François Renaud, écologue : « L'élevage intensif favorise la grippe aviaire »

PALMARÈS 2005 du Prix La Recherche

MENSUEL N°392 DÉCEMBRE 2005

La Recherche

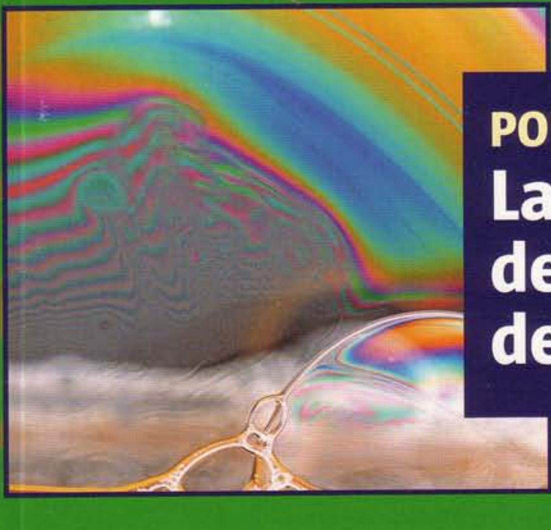
L'ACTUALITÉ DES SCIENCES

π le maître nombre

Pourquoi la plus célèbre des constantes continue d'inspirer les mathématiciens p.30

NEUROPHYSIOLOGIE
Cerveaux sous hypnose p. 44

PORTFOLIO
La physique des bulles de savon p. 64



MENSUEL DOM/S 6 € BEL 6,90 € LUX 6,90 € D 7,30 € ESP 6,30 € GR 6,30 € ITA 6,30 € PORT.CONT 6,30 € CAN 8,50 $CAN CH 12 FS MAR 49 DH TUN 4900 TNM ISSN 00295671

Bac to basics
LA TUBERCULOSE

Comment ça marche
L'AUTOFOCUS

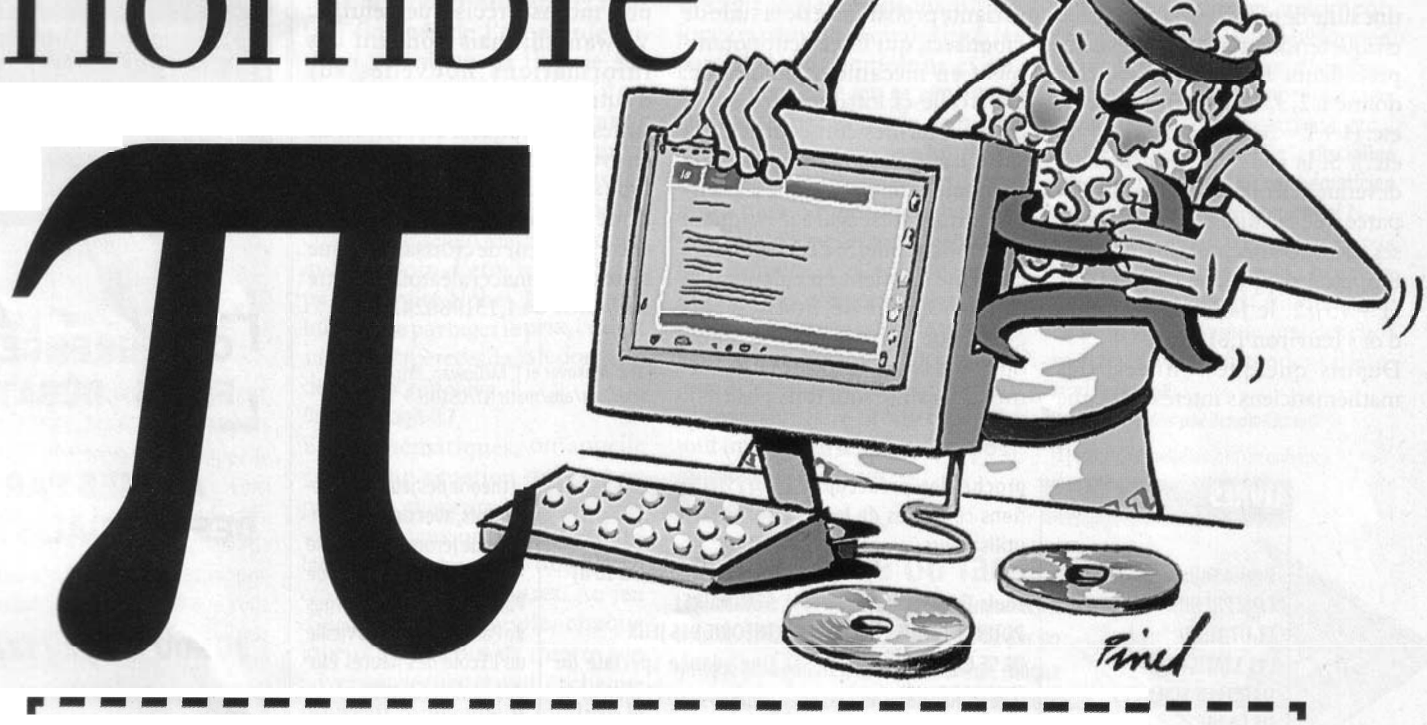
W^{xyz} LES SECRETS DE JULES CÉSAR ET DU TÉLÉPHONE ROUGE

Chercher jouer trouver
LES DOMINOS TOMBENT PILE

T 01108 - 392 - F: 5,90 €

π = 3,1415... Quoi de plus banal que ce nombre π, rapport de la circonférence et du diamètre de tout cercle ? Pourquoi s'intéresser encore aujourd'hui à un nombre que l'on étudie depuis l'Antiquité ? N'a-t-on pas tout découvert et redécouvert mille fois à son sujet ? Et pourtant, π ne cesse de fasciner le mathématicien, l'artiste et le profane. Parce qu'il est l'incontestable figure de proue du monde mystérieux des constantes mathématiques, ces nombres qui semblent surgir de nulle part et que l'on rencontre, immuables, plus souvent qu'à leur tour. Dans ce dossier, consacré à π et aux constantes, émergent de véritables objets de science et d'actualité.

L'indispensable nombre



▶ **Sommaire:**

1 - √2 à la rescousse des décimales p. 31

2 - La quadrature impossible du cercle p. 35

3 - Quelques nombres étranges p. 40

4 - Entretien Simon Plouffe : « Les constantes résistent à toute classification » p. 42

L'INDISPENSABLE NOMBRE π

→ CALCUL

INTERVIEW YASUMASA KANADA « Nous vérifions les performances des ordinateurs »

© LIONEL DERSOT

YASUMASA KANADA, de l'université de Tokyo, a battu près de 20 fois le record du nombre de décimales de π.

Le 24 novembre 2002, l'équipe de **Yasumasa Kanada** terminait la vérification des **1 241,1** milliards de **décimales** de **π** et des **10307 milliards** de chiffres en **hexadécimal** qu'ils avaient calculés. Le résultat de quatre ans de **travail** pour dix personnes. Ils ne comptent pas en rester **là.**

▌Depuis plus de vingt ans, vous battez régulièrement le record du nombre de décimales de π. Dans quel objectif?

Yasumasa **Kanada : Je cherche à vérifier les performances des ordinateurs** qui équipent le centre de technologie de l'information de **l'université** de Tokyo, auquel j'appartiens. Pour cela, en pratique, **il faut** faire réaliser aux machines des tâches complexes, qui utilisent beaucoup de mémoire, avec beaucoup d'opérations d'écriture et de lecture, la manipulation d'énormes quantités de nombres et la production de réponses faciles à vérifier. L'un de ces calculs exigeants est celui des décimales de π. D'où la succession de records que nous avons battus avec mes collègues. Nous pourrions bien sûr calculer d'autres constantes mathématiques telles que √2, e ou γ, la constante d'Euler. Mais π est la plus convaincante pour les profanes.

▌Ces records sont-ils seulement dus à l'amélioration des ordinateurs, ou aussi des algorithmes?

La limitation la plus importante est la taille de la mémoire principale. La seconde est la puissance de calcul de la machine. Le record **actuel a été établi en 601 heures et 56 minutes de calcul** effectif, en utilisant **1 024 gigabits** de mémoire et une capacité de calcul de 900 gigaflops*. Nous disposons déjà d'une machine de 5000 **gigabits** et 5000 gigaflops, et d'ici à un an et demi, nous triplerons encore ces valeurs. **J'espère** que nous pourrons annoncer un nouveau record d'ici **là.** Mais pour établir le dernier record en date, nous avons aussi utilisé des algorithmes complètement différents des calculs précédents. Ils sont fondés sur des sommes de la fonction arctangente*. Ils nous ont permis d'utiliser la mémoire trois fois plus efficacement. Le prix à payer a été la réécriture complète des programmes, environ **79 200** lignes de code avec les commentaires.

