Klaus Piontzik

Die Zahl π – Mittelalter, Neuzeit, Moderne

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}$$

$$\frac{\pi^4}{90} = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \ldots$$

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k} \left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6} \right)$$

$$\pi = 48 \cdot \arctan\frac{1}{18} + 32 \cdot \arctan\frac{1}{57} - 20 \cdot \arctan\frac{1}{239}$$

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{1 \cdot 3}{4 + \cfrac{3 \cdot 5}{4 + \cfrac{5 \cdot 7}{4 + \ldots}}}}$$

Buike Music and Science - Buike Research
bbuike777@eclipso.de

BBWV E88

Klaus Piontzik
Die Zahl π – Mittelalter, Neuzeit, Moderne
Neuss: Bruno Buike 2022
(unveränmderter Nachdruck der Edition:
Bottrop: Klaus Piontzik 2022)
doi: https://doi.org/10.17613/c3v7-hg21

Klaus Piontzik

Klaus Piontzik (*1954) ist Ingenieur der Elektrotechnik, Mathematiker und Autor. Er kann auf eine etwa 30-jährige Laufbahn als Projektingenieur im industriellen Bereich und als Entwickler von Mikroprozessor-Systemen zurückblicken.

Seit 1994 hat er sich immer stärker auf elektromagnetische Felder spezialisiert, besonders im Hinblick auf das Erdmagnetfeld und seine Bedeutung für die Erde und das Leben auf ihr.

Seit 2006 kamen noch die Tätigkeiten als Autor (Gitterstrukturen des Erdmagnetfeldes, Planetare Systeme der Erde 1+2, Geomantische Geometrie, Konvertierung DNA in Farben und Töne, Wahrscheinlichkeiten in der Galaxie für Leben, Intelligenz und Zivilisation, Alien-Hypothese, Odysseus 2013) und als Webautor hinzu.

Ein Teil der Bücher ist auch im Internet zugänglich:

www.klaus-piontzik.de
www.pimath.de
www.die-alien-hypothese.de
www.wahrscheinlichkeiten-in-der-galaxie.com
www.odysseus2013.de
www.pimath.eu (Gitterstrukturen des Erdmagnetfeldes)
www.planetare-systeme.com

Die Zahl π – Mittelter, Neuzeit, Moderne

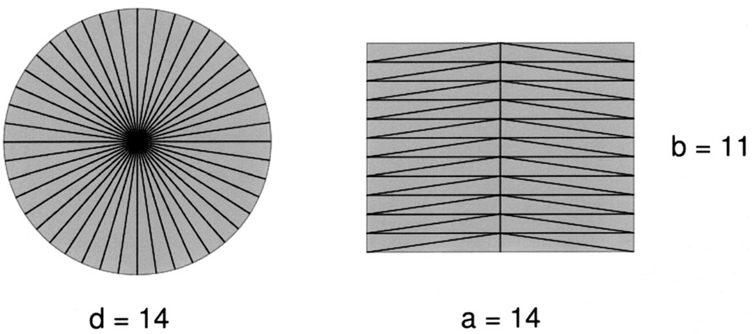
INHALTSANGABE

1 - Zur Geschichte der Zahl π - Mittelalter bis Neuzeit

In Folge eines verstärkten Interesses für die antike Mathematik im christlichen Europa ab etwa dem 11. Jahrhundert entstanden etliche Abhandlungen über die Quadratur des Kreises, jedoch ohne dass dabei wesentliche Beiträge zur eigentlichen Lösung geleistet wurden. Als Rückschritt zu betrachten ist, dass im Mittelalter der Archimedische Näherungswert von 22/7 für die Kreiszahl lange Zeit als exakt galt.
Spätere Abhandlungen der Scholastik erschöpfen sich mehr oder minder in einer Abwägung der Argumente der bekannten Klassiker. Erst mit der Verbreitung lateinischer Übersetzungen der archimedischen Schriften im Spätmittelalter wurde der Wert 22/7 wieder als Näherung erkannt und nach neuen Lösungen des Problems gesucht

1.1 - Franco von Lüttich

Franco von Lüttich (zwischen 1015 und 1020 bis um 1083) war einer der bedeutendsten Mathematiker des europäischen 11. Jahrhunderts.
Franco studierte unter Adelmann (1000 - 1061) in Lüttich, wo er 1066 Leiter der Kathedralschule wurde. Er schrieb komputistische Traktate, die sog. „Geometrie II des Pseudo-Boethius“, die um 1035/47 entstand und die ersten vier Bücher der Elemente des Euklid enthielt, wurde ihm zugeschrieben. Das bekannteste Werk Francos ist indes seine Abhandlung über die Quadratur des Kreises, ein Werk von sechs Büchern, das vor 1050 niedergeschrieben wurde.
Einer der ersten Autoren des Mittelalters, der das Problem der Kreisquadratur wieder aufnahm, war Franco von Lüttich. Um 1050 entstand sein Werk De quadratura circuli.
Franco stellt darin zunächst drei Quadraturen vor, die er verwirft. Die ersten beiden geben für die Seitenlänge des Quadrates 7/8 beziehungsweise für die Diagonale 10/8 des Kreisdurchmessers an, was relativ schlechten Näherungen von 31/16 und 31/8 für π entspricht. Der dritte Vorschlag wiederum setzt den Umfang des Quadrates dem Kreisumfang gleich, verlangt also die Rektifikation des letzteren.



Francos eigene Lösung geht von einem Kreis mit Durchmesser 14 aus. Dessen Fläche beträgt aus seiner Sicht genau $7^2 \cdot 22/7 = 154$. Rechnerisch lässt sich nach Francos Argumentation kein flächengleiches Quadrat finden, da die Quadratwurzel aus 22/7 irrational ist, konstruktiv jedoch schon. Dazu zerlegt er den Kreis in 44 gleiche Sektoren, die er zu einem Rechteck der Seitenlängen 11 und 14 zusammenfügt. Den nötigen Kunstgriff, bei dem er die Kreissektoren durch rechtwinklige Dreiecke mit Katheten der Länge 1 und 7 ersetzt, erläutert Franco allerdings nicht. Problematisch ist auch sein nicht ganz geglückter Versuch, das Rechteck anschließend durch eine geeignete Zerlegung in ein Quadrat zu überführen. Offensichtlich war Franco das althergebrachte griechische Verfahren nicht geläufig .

1.2 - Fibonacci

Leonardo da Pisa, auch Fibonacci genannt (um 1180 in Pisa bis nach 1241 ebenda) war Rechenmeister in Pisa und gilt als der bedeutendste Mathematiker des Mittelalters. Bekannt sind heute vor allem die nach ihm benannten Fibonacci-Zahlen.
Über die Biographie Leonardos ist nur wenig bekannt, die meisten Angaben gehen zurück auf den Widmungsprolog seines Rechenbuchs Liber abbaci und auf ein Dokument der Kommune von Siena.
Von Leonardo sind noch einige weitere Werke erhalten: eine Practica geometriae von 1220 (1219), gewidmet einem Freund und Lehrer Dominicus, die im 15. Jahrhundert von Cristoforo Gherardo di Dino auch ins Italienische übertragen wurde; ein Liber quadratorum von 1225 (1224), der Friedrich II. gewidmet ist und erwähnt, dass dieser bereits ein Buch Leonardos gelesen habe, was man auf den Liber abbaci zu beziehen pflegt; ferner eine nicht datierte Schrift Flos super solutionibus quarumdam questionum ad numerum et ad geometriam uel ad utrumque pertinentium, welche dem Kardinal Raniero Capocci von Viterbo gewidmet ist und Fragen behandelt, die Leonardo im Beisein Friedrichs II. von einem Magister Johannes aus Palermo vorgelegt worden sein sollen; und schließlich ein Brief an einen Magister Theodorus. Aus Leonardos Schriften geht hervor, dass er auch noch zwei weitere, heute nicht mehr erhaltene Schriften verfasste, ein kürzeres Rechenbuch und einen Kommentar zum zehnten Buch der Elemente Euklids.
Circa 1220 errechnete Fibonacci 3.1418 für pi indem er eine Polygon-Methode benutzte die auf Archimedes zurückgeht.

1.3 - Dante Alighieri

Dante Alighieri (Mai oder Juni 1265 in Florenz; † 14. September 1321 in Ravenna) war ein Dichter und Philosoph italienischer Sprache. Er überwand mit der Göttlichen Komödie das bis dahin dominierende Latein und führte das Italienische zu einer Literatursprache.
Dante ist der bekannteste Dichter des Italienischen und gilt als einer der bedeutendsten Dichter des europäischen Mittelalters. Sein Werk schöpft

souverän aus der Theologie, der Philosophie und den übrigen Wissenschaften (Artes liberales) seiner Zeit.
Sein Näherungswert: 3+\sqrt{2}/10 ≈ 3.14142

1.4 - Ibn al-Heithem

Alhazen auch Ibn al-Heithem, latinisiert Alhacen, Avennathan oder Avenetan, (965 - 1040), war ein Mathematiker, Optiker und Astronom in der Blütezeit des Islam. Er verfasste grundlegende Beiträge zur Optik, Astronomie, Mathematik und Meteorologie.
Ibn al-Heithem behandelte selbständig die Quadratur des Kreises.

1.5 - Dschamschid Mas ud al-Kaschi

Ghiyath ad-Din Dschamschid bin Masud bin Muhammad al-Kaschi (um 1380 in Kaschan, Iran bis 22. Juni 1429 in Samarkand, Timuridenreich, heute in Usbekistan) war ein persischer Arzt, Mathematiker und Astronom des Hochmittelalters.In Frankreich wird der Kosinussatz als Théorème d'Al-Kashi bezeichnet.
Er stellte aufbauend auf dem Zij-i Ilkhani (Tabelle der Ilchane) des at-Tusi einen neuen Sternkatalog zusammen, der auch eine Sammlung mathematischer Gleichungen für die Astronomie wie Formeln für die Transformation von ekliptikalen zu äquatorialen Koordinaten und Tafeln trigonometrischer Funktionen enthielt. Er ist bekannt als Khagani Zij, Tafeln des Khans, da er ihn entweder dem Timuriden-Fürsten Schāh Ruch oder dessen Sohn Ulug Beg widmete. Ulug Beg erkannte die außergewöhnlichen Fähigkeiten Al-Kashis und berief ihn 1420 an seine neugegründete Madresse in Samarkand. Er war der wichtigste Berater bei Konzeption und Bau des der Madresse angegliederten Observatoriums Gurkani Zij.
Lange unübertroffene Ergebnisse wurden von ihm durch numerische Lösungen erbracht. Im ar-Risala al-Muhitiya (Lehrbrief über den Kreisumfang) bestimmte er beispielsweise den Umfang des Einheitskreises (also das doppelte der Kreiszahl pi) aus dem 3*228-Eck auf 9 Sexagesimalstellen: 6;16,59,28,01,34,51,46,14,50, die er in die indischen Ziffern 6,2831853071795865 mit 16 richtigen Dezimalstellen umrechnete. Dies ist eines der ältesten Dokumente des Rechnens mit Dezimalbrüchen. Damit verbesserte er das Ergebnis des chinesischen Mathematikers Zu Chong-Zhi, der pi auf 7 Stellen genau berechnet hatte. al-Kaschi wurde erst 1596 von Ludolph van Ceulen übertroffen, der nach 30 Jahren Arbeit 35 Dezimalstellen berechnet hatte.
In Folge eines verstärkten Interesses für die antike Mathematik im christlichen Europa ab etwa dem 11. Jahrhundert entstanden etliche Abhandlungen über die Quadratur des Kreises, jedoch ohne dass dabei wesentliche Beiträge zur eigentlichen Lösung geleistet wurden. Als Rückschritt zu betrachten ist, dass im Mittelalter der Archimedische Näherungswert von 22/7 für die Kreiszahl lange Zeit als exakt galt.

