'Euler à l'envers.

Mais revenons au séries qu'on cherche comme π en base 2 et autres.

Pour ça il faut remonter aux nombres rationnels et les fractions continuées ou continues.

En court.

Si on a un nombre réel x, une approximation de x sera donnée par le développement de x en fraction continue.

Par exemple si x = gamma = 0.57721566… alors une des approximations est 71/226, c'est-à-dire :

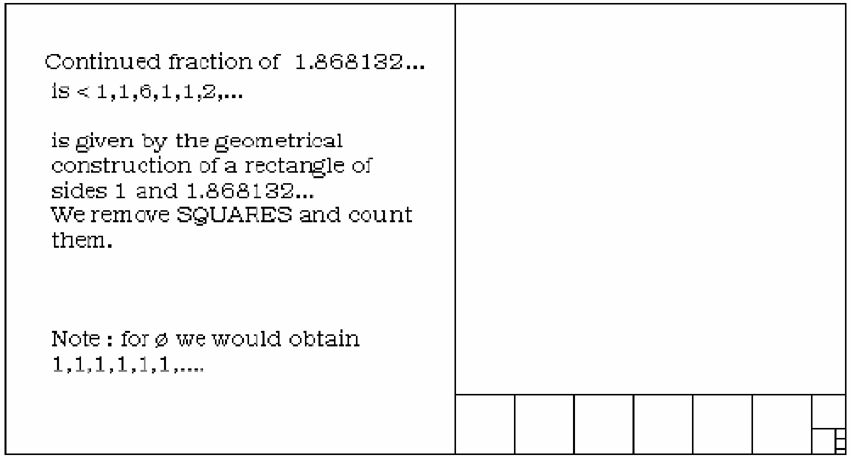
$$226 \text{ gamma} \approx 71.$$

Ça revient à dire : $ax - b = 0$, et 0 est petit.
L'algorithme (très ancien) est

$$y_n = \left[\frac{1}{x_n}\right] \text{ and } x_{n+1} = \left\{\frac{1}{x_n}\right\}$$

Les y(n) sont les quotients, { } est la partie fractionnaire et [ ] est le plancher de x.

On peut représenter géométriquement le processus en 2 dimensions, pour un nombre comme 1.868132… on obtient 1,1,6,1,1,2…



Et (bien connu) avec le nombre d'or on obtient juste des '1' dans le dév. en fraction continue.

On s'est aperçu vers les 1800 que d'aller de la dimension 2 à ++ était passablement difficile.

Oui, pour avoir par exemple 2 nombres réels qui s'annulent avec des entiers X, Y, Z il faut :

$$aX + bY + Z \approx 0$$

Voici une liste de ceux qui ont essayé :

Gauss : algorithme 60 degrés,
Hermite, Jacobi, Poincaré, Perron, Brun,
Ferguson & Forcade 1979,
Lenstra-Lenstra-Lovasz 1982,
Lagarias and Odlyzko 1985, …
Bailey et Ferguson 1992-1998,…

Les algorithmes LLL, PSLQ et autres sont couramment implantés dans des programmes comme Maple et Mathematica.

Mais comment ça marche en fait :

Voici un algorithme maison.

On prend 2 nombre réels, a, b

do
{| a - b |} = c
a ← b
b ← c
od

{ } est la partie fractionnaire.

En itérant un certain nombre de fois on obtient des entiers X, Y, Z

$$aX + bY + Z \approx 0$$

Par exemple avec π et exp(1) après 100 itérations:

$$9257454e - 5824723\pi = 6865462$$

Avec 0 ≈ 0.9089493e-9

Ça fonctionne oui mais… si on cherche un 0 qui soit de l'ordre 10^{-64} ça prend bien trop de temps et aussi si on a a,b,c,d,e…..

C'est exactement le point.

On y arrive à tâtons ou en utilisant la méthode du HSG (High Speed Guessing). Mais c'est pas encore assez.