■ **Propos** recueillis par Luc Allemand

***Un gigaflop correspond à un milliard d'opérations en virgule flottante par seconde.**
*** La fonction arctangente est la réciproque de la fonction tangente, rapport du sinus et du cosinus.**

[3] Daisuke Takahashi, « Fast multiple-precision arithmetic on distributed memory parallels computers and its applications », thèse de l'université de Tokyo, 1998

⇨ soient obtenues à l'aide d'une seconde méthode, ce qui valide le résultat obtenu. Salamin lui-même remarquait que son résultat fournissait plusieurs formules équivalentes, celle impliquant √2 n'étant préférable que dans un souci de rapidité. L'équipe japonaise dirigée par Kanada, en pointe depuis de nombreuses années dans la course au record, a exploité, en complément de l'algorithme de Brent-Salamin, une formule imaginée par Jonathan Borwein et Peter Borwein en 1987, et qui s'est révélée elle aussi très efficace. Surprise: cette seconde méthode utilise elle aussi √2, décidément incontournable.

Match nul ?

La plupart des récents records ont été obtenus à l'aide des deux algorithmes précédents, un peu améliorés [3]. Ainsi, en filigrane, pour bien des records de décimales de π, se cache un record correspondant pour √2, et pour nul autre nombre. L'écrasante supériorité du prestige de π se manifeste toutefois au travers du fait suivant: pour appliquer l'une comme l'autre des formules précédentes et atteindre le record de 206 milliards de décimales de π en 1999, il a logiquement été nécessaire à Kanada et Takahashi de connaître √2 avec autant de décimales. C'est ainsi que, préalablement à leur calcul de π, Kanada et Takahashi ont calculé 206 milliards de décimales de √2, nouveau record en date… mais ces décimales, trop peu prestigieuses, n'ont pas été conservées dans la mémoire de leur ordinateur, économie de place oblige!

Pour Archimède, l'extraction de racines carrées n'avait été qu'un instrument pour cerner la valeur de π. Les calculs de l'équipe de Kanada, et d'autres avant eux, consacrent la subordination de la quête des décimales de √2 à celle des décimales de π. Il se peut que les méthodes héritées du XVII[e] siècle, qui n'utilisent pas √2, s'imposent à nouveau. C'est ce qui s'est produit pour les 1 241,1 milliards de décimales de π de Kanada, dernier record en date. Mais dans le cas contraire, π et √2 resteront condamnés au match nul. ■ **B. R.**

RACINES La moyenne harmonique

▌ON APPELLE MOYENNE « HARMONIQUE » de deux nombres a et b la valeur h définie par la formule :

$$h = \frac{2ab}{a+b}$$

On prête à Archytas de Tarente d'avoir remarqué que, a et b étant fixés, le produit de leurs moyennes harmonique et arithmétique que $((a+b)/2)$ est égal à ab et que cela permet de **calculer des racines carrées.** À partir d'un rectangle de côtés a et b (et donc d'aire ab), construisons un rectangle dont les côtés sont les moyennes harmonique h et arithmétique m de a et b : d'après ce qui précède, l'aire de ce nouveau rectangle est encore égale à ab. Recommençons en prenant les moyennes harmonique et arithmétique de h et m, et ainsi de suite : les côtés des rectangles s'égalisent progressivement. On s'approche donc d'un carré d'aire ab, donc de côté $\sqrt{ab}$. En partant par exemple d'un rectangle de côtés 1 et 2, la méthode permet d'approcher $\sqrt{2}$.

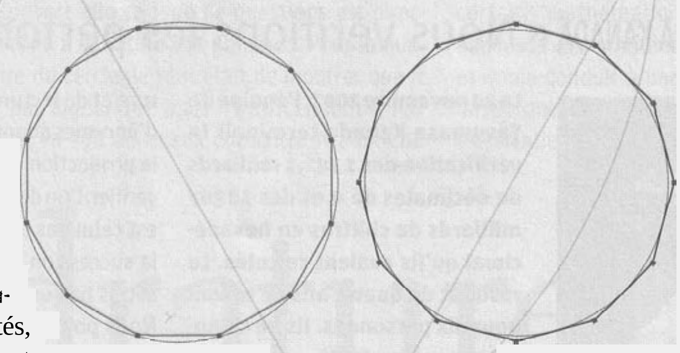
MÉTHODE Le cercle d'Archimède

LA PLUS ANCIENNE MÉTHODE de détermination de π est due à Archimède. L'idée consiste à approcher la circonférence du cercle par une ligne brisée polygonale formant un polygone régulier. Historiquement, Archimède est parti d'hexagones, pour lesquels le périmetre de l'hexagone inscrit est de 3 et celui de l'hexagone circonscrit de $2\sqrt{3}$. En doublant le nombre de côtés des hexagones, Archimède obtient des dodécagones (polygones à 12 côtés) inscrit et circonscrit, dont il exprime les périmètres à partir de ceux des hexagones. Cela fait, il double une nouvelle fois le nombre de côtés, pour obtenir successivement des polygones à 24, 48 et enfin 96 côtés (il n'est pas allé plus loin, sans doute satisfait qu'il était d'avoir suffisamment illustré l'efficacité de sa méthode). Archimède a démontré que si l'on note p et q les périmètres des polygones inscrit et circonscrit d'une certaine étape, alors ceux, p' et q', des polygones inscrit et circonscrit de l'étape suivante valent :

$$q' = \frac{2}{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}$$

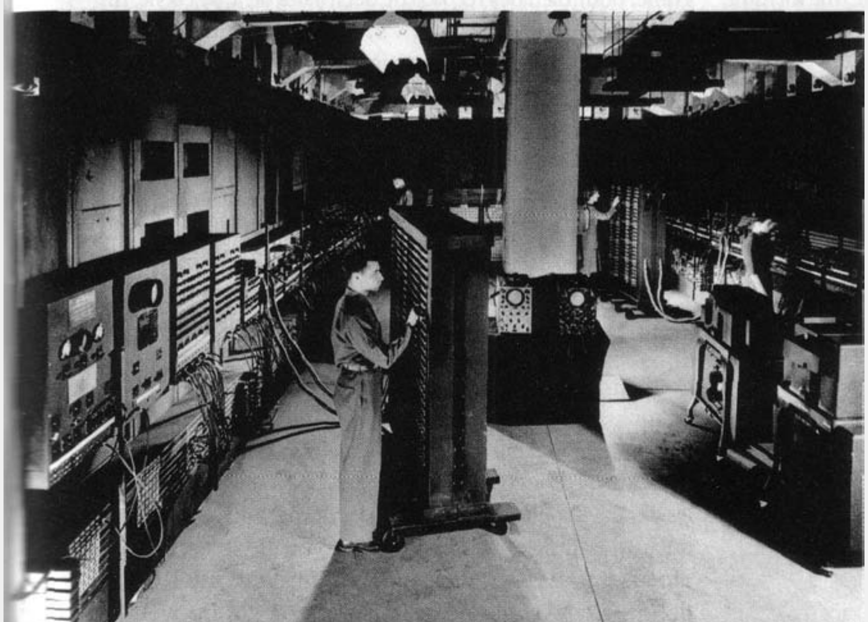
$$\text{et } p' = \sqrt{pq'}$$

EN PRENANT DES CARRES pour premiers polygones réguliers inscrit et circonscrit, on a alors $p = 2\sqrt{2}$ et $q = 4$: disposer d'une bonne estimation de la valeur de $\sqrt{2}$ permet donc d'obtenir des décimales de π. Dans les faits, beaucoup de chasseurs de décimales de π ont suivi Archimède et sont partis de l'hexagone et de $\sqrt{3}$. Certains pourtant ont choisi le carré et $\sqrt{2}$: c'est notamment le cas du record de Ludolph Van Ceulen (35 décimales) au début du XVII^e siècle.



DANS LE DESSIN DE GAUCHE, le périmetre du polygone inscrit dans le cercle est plus petit que la circonférence; la détermination de ce périmètre permet ainsi de minorer la valeur de π. Dans le dessin de droite, le polygone est circonscrit, son périmètre majore π.

nombres de chaque paire qui reste constant, mais leur « intégrale elliptique complète de première espèce »*, notée $I(a, b)$, qui se trouve liée à $M(a, b)$ par la relation $M(a,b) \times I(a,b) = \pi/2$. Lorsque a = 1 et b = $\sqrt{2}$, l'intégrale elliptique correspondante est égale à la moitié de la longueur ϖ de la lemniscate, d'où l'égalité de Gauss. Gauss lui-même voyait la relation $M(a, b) \times I(a, b) = \pi/2$ comme un moyen de calculer explicitement des intégrales elliptiques. En 1976, toutefois, l'Américain Eugene Salamin et l'Australien Richard Brent, à l'aide de manipulations auxiliaires sur ces intégrales, en ont tiré indépendamment une façon de calculer des décimales de π. Il serait exagérément long de les détailler ici, mais disons tout de même qu'elles ne sont pas, somme toute, très compliquées. Salamin le reconnaît d'ailleurs dans son article d'à peine six pages [2] : *« Il est assez surprenant qu'une formule pour π qui s'obtient aussi facilement soit apparemment restée inconnue pendant cent cinquante-cinq ans »*, (l'auteur précise que sa découverte date de 1973). Encore plus surprenant est que, de plus, cette formule ait finalement été découverte indépendamment par deux personnes quasiment en même temps!



