Univerzita Karlova
Pedagogická fakulta

**Katedra matematiky
a didaktiky matematiky**

Bakalářská práce:

# RIEMANNOVA HYPOTÉZA
pro střední školu

-

# RIEMANN HYPOTHESIS
FOR HIGH SCHOOL

Miroslav Heinz

| | |
|---|---|
| Vedoucí práce: | prof. RNDr. Ladislav **Kvasz**, DSc.,Dr. |
| Studijní program: | Specializace v pedagogice (B7507) |
| Studijní obor: | B M (7504R015) |

Rok odevzdání: 2022

Odevzdáním této bakalářské práce na téma: Riemannova hypotéza pro střední školy potvrzuji, že jsem ji vypracoval pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Praha 18.04.2022

Chtěl bych poděkovat vedoucímu práce - panu prof. Kvaszovi za jeho konstruktivní přípomínky, návrhy během konzultací, ale i "obyčejnou" vlídnost a podporu. Jestli práce bude kladně přijata, myslím, že jej budu muset pozvat na panáka.

Také bych chtěl poděkovat členům své rodiny za jejich trpělivost, podporu a důvěru kterou si v pravdě člověk tak "problémy-přitahující" jako já ani nezaslouží.

**ABSTRAKT:** Hlavní témata práce jsou:

(1) formulace Riemannovy hypotéza, přínosy jejího potvrzení a tvrzení která implikuje.

(2) zasazení Riemannovy hypotézy do kontextu různých oblastí matematiky - převážně teorie čísel a matematické (a komplexní) analýzy. V práci také postupně buduji poměrně velký aparát objektů matematiky, které se často spojují s Riemannovou hypotézou a s pokusy o její řešení. Jednodušší vlastnosti a věty často dokazuji a někdy přidávám i vlastní "intuitivní vhledy" a praktické příklady.

Většina práce je koncipována tak, aby ji mohl pochopit student střední školy se zájmem (jak ostatně "slibuje" název mé práce). Těžší poznatky většinou soutřeďuji na konec práce, převážně do kapitol 7.,8. Na jejich případný (spíše výjimečný) výskyt mimo zmíněné kapitoly vždy nejdříve upozorním. Převážně v první polovině se také snažím poznatky vysvětlovat velmi podrobně, tak aby čtenář opravdu rozumněl každému kroku a uměl závěry nejen využít prakticky, ale i prezentovat postupy kterými jsme k závěrům dospěli.

Student by po přečtení práce měl mít základní vhled do tematiky Riemannovy hypotézy a měl by umět odpovědět mimo jiné hlavně na tuto otázku: Co to je Riemannova hypotéza, jaké objekty a vztahy se užívají při hledání jejího důkazu (některé vztahy by měl umět dokázat) a jaké pokročilé informační zdroje existují pro další studium (třeba během studia na VŠ)?

**KLÍČOVÁ SLOVA:** Riemannova hypotéza, prvočíslo, komplexní čísla, teorie čísel, goniometrické funkce, derivace, integrace, matematická analýza, komplexní analýza, komplexní funkce, funkce $\xi$, $\zeta, \pi, \Gamma$, Taylorův rozvoj, Eratosthenovo síto, Dirichletovy a Fourierovy řady, Eulerův součin, Euklidova věta

**ABSTRACT:** The main topics of the work are:

(1) formulation of the Riemann hypothesis, the benefits of its confirmation and the claims it implies.

(2) placing the Riemann hypothesis in the context of various areas of mathematics - mainly number theory and mathematical (and complex) analysis. In my work I also gradually build a relatively large apparatus of mathematical objects, which are often associated with the Riemann hypothesis and with attempts to solve it. I often prove simpler properties and sentences, and sometimes I add my own "intuitive insights" and practical examples.

Most of the work is designed so that it can be understood by a high school student with interest (as the name of my work "promises"). I usually concentrate more difficult knowledge at the end of the work, mostly in chapters 7.,8. I will always first point out their possible (rather exceptional) occurrence outside the mentioned chapters. Mostly in the first half, I also try to explain the principles in great detail, so that the reader really understands each step and can not only use the conclusions in practice, but also present the procedures by which we came to the conclusions.

After reading this work, student should have a basic insight into the topic of Riemann's hypothesis and should be able to answer, among other things, the following question: What is the Riemann hypothesis, what objects and relationships are used in the search for its proof (some relationships he should be able to prove) and what advanced information sources exist for further study (for example during university studies)?

**KEYWORDS:** Riemann hypothesis, prime number, complex numbers, number theory, trigonometric functions, derivation, integration, mathematical analysis, complex analysis, complex functions, functions $\xi, \zeta, \pi, \Gamma$, Taylor expansion, Eratosthenes sieve, Dirichlet and Fourier series, Euler's product, Euclidean theorem

# Obsah

# 1 Úvod

Prvočísla jsou důležitou podmnožinou přirozených čísel a jsou předmětem učiva na základní škole. Tyto čísla není možné beze zbytku dělit jiným číslem, než 1, anebo sebou samým. Nejmenším prvočíslem je 2, které je zároveň jediným sudým prvočíslem vůbec. Dále seznam prvočísel pokračuje

$$3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \ldots$$

Nyní se ptáme: Můžeme předpovědět rozložení prvočísel ? Existuje nějaký "více základní" matematický systém, který postihne logiku rozložení prvočísel ?

Těmito otázkami se zabývali již ve starověku Euklidés a Erastoten. Podstatné výsledky o rozložení prvočísel však nalezli až v 18. a 19. století Euler, Gauss a další. V roce 1859 se Riemann (jehož práci budeme věnovat více prostoru v kapitole 5) ve svém článku *"O počtu prvočísel menších než daná hodnota"* [17] pokusil najít obecnou formuli pro výpočet počtu prvočísel menších nebo rovných než libovolně zvolené číslo. Přitom studoval součty nekonečných řad- např.:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \ldots,$$

$$\vdots$$

Je zřejmé, že v uvedených řadách se mění pouze velikost čísla (ozn. jej $s$), na které umocňujeme postupně všechna přirozená čísla ve jmenovatelích sčítanců. Proto pro snazší práci Riemann popsal tyto řady pomocí tzv. *zeta* funkce (mající za argument právě $s$), kterou běžně označujeme řeckým písmenem $\zeta$. Platí tedy:

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \tag{1}$$

v oblasti komplexních čísel $\mathbb{C} \setminus \{1\}$[1]. Přičemž (1) platí pouze v oblasti konver-

[1] V (1) je užito mocnění na komplexní číslo, které definuji v kapitole 7.

gence této řady. Pro ostatní body se analyticky rozšiřuje[2] v oboru reálných čísel.