Spätere Abhandlungen der Scholastik erschöpfen sich mehr oder minder in einer Abwägung der Argumente der bekannten Klassiker. Erst mit der Verbreitung lateinischer Übersetzungen der archimedischen Schriften im Spätmittelalter wurde der Wert 22/7 wieder als Näherung erkannt und nach neuen Lösungen des Problems gesucht

1.6 - Nikolaus von Kues

Nikolaus von Kues, latinisiert Nicolaus Cusanus oder Nicolaus de Cusa (1401 in Kues an der Mosel, heute Bernkastel-Kues bis 11. August 1464 in Todi, Umbrien), war ein schon zu Lebzeiten berühmter, universal gebildeter deutscher Philosoph, Theologe und Mathematiker. Er gehörte zu den ersten deutschen Humanisten in der Epoche des Übergangs zwischen Spätmittelalter und Früher Neuzeit.
Nikolaus verfasste mehr als 50 Schriften, davon etwa ein Viertel in Dialogform, die übrigen in der Regel als Abhandlungen, ferner rund 300 Predigten sowie eine Fülle von Akten und Briefen. Seine Werke lassen sich nach dem Inhalt in drei Hauptgruppen gliedern: Philosophie und Theologie, Kirchen- und Staatstheorie, Mathematik und Naturwissenschaft. Eine Sonderstellung nimmt seine kurze Autobiographie ein, die er 1449 schrieb. Er veranlasste selbst eine (allerdings unvollständige) Sammlung seiner Schriften, die in zwei Handschriften seiner Bibliothek in Kues vorliegt.
Das mathematische und naturwissenschaftliche Werk des Cusanus ist vor allem von seinem Interesse an Wissenschaftstheorie und von seinen metaphysisch-theologischen Fragestellungen geprägt; er will von mathematischen zu metaphysischen Einsichten hinführen. Mit Analogien zwischen mathematischem und metaphysischem Denken befasst er sich in Schriften wie De mathematica perfectione („Über die mathematische Vollendung“, 1458) und Aurea propositio in mathematicis („Der Goldene Satz in der Mathematik“, 1459). Als sein mathematisches Hauptwerk gilt De mathematicis complementis („Über mathematische Ergänzungen“, 1453). Mit dem Problem der Kreisquadratur und der Berechnung des Kreisumfangs setzt er sich in mehreren Schriften auseinander, darunter De circuli quadratura („Über die Quadratur des Kreises“, 1450), Quadratura circuli („Die Kreisquadratur“, 1450), Dialogus de circuli quadratura („Dialog über die Quadratur des Kreises“, 1457) und De caesarea circuli quadratura („Über die kaiserliche Kreisquadratur“, 1457). Auch in De mathematica perfectione befasst sich Nikolaus mit diesem Problem. Er hält eine Kreisquadratur nur näherungsweise für möglich und schlägt dafür ein Verfahren vor.
Mit seinem Dialog Idiota de staticis experimentis („Der Laie über Versuche mit der Waage“, 1450) gehört er zu den Wegbereitern der Experimentalwissenschaft. De correctione kalendarii („Über die Kalenderverbesserung“, auch: Reparatio kalendarii, 1436) handelt von der damals bereits dringend erforderlichen Kalenderreform, die jedoch erst im 16. Jahrhundert verwirklicht wurde.

Spätere Abhandlungen der Scholastik erschöpfen sich mehr oder minder in einer Abwägung der Argumente der bekannten Klassiker. Erst mit der Verbreitung lateinischer Übersetzungen der archimedischen Schriften im Spätmittelalter wurde

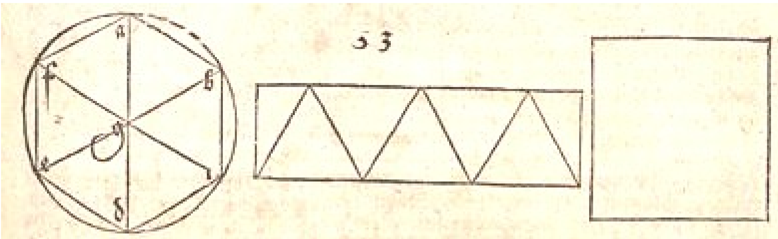
der Wert 22/7 wieder als Näherung erkannt und nach neuen Lösungen des Problems gesucht, so beispielsweise von Nikolaus von Kues.
Dieser griff die Idee, den Kreis durch eine Folge regelmäßiger Vielecke mit wachsender Seitenzahl anzunähern, wieder auf, suchte im Gegensatz zu Archimedes jedoch nicht den Kreisumfang, sondern den Kreisradius bei vorgegebenem gleichbleibendem Umfang der Polygone zu bestimmen.
Der daraus ermittelte Wert für die Kreiszahl liegt auch immerhin zwischen den von Archimedes gegebenen Grenzen. Die eigentlichen cusanischen Arbeiten zum Thema liefern deutlich schlechtere Näherungen und wurden damit zum Ziel einer Streitschrift des Regiomontanus, der die Ungenauigkeit der Berechnungen nachwies und die Beweise „als philosophische, aber nicht als mathematische“ bezeichnete.

1.7 - Albrecht Dürer

Albrecht Dürer der Jüngere (auch Duerer; 21. Mai 1471 in Nürnberg bis 6. April 1528 ebenda) war ein deutscher Maler, Grafiker, Mathematiker und Kunsttheoretiker von europäischem Rang. Er war ein bedeutender Künstler zur Zeit des Humanismus und der Reformation.
Dürer hat für die Entwicklung des Holzschnittes und Kupferstiches Bedeutendes geleistet. Den Holzschnitt hat er aus dem „Dienst der Buchillustration” befreit und ihm den Rang eines eigenständigen Kunstwerks verliehen, das dem gemalten Bild an die Seite gestellt werden konnte. Dürer schuf durch Verfeinerung der Linien und eine Erweiterung des künstlerischen Vokabulars eine reichere Tonigkeit bzw. feinere Farbabstufungen und führte den Holzschnitt so formal in die Nähe des Kupferstichs.
Wie den Holzschnitt so perfektionierte und revolutionierte Dürer auch die Techniken des Kupferstichs. Er wurde durch Blätter wie „Ritter, Tod und Teufel” und „Melencolia I” in ganz Europa bekannt. Dürer hat genau wie Tizian, Michelangelo und Raffael die Bedeutung der Druckgrafik darin gesehen, den eigenen künstlerischen Ruf zu verbreiten und durch den Vertrieb zu Einnahmen zu kommen. Benutzten die Italiener die Grafik zur Verbreitung ihrer Gemälde, so erhebt Dürer den Holzschnitt selbst zum Kunstwerk.
Neben seinem künstlerischen Schaffen schrieb Dürer Werke über das Perspektivproblem in der Malerei, darunter Underweisung der Messung, und betätigte sich mit der Befestigung von Städten.
Der „mathematischste Kopf” unter den Künstlern seiner Zeit war Albrecht Dürer. So erwarb er 1507 ein Exemplar der ersten Ausgabe der von Zamberti in das Lateinische übersetzten Elemente des Euklid von 1505, dem ersten Buchdruck dieses Werks überhaupt, und wirkte 1515 im Auftrag von Kaiser Maximilian I. an einer von dem Hofastronomen Johannes Stöberer entworfenen Karte der Erdhalbkugel mit („Stabius-Dürer-Karte”).
Neben der im Papyrus Rhind erwähnten Gleichsetzung des Kreises vom Durchmesser 9 mit dem Quadrat der Seitenlänge 8 war auch die des Kreises vom Durchmesser 8 mit dem Quadrat der Diagonalen 10 bekannt. Diese Konstruktion findet sich bei den Babyloniern und eventuell beim römischen Feldmesser Vitruv.

Um ein bequemes zeichnerisches Verfahren anzugeben, nimmt Albrecht Dürer diese Konstruktion im Jahr 1525 in seinem Werk Vnderweysung der messung mit dem zirckel und richtscheyt wieder auf. Dürer ist sich dabei bewusst, dass es sich um eine reine Näherungslösung handelt, er schreibt explizit, dass eine exakte Lösung noch nicht gefunden sei:

„Vonnöten wäre zu wissen Quadratura circuli, das ist die Gleichheit eines Zirkels und eines Quadrates, also daß eines ebenso viel Inhalt hätte als das andere. Aber solches ist noch nicht von den Gelehrten demonstrirt. Mechanice, das ist beiläufig, also daß es im Werk nicht oder nur um ein kleines fehlt, mag diese Gleichheit also gemacht werden. Reiß eine Vierung und teile den Ortsstrich in zehn Teile und reiße danach einen Zirkelriß, dessen Durchmesser acht Teile haben soll, wie die Quadratur deren 10; wie ich das unten aufgerissen habe.“



1.8 - Tycho de Brahe

Tycho Brahe auch bekannt als Tycho de Brahe (14. Dezember 1546 auf Schloss Knutstorp, Schonen bis 24. Oktober 1601 in Prag) war ein dänischer Adliger und einer der bedeutendsten beobachtenden Astronomen.
Zu seiner Zeit gab es noch kein Teleskop. Seine Beobachtungen der Fixstern- und Planetenpositionen, die damals mit Abstand die präzisesten waren und mit einer Genauigkeit von zwei Bogenminuten auch heute nicht ohne weiteres zu erreichen sind, führte er mit Hilfe eines großen Mauerquadranten durch. Aufgrund von Widersprüchen der Planetenbewegungen in den damals vorherrschenden Weltsystemen entwickelte er einen Kompromiss zwischen dem ptolemäisch-geozentrischen und dem kopernikanisch-heliozentrischen Planetensystem, das tychonisches Weltbild genannt wurde.
Er beobachtete 1572 eine Supernova, einen „Neuen Stern“, wie er ihn beschrieb, „ein Wunder, wie es seit Anbeginn der Welt nicht gesehen wurde“. Dies machte ihn unter den Astronomen in ganz Europa berühmt.

Tycho de Brahe nahm für π den Wert:

$$\pi \approx \frac{88}{\sqrt{785}} = 3{,}14085$$

1.9 - Francois Viete

François Viète oder Franciscus Vieta, wie er sich in latinisierter Form nannte (1540 in Fontenay-le-Comte bis 13. Dezember, nach anderen Quellen 23. Februar 1603 in Paris), war ein französischer Advokat und Mathematiker. Er führte die Benutzung von Buchstaben als Variablen in die mathematische Notation der Neuzeit ein.
Eigentlich war die Mathematik für Viète nur eine Nebenbeschäftigung, trotzdem wurde er einer der wichtigsten und einflussreichsten Mathematiker seiner Zeit. Er wird manchmal auch „Vater der Algebra“ genannt, da er das Rechnen mit Buchstaben in der Neuzeit einführte und systematisch Symbole für Rechenoperationen benutzte, zumal er erkannte, dass dies weit mehr Möglichkeiten als bisher eröffnete.
Viète hat zahlreiche Werke publiziert, die jedoch meistens nur in kleiner Auflage erschienen sind und für seinen Freundeskreis bestimmt waren. Die erste Gesamtausgabe wurde nach seinem Tod 1646 von Frans van Schooten in Leiden bei Elsevier unter dem Titel Opera mathematica, in unum volumen congesta, ac recognita, opera atque studio Francisci Schooten herausgegeben.
Darüber hinaus hat er auf dem Gebiet der Trigonometrie Hervorragendes geleistet und wertvolle Vorarbeiten für die nachfolgende Ausarbeitung der Infinitesimalrechnung geleistet.
Francois Viete drang 1579, in Fortsetzung der archimedischen Methode, bis zum 393216-Eck vor. Er erhielt eine Ungleichung, die den Wert für π bis auf 9 Dezimalstellen angab.
Viete stellte erstmals eine geschlossene Formel für □vor, die sich aus einem unendlichen Produkt ableiten lässt.