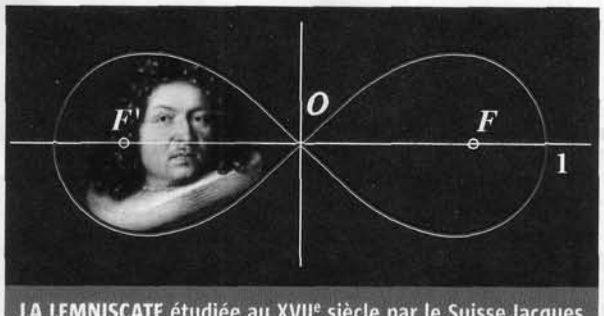
L'ENIAC, PREMIER ORDINATEUR de l'armée des États-Unis installé en 1945 à l'université de Pennsylvanie, a été utilisé dès 1949 pour calculer les 2045 premières décimales de π, record de l'époque. © UNIV. OF PENNSYLVANIA/AP/SIPA

Deux algorithmes

L'algorithme de Brent-Salamin (lire l'encadré « Des algorithmes pour π ») est très rapide: on dit qu'il est à convergence « quadratique », c'est-à-dire que le nombre de décimales exactes double à chaque étape. Depuis l'avènement de cette méthode de calcul, il est rare que les records de décimales de π ne soient pas battus grâce à l'une ou l'autre de ces variantes qui, toutes, requièrent l'utilisation de $\sqrt{2}$ et, donc, la connaissance d'un grand nombre des décimales de celui-ci. En pratique, un record de décimales de π ne s'obtient pas uniquement à partir d'un seul algorithme: la règle veut que les décimales ⇨

* L'intégrale elliptique complète de première espèce est la fonction qui exprime la période d'un pendule oscillant en fonction de l'angle de départ

[2] Eugene Salamin, *Math of Comp*, 30, 565, 1976



© MP/LEEMAGE

LA LEMNISCATE étudiée au XVII[e] siècle par le Suisse Jacques Bernoulli (en arrière-plan) est construite à partir de deux foyers F et F'. Pour tout point M de la courbe, MF.MF'= (FF')²/4.

⇨ record pour π n'est que de 51 milliards de décimales, alors que la même équipe a fait fonctionner la même machine durant près de 38 heures pour l'établir. Mais cette victoire de √2 est de courte durée: dès 1999, Kanada et Takahashi, toujours eux, redonnent l'avantage à π, avec plus de 206 milliards de décimales, chiffre amélioré en 2002.

√2 serait-elle donc condamnée à la seconde place? À y regarder de plus près, les choses ne sont pas aussi tranchées. Ce n'est pas un hasard si Kanada et Takahashi détiennent les records de décimales à la fois pour π et pour √2. Ces deux nombres sont en effet étrangement liés. Mieux: pour progresser dans les décimales de π, il est souvent nécessaire de progresser dans celles de √2.

L'histoire commune de π et de √2 commence au III[e] siècle avant notre ère, lorsque Archimède invente une méthode d'approximation de π, en usage jusqu'au XVII[e] siècle (lire l'encadré «Le cercle d'Archimède»). Les destins de ces deux nombres ont ensuite été dissociés par les progrès de l'analyse mathématique, qui ont permis d'établir des formules de calcul de π plus performantes. Mais, en 1976, ils ont été à nouveau réunis, à l'issue d'un cheminement pour le moins tortueux qui a duré plusieurs siècles.

Celui-ci commence au XVII[e] siècle, lorsque des mathématiciens s'intéressent à une courbe nommée la «lemniscate de Bernoulli». Elle se définit à partir de deux points du plan, F et F', appelés «foyers»: la lemniscate est l'ensemble des points M tel que le produit des distances de M à F et à F' est constant, cette constante étant fixée par la contrainte supplémentaire que le milieu de F et de F' appartient à la courbe (voir graphe ci-contre).

Dès 1691, le Suisse Jacques Bernoulli cherche à déterminer la longueur de cette courbe. Il en découvre une expression sous «forme intégrale» qui, en théorie, permet d'en connaître une approximation aussi fine que désirée. En pratique, elle vaut à peu près 5,244.

Les choses en sont là à la fin du XVIII[e] siècle lorsque l'Allemand Carl Gauss s'intéresse à un algorithme qui semble n'avoir rigoureusement rien à voir, appelé aujourd'hui algorithme de la moyenne arithmético-géométrique. Cet algorithme part de deux nombres a et b dont on calcule les moyennes arithmétique $((a+b)/2)$ et géométrique $(\sqrt{ab})$, pour obtenir deux nouveaux nombres dont on calcule à nouveau les moyennes arithmétiques et géométriques, et ainsi de suite. On peut démontrer que plus on avance ainsi, plus les nombres ainsi obtenus par paires s'approchent d'une même valeur, notée $M(a, b)$ et quelque peu improprement appelée moyenne arithmético-géométrique de a et de b.

La longueur de la lemniscate

Gauss trouve en 1799 un lien inattendu entre la longueur de la lemniscate, qu'il note ϖ («pi script»), et la moyenne arithmético-géométrique, qui rapproche de façon tout aussi inattendue π et √2. Le 30 mai de cette année-là, il écrit en effet dans son journal: «*J'ai démontré que les 11 premières décimales de la moyenne arithmético-géométrique de 1 et de √2 sont les mêmes que celles de π/ϖ; la démonstration de ce fait ouvrira sûrement tout un nouveau champ de recherche en analyse.*»

Ce n'est finalement qu'en 1818 que Gauss donne une démonstration rigoureuse de l'égalité $M(\sqrt{2}, 1) = \pi/\varpi$. Nous n'allons pas démontrer cette relation ici, mais donnons-en tout de même l'esprit. L'algorithme de la moyenne arithmético-géométrique évoque la méthode d'extraction de racines carrées proposée au IV[e] siècle avant notre ère par le Grec Archytas de Tarente, avec laquelle √2 s'obtient comme «moyenne arithmético-harmonique» de 1 et de 2 (lire l'encadré «La moyenne harmonique»). Cet algorithme consiste à calculer la moyenne arithmétique et la moyenne harmonique de a et de b, puis à recommencer avec ces deux nouveaux nombres, et ainsi de suite: les paires de nombres successivement calculées se rapprochent de la moyenne géométrique de a et de b, c'est-à-dire de $\sqrt{(ab)}$, en vertu du fait remarquable que ces paires de nombres successivement construites sont de produit constant et égal à ab.

En techniquement plus compliqué, c'est un peu la même chose pour l'égalité découverte par Gauss. Pour la moyenne arithmético-géométrique, ce n'est plus le produit des

CALCUL

Des algorithmes pour π

LA FORMULE DE BRENT-SALAMIN utilisée pour le calcul des décimales de π est la suivante :

$$\pi = \frac{4\,M(1, 1/\sqrt{2})^2}{1 - \sum_{j\geq 1} 2^{j+1} c_j^2}$$

c_j est la racine carrée de la somme des carrés des deux nombres de la j-ième étape du calcul de $M(1, \sqrt{2})$, la moyenne arithmético-géométrique.

Avec l'algorithme de Borwein, on part de la valeur $a = 6 - 4\sqrt{2}$ et de la valeur $y = \sqrt{2} - 1$. On remplace alors y par

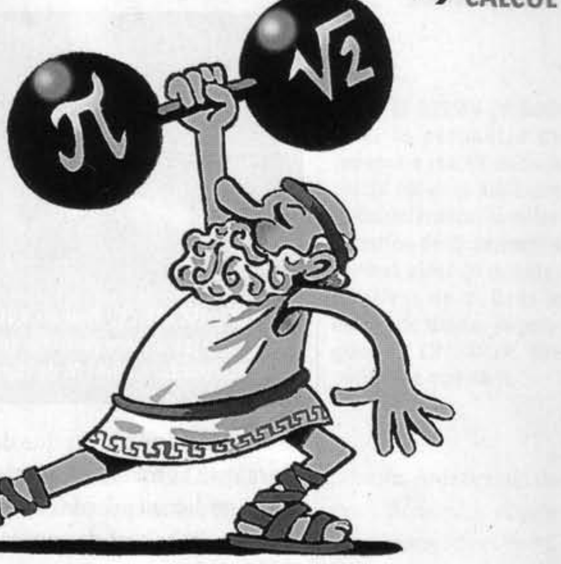
$$\frac{1-(1-y^4)^{1/4}}{1+(1-y^4)^{1/4}}$$

Cela fait, on remplace a par

$$a(1+y)^4 - 2^5 y(1+y+y^2)$$

On recommence ensuite ces deux étapes, en ajoutant 2 chaque fois à l'exposant de 2 dans la seconde formule (2^5 devient 2^7 au passage suivant, puis 2^9, et ainsi de suite). Le théorème de Borwein énonce que les valeurs de a successivement obtenues par la répétition des étapes précédentes s'approchent de $1/\pi$ et de façon «quartique», c'est-à-dire que le nombre exact de décimales est multiplié par quatre chaque fois.

$\sqrt{2}$ à la rescousse des décimales



π est le nombre irrationnel dont on connaît le plus grand nombre de décimales : plus de mille milliards. Mais les mathématiciens ne battraient pas ce type de record s'ils ne s'intéressaient pas tout autant à un nombre moins prestigieux : $\sqrt{2}$.

EN DEUX MOTS

Les décimales de π sont-elles réparties de façon totalement aléatoire ? Pour le savoir, une solution : en calculer le plus possible. C'est ce à quoi se sont employés de nombreux mathématiciens depuis Archimède. L'arrivée de l'ordinateur a permis de pulvériser tous les records. De façon inattendue, comme à l'époque d'Archimède, ces calculs nécessitent aujourd'hui la connaissance très précise de $\sqrt{2}$, autre nombre irrationnel, dont le calcul des décimales, quoique plus aisé, a toujours été considéré comme moins intéressant.