Nyní se nejspíše nabízí otázka, jak vlastnosti $\zeta(s)$ souvisí s Riemannovou hypotézou a problematikou počtu prvočísel menších než dané číslo (kterou se Riemann zabýval). Odpověď (částečná - problém není vyřešený) bude hlavním tématem mé práce. Nejříve si však "osaháme" zvlášť prvočísla (v kapitole 2), poté $\zeta(s)$ (v kapitole 3). Až v kapitole 4 začneme poznatky dávat "dohromady" a odpovídat na zmíněnou otázku.

Jinak k uvedeným řadám: $\zeta(2), \zeta(3), \zeta(4)$ (a dalším) existuje mnoho důkazů jejich konvergence i přesného vyjadření (některé z nich si též ukážeme později). Abychom lépe nahlédli do problematiky, aproximujeme nyní řady pomocí částečných součtů.

**Označení 1**($S_k(f)$): Nechť $f$ je řada, resp. funkce zadaná řadou. $S_k(f)$ je součet prvních $k$ členů $f$ (resp. řady kterou je $f$ zadána).

**Příklad 1**(*Hodnoty* $\zeta(2), \zeta(3), \zeta(4)$): Aproximujte $\zeta(2), \zeta(3), \zeta(4)$ pomocí částečných součtů[3], prvních: 2,4,6,8,10,12,14 členů. Určete jejich odchylku od skutečných hodnot, které jsou:

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \approx 1,644934066848$$

$$\zeta(3) \approx 1,20205690315$$

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90} \approx 1,082323233711$$

ŘEŠENÍ:

[2] Analytické rozšíření je zjednodušeně hledání předpisu, který pro vzory z oblasti konvergence (tj. množiny vzorů, pro které řada/funkce konverguje) "vrací" stejné (funkční) hodnoty jako předpis původní, zároveň však pro některé vzory mimo oblast konvergence "vrací" konečnou funkční hodnotu. Více o tomto pojmu ve slovníku v kapitole 7.

[3] Později v práci naznačím, jak získat přesné vyjádření.

| ŘEŠENÍ PRO ζ(2): | | | |
|---|---|---|---|
| | **k-tý člen** | **$S_k(\zeta(2))$** | **Odchylka** |
| **k=1** | 1 | | |
| **k=2** | 0.25 | 1.25 | 0.394934066848 |
| **k=3** | 0.111111111111111 | | |
| **k=4** | 0.0625 | 1.42361111111111 | 0.221322955736889 |
| **k=5** | 0.04 | | |
| **k=6** | 0.0277777777777778 | 1.49138888888889 | 0.153545177959111 |
| **k=7** | 0.020408163265306 | | |
| **k=8** | 0.015625 | 1.5274220521542 | 0.117512014693805 |
| **k=9** | 0.012345679012346 | | |
| **k=10** | 0.01 | 1.54976773116654 | 0.095166335681459 |
| **k=11** | 0.008264462809917 | | |
| **k=12** | 0.006944444444444 | 1.5649766384209 | 0.079957428427098 |
| **k=13** | 0.005917159763314 | | |
| **k=14** | 0.005102040816327 | 1.57599583900054 | **0.068938227847458** |

| | ŘEŠENÍ PRO ζ(3): | | |
|---|---|---|---|
| | **k-tý člen** | **$S_k(\zeta(3))$** | **Odchylka** |
| **k=1** | 1 | | |
| **k=2** | 0.125 | 1.125 | 0.07705690315 |
| **k=3** | 0.037037037037037 | | |
| **k=4** | 0.015625 | 1.17766203703704 | 0.024394866112963 |
| **k=5** | 0.008 | | |
| **k=6** | 0.00462962962963 | 1.19029166666667 | 0.011765236483333 |
| **k=7** | 0.002915451895044 | | |
| **k=8** | 0.001953125 | 1.19516024356171 | 0.00689665958829 |
| **k=9** | 0.001371742112483 | | |
| **k=10** | 0.001 | 1.19753198567419 | 0.004524917475807 |
| **k=11** | 0.000751314800902 | | |
| **k=12** | 0.000578703703704 | 1.1988620041788 | 0.003194898971201 |
| **k=13** | 0.00045516613564 | | |
| **k=14** | 0.00036443148688 | 1.19968160180132 | **0.002375301348681** |

Zbylý případ - pro $\zeta(4)$ je zcela analogický, proto jej neuvádím.

Na příkladu výše je vidět, že odchylka částečných součtů od součtu celé řady se zmenšuje, když $k$ se zvětšuje. Připomenu, že to není obecně platná vlastnost pro všechny řady a tedy pomocí částečných součtů (konečného počtu prvků) samozřejmě nelze obecně počítat hodnotu součtu (nekonečné) řady a ani její konvergenci ! Částečný součet totiž nijak "nezohledňuje logiku" celé řady. Z jeho hodnoty se tedy např. nijak nedozvíme, zda hned $(k+1)-$tý člen bude $\infty$.

Pravdivé je pouze "slabší" tvrzení: Součet nekonečné řady $f$ je hodnota $L$, ke které se blíží částečné součty když $k \to \infty$.[4] (formálně: $L = \lim_{k\to\infty} S_k(f)$)

Na druhou stranu, v případě $\zeta(s)$ je evidentní, že se zvětšujícím se $s$ se zvětšují i jmenovatele členů řady, které se tak "stále rychleji blíží" [5] k nule a přispívají méně do celkové sumy. Pro důkaz konvergence (vybraných $\zeta(s)$) tedy jistě bude možné užít srovnání, např. takto: Řádně dokážeme konvergenci $\zeta(2)$ (to činím v kapitole 4) a ukážeme, že pro $\zeta(s), s > 2$ platí, že každý člen $\zeta(2)$ je větší nebo rovný jak člen $\zeta(s)$ (se stejným pořadím). Z toho a ze skutečnosti, že členy obou řad jsou kladné plyne, že: $0 < \zeta(s) \leq \zeta(2)$ a $\zeta(s)$ konverguje. Později, výhodnějším srovnáním s geometrickou řadou, dokážeme silnější závěr: $s > 1 \implies \zeta(s)$ konverguje.

Jinak řadu (1) dříve studoval L. Euler, který našel zajímavou rovnost

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p\in P} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \left(1 - \frac{1}{2^s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{3^s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{5^s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{7^s}\right)^{-1} \cdots \tag{2}$$

Připomeňme, že $\prod$ označuje násobení a $P$ je množina všech prvočísel (tedy pravá strana je součin uvedeného výrazu pro všechna prvočísla).

V uvedené práci [17] Riemann začal v oboru komplexních čísel $\mathbb{C}$ (tedy pro $s \in \mathbb{C}$) studovat řadu (1). Tato řada je pojmenovaná po Dirichletovi, konverguje pro $s$, které mají $\Re(s) > 1$ (kde $\Re(x)$ značí reálnou část čísla $x$). Pro ostatní $s$ řada diverguje. B. Riemann pak rozšířil obor argumentů na $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ analytickým rozšířením. (V bodě $s = 1$ má $\zeta(s)$ pól s reziduem hodnoty 1.)