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdot \ldots$$

Dieses Produkt fand auch Leonard Euler dann etwa 150 Jahre später. Die Konvergenz dieses Ausdrucks konnte aber erst **F. Rudio** im Jahre 1891 beweisen.

1.10 - Adriaan Metius

Adriaan Adriaanszoon Metius (9. Dezember 1571 in Alkmaar bis 6. September 1635 in Franeker) war ein niederländischer Mathematiker, Landvermesser und Astronom. Nach Metius wurde ein Mondkrater benannt.
Metius publizierte Abhandlungen über das Astrolabium, über astronomische und mathematische Themen. Er baute astronomische Instrumente und entwickelte eine neue Variante des Jakobsstabs. Metius hielt nichts von der Astrologie, soll aber viel Zeit für alchemistische Studien und Experimente, vor allem bei Suche nach dem Stein der Weisen, verbracht haben.
In seinem Buch Arithmeticæ et geometriæ practica , erschienen 1611 in Franeker, gab er den Wert für die Kreiszahl π mit 3,1415094 an. Bereits 1573 hatte Metius'

Vater einen Annäherungswert für π berechnet.
Mehr als 1000 Jahre nach Tsu Ch'ung-Chi entdeckte **Adriaen Metius** dieselbe Näherung 355/113, als er das arithmetische Mittel von Zähler und Nenner der beiden Näherungen 377/120 und 333/106, die auf Berechnungen seines Vaters beruhten, bildete.
Beachtenswert ist hier, das durch den relativ einfachen Bruch insgesamt 4 Dezimalstellen von π anfallen:

$$\pi \approx \frac{333}{106} = 3{,}1415094$$

Der Wert 355/113 wird in der Literatur auch Metius-Wert genannt.

1.11 - Valentius Otho

Valentinus Otho, auch: Valentin Otto, Pitiscus, Parthenopolitanus (um 1548 in Magdeburg bis 8. April 1603 in Prag) war ein deutscher Mathematiker. Über seine Herkunft ist nichts bekannt.
Nachdem er einige Zeit in Wittenberg geweilt, sich einem Studium der Astronomie, sowie der Mathematik gewidmet und Johannes Praetorius eine Abschätzung und eine Näherung für die Kreiszahl Pi vorgelegt hatte, begab er sich 1573 zu Georg Joachim Rheticus nach Kaschau in Oberungarn.
In seinem 25. Lebensjahr gelangte er 1573 zu Meister Rheticus. Durch Valentinus Otho, wurde im Jahre 1573 die Näherung 355/113 bekannt.
Rheticus begann Otho in seine Arbeiten einzuweihen. Jedoch erkrankte Rheticus 1574 und übertrug Otho kurz vor seinem Ableben die Aufgabe, sein großes trigonometrisches Werk zu vollenden und herauszugeben.
Im Auftrag von Kaiser Maximilian II. stellte der kaiserliche Landeshauptmann Hans Rueber zu Pixendorf Otho zur Ordnung des Nachlasses von Rheticus ein. Um das Vermächtnis weiterführen zu können, folgte Otho 1577 einer Aufforderung des sächsischen Kurfürsten August, der ihn aus Kaschau als Professor der höheren Mathematik an die Universität Wittenberg berief.
Nachdem Otho zwei Teile des Werkes fertig gestellt hatte, kam es 1581 zum Bruch mit der Wittenberger Hochschule. Nachdem er sich geweigert hatte, die Konkordienformel zu unterschreiben, entfernte man ihn aus seinem Amt. Otho wurde 1601 Professor der Mathematik an der Universität Heidelberg.

1.12 - Ludolph von Ceulen

Ludolph van Ceulen (28. Januar 1540 in Hildesheim bis 31. Dezember 1610 in Leiden) war ein deutscher Fechtmeister und Mathematiker, der in die Niederlande auswanderte.
Im 16. Jahrhundert erwachte dann auch in Europa die Mathematik wieder aus ihrem langen Schlaf. 1596 gelang es Ludolph van Ceulen, die ersten 35 Dezimal-

stellen von π zu berechnen. Angeblich opferte er 30 Jahre seines Lebens für diese Berechnung. Van Ceulen steuerte allerdings noch keine neuen Gedanken zur Berechnung bei. Er rechnete einfach nach der Methode des Archimedes weiter, aber während Archimedes beim 96-Eck aufhörte, führte Ludolph diese bis zum eingeschriebenen 2^{62}-Eck fort. Der Name *ludolphsche Zahl* erinnert an seine Leistung.
Hier sein Wert, der auch heute noch gültig ist:

$$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950288...$$

Ludolph van Ceulen widmete einen großen Teil seiner Arbeit und seines Lebens der Berechnung der Zahl □. 1596 errechnete er 20 richtige Stellen und kurz vor seinem Tod weitere 15. Dabei diente ihm die Archimedische Methode als Grundlage. Er benutzte ein- und umschriebene Polygone mit 2^{62} Seiten. Die letzten drei der von ihm berechneten Ziffern wurden in seinen Grabstein eingemeißelt.

Daher wird π auch manchmal als **Ludolphsche Zahl** bezeichnet.

1.13 - Adriaan van Roomen

Adriaan van Roomen (29 September 1561 bis 4 Mai 1615), auch bekannt als Adrianus Romanus, war ein flämischer Mathematiker.
Er traf Kepler und diskutierte mit François Viète zwei Fragen zu Gleichungen und Tangenten. Er arbeitete in Algebra, Trigonometrie und Geometrie. Auf dem Gebiet der Dezimalentwicklung von π kam Adriaan van Roomen 593 auf 15 Dezimalstellen.

1.14 - Christoph Grienberger

Christoph Grienberger (auch Gruemberger, Grünberger) (2. Juli 1561 in Hall bis 11. März 1636 in Rom) war ein österreichischer Jesuitenpater und Astronom.
Grienberger schrieb optische und mathematische Werke. Er führte einen Briefwechsel mit vielen Persönlichkeiten seiner Zeit, vor allem mit seinen Mitbrüdern. In den Briefen beschäftigte er sich mit mathematischen und optischen Problemen. Zu seinen Schriften gehört ein ''Neuer Fixsternkatalog'' und ein ''Neues Himmelsbild''.
1630 errechnete Christoph Grienberger 39 Ziffern für pi. Das ist bis heute die genaueste Annäherung durch manuell verwendende polygonale Algorithmen.

1.15 - Snellius

Willebrord van Roijen Snell (auch Willebrordus Snel van Royen oder Snellius; 13. Juni 1580 in Leiden, (Niederlande) bis 30. Oktober 1626 ebenda), war ein niederländischer Astronom und Mathematiker. Er ist bekannt für die Entwicklung

des optischen Brechungsgesetzes, nach ihm als snelliussches Brechungsgesetz bezeichnet. Er gebrauchte den Namen Snellius für wissenschaftliche Veröffentlichungen.
In Leiden folgte er 1613 seinem Vater Rudolph Snellius (1546–1613) als Professor für Mathematik an der dortigen Universität. 1615 entwickelte er mit der Triangulation eine neue Methode, den Umfang und den Radius der Erde zu ermitteln, die er in seinem 1617 veröffentlichtem Werk Eratosthenes Batavus beschrieb.
In seinem Tiphys batavus, veröffentlicht 1624, beschäftigte er sich mit dem Problem der Meridianeinteilung und den daraus resultierenden Folgen für die Navigation. Er schrieb zudem zahlreiche weitere Werke über Mathematik, Astronomie und Landesvermessung. Snell veröffentlichte eine Lösung zur Pothenotschen Aufgabe, der Aufgabe des ebenen Rückwärtsschnitts.
Ebenso verbesserte er die Exhaustionsmethode zur Berechnung der Kreiszahl π.
Bei der ursprünglichen Methode des Archimedes wird der Kreisumfang durch den Umfang eines dem Kreis einbeschriebenen und den eines dem Kreis umbeschriebenen Vielecks abgeschätzt. Genauere Schranken ergeben sich durch eine Erhöhung der Eckenzahl. Der niederländische Mathematiker Snellius fand heraus, dass auch ohne die Seitenzahl zu vergrößern feinere Schranken für die Länge eines Bogenstückes als nur die Sehnen der Polygone angegeben werden können. Er konnte dieses Ergebnis allerdings nicht streng beweisen.

1.16 - Christiaan Huygens

Christiaan Huygens (14. April 1629 in Den Haag bis 8. Juli 1695 ebenda), auch Christianus Hugenius, war ein niederländischer Astronom, Mathematiker und Physiker. Huygens gilt, obwohl er sich niemals der noch zu seinen Lebzeiten entwickelten Infinitesimalrechnung bediente, als einer der führenden Mathematiker und Physiker des 17. Jahrhunderts. Er ist der Begründer der Wellentheorie des Lichts, formulierte in seinen Untersuchungen zum elastischen Stoß ein Relativitätsprinzip und konstruierte die ersten Pendeluhren. Mit von ihm verbesserten Teleskopen gelangen ihm wichtige astronomische Entdeckungen.
Huygens entdeckte mit seinem selbstgebauten Teleskop 1655 erstmals den Saturnmond Titan. Damit war der Saturn der zweite Planet nach dem Jupiter (von der Erde abgesehen), bei dem ein Mond nachgewiesen werden konnte (Galilei hatte schon 1610 die vier größten Jupitermonde entdeckt). Außerdem konnte er durch die bessere Auflösung seines Teleskops erkennen, dass das, was Galilei als Ohren des Saturns bezeichnet hatte, in Wirklichkeit die Saturnringe waren.
Neben der Astronomie interessierte sich Huygens auch für die Mechanik. Er formulierte die Stoßgesetze und befasste sich mit dem Trägheitsprinzip und Fliehkräften. Seine Untersuchungen von Schwingungen und Pendelbewegungen konnte er zum Bau von Pendeluhren nutzen. Schon Galilei hatte eine solche entworfen, aber nicht gebaut. Huygens konnte seine Uhr hingegen zum Patent anmelden. Die in seinem Auftrag von Salomon Coster gebauten Uhren wiesen eine Ganggenauigkeit von zehn Sekunden pro Tag auf, eine Präzision, die erst hundert Jahre danach überboten werden konnte. Später konstruierte er auch Taschenuhren mit Spiralfedern und Unruh.

Christiaan Huygens veröffentlichte 1673 in seiner Abhandlung Horologium Oscillatorium eine ganggenaue Pendeluhr mit einem Zykloidenpendel, bei dem er sich die Tatsache zunutze machte, dass die Evolute der Zykloide selber wieder eine Zykloide ist. Der Vorteil der Ganggenauigkeit wird jedoch durch die erhöhte Reibung wettgemacht.
In seiner letzten wissenschaftlichen Abhandlung 1690 formulierte Huygens den Gedanken, dass es noch viele andere Sonnen und Planeten im Universum geben könnte, und spekulierte bereits über außerirdisches Leben.
Huygens entdeckte die Beziehungen zwischen Schallgeschwindigkeit, Länge und Tonhöhe einer Pfeife. Er beschäftigte sich intensiv mit der mitteltönigen Stimmung und berechnete 1691 die Teilung der Oktave in 31 gleiche Stufen, um den Fehler des pythagoreischen Kommas im Tonsystem der Musik zu beheben.
Die Ausarbeitung und Verbesserung des snelliusschen Ansatzes leistete Christiaan Huygens in seiner Arbeit De circuli magnitudine inventa, in der er auch den Beweis der von Snellius aufgestellten Sätze erbrachte. Auf rein elementargeometrischem Weg gelang Huygens eine so gute Eingrenzung der zwischen Vieleck und Kreis liegenden Fläche, dass er bei entsprechender Seitenzahl der Polygone die Kreiszahl auf mindestens dreimal soviel Stellen genau erhielt wie Archimedes mit seinem Verfahren.