Benoît Rittaud
est maître de conférences à l'université Paris-XIII. Cet article est un extrait, adapté par la rédaction de *La Recherche*, de son livre *Le Fabuleux Destin de √2* qui sera publié en mars 2006 aux éditions Le Pommier.
rittaud@math.univ-paris13.fr

Le 2 juillet 2005, un psychiatre japonais, Akira Haraguchi, pulvérisait un étrange record : en 13 heures, il récitait par cœur, et dans l'ordre, les 83 431 premières décimales de π. L'intérêt de ce type de mémorisation ne dépasse pas le plaisir de la performance : aucune situation concrète ne requiert la connaissance de plus de quelques décimales, qu'il s'agisse de π ou de n'importe quel autre nombre.

Pourtant, ce record fait écho à un autre, détenu par un autre Japonais, mathématicien celui-là, Yasumasa Kanada : celui du nombre de décimales de π calculées, soit 1 241,1 milliards. Au-delà de la performance, cette fois, quelques mathématiciens de par le monde ont une raison précise de s'intéresser aux décimales de π. Ils tentent, par ce moyen, de répondre le mieux possible à une question posée il y a un siècle par le mathématicien français Émile Borel [1] : π est-il « normal » ? C'est-à-dire, dans le développement décimal de π, tous les chiffres apparaissent-ils avec la même fréquence statistique, et toutes les séquences d'un nombre donné de chiffres apparaissent-elles aussi souvent les unes que les autres.

Borel pose aussi cette question pour d'autres nombres irrationnels. Certains sont beaucoup plus simples à calculer que π, par exemple $\sqrt{2}$. Pourtant, à son époque déjà, c'est π qui mène la danse. L'arrivée de l'informatique, à la fin des années 1940, ne fait qu'amplifier cette suprématie. Ainsi, à peine l'armée américaine est-elle dotée de son premier ordinateur, l'Eniac, en 1949, qu'elle le mobilise pour calculer les 2 035 premières décimales de π. Pour $\sqrt{2}$ en revanche, les 1 542 décimales trouvées, à la main, par l'Américain Horace Uhler en 1951 ne sont dépassées qu'en 1967, avec la publication d'une liste de 14 000.

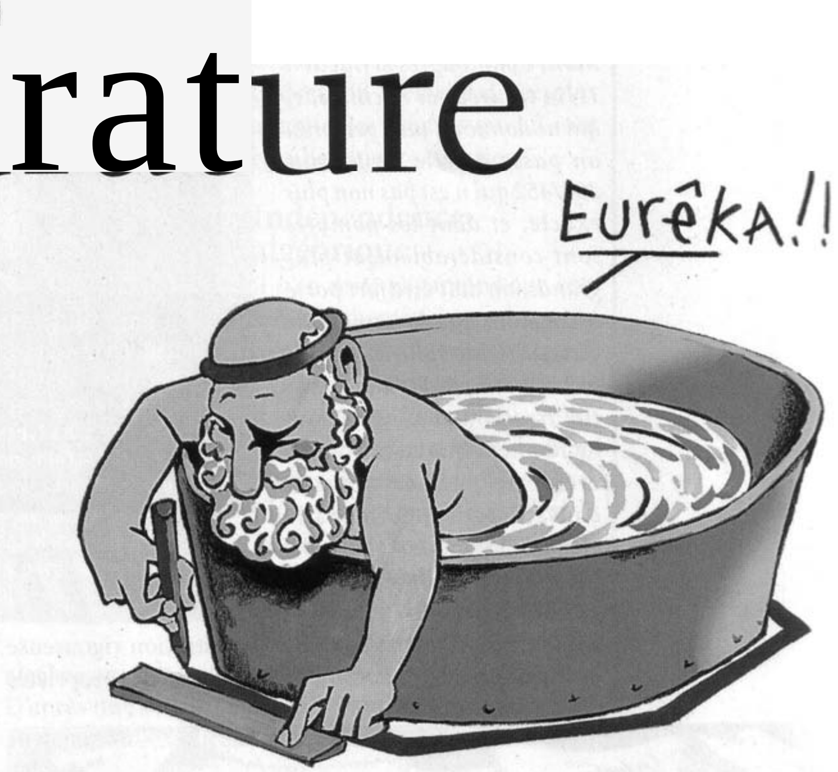
Deux fois en tête

Depuis, $\sqrt{2}$ a deux fois pris la tête de cette course sans fin aux décimales. La première, en 1971, avec un million de décimales (π n'en était alors qu'à 500 000). En 1973, π reprend l'avantage de justesse avec 1 001 250 décimales. La seconde fois, en 1997, est due à Kanada et à son collègue Daisuke Takahashi, qui produisent plus de 137 milliards de décimales pour $\sqrt{2}$ à l'aide d'une puissante machine, le Hitachi SR2201, qu'ils font fonctionner durant 7 heures et 31 minutes vérifications comprises. La même année, le ⇨

[1] Émile Borel, *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 27, 247, 1909.

EN DEUX MOTS Il y a plus de deux mille ans, les mathématiciens grecs posaient le problème de la quadrature du cercle. La preuve qu'il s'agit d'un problème impossible n'a été apportée qu'en 1882, par Ferdinand Lindemann. Entre-temps, on a découvert que ce type de questions est directement lié à la nature des nombres. Pour la quadrature du cercle, le tout était de montrer que π n'est pas algébrique mais « transcendant ». Par la suite, la soif de mieux connaître π a amené certains mathématiciens à défricher des pans nouveaux des mathématiques. L'étude de e^{π} par exemple conduit à une théorie aux applications importantes en informatique : l'approximation diophantienne.

La quadrature impossible du cercle



À quoi π ressemble-t-il exactement ? Peut-il s'écrire sous la forme d'une fraction ? Est-il la solution d'une équation ? Loin d'être anecdotiques, ces questions ont réclamé deux mille ans d'efforts aux mathématiciens. Et toutes les réponses n'ont pas encore été livrées.

Michel Waldschmidt est professeur à l'université Pierre-et-Marie-Curie à Paris et membre de l'Institut de mathématiques de Jussieu.
miw@math.jussieu.fr

82148

« C'est la quadrature du cercle ! » Cette expression commune permet de désigner un problème sans solution, une question dont on pense qu'elle n'a pas de réponse. Non sans raison : on sait depuis la fin du XIX^e siècle que le problème de la quadrature du cercle, posé par les mathématiciens grecs quelque deux mille ans plus tôt, n'a pas de solution exacte. On ne peut pas construire, avec la règle et le compas, un carré de même aire qu'un disque donné.

Les géomètres grecs ne se limitaient pas aux constructions à la règle et au compas : ils disposaient d'autres outils, notamment des courbes appelées « quadratrices » grâce auxquelles ils pouvaient justement faire de telles constructions (voir figure p. 36). Mais ils n'en étaient pas moins intrigués par le fait qu'ils ne trouvaient pas de solution sans elles.

Dès le XVIII^e siècle, les mathématiciens ont commencé à comprendre que la question de la quadrature du cercle était intimement liée à une autre question, celle de la « nature arithmétique » du nombre π : peut-il s'écrire sous la forme d'un quotient de deux entiers positifs ? En d'autres termes, est-il « rationnel » ? L'aire d'un cercle est directement reliée à π par la formule $A = \pi r^2$, et si π est rationnel, alors il sera facile de construire un carré dont l'aire est le nombre π.

Le premier à avoir apporté une réponse à la question « π est-il rationnel ? » fut le mathématicien allemand Johann Heinrich Lambert, dans son *Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes circulaires et logarithmiques* daté de 1761 [1]. Voyons quelques éléments de sa démarche. Il commence par remarquer que la somme de la série

$$2/(1\cdot3) + 2/(3\cdot5) + 2/(5\cdot7) + 2/(7\cdot9) + \dots$$

est égale à 1. Mais si l'on omet un terme sur deux :

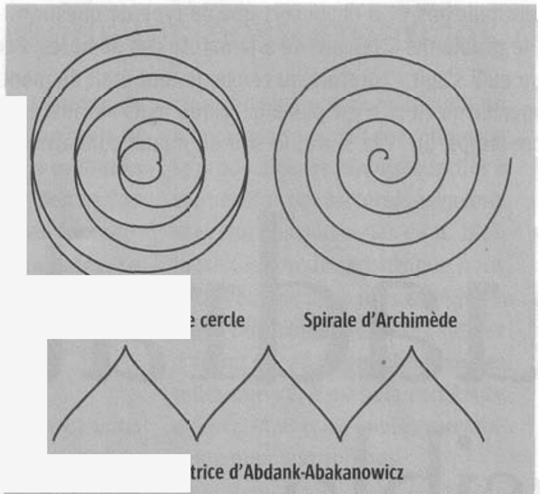
$$2/(1\cdot3) + 2/(5\cdot7) + 2/(9\cdot11) + 2/(13\cdot15) + \dots$$

on trouve $\pi/4$.

⇒

[1] J. Lambert, *Mémoires de l'Académie des sciences de Berlin*, *17*, 265, 1768.