Přirozenou otázkou jsou *nuly* funkce $\zeta(s)$ neboli kořeny rovnice

$$\zeta(s) = 0 \tag{3}$$

Riemann v uvedeném článku zformuloval tvrzení:

*Všechny netriviální nulové body funkce $\zeta$ mají reálnou část rovnou $\frac{1}{2}$.* [6]

---

[4] To není překvapivé, neboť když $k = \infty$, děláme součet původní řady.

[5] Koncept "rychlosti blížení k určité hodnotě" (který právě v případě členů řady, může rozhodovat o její konvergenci) se formálně zavádí nejčastěji v kurzu matematické analýzy na VŠ.

[6] Za triviální kořeny se považují prvky množiny: $\{-2k; k \in \mathbb{N}\}$

Toto tvrzení je **Riemannova hypotéza**, která již více než 160 let odolává pokusům o potvrzení či vyvrácení. Patří mezi tzv. **"23 Hilbertovými problémy"**, které David Hilbert zformuloval na matematickém kongresu v Paříži v roce 1900. Většina těchto problémů je již vyřešena. Riemannova hypotéza avšak nikoliv, proto byla v roce 2000 zařazena mezi **7 problémů milenia,** z nichž na každý je vypsána prémie 1 milionu amerických dolarů Clayvovým matematickým institutem v New Hampshire.

Riemannova hypotéza tedy zaujímá přední místo mezi aktuálně řešenými problémy soudobé matematiky. Důvod je převážně praktického charakteru - potvrzení platnosti této hypotézy by zajistilo mnoho jiných (často již předem předpokládaných) výsledků převážně v matematice, fyzice a informatice.

V matematice by potvrzení hypotézy zajistilo platnost výsledků, které se týkají rozložení prvočísel a jejich lepší aproximace. Dále by mělo velký význam pro šifrování a kryptosystémy. Prvočísla o stovkách míst zabezpečují např. platby - vzájemné násobení čísel je totiž mnohem lehčí, než jejich rozklad na prvočísla. Ve fyzice má hypotéza aplikaci např. v kvantové fyzice a statistických rozloženích energetických hladin.

Jinak o důkaz Riemannovy hypotézy se neúspěšně pokoušelo mnoho významných matematiků. Za všechny uvedu alespoň tyto: Thomas Stieltjes (1885), Alan Turing (1939)[2], Pál Turán (který zastával názor, že Riemannova hypotéza neplatí), Nikolay Gavrilov (1960) [7], Michael Atiyah (2018) [1]

V důkazech výše uvedených matematiků byly nalezeny chyby, které nejsou na první pohled patrné. Proto je třeba i nadále pokračovat ve studiu spojeném s touto hypotézou.

Závěrem úvodu bych podotknul, že existují hned minimálně dvě "cesty" jak na problém Riemannovy hypotézy (a pokusy o řešení) pohlédnout. Tou první je hledání zákonitostí mezi přirozenými čísly- snaha o nalezení logiky zdánlivě chaotického výskytu prvočísel... (Přesnější definici toho, jaký systém bychom pro důkaz Riemannovy hypotézy potřebovali, uvedu později...)

Druhou možností je postup skrz analytickou definici problému (kterou formuloval sám Riemann), kterou je vlastně nalezení podmínek za kterých má "ošklivá" komplexní rovnice řešení. Tento postup může mít výhody v tom, že existuje mnoho dokázaných tvrzení o komplexních funkcích (jejichž kombinace teoreticky mohou být hledaným řešením). Pro orientaci v poznatcích komplexní analýzy je však zase nezbytné ovládnutí alespoň základních pojmů.[7]

Jinak takto "odlišně" můžeme postupovat kvůli dokázaným "přemostěním" Riemannovy hypotézy na ekvivalentní tvrzení z všemožných oblastí matematiky.

Nakonec chci upozornit čtenáře, že pro uvedení (alespoň z části) úplného popisu problému a přístupů k jeho řešení, není fakticky možné vyhnout se poznatkům často náročným i pro studenta VŠ. A tedy spojení "pro střední školy" v názvu pouze indikuje, že většina práce (tj. téměř "vše" až na část obsahu kapitol 5,6,8) je formulována tak, aby byla pochopitelná pro studenty SŠ.[8]

Také chci upozornit, že v práci užívám netradiční označení. Rozlišuji pojmy: věta (ta jest vždy uvedena s důkazem, nebo jeho náznakem) a tvrzení (vždy bez důkazu). Činím tak proto, aby v seznamech (které uvádím na konci práce) bylo čtenáři ihned jasné, "co je s důkazem a co bez něj".

Předtím než zahájíme studium Riemannovy hypotézy z "pohledu" teorie čísel, uvedu krátký přehled o jeho životě (V případě, že se chcete rovnou věnovat "matematice", skočte na kapitolu 3)

[7] Tímto způsobem k problému přistupuji hlavně v kapitolách 4-6.

[8] Samozřejmě byla možnost složitější poznatky vyřadit zcela, já však myslím, že by tak došlo k "ochuzení" zkušenějších čtenářů - převážně o celkový vhled do problematiky a "nasměrování" k dalšímu studiu.

# 2 Bernhard Riemann: Jeho život, osobnost a přínosy matematice

Riemann byl mimořádně talentovaný matematik schopný penetrovat složité matematické problémy a obecně rozpoznat a postihnout jejich vnitřní logiku. O tom svědčí mnoho citátů významných osobností, nejen matematiků. Za všechny uvádím: "Jeden z nejvíce nápaditých a skutečnost nejhlouběji nahlížejících matematiků všech dob."- H.Freudenthal.

Níže uvedu jen stručný přehled nejdůležitějších Riemannových životních milníků a úspěchů. Pro důkladnější studium doporučuji např. knihu R. Narasimhana - Riemann's collected works.

## 2.1 Riemannův život a osobnost

### 2.1.1 Riemannův život

Riemann se narodil 17. září 1826 do rodiny kněze v Breselenz (blízko Dannenberg v království Hannoveru). Navštěvoval gymnázium v Hannoveru (1840-1842) a Lüneburgu (1842-1846). Dále studoval v Göttingenu (1846-1847,1849-1851) a Berlíně (1847-1849). Doktorát obdržel v roce 1851 v Göttingenu, kde též pod vedením Gausse složil kvalifikační zkoušku pro výuku na univerzitě. V roce 1857 byl jmenován mimořádným profesorem, o dva roky později řádným. V roce 1862 se oženil s Elisou Koch (kamarádkou jeho sester). Poslední léta - ve špatném zdravotním stavu - strávil v Itálii, kde se mu narodilo jeho jediné dítě - dcera Ida. Itálie se také Riemannovi během prvních dní války s Pruskem stává místem věčného odpočinku. Bernhard Riemann umírá 20. července 1866 v Salasce v Lago Maggiore.