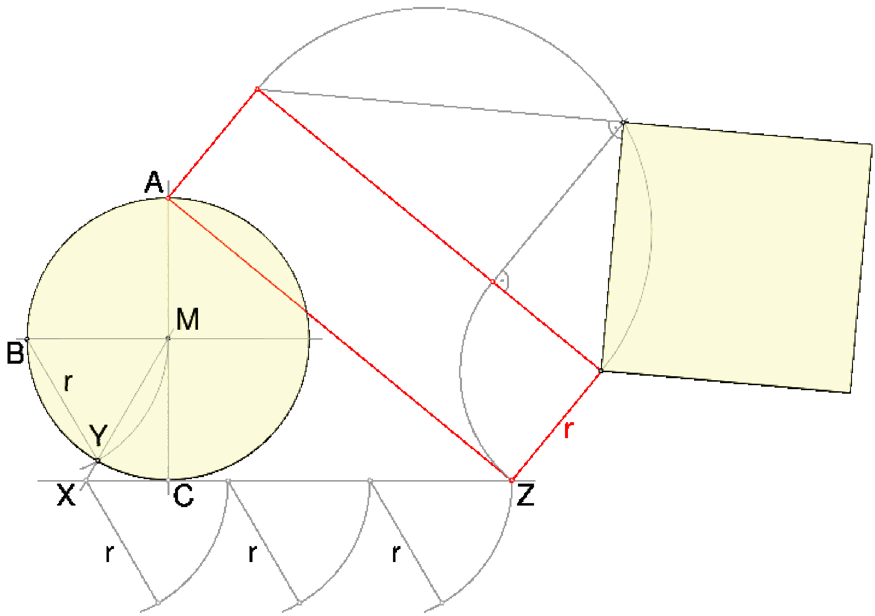
1.17 - Thomas Hobbes

Thomas Hobbes (5. April 1588 in Westport, Wiltshire bis 4. Dezember 1679 in Hardwick Hall, Derbyshire) war ein englischer Mathematiker, Staatstheoretiker und Philosoph, der durch sein Hauptwerk Leviathan, in dem er eine Theorie des Absolutismus entwickelte, bekannt geworden ist. Er gilt als Begründer des aufgeklärten Absolutismus. Des Weiteren ist er neben John Locke und Jean-Jacques Rousseau einer der bedeutendsten Vertragstheoretiker.
Insbesondere in seinem Werk De Corpore, dem ersten Teil der Trilogie elementa philosophiae, von 1655 entwickelt Hobbes zentrale Thesen zu naturwissenschaftlichen Fragen. Ausgehend von einer materialistischen Grundhaltung und dem – exemplarisch durch René Descartes vertretenen – mechanistischen Denken seiner Zeit schreibt er allein den Körpern und deren Bewegung Wirklichkeit zu. Dabei entsteht keine Bewegung aus sich selbst heraus, sondern ist Folge einer anderen Bewegung. Der Bewegung unterliegen nur Körper; sie können ausschließlich durch andere Körper bewegt werden.
Auf der Grundlage dieser Körper-Lehren entwickelt Hobbes mitunter erstaunlich modern anmutende Theorien etwa zum Phänomen des Lichts, das sich seiner Ansicht gemäß in materieartigen Impulsen bewegt, und veröffentlichte auch ein Werk über Optik. Auch beschäftigte er sich vor diesem Hintergrund mit der Natur des Vakuums.
Dazu kommen einige Werke über Mathematik; Begeistern konnte sich Hobbes insbesondere auch für Euklidische Geometrie, die ihm als Vorbild für jegliche exakte Wissenschaft galt und deren Grundsätze er entsprechend dem mos geometricus auch auf seine Philosophie übertragen wollte. Gleichwohl galt Hobbes auf diesem Gebiet vielfach als Dilettant; um ihn auch als Philosophen zu diskreditie-

ren, setzte die Kirche Mathematiker ein, um seine Bemühungen der Lächerlichkeit preiszugeben.
Außerdem ist er ein prominentes Beispiel für einen Amateurmathematiker, der die Quadratur des Kreises gefunden zu haben glaubte. Seine 1665 in seinem Werk De corpore veröffentlichte Lösung – in Wirklichkeit eine Näherungskonstruktion – wurde von John Wallis noch im selben Jahr zurückgewiesen. In der Folgezeit entspann sich zwischen den beiden eine in scharfem Tonfall vorgetragene Auseinandersetzung, die erst mit Hobbes' Tod im Jahr 1679 endete.

1.18 - Adam Kochański

Adam Adamandy Kochański (5. August 1631 in Dobrzyń nad Wisłą, Polen bis 17. Mai 1700 in Teplitz, Böhmen) war ein polnischer Mathematiker.
Kochański besuchte ein Gymnasium in Thorn und studierte ab Jahr 1652 in Vilnius Philosophie, Mathematik, Physik und Theologie. Später unterrichtete er diese Fächer u.a. in Florenz, Prag, Breslau, Mainz und Würzburg. Im Jahre 1677 wurde er in Warschau zum Hofmathematiker und Bibliothekar des Königs Johann III. Sobieski.
Kochański hat sich mit den Problemen der Konstruktion der mechanischen Uhren beschäftigt.
Bekannt ist vor allem seine 1685 entwickelte sogenannte Näherungskonstruktion von Kochański, mit der ein Quadrat konstruiert werden kann, das nahezu flächengleich zu einem gegebenen Kreis ist, also eine näherungsweise Lösung der Quadratur des Kreises darstellt.



1.19 - Jacob Marcelis

Um 1700 herum war **Jacob Marcelis** der Meinung, dass es ihm gelungen sei, den Kreis zu quadrieren, und damit den exakten Wert für π zu bestimmen. Diesen gab er wie folgt an:

$$\pi \approx 3\,\frac{1008449087377541679894282184894}{6997183637540819440035239271702}$$

1.20 - Popularität der Kreisquadratur

Berichte über ein wachsendes Aufkommen an Amateurarbeiten ab dem 18. und 19. Jahrhundert und Beispiele zum Thema finden sich bei Jean-Étienne Montucla, Johann Heinrich Lambert und Augustus de Morgan. In der Regel handelte es sich um Verfahren, bei denen das Problem mechanisch, numerisch oder durch eine geometrische Näherungskonstruktion „exakt“ gelöst wurde.

Derartige Arbeiten wurden in einer so großen Zahl an Mathematiker oder wissenschaftliche Institutionen herangetragen, dass sich zum Beispiel die Pariser Akademie der Wissenschaften 1775 genötigt sah, die weitere Untersuchung von vorgeblichen Lösungen der Kreisquadratur offiziell abzulehnen:
„Die Akademie hat dieses Jahr die Entscheidung getroffen, in Zukunft weder die Lösungen der mathematischen Probleme betreffend die Verdoppelung des Würfels, die Dreiteilung des Winkels sowie die Quadratur des Kreises, noch jedwede Maschine mit dem Anspruch eines "Perpetuum mobile" zu untersuchen.“

2 - Zur Geschichte der Zahl π - Neuzeit bis zur Moderne

2.1 - Reihenentwicklungen für Pi

Der rein geometrische Ansatz zur Bestimmung der Kreiskonstanten war mit Huygens Arbeit im wesentlichen ausgeschöpft. Bessere Näherungen ergaben sich mit Hilfe von unendlichen Reihen, speziell der Reihenentwicklung trigonometrischer Funktionen. Zwar hatte François Viète schon Ende des 16. Jahrhunderts durch die Betrachtung bestimmter Streckenverhältnisse aufeinanderfolgender Polygone eine erste exakte Darstellung von π durch ein unendliches Produkt gefunden, doch erwies sich diese Formel als unhandlich. Eine einfachere Reihe, die darüber hinaus nur mit rationalen Operationen auskommt, stammt von John Wallis, eine weitere Darstellung der Kreiszahl als Kettenbruch von William Brouncker. Wichtiger für die Praxis war die von James Gregory und davon unabhängig von Gottfried Wilhelm Leibniz gefundene Reihe für den Arcustangens. Obwohl diese Reihe selbst nur langsam konvergiert, kann man aus ihr andere Reihen ableiten, die sich wiederum sehr gut zur Berechnung der Kreiszahl eignen. Anfang des 18. Jahrhunderts waren mit Hilfe solcher Reihen über 100 Stellen von π berechnet, neue Erkenntnisse über das Problem der Kreisquadratur konnten dadurch allerdings nicht gewonnen werden.

2.2 - John Wallis

John Wallis (23. November-jul./ 3. Dezember 1616-greg.in Ashford, Kent bis 28. Oktober-jul./ 8. November 1703-greg. in Oxford) war ein englischer Mathematiker, der Beiträge zur Infinitesimalrechnung und zur Berechnung der Kreiszahl pi leistete.
In seiner Algebra ließ er auch komplexe Lösungen von Gleichungen zu. Er war einer der ersten britischen Mathematiker, die die Methoden der analytischen Geometrie von Descartes benutzten. Unter anderem wandte er sie auf die Kegelschnitte an. In seiner Algebra, seinem letzten großen Werk, an dem er viele Jahre arbeitete, ist auch ein Abschnitt über unendliche Reihen und sie enthält insbesondere in der ersten Auflage die ersten Veröffentlichungen von einigen von Newtons Resultaten auf diesem Feld. Wallis war sehr bemüht Newtons Priorität auf diesem Gebiet zu dokumentieren (zumal Newton damals nichts selbst veröffentlichte) und ermunterte auch andere Kollegen in Großbritannien dazu. In seiner Algebra baute er insbesondere auf der Arbeit englischer Mathematiker wie Oughtred, Harriot und John Pell auf. Er versuchte auch nachzuweisen, dass Descartes in der Algebra von Harriot beeinflusst war.
John Wallis verfasste Abhandlungen zur Musiktheorie und ein Buch über

Phonetik (De loquela, zuerst 1652), das viele Auflagen erlebte (6. Auflage 1765). Wallis Studien über Phonetik führten auch zu Methoden zur Unterrichtung tauber Kinder.
Zur Bewegungslehre und Mechanik verfasste er 1671 ein Werk Mechanica sive de motu tractatus geometricus, in dem er auf galileischer Grundlage die strikt geometrische Grundlage dieser Lehre betonte. Es handelt insbesondere von Schwerpunkten und Stössen und stellte einen wesentlichen Fortschritt in der Mathematisierung der Mechanik im 17. Jahrhundert dar. Das Buch beeinflusste auch Isaac Newton stark, der mit seinem Buch Principia (1687) allerdings weit darüber hinausging.