⇨Lambert prit cette série pour définir le nombre π/4 et commenta ce résultat ainsi : *« Si c'était une quantité*



CES COURBES, QUE L'ON NOMME QUADRATRICES, permettent de résoudre le problème de la quadrature du cercle : si on les trace à l'avance, on peut ensuite construire à la règle et au compas la longueur π. Il en existe plusieurs types ; ici la développante de cercle, la spirale d'Archimède et la quadratrice d'Abdank-Abakanowicz. © JACQUES PARTOUCHE

des fractions continues (lire «Les fractions continues», p. 37). Une des difficultés est que l'on ne connaît pas la fraction continue du nombre n. On peut en calculer les premiers termes, mais aussi loin qu'on aille, on ne trouve pas de régularité dans cette suite. L'idée originale de Lambert consiste à adapter aux fonctions les études arithmétiques qui portaient jusque-là sur les nombres. La notion de fraction continue, notamment, peut être adaptée aux fonctions. C'est avec elle que Lambert démontra rigoureusement le théorème : *« Si x est un nombre rationnel non nul, la tangente de x est irrationnelle. En particulier, le nombre π/4, et donc le nombre π, est irrationnel. »*

Pour arriver à ses fins, Lambert utilisa brillamment des propriétés de la fonction arctangente. De quoi s'agit-il? La tangente d'un nombre x compris entre $-\pi/2$ et $+\pi/2$ est le quotient de son sinus par son cosinus: $\mathrm{tg}\, x = (\sin x)/(\cos x)$. Pour chaque nombre réel t il existe un unique nombre x dans l'intervalle $[-\pi/2, +\pi/2]$ tel que $t = \mathrm{tg}\, x$. Ce nombre x est l'arctangente de t et on écrit $x = \mathrm{arctg}\, t$. La fonction arctangente intervient pour écrire π/4 comme somme d'une série, et la fonction tangente est utilisée par son développement en fraction continue [2].

Cependant, l'irrationalité de n ne suffisait pas à interdire toute réponse à la quadrature du cercle. La solution n'en était pas moins déjà contenue dans la conclusion de l'article de Lambert: il y suggérait que non seulement π n'est pas rationnel mais qu'il n'est pas non plus algébrique [3].

Pour comprendre l'importance de cette précision, rappelons qu'un nombre algébrique est un nombre (réel ou complexe) x racine d'une équation polynomiale, c'est-à-dire qui satisfait une équation de la forme

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$$

avec des entiers $a_0, \ldots, a_n$ qui ne sont pas tous nuls. Par exemple, un nombre rationnel est algébrique : en effet, si on l'écrit a/b avec a et b entiers, alors il est racine de l'équation $ax -$ [illegible] algébriques il en existe qui sont irrationnels. Ainsi, le nombre irrationnel $\sqrt{2}$ est algébrique car il satisfait $(\sqrt{2})^2 - 2 = 0$. De même pour le nombre d'or $\phi = (1+\sqrt{5})/2$, qui vérifie $\phi^2 - \phi - 1 = 0$. Les nombres qui ne sont pas algébriques sont les nombres transcendants.

JOHANN HEINRICH LAMBERT fut le premier à démontrer l'irrationalité de π. Sans toutefois le prouver, il suggéra aussi que π est transcendant, ce qui revenait à dire que la quadrature du cercle avec une règle et un compas est un problème impossible.

En 1837, le Français Pierre Wantzel a rigoureusement établi le lien entre la nature arithmétique d'un nombre et la possibilité de le construire à la règle et au compas [2]. Les nombres « constructibles » sont tous algébriques (mais les nombres algébriques ne sont pas tous constructibles). Un nombre transcendant ne peut donc pas être construit à la règle et au compas. C'est pourquoi, une fois l'irrationalité de π démontrée et la notion de transcendance précisée, savoir si π est transcendant ou non a représenté un défi majeur pour les mathématiciens : c'était la clé pour montrer que le problème de la quadrature du cercle n'a pas de solution.

CHARLES HERMITE A DÉMONTRÉ EN 1873 QUE *e*, LA BASE DES LOGARITHMES NÉPÉRIENS, est un nombre transcendant. Ses travaux ont aussi ouvert la voie à la preuve de la transcendance de π : c'est avec les outils qu'il avait développés que Ferdinand Lindemann parvint à donner la solution définitive en 1882. © MP/LEEMAGE

Théorème d'Hermite-Lindemann

Après avoir prouvé la transcendance du nombre *e*, en 1873, le Français Charles Hermite avait écrit à son ami allemand Carl Borchardt : « *Je ne me hasarderai point à la recherche d'une démonstration de la transcendance du nombre π. Que d'autres tentent l'entreprise ; mais croyez-m'en, mon cher ami, il ne laissera pas que de leur coûter quelques efforts.* » Pourtant Hermite n'était pas loin du but. C'est en reprenant les outils qu'il avait développés que le mathématicien allemand Ferdinand Lindemann apporta la solution définitive en 1882 : Lambert avait bien deviné, le nombre π ne satisfait aucune équation algébrique ; il est donc transcendant, et la quadrature du cercle avec la règle et le compas est un problème impossible.

Les formules d'Hermite jouent un rôle essentiel dans la démonstration de Lindemann. Un extrait d'une lettre de Lindemann à Hermite, publié dans les *Comptes rendus de l'Académie des sciences* le 10 juillet 1882, se termine ainsi : « *Les logarithmes népériens de tous les nombres rationnels, l'unité seule exceptée, et de toutes les irrationnelles algébriques, sont des nombres transcendants.* » Cet énoncé est appelé aujourd'hui « Théorème d'Hermite-Lindemann ». Il contient la transcendance du nombre *e* : comme le logarithme de *e*, qui vaut 1, n'est pas transcendant, alors *e* n'est ni rationnel ni algébrique. Il contient aussi la transcendance du nombre π. En effet, la relation d'Euler $e^{i\pi} = -1$ signifie que iπ est un logarithme du nombre algébrique – 1 ; il en résulte que iπ est transcendant. Or le produit de deux nombres algébriques est encore un nombre algébrique ; si π était algébrique, son produit par i serait encore algébrique ; i π étant transcendant, π est donc transcendant. La démonstration ne souffre pas la critique. Pourtant, aujourd'hui encore, quelques amateurs continuent de rechercher une solution : l'Académie des sciences a même dû prendre la décision formelle de ne plus accepter les preuves qui lui sont régulièrement soumises !

Indépendance algébrique

Il n'en reste pas moins que certains mathématiciens ne se satisfont pas de savoir que π est transcendant et cherchent à le connaître mieux encore. Pour cela, ils explorent ses relations avec d'autres nombres transcendants, au premier rang desquels *e*. C'est la question de l'indépendance algébrique. Par exemple, e^2 et e^3 sont transcendants (car *e* est transcendant) et reliés par une équation algébrique: $(e^2)^3 - (e^3)^2 = 0$.
D'après une vieille conjecture – qui remonte au moins au début du XXe siècle – *e* et π sont algébriquement ⇨

[2] *M.* Serfati, *Fragments d'histoire des mathématiques IV*, APMEP, 86, 1992

[3] P. Wantzel, *J. Math. Pures et Appl.*, 2,366, 1837.

DÉVELOPPEMENT

Les fractions continues

▌POUR DÉTERMINER si un nombre est rationnel ou non, on peut regarder si son développement décimal (ou dans n'importe quelle autre base) est périodique ou non. Mais la plupart du temps, on ne connaît pas ce développement. Une autre solution est de regarder si le développement en fraction continue est fini.
Qu'est-ce qu'un développement en fraction continue ? Prenons un nombre réel *x*. On l'écrit $x = [x] + \{x\}$ où $[x]$ est un nombre entier (la « partie entière de *x* ») et $\{x\}$, un nombre réel dans l'intervalle $[0, 1[$ (la « partie fractionnaire de *x* »). Si x est entier, alors $x = [x]$ et $\{x\} = 0$. Sinon, on a $0 < \{x\} < 1$, et on pose $x_1 = 1/\{x\}$. On recommence la même procédure avec x_1 : $x_1 = [x_1] + \{x_1\}$. Seule différence, on sait que $[x_1] \geq 1$. Si x_1 est entier on s'arrête, sinon on pose $x_2 = 1/\{x_1\}$. Et ainsi de suite.
▌ON PEUT EXPLIQUER cette construction de façon géométrique. On décompose un rectangle de côtés 1 et x en le remplissant avec autant de carrés de côté 1 que possible. Si x n'est pas entier, il reste à la fin un petit rectangle de côtés 1 et $\{x\}$. On le remplit de carrés de côtés $\{x\}$, et s'il reste encore un plus petit rectangle on recommence. Si le processus finit par s'arrêter, c'est que *x* est rationnel. La réciproque est vraie (pour en savoir plus et pour la démonstration de L'irrationalité de √2, voir notre site www.larecherche.fr).

[4] Jean-Michel Muller et Marc Daumas. *Qualité des calculs sur ordinateur, vers des arithmétiques plus fiables.* Masson, 1997.

[5] Manfred R. Schroeder, *Springer Series in Information Sciences, 7*, Springer-Verlag, 1999.