### 2.1.2 Riemannova osobnost

Až do 14 let Riemann vyrůstá pouze s rodinou v chudé a zaostalé oblasti hannoverského venkova (na březích řeky Labe) - v téměř úplné izolaci od "okolního světa", která je jednou z možných příčin:

1. Riemannovy celoživotní introvertní povahy - nepřekonatelné překážky v komunikaci a navazování vztahů s jinými lidmi;

2. vyhledávání životní jistoty, jejíž symbolem je dobře známé a klidné místo - Quickborn kde žil od svých 4 let (a v průběhu života se na toto místo několikrát vrátil);

3. vášně (v konečném důsledku pro svět tolik prospěšné) po postihnutí principu a zákonitostí života - matematickými a filozofickými metodami.

Aby nalezl odpovědi na otázky, které se "vznáší" nad matematikou, nad každou lidskou bytostí, nad samotným principem života, často uniká do spekulativních úvah, a to často i navzdory blížícím se termínům odevzdání svých prací. Pro důkaz jeho celoživotního zasvěcení poznání v obecném slova smyslu cituji z výše zmíněného díla: "Snad jen Dedekindovi se podařilo vytáhnout příležitostně Riemanna z osamnělosti jeho pokoje..."

Zajímávé je, že i přes nezpochybnitelné přínosy a prokazatelné překážky v osobním životě, svět vnímal Riemanna poněkud nespravedlivě jako "hypochondra". Zřejmě pro jeho křehkou fyzickou konstituci (od malička trpěl chronickými potížemi, které špatnou léčbou přešly ve vážné ledvinové poškození) a již zmíněnou citlivou a hloubavou duši, která nejspíše mimo fantastické nápady k řešení problémů, vkládala do hlavy i tíživé myšlenky, které si jiný (více "praktický" člověk) třeba ani nepřipustí.

Jinak asi nejšťastnější část života prožil Riemann v Itálii, kde se mu podařilo částečně překročit svůj stín a nalézt štěstí mimo jiné i v kontaktech s jinými lidmi.

## 2.2 Hlavní přínosy Riemannovy vědecké kariéry

Rád bych poznamenal, že Riemannovo dílo významně přesahuje rámec teorie související s touto hypotézou. Riemann byl "bez debat" jedním z největších matematiků všech dob: jako první zavedl mnohorozměrnou geometrii, tenzor křivosti a vůbec matematický aparát budoucí obecné teorie relativity. Navíc definoval pojem integrálu, který se objevuje "prakticky" při každém složitějším fyzikálním výpočtu.[9]

A to není ani zdaleka vše. Na Riemannových myšlenkách mimo jiné stojí[10] dnešní analytická a Riemannova geometrie a komplexní analýza. Jinak ačko-

[9] Samozřejmě je nejspíše pravda, že každý výpočet řešený pomocí integrálu lze řešit i bez něj (skrz geometrické úvahy apod. - např. si takový způsob lze zkusit na odvození výpočtu plochy pod parabolou). Existuje ale rozhodně mnoho příkladů, že formalizace skrze něj a použití odvozených postupů jeho úprav, jsou nesmírně silným nástrojem umožňujícím efektivní řešení.

[10] Samozřejmě rozvoj těchto oblastí matematiky není spjat pouze s Riemannem, nýbrž i s myšlenkami mnoha dalších významných matematiků.

liv Riemann studoval teorii čísel jen "okrajově", popsal mnoho (do dnešních dnů) významných vztahů (právě při formulaci Riemannovy hypotézy). Níže uvádím obrázek Riemanna:

# 3 O prvočíslech

V této kapitole zkusíme odhalit některé základní vlastnosti přirozených čísel a uvést alespoň některá propojení s Riemannovou hypotézou. Motivací budiž citát Aristotela z jeho díla *Metaphysica*:[11] "Princip čísel je principem všeho, základnější než země, vzduch, oheň a voda"[12] (4 základní pilíře starověkého vnímání).

Speciální podmnožinou přirozených čísel jsou **prvočísla**, která již od starověku svými vlastnostmi fascinovala matematiky[13] a jsou těsně spjaty s námi studovanou *Riemannovou Hypotézou.* Začneme zopakováním definice, pak uvedeme vybrané věty:

**Definice 1**(*Prvočíslo*): $a \in \mathbb{N}$ je prvočíslo $\overset{def.}{\Longleftrightarrow}$ $a$ je beze zbytku dělitelné pouze $a$ a 1. (neboli žádné $b \in \mathbb{N}$, kde $1 \neq b \neq a$ nedělí $a$ beze zbytku.)

Nyní uvedu jednu tzv. základní větu aritmetiky. Vymezuje zajímavou vlastnost prvočísel ve vztahu k číslům obecně přirozeným.

**Věta 1**(*základní věta aritmetiky*): Každé $n \in \mathbb{N}$ je možné zapsat jako faktorizace (=součin prvočísel) právě jedním způsobem.[14]

*Důkaz.* Důkaz provedeme indukcí. Předpokládáme, že věta 1 platí pro čísla $< n$. Dokážeme, že pak platí i pro $n$.

Nechť $n$ není prvočíslo a má dvě faktorizace:

$$n = abc\ldots$$

$$n = a'b'c'\ldots,$$

kde $a, b, c, \ldots, a', b', c', \ldots$ jsou prvočísla. Pak ovšem neexistuje prvočíslo z první faktorizace rovné prvočíslu z faktorizace druhé. Kdyby totiž takové prvočíslo existovalo, mohli bychom jej vyjmout z obou faktorizací výše. Tak bychom

[11] Aristotelova *Metaphysica* bývá považována za jedno z nejvýznamnějších filozofických děl všech dob. Myšlenky v ní obsažené ovlivnily celé "generace" filozofů (nejvíce do období středověku)- mimo jiné převážně: řecké, muslimské a ty ze scholastiky.

[12] Fakticky - na tomto výkladu principu "fungování" a "popsatelnosti" světa, zakládaly myšlenky celé skupiny filozofů, dnes označovaných jako "Pythagorejci".

[13] Zajímavé je, že z dochované liturátury plyne, že prvočísla byla poprvé důkladněji popsány až Euklidem - v jeho *Základech*, které obsahují pokročilá tvrzení obecně o přirozených číslech.

[14] Za jiný způsob zápisu nepovažujeme změnu pořadí prvočísel v součinu.

dostali dvě různé faktorizace stejného čísla menšího než $n$ což je v rozporu s indukčním předpokladem.