Wallis trug in seinen Werken zur Entwicklung der Infinitesimalrechnung vor Newton bei, wobei er auf den Arbeiten von Johannes Kepler, Cavalieri, Roberval und Torricelli aufbaute. 1656 leitete er in Arithmetica Infinitorum, in dem er Untersuchungen zu unendlichen Reihen veröffentlichte, das Wallissche Produkt her, mit dem man näherungsweise die Kreiszahl pi berechnen kann:

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{2^2}{1\cdot 3} \cdot \frac{4^2}{3\cdot 5} \cdot \frac{6^2}{5\cdot 7} \cdot \frac{8^2}{7\cdot 9} \cdot \;\cdots$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdots$$

2.3 - William Brouncker

William Brouncker, 2. Viscount Brouncker FRS (1620 in Castle Lyons, Irland bis 5. April 1684 in Westminster) war ein irischer Mathematiker und 1660 Gründungsmitglied der Royal Society in London.
Brouncker erhielt seine Ausbildung in Oxford. Er ist bekannt für seine Arbeiten über Kettenbrüche und über die Berechnung von Logarithmen durch unendliche Reihen. Er produzierte auch einige Lösungen der Pellschen Gleichung **$a\,x^2 + 1 = y^2$**.
1655 fand Brouncker, aufgrund der Gleichung von Wallis, eine Kettenbruchdarstellung für den Kehrwert von pi/4 :

$$1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \cfrac{9^2}{\ddots}}}}} = \arctan(1)^{-1} = \frac{4}{\pi}$$

2.4 - James Gregory

James Gregory (November 1638 in Drumoak bei Aberdeen bis Oktober 1675 in Edinburgh) war ein schottischer Mathematiker und Astronom. Er fand wesentliche Resultate der Analysis vor oder gleichzeitig mit seinen Zeitgenossen, publizierte jedoch wenig.
Nach seinem Abschluss 1657 schrieb Gregory ein Buch über seine Forschungen in der Optik, die Optica Promota. Darin beschäftigt er sich mit Linsen, Reflexion, Brechung, Parallaxen und der erstmaligen Verwendung von photometrischen Methoden zur Entfernungsmessung. Er schlug auch vor, Venustransite zur Bestimmung der astronomischen Einheit zu beobachten, ein Vorschlag, der später von Edmund Halley ohne Erwähnung der Priorität Gregorys wiederholt wurde. Die bedeutendste Entwicklung ist allerdings die Beschreibung eines Spiegelteleskops, das mit einem sekundären konkaven Spiegel das reflektierte Licht des primären Parabolspiegels durch ein kleines Loch im Primärspiegel auf das Okular lenkt. Als Gregory-Teleskop bekannt, wurde diese Bauform bis in das 19. Jahrhundert verwendet.
Von London aus reiste er 1664 über Paris nach Padua, wo er in Zusammenarbeit mit Stefano degli Angeli (1623–1697) an der Berechnung von Kreis- und Parabelflächen durch unendliche konvergente Reihen arbeitete. Dort entstand 1667 das Buch Vera circuli et hyperbolae quadratura, in dem er sich mit den Grundlagen der Differentialrechnung beschäftigte und Geometriae pars universalis (1668), das den ersten bekannten Beweis für den Hauptsatz der Analysis enthält. Im gleichen Werk ermittelte er den Abstand zu Sirius durch photometrischen Vergleich mit Jupiter zu 1,25 Lichtjahren statt des heutigen Werts von 8.6 LJ.
Nach seiner Rückkehr nach London 1668 wurde er zum Fellow der Royal Society berufen und erhielt im selben Jahr einen Lehrstuhl für Mathematik an der Universität St Andrews. Sicher ist, dass er in diesem Sommer die Taylor-Reihen von Sinus und Kosinus sowie des Tangens kannte.
Wichtig für die Praxis war die von James Gregory und davon unabhängig von Gottfried Wilhelm Leibniz gefundene Reihe für den Arcustangens.

$$\arctan\theta = \frac{\theta^1}{1} - \frac{\theta^3}{3} + \frac{\theta^5}{5} - \frac{\theta^7}{7} \pm \cdots$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots$$

Dieses erschloss neue Wege bei der Berechnung der Kreiszahl pi. Die obige Reihe ist wegen arctan 1 = pi auch ein Spezialfall (θ = 1) der Reihenentwicklung des Arcustangens. Sie war Grundlage vieler Approximationen von pi in der folgenden Zeit.

2.5 - Isaac Newton

Sir Isaac Newton (25. Dezember 1642-jul./ 4. Januar 1643-greg. in Woolsthorpe-by-Colsterworth in Lincolnshire bis 20. März 1726-jul./ 31. März 1727-greg. in Kensington) war ein englischer Naturforscher und Verwaltungsbeamter.
Isaac Newton ist der Verfasser der Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, in denen er mit seinem Gravitationsgesetz die universelle Gravitation und die Bewegungsgesetze beschrieb und damit den Grundstein für die klassische Mechanik legte. Fast gleichzeitig mit Gottfried Wilhelm Leibniz entwickelte Newton die Infinitesimalrechnung. Er verallgemeinerte das Binomische Theorem mittels unendlicher Reihen auf beliebige reelle Exponenten. Bekannt ist er auch für seine Leistungen auf dem Gebiet der Optik: die von ihm verfochtene Teilchentheorie des Lichtes und die Erklärung des Spektrums.
Aufgrund seiner Leistungen, vor allem auf den Gebieten der Physik und Mathematik, gilt Sir Isaac Newton als einer der bedeutendsten Wissenschaftler aller Zeiten. Die Principia Mathematica werden als eines der wichtigsten wissenschaftlichen Werke eingestuft.
Zusätzlich zu seinen fundamentalen Leistungen zur Physik war Newton neben Gottfried Wilhelm Leibniz einer der Begründer der Infinitesimalrechnung und erbrachte wichtige Beiträge zur Algebra.
Zu seinen frühesten Leistungen zählt eine verallgemeinerte Formulierung des Binomischen Theorems mit Hilfe von unendlichen Reihen. Er bewies, dass es für sämtliche reellen Zahlen (also auch negative und Brüche) gültig ist.
Durch die Ausarbeitung der Analysis, von **Isaac Newton** konnten bessere Näherungswerte von π gefunden werden. Eine seiner Reihen zur Berechnung von pi ist die folgende:

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3 \cdot 2^3}\right) + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\left(\frac{1}{5 \cdot 2^5}\right) + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\left(\frac{1}{7 \cdot 2^7}\right) + \ldots$$

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 24 \cdot \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{28 \cdot 2^7} - \frac{1}{72 \cdot 2^9} - \ldots\right)$$

Newton verfügte 1665 über 16 Stellen von π. Dies geschah durch obige Reihenentwicklungen, die dann allerdings noch in mühsamer Handarbeit umgesetzt werden mussten.

2.6 - Gottfried Wilhelm Leibnitz

Gottfried Wilhelm Leibniz (21. Juni-jul./ 1. Juli 1646-greg. in Leipzig bis 14. November 1716 in Hannover) war ein deutscher Philosoph und Wissenschaftler, Mathematiker, Diplomat, Physiker, Historiker, Politiker, Bibliothekar und Doktor des weltlichen und des Kirchenrechts in der frühen Aufklärung. Er gilt als der universale Geist seiner Zeit und war einer der bedeutendsten Philosophen des ausgehenden 17. und beginnenden 18. Jahrhunderts sowie einer der wichtigsten Vordenker der Aufklärung.

Leibniz befasste sich intensiv mit Logik und propagierte erstmals eine symbolische Logik in Kalkülform. Seine Logikkalkül-Skizzen veröffentlichte er allerdings nicht; erst sehr verspätet (1840, 1890, 1903) wurden sie publiziert. Seine charakteristischen Zahlen aus dem Jahr 1679 sind ein arithmetisches Modell der Logik des Aristoteles. Seinen Hauptkalkül entwickelte er in den Generales Inquisitiones von 1686. Er entwarf dort die erste Gleichungslogik und leitete in ihr fast zwei Jahrhunderte vor der Boole-Schule die Gesetze der booleschen Verbandsordnung ab. Innerhalb dieses Kalküls formulierte er die traditionelle Begriffslogik bzw. Syllogistik auf gleichungslogischer Grundlage. Er erfand die Mengendiagramme lange vor Leonhard Euler und John Venn und stellte mit ihnen die Syllogistik dar. Das Leibniz'sche Gesetz geht auf ihn zurück.

Während eines Parisaufenthalts in den Jahren 1672 bis 1676 trat Leibniz in Kontakt zu führenden Mathematikern seiner Zeit. Ohne sichere theoretische Grundlage lernte man damals, unendliche Folgen und Reihen aufzusummieren. Leibniz fand ein Kriterium zur Konvergenz alternierender Reihen (Leibniz-Kriterium), aus dem insbesondere die Konvergenz der sogenannten Leibniz-Reihe.

Durch Summation von Reihen gelangte Leibniz 1675 zur Integral- und von dort zur Differentialrechnung; er dokumentierte seine Erfindung 1684 mit einer Veröffentlichung in den acta eruditorum.

Von Gottfried Wilhelm Leibniz stammt auch die nachfolgende Reihe für π, die er bei der Untersuchung des Konvergenzverhaltens unendlicher Reihen 1673 fand.

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots$$

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}$$

Die einfache, aber nur sehr langsam konvergierende Formel lässt sich mit Hilfe der Potenzreihe des Arcustangens ableiten.

2.7 - Abraham Sharp

Abraham Sharp (1653 in Horton Hall, Little Horton, nahe Bradford, Yorkshire, getauft am 1. Juni 1653 in Bradford bis 18. Juli 1742 in Horton Hall, Little Horton) war ein englischer Astronom, Mathematiker und Instrumentenbauer.
Bis zum Ende seines Lebens lebte er in Horton Hall, baute Instrumente, korrespondierte mit zahlreichen Wissenschaftlern und führte Berechnungen aus. Einen Schwerpunkt bildete die Zusammenarbeit mit seinem früheren Arbeitgeber Flamsteed. Die sich daraus ergebende Korrespondenz ist weitgehend erhalten. Unter anderem baute er für Flamsteed ein Mikrometer (1704), berechnete Positionen des Mondes und der Planeten sowie umfangreiche Tabellen für die Historia coelestis und erstellte Finsternistabellen der Jupitermonde. Nach Flamsteeds Tod korrespondierte er mit dessen Assistenten Joseph Crosthwait, half bei der Neuausgabe der Historia coelestis Britannica (1725) und fertigte Sternkarten für den Atlas coelestis (1729).
Abraham Sharp berechnet 1699 mit Hilfe der Arcustangens-Reihe von Gregory und Leipniz 72 Stellen von pi.

2.8 - John Machin

John Machin (1680 in England bis 9. Juni 1751 in London) war ein Astronom und Mathematiker mit einer Professur am Gresham College in London. Er ist bekannt wegen seiner 1706 entdeckten arctan-Formel für die Kreiszahl pi.

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$$

$$\frac{\pi}{4} = 8 \arctan \frac{1}{10} - 4 \arctan \frac{1}{515} - \arctan \frac{1}{239}$$

Seine Gleichung lässt sich zusammen mit der taylorschen Reihenentwicklung der Arcustangens-Funktion für schnelle Berechnungen verwenden. John Machin berechnete mit seiner Formel von 1706 die ersten 100 Stellen von pi.

2.9- Thomas Fantet De Lagny

Im Jahr 1719 berechnet der Franzose Thomas Fantet De Lagny pi auf 127 Stellen.

2.10 - Georg Freiherr von Vega

Georg Freiherr von Vega (23. März 1754 in Sagoritza, Herzogtum Krain; † 26. September 1802 in Wien) war ein österreichischer Mathematiker und Artillerieoffizier. Sein für die Technik wichtigstes Werk sind die 7-stelligen Logarithmentafeln und deren Neuausgabe als „Vega-Bremiker".
Zu einem Bestseller wurde auch Vegas 4-bändiges Lehrbuch Vorlesungen über die Mathematik (1782-1800), eines davon über sogenannte „Einfache Maschinen"). Zu erwähnen sind noch Publikationen zur Zeitmessung und zu einem System der Maßeinheiten, die in den letzten Lebensjahren entstanden.
1789 stellte Vega einen neuen Rechenrekord auf, indem er die Kreiszahl pi auf 140 Stellen berechnete (wovon sich später 126 als richtig herausstellten). Dieser Rekord hielt mehrere Jahrzehnte.
Bei seiner Berechnung stellte Vega fest das De Lagny nur 112 richtige Stellen gefunden hatte.