⇨ indépendants ; mais on ne sait pas le démontrer. Il est encore plus difficile de montrer que deux nombres sont algébriquement indépendants que de montrer qu'un nombre est transcendant ! Nos connaissances dans ce domaine sont si pauvres que chaque progrès est pris comme un grand succès.

C'est ce qui s'est passé en 1996 quand Yuri Nesterenko a démontré que π et e^{π} sont algébriquement indépendants. Sa démonstration reposait entre autres sur des arguments utilisant les « fonctions modulaires », élaborées l'année précédente par une équipe de recherche en théorie des nombres de l'université de Saint-Étienne. On déduit du théorème de Nesterenko que tout polynôme non constant en deux variables prend au point (π, e^{π}) une valeur transcendante. Ce résultat est d'autant plus étonnant qu'on ne sait même pas démontrer l'irrationalité d'un nombre comme le produit $e\pi$! Mais l'indépendance algébrique de e et π reste toujours une conjecture…

Dans ce problème, on peut s'étonner du fait que le couple (π, e^{π}) soit plus facile à
couple (π, e). L'explication vient de
$e^{i\pi} = -1$, qui, comme nous l'avons
le nombre $i\pi$ comme un logarithme d'un nombre algébrique. C'était déjà grâce à cette relation que le mathématicien russe Alexandre O. Gel'fond avait pu démontrer la transcendance du nombre e^{π} en 1929. Par la suite, l'étude de e^{π} a elle aussi apporté son lot de surprises. Elle débouche notamment sur un vieux problème

ALEXANDRE O. GEL'FOND montra en 1929 que e^{π} est un nombre transcendant. Ses travaux l'ont conduit ensuite de façon inattendue à explorer la théorie de l'approximation diophantienne. © DR

lié à l'approximation de π : l'« approximation diophantienne ».

En effet, la démonstration de la transcendance de e^{π} n'était rien de moins qu'une réponse partielle au septième des 23 problèmes que David Hilbert avait posés au congrès international des mathématiciens à Paris en 1900 ! Dans ce problème, Hilbert invitait à montrer que tout nombre de la forme a^b, avec a et b algébriques, a différent de 0 et de 1, et b irrationnel, est transcendant. Hilbert donnait deux exemples : le nombre $2^{\sqrt{2}}$, que l'on obtient en prenant $a = 2$ et $b = \sqrt{2}$, et le nombre e^{π} dont la transcendance se déduit en utilisant la relation d'Euler $e^{i\pi} = -1$: on l'écrit $e^{\pi} = (e^{i\pi})^{-i} = (-1)^{-i}$, ce qui permet de prendre $a = -1$, $b = -i$.

Alors qu'il était parti d'un problème théorique et abstrait (la question de transcendance posée par Hilbert), Gel'fond remarqua que sa preuve lui permettait non seulement de montrer que tout nombre a^b est transcendant, mais aussi de minorer la distance de ce nombre à un nom-
nt ces minorations qui font par-
approximation diophantienne.

La maîtrise des arrondis

On retrouve notamment cette théorie en informatique [4]. Les ordinateurs ne connaissent que des nombres rationnels (et ils n'en connaissent même qu'un nombre fini) ; tous les calculs doivent donc être arrondis. Les questions d'arrondi pour les opérations élémentaires (addition, soustraction, multiplication, division) sont bien maîtrisées. Mais quand on fait intervenir des fonctions comme l'exponentielle, le logarithme ou les fonctions trigonométriques, on doit, pour arrondir proprement, connaître des informations sur l'approximation diophantienne de quantités transcendantes. C'est ainsi que des minorations de $|e^b - a|$, quand a et b sont deux nombres rationnels positifs, interviennent dans ces problèmes d'informatique. Mais ce n'est qu'un exemple parmi tant d'autres : on retrouve encore ces approximations en mécanique céleste, dans les phénomènes de résonance, dans les quasi-cristaux ou encore en acoustique [5].

Les outils permettant de résoudre les problèmes posés en approximation diophantienne sont essentiellement les mêmes que ceux qui sont utilisés pour déterminer si un nombre est algébrique ou transcendant. La théorie que nous avons introduite en prenant π comme modèle va bien au-delà de ce nombre fascinant : π n'est en fin de compte qu'un des éléments les plus représentatifs parmi les nombres dont les propriétés diophantiennes font l'objet de recherches théoriques approfondies. ■ **M. W.**

ÉQUATIONS Questions diophantiennes

■ **LE MATHÉMATICIEN GREC** Diophante d'Alexandrie ramenait ses questions de géométrie à des équations polynomiales à coefficients entiers entre plusieurs inconnues, les « équations diophantiennes ». La notion a été progressivement étendue. Ainsi, on parle aujourd'hui d'« équation diophantienne exponentielle » lorsque l'on évoque une équation polynomiale dans laquelle certains exposants sont inconnus.

Le théorème de Wiles, qui répond au problème de Fermat, peut être énoncé comme un résultat sur l'équation diophantienne exponentielle $X^n + Y^n = Z^n$, où les inconnues sont les entiers X, Y, Z et n, avec $n \geq 3$. Parmi les autres équations diophantiennes exponentielles, citons celle de Catalan $X^p - Y^q = 1$ dont on sait depuis 2002 seulement qu'elle n'a pas d'autre solution que $x = 3$, $p = 2$, $y = 2$, $q = 3$ – le problème avait été posé par Eugène Catalan en 1844, l'année même où Liouville construisait le premier exemple de nombre transcendant.

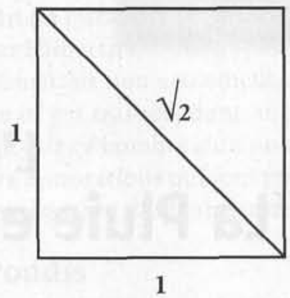
Déterminer si un nombre réel donné x est rationnel ou non est un problème diophantien puisqu'il s'agit aussi de dire si l'équation $ax = b$ a une solution en entiers rationnels (a,b) autre que $(0,0)$. Plus généralement, déterminer si un nombre complexe est algébrique ou transcendant est encore un problème diophantien.

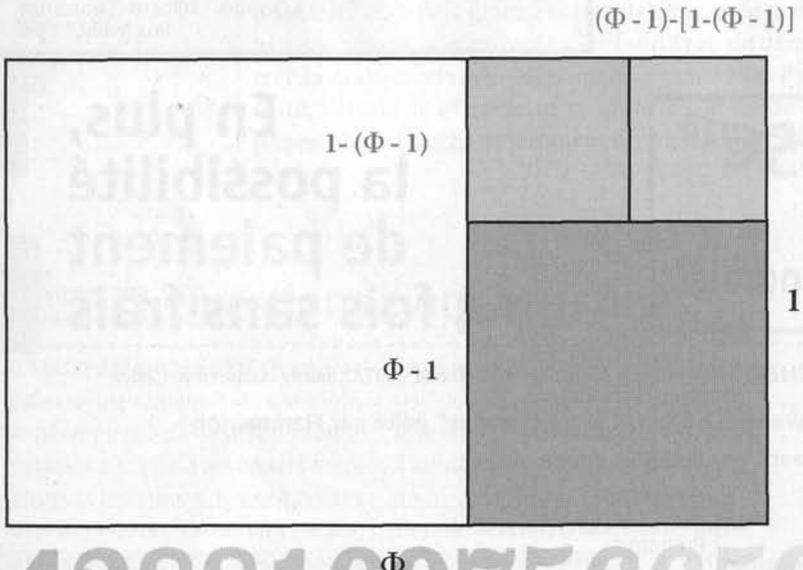
Quelques nombres étranges

π n'est pas la seule constante qui suscite l'intérêt des mathématiciens. Beaucoup d'autres nombres émergent comme naturellement de divers problèmes d'analyse ou de géométrie. En voici un florilège.

$\sqrt{2}$ Racine de 2

DÉFINITION : solution positive de l'équation $x^2 = 2$.
PREMIER CALCUL PRÉCIS : la tablette babylonienne YBC 7289 (entre 1900 et 1600 avant notre ère), qui donne l'équivalent de 5 décimales exactes.
Nombre irrationnel (lire p. 35 « La quadrature impossible du cercle »).
→ 137 milliards de décimales connues (Yasumasa Kanada et Daisuke Takahashi, 1997)
$\sqrt{2}$ = 1,41421 35623 73095 04880…