Dále nechť $p = min\{a, b, c, \dots\}, p' = min\{a', b', c', \dots\}$ Jelikož každá faktorizace $n$ obsahuje alespoň jedno stejné, nebo větší prvočíslo nežli $p$, resp. $p'$ musí platit:

$$p^2 \leq n \wedge p'^2 \leq n$$

Z toho a skutečnosti, že $p \neq p'$ plyne:

$$pp' < n$$

Číslo $n - pp'$ je menší než $n$ a má z indukčního předpokladu právě jednu faktorizaci. A jelikož $p$, resp. $p'$ dělí $n$, dělí $p$, resp. $p'$ i číslo $n - pp'$, v jehož faktorizaci zřejmě musí být $p$ i $p'$. Tzn. platí:

$$n - pp' = pp'a''b''c'' \dots,$$

kde $a'', b'', c'', \dots$ jsou prvočísla. Z toho ovšem vychází, že $pp'$ musí být součástí faktorizace $n$. To ovšem není pravda. Neboť když např. první faktorizaci $n$ vydělíme $p$, dostaneme faktorizaci čísla menšího než $n$ (která je z indukčního předpokladu jediná), jejíž součástí by mělo být $p'$. To ovšem platit nemůže, protože pak by obě faktorizace byly stejné (obsahovaly by obě $p, p'$ a zbylá prvočísla by též byla stejná, neboť jsou rozkladem čísla menšího než $n$). Předpoklad o existenci více faktorizací čísla $n$ je proto nesmysl. $\square$

U věty 1 může být problematické, uvědomit si, že její důkaz není možné založit pouze na definici prvočísla a operaci násobení (jak by se "mohlo" zdát). Tuto skutečnost dokazuje matematik David Hilbert [15] v rámci příkladu níže:

**Příklad 2**(*Zobecnění konceptu prvočísel*): Nechť je dána množina $M = \{4x + 1; x \in \mathbb{N}_0\} = \{1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37, 41, 45, 49, 53 \dots\}$, která je zřejmě uzavřená na "obyčejné" násobení, ale nikoliv na sčítání a odčítání...

Nyní z $M$ vybereme podmnožinu $P$ tzv. "pseudo"-prvočísel, kterou dostaneme aplikací definice prvočísla na prvky $M$. Tzn. $P$ oproti $M$ např. neobsahuje číslo 25, které je dělitelné pětkou. Zajímavé je hned číslo 9, které není "normální" prvočíslo, ale je "pseudo"-prvočíslem, neboť neexistuje číslo tvaru $4x+1, x \in \mathbb{N}_0$, které by jej dělilo. Je tedy zřejmě třeba učinil jistý "abstraktní"

[15] D. Hilbert byl jedním z největších matematiků 20. st., věnující se převážně geometrii a jejímu axiomatickému popisu. Z toho důvodu je často označován jako tzv. "druhý" geometr (po Euklidovi).

krok a zcela se oprostit od zažité představy "normálních" prvočísel. První členy $P$ (naše "pseudo"-prvočísla) jsou: $5, 9, 13, 17, 21, 29, 33, 37, 41, 49, \ldots$ Pročež samozřejmě platí, že čísla z $M$, která nejsou v $P$ lze faktorizovat (tzn. je psát jako součin "pseudo"-prvočísel; toto lze dokázat analogicky jako ve větě 1).

Není však pravda, že faktorizace je obecně jediná, neboť např. $693 = 9.77 = 21.33$.[16] Tato skutečnost nám dává informaci o důkazu věty 1: kdybychom mohli větu 1 dokázat jen užitím definic prvočísla a násobení, stejným způsobem bychom dokázali jednoznačnost faktorizace (pomocí "pseudo"-prvočísel) pro prvky $M$, což ovšem víme, že je nesmysl. Proto je pro každý důkaz věty 1 nezbytné užití operace $+/-$ (kterou v našem důkazu využíváme ve formulaci čísla $n - pp'$)

**Věta 2**(*Náležitost dělitele k faktorizaci*): Pokud platí Věta 1, pak každé prvočíslo $p$ dělící $n$, musí být ve faktorizaci $n$.

*Důkaz.* Když $p$ dělí $n$, potom lze $n$ psát jako $n = pn'$. A pokud vyjádřím $n'$ jako faktorizaci prvočísel, dostanu po dosazení do předchozí rovnosti faktorizaci $n$. (Jiná faktorizace $n$ nežli tato obsahující číslo $p$ zase neexistuje z předpokladu, tj. platnosti věty 1) □

Je zajímavé, že i když se tvrzení jeví jako základní v obecném slova smyslu, korektní důkaz nebyl zahrnut v Euklidových základech a ani učebnicích pozdního středověku. První formální důkaz nejspíše podal až Gauss v roce 1801 ve své knize: Disquisitiones Arithmeticae.

## 3.1 Euklidova věta o prvočíslech

Otázku o množství prvočísel si položil již Euklides, který žil asi v letech 325 př. n. l. až 260 př. n. l. a je mimo jiné zakladatel moderního pojetí geometrie pomocí axiomatického systému (současná Euklidova geometrie je vlastně rozšířením a zobecněním tohoto jeho pojetí). Euklid dokázal následující větu:

**Věta 3**(*Euklidova věta o prvočíslech*): Prvočísel je nekonečně mnoho.

*Důkaz.* Konstrukční: k domnělému největšímu prvočíslu $p$ nalezneme větší. Nechť $n$ je součinem všech prvků množiny $A$, která obsahuje všechna prvo-

[16] Zřejmě faktorizace pomocí "normálních" prvočísel by byla tvaru: $693 = 3.3.7.11$. Jak se ale lze snadno přesvědčit, žádné z čísel v součinu není z $P$ - tedy není "pseudo"-prvočíslo. Naopak čísla v rozkladu: $693 = 9.77 = 21.33$ opravdu náleží $P$ a jejich součin tedy tvoří jistou "pseudo"-faktorizaci.

čísla $\leq p$. Z toho plyne, že $P = n+1$ je buď prvočíslo (a zřejmě $P > p$), nebo je dělitelné prvočíslem $p'$, kdy zřejmě $p' \notin A$, jelikož $\forall a \in A$ platí, že $a$ dělí P se zbytkem 1. A tedy $p' > p$. $\square$

## 3.2 Eratosthenovo síto (řešeto)

Jedním z dalších velkých myslitelů zabývajících se prvočísly byl i řecký filozof a matematik **Eratosthenes**[17] (276 př. n. l. - 194 př. n. l.), který si kladl otázku nalezení všech prvočísel. **Eratosthenovo síto** spočívá v postupném vyškrtnutí násobků prvočísel. Nevyšktnutá čísla jsou prvočísla.