3 - π als Symbol

Der griechische Buchstabe ' π' (p) zur Bezeichnung der Verhältniszahl des Kreisumfangs um Kreisdurchmesser soll sich ableiten aus dem griechischen Wort periphereia = Kreis(umfang), Umkreis, Umfangslinie oder auch von perimetros, dt. Umfang.
Der griechische Buchstabe π wurde als Abkürzung für "Peripherie" von englischen Mathematikern benutzt.

3.1 - William Oughtred

William Oughtred (5. März 1574 in Eton bis 30. Juni 1660 in Albury, Surrey) war ein englischer Mathematiker. Bekannt wurde William Oughtred durch die Erfindung des Rechenschiebers im Jahre 1622 (nach anderen Quellen 1621). Ferner führte er 1631 das mathematische Symbol „×" für Multiplikationen und „/" für Divisionen ein. Ebenso bezeichnete Oughtred in seiner Schrift Theorematum in libris Archimedis de Sphaera et Cylindro Declaratio als erster Mathematiker die Kreiszahl mit „pi" um das Verhältnis von halbem Kreisumfang (semiperipheria) zu Halbmesser (semidiameter) auszudrücken

3.2 - Isaac Barrow

Isaac Barrow wurde im Oktober 1630 in London als Sohn von Thomas Barrow geboren. Bekannt ist er vor allem als Lehrer von Isaac Newton. Er gab durch eine Methode, mittels des charakteristischen Dreiecks, das erst später von Leibniz so genannt wurde, Tangenten an Kurven zu ziehen, die erste Veranlassung zur Differentialrechnung. Er erkannte früh, dass die Integralrechnung und die Differentialrechnung zueinander invers sind. Er hatte maßgeblichen Anteil an der Reihenentwicklung. Dieselben Bezeichnungen wie William Oughtred für pi verwendete um 1664 auch Isaac Barrow.

3.3 - William Jones

William Jones (1675 in Llanfihangel Tre'r Beirdd, Anglesey, Wales bis 1. Juli 1749 in London) war ein walisischer Mathematiker.
Obwohl Jones keine Universität besucht hatte und keine Beiträge zur mathematischen Forschung erbrachte, stand er mit einigen herausragenden Mathematikern seiner Zeit in Kontakt, insbesondere mit Isaac Newton. Seit 1711 war Jones Mitglied der Royal Society. Für diese wurde er 1713 Mitglied einer Kommission, die den Prioritätsstreit zwischen Newton und Gottfried Wilhelm Leibniz klären sollte. Jones veröffentlichte auch ein Buch nach Newtons Notizen Analysis per quantitatum series, fluxiones, ac differentias: cum enumeratione linearum tertii ordinis, London 1711. In seinem Lehrbuch Synopsis palmariorum matheseos: or, A new introduction to the mathematics, London 1706, verwendete er das Symbol π (abgeleitet von engl. Perimeter „Umfang“).

3.4 - David Gregory

David Gregory (3. Juni 1659 in Aberdeen, Schottland bis 10. Oktober 1708 in Maidenhead, Berkshire, England) war Professor für Mathematik an der Universität Edinburgh und Professor für Astronomie an der Universität Oxford. Er war ein Kommentator zu den Philosophiae Naturalis Principia Mathematica von Isaac Newton. David Gregory verwendete 1697 die Bezeichnung pi\rho für das Verhältnis von Umfang zu Radius.

3.5 - Leonhard Euler

Leonhard Euler (15. April 1707 in Basel bis 7. Septemberjul./ 18. September 1783greg. in Sankt Petersburg) war einer der bedeutendsten Mathematiker.
Insgesamt gibt es 866 Publikationen von ihm. Ein großer Teil der heutigen mathematischen Symbolik geht auf Euler zurück (z. B. e, π, i, Summenzeichen ∑, f(x) als Darstellung für eine Funktion). 1744 gab er ein Lehrbuch der Variationsrechnung heraus. Euler kann auch als der eigentliche Begründer der Analysis angesehen werden. 1748 publizierte er das Grundlagenwerk Introductio in analysin infinitorum, in dem zum ersten Mal der Begriff der Funktion die zentrale Rolle spielt. Am 3. September 1750 las Leonhard Euler vor der Berliner Akademie der Wissenschaften ein Mémoire, in dem er erneut das von Isaac Newton deklarierte Prinzip Kraft gleich Masse mal Beschleunigung vorstellte.
In den Werken Institutiones calculi differentialis (1765) und Institutiones calculi integralis (1768–1770) beschäftigte er sich außer mit der Differential- und Integralrechnung unter anderem mit Differenzengleichungen, elliptischen Integralen sowie auch mit der Theorie der Gamma- und Betafunktion. Andere Arbeiten setzen sich mit Zahlentheorie, Algebra (z. B. Vollständige Anleitung zur Algebra, 1770), angewandter Mathematik (z. B. Mechanica, sive motus scientia analytica exposita, 1736 und Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum, 1765) und sogar mit der Anwendung mathematischer Methoden in den Sozial- und Wirtschaftswissenschaften auseinander (z. B. Rentenrechnung, Lotterien, Lebenserwartung).
In der Mechanik arbeitete er auf den Gebieten der Hydrodynamik (Eulersche Bewegungsgleichung, Turbinengleichung) und der Kreiseltheorie (Eulersche Kreiselgleichungen). Die erste analytische Beschreibung der Knickung eines mit einer Druckkraft belasteten Stabes geht auf Euler zurück;er begründete damit die Stabilitätstheorie. In der Optik veröffentlichte er Werke zur Wellentheorie des Lichts und zur Berechnung von optischen Linsen zur Vermeidung von Farbfehlern.
Seine 1736 veröffentlichte Arbeit Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis beschäftigt sich mit dem Königsberger Brückenproblem und gilt als eine der ersten Arbeiten auf dem Gebiet der Graphentheorie.
Ausgangspunkt für die weiteren Untersuchungen der Kreiszahl waren einige grundlegende Erkenntnisse Leonhard Eulers, die dieser 1748 in seinem Werk Introductio in analysin infinitorum veröffentlicht hatte. Euler stellte unter anderem mit der bekannten Formel

$$\mathbf{e^{iz} = \cos z + i \cdot \sin z}$$

erstmals einen Zusammenhang zwischen trigonometrischen Funktionen und der Exponentialfunktion her und lieferte darüber hinaus einige Kettenbruch- und Reihendarstellungen von π und der später nach ihm benannten eulerschen Zahl **e=2,718281828**.

Euler fand u.a. die Beziehung $\mathbf{e^{i\pi} + 1 = 0}$, die eine Voraussetzung für Lindemanns Beweis der Transzendenz von π ist.
Leonhard Euler führte in seiner im Jahre 1748 erschienenen Introductio in Analysin Infinitorum im ersten Bande pi bereits auf 148 Stellen genau an. Von Euler entdeckte Formeln für pi:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$$

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\frac{\pi^4}{90} = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \ldots$$

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{1\cdot 3}{4 + \cfrac{3\cdot 5}{4 + \cfrac{5\cdot 7}{4 + \ldots}}}}$$

Leonhard Euler schaffte mittels Bleistift und Papier in einer Stunde 20 Dezimalen von π. Aufgegriffen wurde der Buchstabe später von **Leonhard Euler** in seiner Abhandlung „Variae observationes circa series infinitas“. Euler verwendet zunächst p bis 1735, ab 1738 dann π . Danach etablierte sich der griechische Buchstabe auch bei anderen Mathematikern als Symbol für die Kreiskonstante und setzte sich so dann überall durch.

4 - Die Irrationalität von π

4.1 - Johann Heinrich Lambert

Johann Heinrich Lambert (* 26. August 1728 in Mülhausen (Elsass); † 25. September 1777 in Berlin) war ein schweizerisch-elsässischer Mathematiker, Logiker, Physiker und Philosoph der Aufklärung.
Lambert gehörte zu den hervorragendsten Mathematikern und Logikern seiner Zeit. Die Lehre von Intensitätsmessung des Lichts begründete er als Wissenschaft in seinem Werk Photometria, seu de mensura et gradibus luminis colorum et umbras (Augsburg 1760). Weiterhin erforschte er – selbst seit seiner Geburt schwerhörig – die Theorie des Sprachrohrs.
Vor allem in der Photometria, aber auch in seinem Buch Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung (Vol. 1, 1765), verknüpfte er Ideen von Thomas Simpson, Rugjer Josip Boškovic und Mayer. Seine Arbeit in der Photometrie und Geodäsie führte ihn zu einer allgemeinen Theorie der Fehler. Er diskutierte das Problem der Anwendung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf Fehlerterme und verwendete bereits eine Maximum-Likelihood-Methode für die Bestimmung von Mittelwerten.
Außerdem erwarb sich der aufgeklärte Gelehrte Verdienste um die Erkenntnistheorie, der er sein Werk Neues Organon, oder Gedanken über die Erforschung und Bezeichnung des Wahren (2 Bde., Leipzig 1764) widmete.
1761 (im Druck 1768) wies Lambert die Irrationalität der Kreiszahl \pi mit Hilfe der Theorie der Kettenbrüche nach.[1] Er vermutete ferner, dass e und pi transzendente Zahlen sind.
Irrationalität einer Zahl besagt, das sie nicht als Bruch zweier ganzen Zahlen darstellbar ist. Lambert nähert sich der Kreiszahl durch eine Folge von Brüchen.
Zuerst zeigte er, dass **tan x** nicht rational sein kann, wenn $x \in Q \setminus \{0\}$ ist. Daraus folgerte er, dass **x** nicht rational sein kann, wenn **tan x** rational ist wie dies z.B. in dem Ausdruck **tan** π/4 = 1 der Fall ist.
Daraus schloss Lambert, das π/4 und damit auch π nicht rational sein können.

Mit Hilfe von Kettenbrüchen konnte er auch die besten Näherungen in Form von Brüchen berechnen. Dazu zählt beispielsweise:

$$\pi \approx \frac{103993}{33102} = 3{,}1415926530$$

$$\frac{1\,019\,514\,486\,099\,146}{324\,521\,540\,032\,945} \approx 3{,}141595653591$$

Diese Vorarbeit machte sich Johann Heinrich Lambert zunutze, der mit Hilfe einer der Eulerschen Kettenbruchentwicklungen 1766 erstmals zeigen konnte, dass e und π irrationale, also nicht durch einen ganzzahligen Bruch darstellbare Zahlen sind.

4.2 - Adrien-Marie Legendre

Adrien-Marie Legendre (18. September 1752 in Paris bis 10. Januar 1833 ebenda) war ein französischer Mathematiker.
Legendre leistete wichtige Beiträge auf den unterschiedlichsten Gebieten der Mathematik, wurde allerdings schon zu Lebzeiten von denen des 25 Jahre jüngeren Carl Friedrich Gauß in den Schatten gestellt, der in merkwürdiger Parallelität (Felix Klein) auf fast denselben Gebieten wie Legendre arbeitete, häufig aber tiefer vordrang. So entdeckte Legendre vor Gauß 1806 die Methode der kleinsten Quadrate, die er ebenfalls in der Astronomie benutzte (bei der Bestimmung der Kometenbahnen aus drei Beobachtungen), und fand auch vor Gauß das Quadratische Reziprozitätsgesetz (das allerdings schon Euler in Arbeiten von 1751 und 1783 kannte), dessen erste Beweise von Gauß stammen. Der Begriff Legendre-Symbol in der Zahlentheorie erinnert noch heute an die Leistungen Legendres bei dessen Formulierung. Legendre anerkannte die Beiträge von Gauß und berücksichtigt sie auch in der stark überarbeiteten zweiten Auflage seiner Zahlentheorie von 1808, beklagte sich aber gleichzeitig bitter darüber, dass Gauß umgekehrt alle Prioritäten für sich in Anspruch nahm. Auch die asymptotische Formel für die Primzahlverteilung findet sich in Legendres Zahlentheorie von 1798. Sie steht am Anfang der Verwendung analytischer Methoden in der Zahlentheorie.
In der Analysis ist Legendre nicht nur für seine Legendre-Polynome in der Potentialtheorie bekannt, sondern auch für seine Arbeiten über elliptische Integrale, in der seine Einteilung in drei „Gattungen“ nach ihm benannt ist. Er behandelte sie zusammen mit anderen über Integrale definierten Funktionen wie der Gammafunktion und der Betafunktion in seinen Exercises du calcul integral, die in drei Bänden 1811, 1817, 1819 erschienen.
In der Mechanik ist Legendre auch für die Legendre-Transformation bekannt.
Eine kleine Lücke in Lamberts Beweisführung wurde 1806 von Adrien-Marie Legendre geschlossen, der gleichzeitig den Irrationalitätsbeweis für π^2 erbrachte.