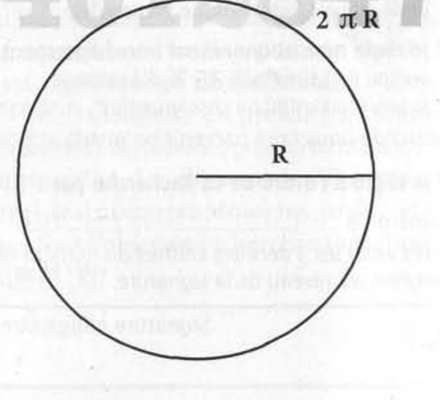


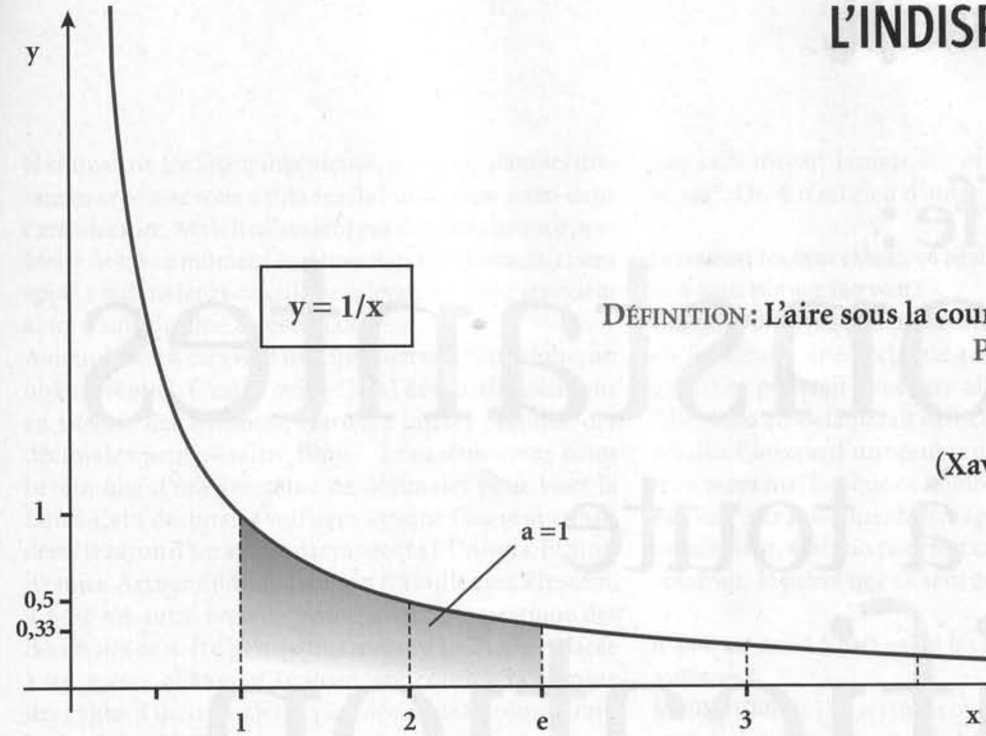
Φ Nombre d'or

DÉFINITION : solution positive de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.
PREMIÈRE DÉFINITION : donnée par Euclide, dans les *Éléments* (vers 300 avant notre ère) : le « partage en moyenne et extrême raison », soit la relation $\Phi/1 = 1/(\Phi - 1)$.
→ 3,141 milliards de décimales connues (Xavier Gourdon et Pascal Sebah, 2002).
Φ = (1+ $\sqrt{5}$)/2 = 1,61803 39887 49894 84820…

π Pi

DÉFINITION : rapport de la circonférence d'un cercle à son diamètre.
Première méthode de calcul précise : Archimède, dans *La Mesure du cercle* (III^e siècle avant notre ère).
Nombre transcendant (lire p. 35 « La quadrature impossible du cercle »).
→ 1 241,1 milliards de décimales connues (Yasumasa Kanada, 2002).
π = 3,14159 26535 89793 23846…





e

Base des logarithmes népériens

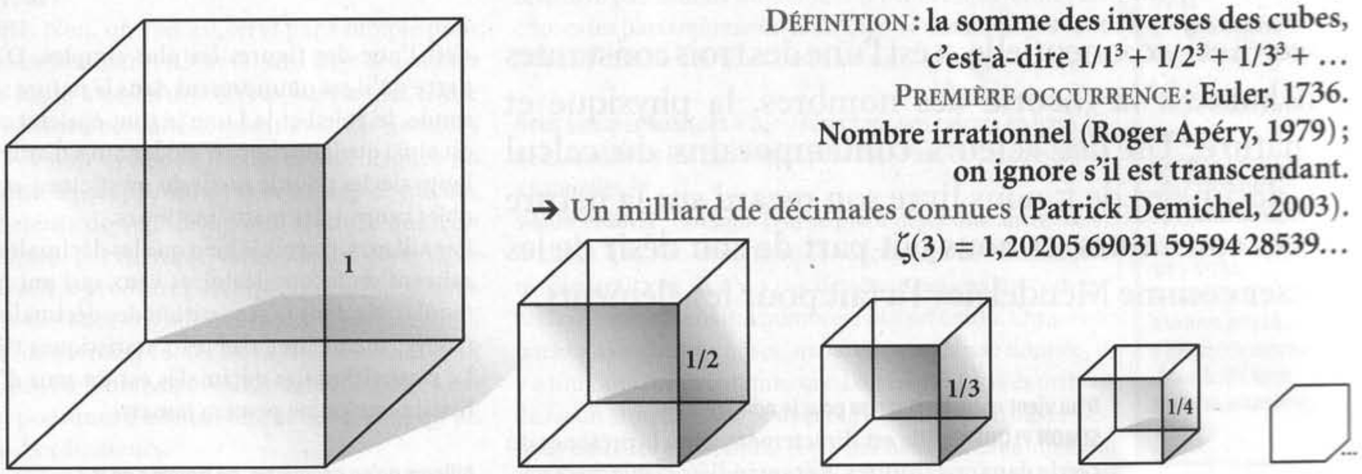
DÉFINITION : L'aire sous la courbe $y = 1/x$ comprise entre 1 et e vaut 1.

PREMIÈRE OCCURRENCE : Euler, vers 1748.

Nombre transcendant.

→ 50 milliards de décimales connues (Xavier Gourdon et Shigeru Kondo, 2003).

e = 2,71828 18284 59045 23536…



$\zeta(3)$

Constante d'Apéry

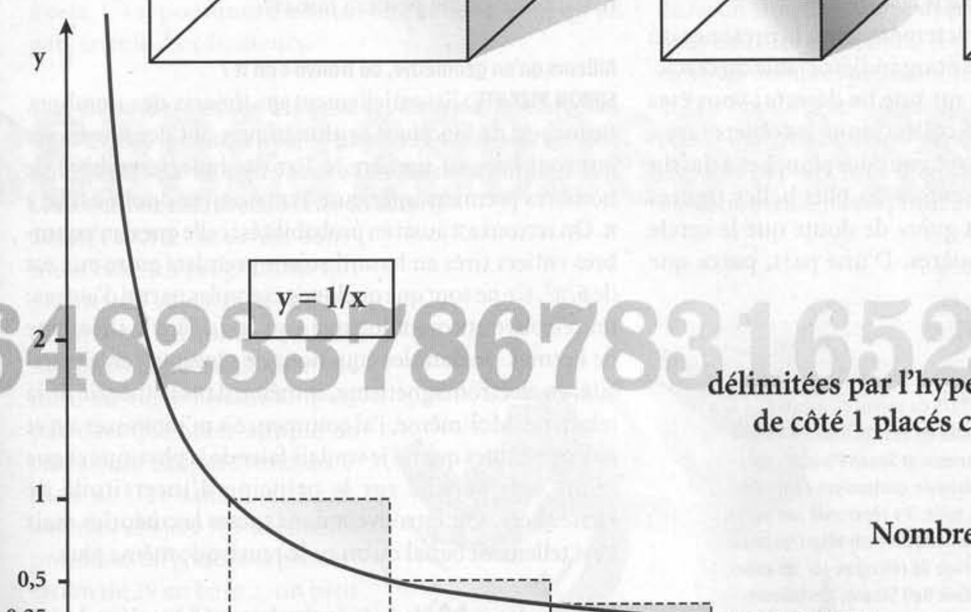
DÉFINITION : la somme des inverses des cubes, c'est-à-dire $1/1^3 + 1/2^3 + 1/3^3 + \ldots$

PREMIÈRE OCCURRENCE : Euler, 1736.

Nombre irrationnel (Roger Apéry, 1979) ; on ignore s'il est transcendant.

→ Un milliard de décimales connues (Patrick Demichel, 2003).

$\zeta(3)$ = 1,20205 69031 59594 28539…



γ

Constante d'Euler

DÉFINITION : somme des aires délimitées par l'hyperbole d'équation $y = 1/x$ et les rectangles de côté 1 placés côte à côte (en partant de 1) et de hauteur minimale pour dépasser l'hyperbole.

PREMIÈRE OCCURRENCE : Euler, 1781.

Nombre irrationnel ? transcendant ? On l'ignore.

→ 108 millions de décimales connues (Patrick Demichel et Xavier Gourdon, 1999).

γ = 0,57721 56649 01532 86060…

Simon Plouffe : « Les constantes résistent à toute classification »

Avec √5 et l'exponentielle, π est l'une des trois constantes qui hantent la théorie des nombres, la physique et la nature. Un des acteurs contemporains du calcul des décimales de π nous livre son regard sur la nature de ces constantes, et nous fait part de son désir de les classer comme Mendeleïev l'a fait pour les éléments.

D'où vient notre fascination pour le nombre π ?

SIMON PLOUFFE : Elle est directement liée à la présence du cercle dans nos cultures, π étant indissociable du cercle. Imaginez que vous alliez sur une île déserte ; vous êtes un esthète, un puriste qui collectionne les objets rares, et vous voulez emporter avec vous des planches à dessin sur lesquelles sont représentées les plus belles figures mathématiques. Il ne fait guère de doute que le cercle sera dans les toutes premières. D'une part, parce que c'est l'une des figures les plus simples. D'autre part, parce qu'il est omniprésent dans la nature : la Terre est ronde, le Soleil et la Lune le sont également. Le cercle est ainsi quelque chose d'évident. Il a d'ailleurs fallu de longs siècles pour le sortir du mysticisme et en faire un objet central des mathématiques.