Formálně můžeme Erastotenovo síto (hledající prvočísla menší nebo rovná než zvolené $n, n \in \mathbb{N}$) popsat jako algrotimus:

1. uložíme si množinu čísel $P = \{2, 3, 4, \ldots, n\}$.
2. vybereme (dosud nevybrané) nejmenší číslo z $P$, ozn. jej $k$.
3. Z $P$ vyřadíme všechny celočíselné násobky $k$.
4. kroky 2,3 opakujeme než: vybereme všechny prvky $P$, nebo vybereme číslo $k' \geq \sqrt{n}$. Posloupnost $P$ obsahuje jen prvočísla.

Čtvrtý krok algoritmu výše říká, že stačí vyškrtávat násobky čísel $\leq \sqrt{n}$. To je důležitý poznatek významně šetřící zdroje při implementaci v počítačovém kódu. Důkaz pak plyne triviálně z myšlenky, že pokud je číslo $n$ dělitelné $a > \sqrt{n}$, pak určitě platí, že $n$ lze zapsat jako $n = ab$, kde $b \leq \sqrt{n}$ Z toho ale plyne, že $n$ je dělitelné i $b$ a tedy je jeho násobkem a Erastotenovo síto jej vyřadilo.

Viz. ukázka níže:

1 | **2** | **3** | $4_{2}$ | **5** | $6_{2,3}$ | **7** | $8_{2}$ | $9_{3}$ | $10_{2,5}$ | **11** | $12_{2,3}$ | **13** | $14_{2,7}$ | $15_{3,5}$ | $16_{2}$ | **17** | $18_{2,3}$ | **19** | $20_{2,5}$ | $21_{3,7}$ | $22_{2}$ | **23** | $24_{2,3}$ | $25_{5}$

Červeně jsou vyznačena prvočísla, černě jejich násobky (které tedy nejsou prvočísly). Dolní indexy vyjadřují prvočísla, jehož je dané neprvočíslo násobkem.[18]

**Příklad 3**(*Hledání prvočísel do 100*): Erastotenovým sítem nalezněte všechna prvočísla do 100.

---

[17] Eratosthenes byl matematik z Cyrene, později knihovník v Alexandrii.

[18] Jak je vidět, Erastotenovo síto patří mezi jednoduché algoritmy, které je vhodné prezentovat již na základní škole. Je možné jej uvést jak v matematice, tak i v rámci programování - v hodinách informačních technologií.

Analogicky jako v ukázce výše vyškrtáváme násobky prvočísel. Nevyškrtnutá čísla jsou prvočísla. Řešení viz. tabulka níže:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **2** | **3** | $4_{2}$ | **5** | $6_{2,3}$ | **7** | $8_{2}$ | $9_{3}$ | $10_{2,5}$ |
| **11** | $12_{2,3}$ | **13** | $14_{2,7}$ | $15_{3,5}$ | $16_{2}$ | **17** | $18_{2,3}$ | **19** | $20_{2,5}$ |
| $21_{3,7}$ | $22_{2}$ | **23** | $24_{2,3}$ | $25_{5}$ | $26_{2,13}$ | $27_{3}$ | $28_{2,7}$ | **29** | $30_{2,3,5}$ |
| **31** | $32_{2}$ | $33_{3,11}$ | $34_{2,17}$ | $35_{5,7}$ | $36_{2,3}$ | **37** | $38_{2,19}$ | $39_{3,13}$ | $40_{2,5}$ |
| **41** | $42_{2,3,7}$ | **43** | $44_{2,11}$ | $45_{3,5}$ | $46_{2,23}$ | **47** | $48_{2,3}$ | $49_{7}$ | $50_{2,5}$ |
| $51_{3,17}$ | $52_{2,13}$ | **53** | $54_{2,3}$ | $55_{5,11}$ | $56_{2,7}$ | $57_{3,19}$ | $58_{2,29}$ | **59** | $60_{2,3,5}$ |
| **61** | $62_{2,31}$ | $63_{3,7}$ | $64_{2}$ | $65_{5,13}$ | $66_{2,3,}$ | **67** | $68_{2,17}$ | $69_{3,23}$ | $70_{2,5,7}$ |
| **71** | $72_{2,3}$ | **73** | $74_{2,37}$ | $75_{3,5}$ | $76_{2,19}$ | $77_{7,11}$ | $78_{2,3,1}$ | **79** | $80_{2,5}$ |
| $81_{3}$ | $82_{2,41}$ | **83** | $84_{2,3,}$ | $85_{5,17}$ | $86_{2,43}$ | $87_{3,29}$ | $88_{2,11}$ | **89** | $90_{2,3,5}$ |
| $91_{7,13}$ | $92_{2,23}$ | $93_{3,31}$ | $94_{2,47}$ | $95_{5,19}$ | $96_{2,3}$ | **97** | $98_{2,7}$ | $99_{3,11}$ | $100_{2,5}$ |

Pomocí Erastotenova síta lze nelézt prvočísla v libovolné konečné podmnožině přirozených čísel, níže uvádíme např. tabulku prvočísel menších než 1000:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 3 | 5 | 7 | 11 | 13 | 17 | 19 | 23 |
| 29 | 31 | 37 | 41 | 43 | 47 | 53 | 59 | 61 | 67 |
| 71 | 73 | 79 | 83 | 89 | 97 | 101 | 103 | 107 | 109 |
| 113 | 127 | 131 | 137 | 139 | 149 | 151 | 157 | 163 | 167 |
| 173 | 179 | 181 | 191 | 193 | 197 | 199 | 211 | 223 | 227 |
| 229 | 233 | 239 | 241 | 251 | 257 | 263 | 269 | 271 | 277 |
| 281 | 283 | 293 | 307 | 311 | 313 | 317 | 331 | 337 | 347 |
| 349 | 353 | 359 | 367 | 373 | 379 | 383 | 389 | 397 | 401 |
| 409 | 419 | 421 | 431 | 433 | 439 | 443 | 449 | 457 | 461 |
| 463 | 467 | 479 | 487 | 491 | 499 | 503 | 509 | 521 | 523 |
| 541 | 547 | 557 | 563 | 569 | 571 | 577 | 587 | 593 | 599 |
| 601 | 607 | 613 | 617 | 619 | 631 | 641 | 643 | 647 | 653 |
| 659 | 661 | 673 | 677 | 683 | 691 | 701 | 709 | 719 | 727 |
| 733 | 739 | 743 | 751 | 757 | 761 | 769 | 773 | 787 | 797 |
| 809 | 811 | 821 | 823 | 827 | 829 | 839 | 853 | 857 | 859 |
| 863 | 877 | 881 | 883 | 887 | 907 | 911 | 919 | 929 | 937 |
| 941 | 947 | 953 | 967 | 971 | 977 | 983 | 991 | 997 | |

Z postupu v Erastotenově sítě je vidět, že hledání prvočísel je otázkou dobře formalizovatelnou pro výpočetní techniku.