4.3 - Carl Friedrich Gauß

Johann Carl Friedrich Gauß (30. April 1777 - 23. Februar 1855) war ein deutscher Mathematiker, Statistiker, Astronom, Geodät und Physiker. Wegen seiner überragenden mathematischen und naturwissenschaftlichen Leistungen galt er bereits zu seinen Lebzeiten als „Fürst der Mathematiker".
Einige Anekdoten besagen, dass er bereits als dreijähriger seinen Vater bei der Lohnabrechnung korrigiert haben soll. Später sagte Gauß von sich selbst, er habe das Rechnen schon vor dem Sprechen gelernt. Sein Leben lang behielt er die Gabe, selbst komplizierteste Rechnungen im Kopf durchführen zu können.
Als der „Wunderknabe" Gauß vierzehn Jahre alt war, wurde der Herzog Karl Wilhelm Ferdinand von Braunschweig aufmerksam auf ihn und unterstützte ihn finanziell. So konnte Gauß von 1792 bis 1795 am Collegium Carolinum studieren.
Mit 18 Jahren entwickelte Gauß die Grundlagen der modernen Ausgleichungsrechnung und der mathematischen Statistik (Methode der kleinsten Quadrate), mit der er 1801 die Wiederentdeckung des ersten Asteroiden Ceres ermöglichte.
Auf Gauß gehen die folgenden Arbeiten zurück:
Begründung und Beiträge zur nicht-euklidischen Geometrie, Primzahlverteilung und Methode der kleinsten Quadrate, Einführung der elliptischen Funktionen, Fundamentalsatz der Algebra, Beiträge zur Verwendung komplexer Zahlen, Beiträge zur Zahlentheorie, Beiträge zur Astronomie, Beiträge zur Potentialtheorie, Landvermessung und Erfindung des Heliotrops, Gaußsche Krümmung und Geodäsie, Magnetismus, Elektrizität und Telegrafie

$$\pi = 48 \cdot \arctan\frac{1}{18} + 32 \cdot \arctan\frac{1}{57} - 20 \cdot \arctan\frac{1}{239}$$

4.4 - Joseph Liouville

Joseph Liouville (* 24. März 1809 in Saint-Omer; † 8. September 1882 in Paris) war ein französischer Mathematiker.
Liouville arbeitete in zahlreichen mathematischen Teilgebieten, darunter Zahlentheorie, Funktionentheorie und Differentialgeometrie, aber auch in mathematischer Physik und sogar in Astronomie. Ein bekanntes Ergebnis ist der Satz von Liouville, an dem heute keine Einführung in die Funktionentheorie vorbeikommt. Liouville war auch der erste, dem ein Beweis für

die Existenz transzendenter Zahlen gelang, indem er eine unendliche Klasse solcher Zahlen als Kettenbrüche konstruierte (Liouville-Zahlen).
Er führte auch eine zahlentheoretische Funktion, die Liouville-Funktion ein. Weiter zeigte Liouville, dass die Stammfunktion elementarer Funktionen nicht elementar sein muss.

Die Vermutung, dass π nicht algebraisch sein könne, stand nach Lamberts Beweis der Irrationalität jetzt im Raum, wurde zumindest von Euler, Lambert und Legendre ausgesprochen. Dabei war bis zur Mitte des 19. Jahrhundert noch nicht klar, dass es überhaupt transzendente Zahlen geben musste. Dieser Nachweis gelang 1844/1851 Joseph Liouville durch explizite Konstruktion von transzendenten liouvilleschen Zahlen.

5 - Die Transzendenz von π

5.1 - Charles Hermite

Charles Hermite (24. Dezember 1822 in Dieuze (Lothringen) bis 14. Januar 1901 in Paris) war ein französischer Mathematiker.
Hermite arbeitete in Zahlentheorie und Algebra, über orthogonale Polynome und elliptische Funktionen. Er erzielte wichtige Ergebnisse über doppelt periodische Funktionen und Invarianten quadratischer Formen. 1858 löste er eine algebraische Gleichung fünften Grades mit Hilfe elliptischer Funktionen.
1873 erzielte er sein wohl berühmtestes Resultat: Er bewies, dass die eulersche Zahl e transzendent ist; auf Hermites Methode aufbauend bewies Carl Louis Ferdinand von Lindemann 1882 die Transzendenz der Kreiszahl π (Unmöglichkeit der Quadratur des Kreises).

5.2 - Ferdinand von Lindemann

Carl Louis Ferdinand von Lindemann (* 12. April 1852 in Hannover; † 6. März 1939 in München) war ein deutscher Mathematiker.
Aus dieser Zeit (1882) stammt sein Beweis, dass die Kreiszahl \pi eine transzendente Zahl ist (siehe Satz von Lindemann-Weierstraß); daraus folgte erstmals ein Beweis für die Unmöglichkeit der Quadratur des Kreises.

Lindemann griff in seiner Arbeit auf ein Ergebnis des französischen Mathematikers Charles Hermite zurück. Dieser hatte 1873 gezeigt, dass die eulersche Zahl e transzendent ist.

Lindemann (1852-1939) bewies dann im Jahre 1882, das π eine **transzendente** Zahl ist, d.h. unter anderem: π ist **unendlich und unperiodisch**.
Unendlichkeit und Unperiodizität langen allein allerdings nicht aus, um Transzendenz einer Zahl zu gewährleisten.
Transzendenz einer Zahl bedeutet: Nicht Lösung einer Gleichung mit GANZZAHLIGEN oder RATIONALEN Koeffizienten zu sein. Den Beweis veröffentlichte er in dem Artikel "Über die Zahl π" in den "Mathematischen Annalen" in München.
Zuerst bewies Lindemann, dass die Lösung von $\mathbf{e^{i\pi} + 1 = 0}$ nicht algebraisch sein kann. Er wusste aber, dass π dieser Gleichung genügte (das hatte schon Newton bewiesen), woraus er noch weiter folgerte, dass π keine algebraische Zahl sein kann. Die Konsequenz ist, dass eine Konstruktion der Zahl π durch Lineal und Zirkel, also die geometrische Quadratur des Kreises **nicht exakt** möglich ist.
Zu erwähnen wäre da noch das, seit den Griechen, quasi ganze Generationen von Mathematikern vorher versucht hatten, eine Lösung der Quadratur mit Zirkel und Lineal zu erreichen. Lindemanns Beweis zeigt demzufolge auch die Aussichtslosigkeit eines solchen Unterfangens
Was andererseits bedeutet, das vorhandene geometrische Konstruktionen, die Quadratur des Kreises betreffend, als **Näherungslösungen** zu betrachten sind. Und bei Näherungen, das heißt bei ihrer Anwendung und Benutzung, spielt eher die Frage der Genauigkeit eine große Rolle.

5.3 - David Hilbert

David Hilbert (* 23. Januar 1862 in Königsberg; † 14. Februar 1943 in Göttingen) war ein deutscher Mathematiker. Er gilt als einer der bedeutendsten Mathematiker der Neuzeit. Viele seiner Arbeiten auf dem Gebiet der Mathematik und mathematischen Physik begründeten eigenständige Forschungsgebiete. Seine Vorschläge zu den Grundlagen der Mathematik veranlassten eine kritische Analyse der Begriffsdefinitionen der Mathematik und des mathematischen Beweises. Diese Analysen führten zum Gödelschen Unvollständigkeitssatz, der unter anderem zeigt, dass das sogenannte „Hilbertprogramm“ nicht erfüllt werden kann. Hilberts programmatische Rede auf dem internationalen Mathematikerkongress in Paris im Jahre 1900, in der er eine Liste von 23 mathematischen Problemen vorstellte, beeinflusste die mathematische Forschung des 20. Jahrhunderts nachhaltig.
Lindemanns Beweis für die Transzendenz von π wurde in den folgenden Jahren und Jahrzehnten noch wesentlich vereinfacht, so etwa durch David Hilbert im Jahre 1893.

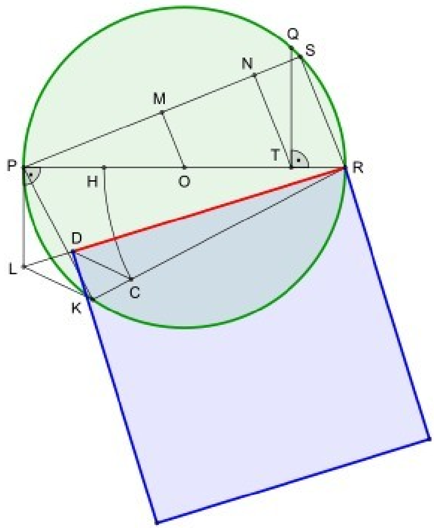
5.4 - Ramanujan

Srinivasa Ramanujan Aiyangar (22. Dezember 1887 - 26. April 1920) war ein indischer Mathematiker. Er ist vor allem dafür bekannt, sich all sein Wissen autodidaktisch beigebracht zu haben. Von 1914 bis 1919 arbeitete er gemeinsam mit dem britischen Mathematiker Godfrey Harold Hardy am Trinity College der Universität Cambridge in England. Während dieser Zeit wurden ihm zahlreiche Ehrungen und Auszeichnungen zuteil. Ramanujans mathematischer Nachlass tauchte erst 1976 wieder auf und besteht aus über 600 Formeln und Sätzen, von denen einige bis heute nicht vollständig bewiesen sind.

Reihenentwicklung für 1/Pi nach Srinivasa Ramanujan

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{9801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n!)(1103+26390n)}{(n!)^4 \, 396^{4n}}$$

Im Jahr 1913 erschien eine geometrische Konstruktion von Ramanujan, die ebenfalls auf der Näherung π = 335/113 beruht. Siehe dazu: Näherungskonstruktion Ramanujan:



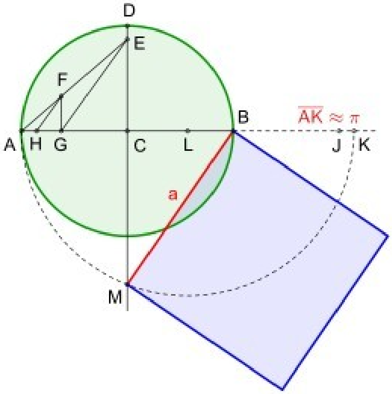
Ramanujan beschäftigte sich während der fünf Jahre in England (1914-1919) hauptsächlich mit der Zahlentheorie. Dabei wurde er durch viele

Summenformeln, die Konstanten wie die Kreiszahl π, Primzahlen und Partitionsfunktionen enthalten, berühmt. Zudem erstellte er eine sehr gute Näherungsformel für die Berechnung des Ellipsenumfangs.
Bekannt wurde auch seine Kettenbruchentwicklung, die er noch 1914 veröffentlichte und mit deren Hilfe man in nur zehn Schritten 88 Stellen von π errechnen kann.
1985 gelang es Bill Gosper auf diese Weise, π auf 17.000.000 Stellen hinter dem Komma auszurechnen. Insgesamt fand Ramanujan in Cambridge etwa 3.900 mathematische Resultate, in der Mehrzahl Identitäten und Gleichungen, von denen die meisten im Nachhinein bewiesen werden konnten.