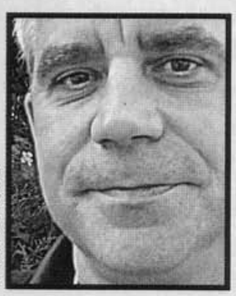
Par ailleurs, il semble bien que les décimales de n apparaissent de façon aléatoire : ceux qui ont cherché des régularités dans la répartition des décimales n'ont rien trouvé, même avec des tests statistiques très poussés. La répartition des décimales est un mur d'incompréhension qu'on ne percera jamais.

Ailleurs qu'en géométrie, ou trouve-t-on π ?

SIMON PLOUFFE : Essentiellement en théorie des nombres. Beaucoup de fonctions arithmétiques ont des moyennes qui sont liées au nombre π. Par exemple, le nombre de nombres premiers inférieurs à un nombre donné est lié à π. On retrouve π aussi en probabilités : celle que deux nombres entiers tirés au hasard soient premiers entre eux est de $6/n^2$. Ce ne sont que quelques exemples parmi d'autres : on retrouve encore π lorsque l'on considère le théorème de Fermat, ou dans les équations de physique, en électricité, en électromagnétisme, et même dans la théorie de la relativité. Moi-même, j'ai commencé à m'intéresser à n et aux constantes quand je voulais faire de la physique et que je me suis penché sur le principe d'incertitude de Heisenberg. On retrouve n dans toutes les théories mais c'est tellement banal qu'on ne le remarque même plus.

Connaître une multitude de décimales den : sert-il à quelque chose ?

SIMON PLOUFFE : Les Égyptiens utilisaient π sans vraiment



© MATHIEU NOWAK

Simon Plouffe, détenteur en 1975 du record du nombre de décimales mémorisées, a co-inventé en 1995 la formule « BBP » (des noms de David Bailey, Peter Borwein et Simon Plouffe), qui permet de calculer en base 2 une décimale quelconque de π sans calculer celles qui précèdent. Par la suite, il a répertorié pas moins de 200 millions de constantes mathématiques (voir http://pi.lacim.uqam.ca/). Il a aussi publié un ouvrage de référence sur les suites, *Encyclopedia of Integer Sequences*, avec Neil Sloane, des laboratoires AT&T. Il est aujourd'hui ingénieur système, consultant pour une société d'informatique, à Lyon. simon.plouffe@sympatico.ca le connaître. De façon ingénieuse, ils mesuraient les distances avec une roue calibrée; ils l'utilisaient aussi dans l'architecture. Mais ils n'avaient pas de connaissance profonde de π à ce moment-là. On sait que les Incas faisaient appel à π dans leurs calculs de calendrier. Ils se servaient alors d'une dizaine de décimales.

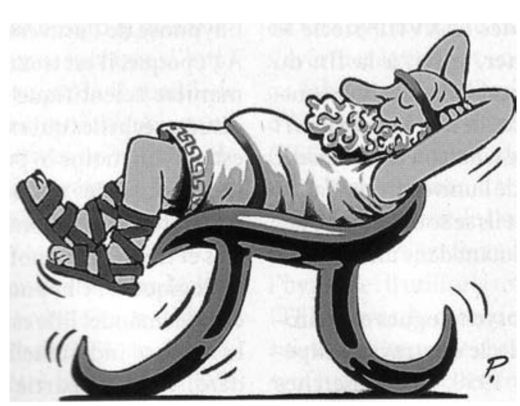
Aujourd'hui, π est avant tout un objet mathématique, un objet essentiel. C'est le Saint-Graal des mathématiciens en théorie des nombres. Certes, l'intérêt pratique des décimales peut paraître limité. Les astronomes n'ont besoin que d'une trentaine de décimales pour viser la Lune. Cent décimales suffisent lorsque l'on veut considérer le rayon d'un atome par rapport à l'Univers. Et ainsi de suite. Arthur Eddington, qui a travaillé avec Einstein, a posé un autre type de limite à l'intérêt pratique des décimales de π. Il disait qu'une masse d'une tonne placée à un mètre change π (considérée comme la somme des angles d'un triangle) à la 24e décimale en considérant la courbure de l'univers en ce point.

Les records de décimales qui tombent régulièrement sont-ils donc des exploits vains?

SIMON PLOUFFE: Non, on s'en est servi par exemple pour fiabiliser les ordinateurs en leur faisant faire des calculs en continu jusqu'à ce qu'une erreur survienne. L'idée est que les ordinateurs fonctionnent avec des nombres rationnels, et non avec des nombres algébriques ou transcendants. Or, π apparaît dans beaucoup de calculs, et les ordinateurs doivent composer avec. Ce qui n'est pas sans risques : par exemple, une collision entre deux avions pourrait se produire parce que l'on utilise π dans un calcul de distance trigonométrique. C'est pourquoi il est crucial de chercher toutes les façons possibles dont la machine peut se tromper. Les décimales de π ont servi à cela. C'est pourquoi d'aucuns disent que π n'est qu'un gargarisme d'ordinateurs.

Vous-même avez participé à la quête des décimales de π: en découvrant en 1995 la formule «BBP», qui permet de calculer une décimale quelconque de π sans avoir à calculer celles qui précèdent. Comment avez-vous abouti à cette découverte?

SIMON PLOUFFE: Je savais comment faire un programme qui permet de calculer la n-ième décimale d'un nombre rationnel. Avec la méthode dite «de mise au carré binaire», il est par exemple assez simple de calculer la milliardième décimale de 1/29 sans avoir à calculer les 999 999 999 décimales précédentes. Avec la représentation de 29 en base 2, on peut sauter directement à la milliardième décimale. J'ai remarqué



© HERVÉ PINEL

que cela n'avait jamais été utilisé pour le calcul des séries*. Or, π n'est rien d'autre qu'une série.

En croisant ces deux choses, on peut donc calculer les décimales de π aussi loin que l'on veut?

SIMON PLOUFFE: Jusqu'à un certain point. Le record actuel est le calcul d'une décimale à environ 10^{15} après la virgule. On pourrait peut-être aller jusqu'à 10^{16} ou 10^{17}. Aller bien au-delà paraît difficile car le calcul implique celui de l'inverse d'un nombre quelconque, que l'on maîtrise assez mal lorsque ce nombre est grand. Si l'on pouvait calculer le k-ième chiffre après la virgule de π plus rapidement, alors on pourrait calculer π aussi loin qu'on voudrait. Je pense que ce sera possible, un jour.

π a-t-il un statut à part parmi les grandes constantes mathématiques?

SIMON PLOUFFE: Il y a trois constantes «naturelles» qui sont vraiment à part : π, e (la base des logarithmes népériens) et √5. L'exponentielle et π sont liées par la célèbre formule établie par Euler: $e^{i\pi} = -1$. Quant à √5, on la retrouve par le biais du nombre d'or. Presque toutes les choses les plus intéressantes en théorie des nombres sont liées à l'une de ces trois constantes.

Nous sommes habitués à considérer tous nos calculs en base 10. Que se passerait-il si l'on prenait pour base l'une de ces constantes «naturelles»?

SIMON PLOUFFE: Lorsque l'on se place dans une autre base, le chaos que l'on avait dans les décimales des constantes ne disparaît pas. Il n'y a pas de «base naturelle» comme certains théoriciens des nombres l'ont prétendu. On arrive parfois à des belles choses, mais, dans une base donnée, il y a toujours des constantes que l'on ne peut pas exprimer de façon simple. C'est pourquoi j'ai essayé de trouver des liens entre les constantes. Il y a des liens assez complexes entre les nombres premiers, les nombres de Bernoulli* et π. Les nombres de Bernoulli s'expriment avec π; π s'exprime avec les nombres premiers; la fonction zêta, qui, d'après l'hypothèse de Riemann, donne la répartition des nombres premiers, s'exprime avec les nombres de Bernoulli. Tout est mélangé assez bizarrement. À la suite de Mendeleïev et de son tableau périodique des éléments, il est devenu naturel de se demander à quoi ressemblerait une chose équivalente en mathématiques. J'ai beaucoup travaillé sur ce que serait un tableau périodique des constantes mathématiques, mais je dois avouer que, pour l'heure, cela n'a pas abouti. ■

Propos recueillis par Mathieu Nowak

Pour en savoir plus sur π

LIVRES

- L. Berggren, J. Borwein et P. Borwein, *π : A Source Book*, Springer, 2004.
- P. Eymard et J.-P. Lafon, *Autour du nombre π*, Hermann, 1999.
- J.-P. Delahaye, *Le Fascinant Nombre π*, Belin /Pour la Science, 1997.

LES PAGES WEB DE SPÉCIALISTES DE π

- www.lacim.uqam.ca/~plouffe
- www.supercomputing.org
- www.cecm.sfu.ca/~jborwein/pi_cover.html

DES SITES AMATEURS

- www.pi314.net
- http://trucsmaths.free.fr/Pi.htm
- www.nombrepi.com

* **Une série** est une somme infinie de termes.

* **Les nombres de Bernoulli** déterminent les coefficients du polynôme par rapport à m : $1 + 2^n + 3^n + 4^n + \ldots + (m-1)^n$.