## 3.3 Počet prvočísel menších než dané číslo a funkce $\pi(N)$

Nyní se budeme zabývat následujícími otázkami:

1. **Kolik** je prvočísel menších nebo rovných než zvolené číslo $N$ ?
2. **Jaká je frekvence** výskytu prvočísel menších nebo rovných než volené $N$ ?

**Definice 2**(*Funkce* $\pi(N)$): $\forall N \in \mathbb{N} : \pi(N)$ se rovná počtu prvočísel menších nebo rovných než volené $N$.

**Definice 3**(*Frekvence výskytu prvočísel* $F(N)$): Platí, že $F(N) = \frac{\pi(N)}{(N)}$, kde $N \in \mathbb{N}$.

**Příklad 4**(*počet prvočísel a průměrná frekvence jejich výskytu*): Vypočtěte hodnoty $\pi(N)$ a $F(N)$ pro hodnoty $N = 30, 100, 1\,000, 1\,000\,000, 10\,000\,000\,000$ ? (Pro větší $N$ zkuste alespoň hádat)

Pro první 3 hodnoty $N$ lze snadno vyjít z předchozích tabulek Erastotenova síta a prvočísel menších než 1000.

1. : $\pi(30) = 10, F_{30} = 1/3$
2. : $\pi(100) = 25, F_{100} = 1/4$
3. : $\pi(1\ 000) = 168, F_{1\ 000} \doteq 1/6$

Zbylé hodnoty lze vypočítat užitím počítače:

1. : $\pi(1\ 000\ 000) = 78498, F_{1\ 000\ 000} \doteq 1/13$
2. : $\pi(10\ 000\ 000\ 000) = 455052512, F_{10\ 000\ 000\ 000} \doteq 1/22$

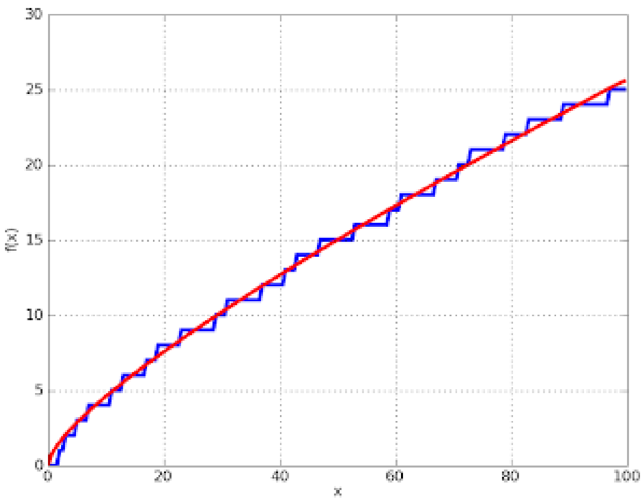
Ze závěrů příkladů 1 a 2 se nabízí intuitivní hypotéza, že frekvence výskytu nových prvočísel klesá s tím, jak se čísla zvětšují, tzn. že pokud $x_1 < x_2 \Rightarrow F_{x_1} > F_{x_2}$. Tato hypotéza je však obecně nepravdivá, neboť např. $F_7 > F_6$. Ve skutečnosti platí pouze "slabší" tvrzení.

**Tvrzení 1**(*O frekvenci výskytu prvočísel*): Platí, že $\forall N \exists k : F(N) > F(N + k)$.

Důkaz tvrzení výše lze částečně nahlédnout z postupu v Eratosthenově sítě, kdy za každé nově objevené prvosčíslo $p$ vyškrtneme jeho násobky z kandidátů na další prvočísla. A tedy vyškrtáváme jak násobky předchozích prvočísel, tak navíc i tohoto nového. A to v dostatečně velké množině čísel, která následují, přirozeně musí snížit výskyt prvočísel... Ze stejného principu vychází i závěr další.

**Tvrzení 2**(*Limita frekvence výskytu prvočísel*): $N \to \infty \Rightarrow F(N) \to 0$.

Zajímavé je, že pokud se odprostíme od "malých" vad na "kráse", lze říci, že grafem funkce $\pi(x)$ (který je možné vidět níže) je poměrně "hezká" a "hladká" křivka.




Lze ukázat (opět využitím výpočetní techniky), že $\pi(x)$ se takto "ukázněně" chová i pro větší $x$. Proto je možné její křivku dobře aproximovat. Výsledkem prvotních snah o dosažení tohoto cíle je vztah:

$$\pi(x) \approx C(x) = \frac{x}{2c(x)},$$

kde $c(x)$ je počet cifer $x$.

Je zřejmé, že "problematickým" místem této aproximace bude "minimálně přechod na vyšší počet cifer". Tam totiž hodnota aproximace "skokově propadne". Konkrétní srovnání aproximace pro vybraná $x$ uvádím v tabulce níže.

| $x =$ | 99 | 999 | 999999 |
|---|---|---|---|
| $C(x)$ | $\frac{99}{2.2} = 24,75$ | $\frac{999}{2.3} = 166,5$ | $\frac{9999999}{2.6} = 83333,25$ |
| $\pi(x)$ | 25 | 168 | 78498 |
| $\lvert C(x) - \pi(x) \rvert$ | 0,25 | 1,5 | 4835,25 |

Je vidět, že už pro $x = 999999$ je odchylka opravdu velká. A intuitivně se nabízí hypotéza, že tendence výrazného nárůstu odchylky bude platit i pro větší $x$. Uvedu proto ještě některé další aproximace... Byla dokázána následující věta.

**Věta 4**(*O počtu prvočísel*):

$$\lim_{N \to \infty} \frac{\pi(N)}{N/\ln(N)} = 1.$$

Tuto větu dokázal K.F.Gauss (1777-1855) v roce 1792. Později v roce 1798 ji nezávisle na sobě dokázali: Charles J. de la Vallée Poussin a Jacques Hadamard [8].

Výše uvedený fakt o počtu prvočísel zapisujeme takto

$$\pi(N) \approx \frac{N}{\ln(N)} \tag{4}$$

když $N \to \infty$. Z věty 2 dále plynou tyto důsledky (pokud distribuci prvočísel v rámci sledovaného intervalu považujeme za náhodný jev):

1. pravděpodobnost, že číslo z množiny $\{1, 2, \ldots, N\}$ je prvočíslo, je $\approx \frac{1}{\ln(N)}$
2. $N$-té prvočíslo $\approx N \ln(N)$.

Tyto aproximace počtu prvočísel později v roce 1838 upřesnil L.Dirichlet [5] pomocí *logaritmické integrální funkce*

$$Li(x) = \int_0^x \left( \frac{1}{ln(t)} \right) dt$$

Platí

**Věta 5**(*Dirichletova aproximace*): $\pi(x) \approx Li(x)$.
Tato aproximace je přesnější, než-li (4).

Níže ukážeme odchylky těchto aproximací na pár příkladech.