6 - Geometrische Näherungskonstruktionen

6.1 - Jacob de Gelder

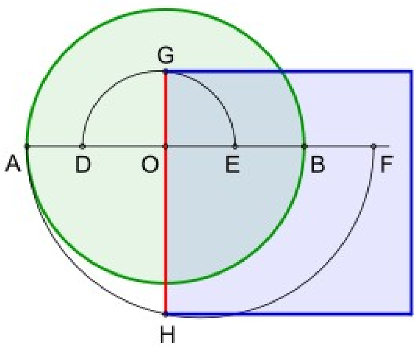
1849 erschien in Grünerts Archiv eine einfache Konstruktion von Jacob de Gelder (1765–1848). Das war 64 Jahre früher, als die Veröffentlichung der vergleichbaren Konstruktion von S. A. Ramanujan. Siehe dazu: Näherungskonstruktion Jacob de Gelder



Konstruktion_von Jacob de Gelder

6.2 - E. W. Hobson

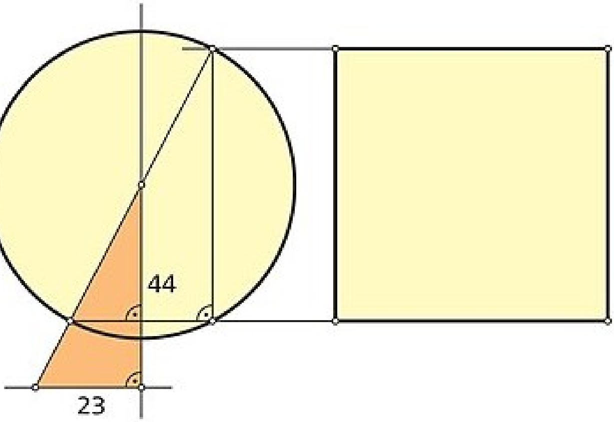
Eine einfache und gut nachvollziehbare Konstruktion stammt von E. W. Hobson aus dem Jahr 1913. Sie benötigt für die Seite des Quadrates nur drei Halbkreise und zwei zueinander rechtwinklig stehende Strecken. Siehe dazu: Näherungskonstruktion Hobson



Konstruktion von E.W.Hobson

6.3 - Louis Loynes

Eine Methode veröffentlichte Louis Loynes 1961. Sie beruht auf der Feststellung, dass der Flächeninhalt des Umkreises eines rechtwinkligen Dreiecks gleich dem Quadrat über der größeren Kathete ist, wenn der Tangens des kleineren Winkels, also das Verhältnis von kleinerer zu größerer Kathete. Siehe dazu: Näherungskonstruktion Louis Loynes



Konstruktion von Louis Loynes

7 - Bailey, Borwein, Plouffe

David Harold Bailey (* 14. August 1948) ist ein US-amerikanischer Mathematiker und Informatiker.
Zusammen mit Peter Borwein und Simon Plouffe wurde er 1996 durch die Veröffentlichung der BBP-Reihe für pi bekannt. Diese Reihe wurde mit Hilfe des PSLQ-Algorithmus für die Auffindung einer ganzzahligen linearen Abhängigkeit (Ganzzahlbeziehung) vorgegebener reeller Zahlen entdeckt. Der PSLQ Algorithmus wurde 1992 durch Bailey und Helaman Ferguson entwickelt.

Peter Benjamin Borwein (* 5. Oktober 1953 in St Andrews)[1] ist ein kanadischer Mathematiker, der als Mit-Entdecker der Bailey-Borwein-Plouffe-Formel (nach D. Bailey, P. Borwein und S. Plouffe) zur Berechnung einer beliebigen hexadezimalen Stelle von π (ohne Kenntnis vorheriger Ziffern) bekannt wurde. Er ist als Vertreter der Experimentellen Mathematik bekannt.

Simon Plouffe (* 11. Juni 1956 in Saint-Jovite, Québec) ist ein kanadischer Mathematiker.

1996 entdeckte David Harold Bailey, zusammen mit Peter Borwein und Simon Plouffe, eine neuartige Reihendarstellung (BBP-Reihe) für pi:

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k}\left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6}\right)$$

8 - Die Jagd nach Stellen von π

Johann Dase

Johann Martin Zacharias Dase (23. Juni 1824 - 11. September 1861) war ein deutscher Schnellrechner und Rechenkünstler.
Dase zeigte schon in seiner Jugend eine leidenschaftliche Vorliebe für das Rechnen und widmete der Übung darin fast jede freie Stunde. Seit 1839 trat er in Deutschland, Österreich und England als Rechenkünstler auf.
So multiplizierte er in Wien eine 40ziffrige Zahl mit einer anderen 40ziffrigen in 40 Minuten, in Wiesbaden eine 60ziffrige mit einer anderen 60ziffrigen in 2 Stunden 59 Minuten bei lebhafter Unterhaltung der Gesellschaft und zog in München die Quadratwurzel aus einer 60ziffrigen Zahl in 20 Minuten und eine aus einer 100ziffrigen in 52 Minuten.
In sechs Stunden intensiven Kopfrechnens erkannte er die Repunitzahl R11 als zusammengesetzte Zahl.
Auf Empfehlung von C.F. Gauß fand er später eine Anstellung, bei der er Tafeln für Logarithmen- und Hyperbelfunktionen berechnete
Johann Dase verwendete 2 Monate seines Lebens darauf, 200 Stellen der Zahl π zu berechnen.

1837
J. F. Callet veröffentlicht in Paris 152 Stellen.

1841
William Rutherford bestimmt 208 Stellen.

1847
Thomas Clausen findet mit Hilfe der Machinschen und Eulerschen Formeln 248 Nachkommastellen.

1853
Rutherford zieht mit 440 Stellen nach.

1853
William Shanks übertrifft Rutherford noch im selben Jahr mit 707 Stellen. Später fand man aber heraus, daß er sich ab der 528. Stelle verrechnet hatte.

1945 wies Ferguson den Fehler in Shanks' Berechnungen mit Hilfe eines "Tischrechners" nach.

1949 rechnete ENIAC neunzig Stunden lang an den ersten 2037 Stellen von π

Am 29. Juli **1961** wurden auf einer IBM 7090 in New York 100 265 Dezimalstellen von π in 8 Stundenberechnet.

1967 berechnete der französische Computer CDC 6600 500 000 Stellen von π .

1988 waren es bereits 16777216 Stellen, die Yoshiaki Tamura und Tasumasa Kanada mit einem Computer berechneten.

Zurzeit sind mehr als 1 Milliarde Stellen von π bekannt.

9 - Eine Tabelle zur Entwicklung der Stellenzahl von π:

Mathematiker	**Jahr**	**berechnete Stellen**
Vieta	1580	10
van Roomen	um 1600	15
van Ceulen	um 1605	35
Abraham Sharp (1651-1742)	1706	72
John Machin	1707	100
Thomas de Lagny	1719	127
Georg von Vega(1756-1802)	1793	140
Thibaut	1822	156
William Rutherford	1841	208
Zacharias Dase	1844	200
Thomas Clausen(1801-1885)	1847	248
William Rutherford	1853	440
Prof. Richter (Elbing)	1855	500
William Shanks (GB)	1874	707
D. F. Ferguson (GB)	1946	730
John W. Wrench Jr. und Levi B. Smith	1947	808

G. W. Reitwieser (USA) auf ENIAC	1949	2 035
S. C. Nicholson und J. Jeenel auf NORC	1954	3 089
Felton auf Pegasus	1958	10 000
F. Genuis (Paris) auf IBM 704	1958	10 000
J. M. Gerard (London) auf IBM 7090	1961	20 000
Daniel Shanks und John W. Wrench Jr. auf IBM 7090	1961	100 265
Guilloud und Bouyer auf CDC 7600	1973	1 000 000
Yoshiaki Tamura und Yasuma Kanada (Japan) auf HITAC M-280H	1983	16777216
Gosper auf Symbolics	1985	17 000 000
D. H. Bailey auf Cray-2	1986	29 360 000
Kanada auf SX 2	1987	134217728
Kanada	1988	201 326 000
Kanada auf HITAC S-820/80	1989	1 073 740 000

10 - Näherungswerte für π

Wie in der obigen historischen Betrachtung behandelt worden ist, lässt sich π durch Bruchdarstellungen annähern. Hier einige Beispiele, wie sie im Laufe der Zeit auch immer wieder von verschiedenen Autoren benutzt worden sind. Die erste abweichende Dezimalstelle ist dabei rot markiert und die Ziffernfolge wird hier abgebrochen.

Näherung für π	Dezimale Darstellung
$\frac{19}{6}$	3,16
$\frac{22}{7}$	3,142
$\frac{25}{8}$	3,12
$\frac{49}{16}$	3,0
$\frac{142}{45}$	3,15
$\frac{223}{71}$	3,140
$\frac{256}{81}$	3,16
$\frac{333}{106}$	3,141 50
$\frac{355}{113}$	3,141 592 9
$\frac{377}{120}$	3,141 6
$\frac{3927}{1250}$	3,141 6
$\frac{20612}{6561}$	3,141 594

$\frac{54648}{17395}$	3,141 592 4
$\frac{75948}{24175}$	3,141 592 5
$\frac{103993}{33102}$	3,141 592 653 0
$\frac{100798}{32085}$	3,141 592 64
$\frac{195882}{62351}$	3,141 6
$\frac{211875}{67441}$	3,141 6
$\frac{211882}{67441}$	3,141 7
$\frac{312689}{99532}$	3,141 592 654

Tabelle 1 - Näherungen für π in Bruchdarstellung

11 - Die geometrisch günstigste Näherung

Praktisch geometrisch gesehen, also aus Gründen der Konstruierbarkeit, sind quasi nur die Bruchdarstellungen deren Nenner kleiner als 1000 sind, verwendbar. Und hier fallen lediglich 4 Werte auf:

Tsu Chu'ung-Chi

Die Darstellung von π durch **355/113** - die ersten 6 Stellen hinter dem Komma sind exakt

Adriaen Metius

Die Darstellung von π durch **333/106** - die ersten 4 Stellen hinter dem Komma sind exakt

Claudius Ptolemäus

Die Darstellung von π durch **377/120** - die ersten 3 Stellen hinter dem Komma sind exakt

Archimedes

Die Darstellung von π durch **22/7** - die ersten 2 Stellen hinter dem Komma sind exakt

Die angegebenen Näherungen lassen sich geometrisch nutzen bzw. umsetzen, so dass eine Quadratur des Kreises, **als annähernde Konstruktion**, lediglich mit Zirkel und Lineal ausgeführt, also durchaus möglich ist.
Die am häufigsten verwendete Näherung ist der von Archimedes verwendete Wert 22/7
Dadurch reduziert sich das Thema Quadratur des Kreises auf zwei Zahlen: die **7** und die **11.** Es ergeben sich hier zwei Möglichkeiten: dass **14:11** und das **11:7** Verhältnis. Aus jeder Proportion resultiert eine spezifische Quadraturkonstruktion.
In den nächsten Kapiteln werden daher beide Konstruktionen gezeigt. Ferner erfolgt eine Untersuchung ihrer Genauigkeit.