Il a fallu attendre 1982 pour que quelqu'un trouve un algorithme *général* qui soit optimal et réalisable pour les humains.

En terme d'algorithmique on avait enfin obtenu quelque chose comme $O(n^8)$ ou dit en mots : calculable en temps polynomial.

Ne peut-on pas simplement 'ploguer' Maple/Mathematica avec une intégrale ou quelque chose comme ça et résoudre le problème : NON.

Pourquoi? Pour plusieurs raisons.

Ça prend le livre orange de Lewin d'abord et comprendre un peu ce qui se passe.

On a cette formule connue :

$$\frac{\pi}{2} = \arctan(1/\sqrt{2}) + \arctan(1/\sqrt{8})$$

Si on se débarasse de √2 on obtient un arctan.

$$\pi\sqrt{2} = \arctan(1/2) + \arctan(1/8)$$

C'est un coup de pot.

Pas si mal quand même, si f(x) est

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i x^{2i+1}}{2i+1}$$

Donc en prenant un 'pas' de 2 ça marche.

Et si f(x) est avec un 'pas' de 3

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i x^{2i+1}}{3i+1}$$

On en trouve une autre avec log(3) et π*sqrt(3).

$$-9f(1/8) = \pi\sqrt{3} + 3\log(3)$$

En regardant un peu plus dans le fameux livre orange on trouve quelques perles qui se peuvent en base 2 comme π^2, $\log(2)^3$.

Mais tout de même ça m'a pris un bon mois pour réaliser qu'il y avait un motif dans les formules en écrivant :

Si le 'pas' ou l'index de la série en log est (avec la série f(x)).

n alors on a des logarithmes ordinaires

2n+1	→ $\pi\sqrt{2}$.
$(-1)^n(2n+1)$	→ séries arctan
3n+1	→ $\pi\sqrt{3}$
4n+1	→ surprise!

L'équation originale trouvée était alors :

$$\pi = 4\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}1, \frac{1}{4} \\ \frac{5}{4}\end{matrix}; -\frac{1}{4}\right) + 2arctg\left(\frac{1}{2}\right) - \log(5)$$

Ici F est une variante de la série log originale avec signes alternés.

Toutes ces séries, log, arctan avec un pas de 2 ou 3 ou 4 alternées ou non sont des logarithmes quand même en fait.

Une fois compris le motif, l'ordinateur n'a pris que 2 secondes avec le LINDEP du programme Pari-Gp pour trouver à 0h29 (heure du pacifique) le 19 sept. 1995 la formule.

et si on prend $(an+b)^2$, on devrait avoir catalan, π^2 et $\pi \cdot \cdots$, $\pi \log(2)$?

à peut près à 0h29 le 19 sept 95

donc $\pi = 4f(1/4) + 2arctg(1/2) - \log(5)$

Il y a une variété de façons de représenter la série puisqu'on peut ‘craquer’ les termes individuels à l’infini (ce sont des logs qui se divisent toujours en 2 si on veut).

Donc en ré-arrangeant la série on obtient celle qui est connue.

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6}\right)\frac{1}{16^k}$$

En voici une variante avec les parties entières, je préfère cette dernière.

$$\frac{\pi}{8} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[\frac{n+7}{8}\right] - \left[\frac{n+6}{8}\right] + \left[\frac{n+1}{8}\right] - \left[\frac{n+4}{8}\right]}{n2^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}}$$

Évidemment, une fois trouvée, pour la prouver, on peut y arriver de différentes façons mais qui n’ajoutent pas d’idées nouvelles en fait.

Voici ma version la série 1 est égale à la série 2, en décomposant les termes on prouve que c’est égal, voilà.

On s’assoit 5 minutes pour réfléchir et on prend 4 scotch!

Un an plus tard j’ai réalisé la trivialité suivante :

1/ab est une combinaison linéaire de 1/a et 1/b, 1/21 = 1/3 – 2/7.

Ça veut dire qu’un nombre comme 1/binomial(100,50) peut se calculer aussi même si on a pas de puisance de 2 ou 10.

En d'autres mots le nombre

1/100891344545564193334812497256

est égal à la somme des fractions :

```
     20  10         13  10                 23  41
5/8, --, --, 2/13, --, --, 4/29, 5/31, --, --,
     81  11         17  19                 53  59

   29  37  33  19  36        13  88
   --, --, --, --, --, 7/83, --, --
   61  67  71  73  79        89  97
```

et ce sont tous de *petits* nombres.

En fait ça veut dire (moyennant un certain travail) qu'une série comme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^{n}}{C_{n}^{2n}} = \pi + 3$$

Ici C(2n,n) est le binomial central.

Due à Newton peut être utilisée pour calculer π en base 10, ou n'importe quelle base en fait.

Oui mais bon il y a un coût important :

Ça coûte plus cher en CPU et en mémoire.

Au lieu d'avoir O(n*log(n))
Ce qui est est excellent on se retrouve avec $O(n^3*\log(n))$.

Le gain en généralité est perdu en efficacité, c'est fréquent en mathématiques.

Tout de même certains ont amélioré mon algorithme (Bellard et ensuite Gourdon) pour le rendre à $O(n^2\log(n))$.

En français, on peut calculer π en base 10 avec peu de mèmoire à la 1000000ème décimale en temps raisonnable mais pas tellement plus.

Le présent record de calcul de π a été établi par Colin Percival à Vancouver avec une série de machines en parallèle en 2001 :

La 1000000000000000 ième

position binaire de π est 0

Voici une gallerie de machines qui ont servi au cours des années.

la hp-45 en 1974

La hp-67 programmable avec des cartes, 1976.

22a

la HP-15C, 1983. une vraie merveille.

Mon premier vrai ordinateur, 1984. Avec un module de 16K(!) et l'imprimante.

22b

Apple IIc, 1985, premières tables de nombres réels (environ 5 megs et des boîtes pleines de disquettes).

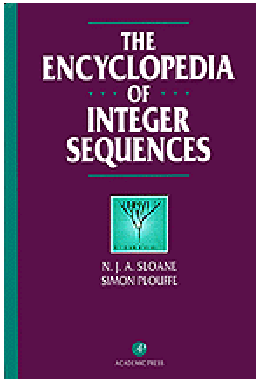
Mac plus, 1987, mon premier catalogue de nombres sur Hypercard. Premier disque dur, 60 megs : 1260$.

Un peu de PUB

INVERSE SYMBOLIC CALCULATOR

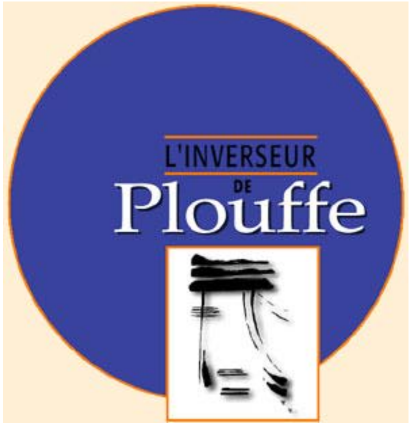
Le Inverse Symbolic Calculator sur le net, 18 juillet 1995 à Vancouver.

et fonctionne toujours : http://oldweb.cecm.sfu.ca/projects/ISC/ISCmain.html



Le livre en 1995 et le site des suites avec Sloane, maintenant : 135000 suites et 300 personnes y participent.
http://www.research.att.com/~njas/sequences/

Le site internet de l'inverseur à l'UQÀM (1998).



201 million de constantes :
http://www.lacim.uqam.ca/~plouffe/plouffe_inverter_tables/

http://www.lacim.uqam.ca/%7Eplouffe/plouffeinverter.txt est le programme interactif (Maple).

Inverseur 2008
2.303 milliards de constantes
278 gigaoctets
standardisés à 64 décimales
147 392 000 000 chiffres

Peut trouver une expression mathématique pour tout ce qui a 13 chiffres et moins.