**Příklad 5**(*Odhad $N$-tého prvočísla*): Pomocí 2. důsledku věty 2 odhadněte velikost $N$-tého prvočísla, pro $N : 10, 25$. Porovnejte odhady se skutečností využitím tabulek prvočísel výše.

V tabulce níže užívám značení:
Velikost $N$-tého prvočísla označím $P_N$. Odhad velikosti $N$-tého prvočísla označím $P'_N$.

| $N$ | $P_N$ | $P'_N$ | $\lvert P_N - P'_N \rvert$ |
|---|---|---|---|
| 10 | 29 | $10\ln(10) \approx 23,03$ | $\approx 5,97$ |
| 25 | 97 | $25\ln(25) \approx 80,47$ | $\approx 16,53$ |

Je vidět, že aproximace výše jsou poměrně nevyhovující a nelze pomocí jich hledat skutečné hodnoty prvočísel.

**Příklad 6**(*Aproximace $\pi(N)$*): Aproximujte $\pi(N)$ pro hodnoty $N : 30, 100, 1000, 1000000, 10000000000.$ pomocí vztahu (4) a logaritmické integrální funkce. Vyjádřete absolutní odchylku těchto aproximací od skutečného počtu prvočísel (dle závěrů z příkladu 2).

| $N$ | $\pi(N)$ | $\frac{N}{\ln(N)}$ | $Li(N)$ | $\lvert\pi(N) - \frac{N}{\ln(N)}\rvert$ | $\lvert\pi(N) - Li(N)\rvert$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 30 | 10 | $\frac{30}{\ln(30)} \approx 8,82$ | $\approx 13,02$ | $\approx 1,18$ | $\approx 3,02$ |
| 100 | 25 | $\frac{100}{\ln(100)} \approx 21,71$ | $\approx 30,13$ | $\approx 3,29$ | $\approx 5,13$ |
| 1000 | 168 | $\frac{1000}{\ln(1000)} \approx 144,76$ | $\approx 177,61$ | $\approx 23,24$ | $\approx 9,61$ |
| 1000000 | 78498 | $\frac{1000000}{\ln(1000000)} \approx 72382$ | $\approx 78627$ | $\approx 6116$ | $\approx 129$ |
| 10000000000 | 455052512 | $\frac{10^{10}}{\ln(10^{10})} \approx 434294482$ | $\approx 455055615$ | $\approx 20758030$ | $\approx 3103$ |

Je zajímavé, že až na prvotní "malá" $N$ (kdy je aproximace (4) dokonce lepší než $Li(N)$), je odchylka aproximace (4) obrovská, zatímco aproximace $Li(x)$ zůstává až pozoruhodně přesná. Intuitivně se tak nabízí domněnka - lze nějak garantovat maximálnost odchylky $Li(N)$ od $\pi(N)$ v závislosti na $N$ ? Tzn. Je $Li(x)$ a $\pi(x)$ spjato nějakým obecným- matematicky postihnutelným vztahem ?

## 3.4 Souvislost s Riemannovou hypotézou

Funkce $\pi(x)$ a $Li(x)$ mají souvislost s Riemannovou hypotézou. Kdyby platila, poté by platila i rovnost [10]:

$$\pi(x) = Li(x) + O(\sqrt{x}\ln(x)). \tag{5}$$

Funkce $O(f(x))$ je Landauova notace používaná v matematice pro porovnávání asymptotického chování funkcí. Pro $O(f(x))$ platí následující vlastnosti:

1. $\exists x_0, c > 0 : \forall x > x_0 : |O(f(x))| < |cf(x)|$.
2. $O(f(x)) = O(f(x) + A) = O(Af(x)), A \in \mathbb{R}$.[19]

Neboli pokud platí Riemannova hypotéza, pak platí, že $|\pi(x) - Li(x)|$ je od nějakého $x$ "dále" menší než $|c\sqrt{x}\ln(x)|$.

Vztah mezi $Li(x)$ a $\pi(x)$, který jsme uvedli výše, lze také vyjádřit zajímavou geometrickou reprezentací - pomocí tzv. principu náhodné chůze.

**Definice 4**(*Princip náhodné chůze*): Nechť $x, y \in \mathbb{R}, p = 0$. Algoritmus $A$ nazýváme náhodnou chůzí $\overset{Def.}{\Longleftrightarrow}$ v každém kroku $A$ náhodně přičteme k $p$ buď číslo $x$ (tento jev nástává s pravděpodobností $p_1 = \frac{y}{x+y}$), nebo odečteme $y$ (tento jev nástává s pravděpodobností $p_2 = \frac{x}{x+y}$).

Speciálním případem náhodné chůze je situace, kdy činíme stejné kroky (dopředu či dozadu), se stejnou pravděpodobností. Numerickými metodami bylo dosaženo následujícího zjištění:

**Tvrzení 3**(*Průměrná "výchylka" náhodné chůze*): Pro průměrnou hodnotu $|p|$ po $n$ krocích algoritmu $A$ z Definice 4 platí:

$$|p| \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{n}$$

Nyní odvodíme vztah $Li(x)$ a $\pi(x)$. Z aproximace $Li(x)$ plyne, že číslo $n \in \mathbb{N}$ je prvočíslo s pravděpodobností $\approx \frac{1}{\ln(n)}$. Pak ovšem hodnota $p$ náhodné chůze, kde $x = \frac{1}{ln(n)}, y = 1 - \frac{1}{ln(n)}, p_1 = \frac{1-\frac{1}{ln(n)}}{\frac{1}{\ln(n)}+1-\frac{1}{ln(n)}} = 1 - \frac{1}{\ln(n)}, p_2 = \frac{\frac{1}{ln(n)}}{\frac{1}{\ln(n)}+1-\frac{1}{ln(n)}} = \frac{1}{\ln(n)}$ přibližně vyjadřuje odchylku $Li(x)$ od $\pi(x)$, tzn. hodnotu $|Li(x) - \pi(x)|$.

Když tuto reprezentaci spojíme s informací ve vztahu (5), lze neformálně říci, že pokud platí Riemannova hypotéza, pak lze výskyt prvočísel "přibližně" charakterizovat jako náhodný jev.

[19]Tj. funkce $y(x) \in O(f(x)$, jestliže velikost $y$ (tj. $|y|$) pro dostatečně velký argument nikdy nepřesáhne pevný násobek $f(x)$.

## 3.5 Další otázky a speciální vlastnosti vybraných prvočísel

V této podkapitole uvádím některé další (spíše okrajové) otázky, které souvisí s Riemannovou hypotézou. Také zmíním některé speciální skupiny prvočísel, jejíchž vlastnosti máme poměrně dobře popsány.

**Definice 5**(*Významné skupiny prvočísel*):

1. Mersennova prvočísla: jsou ve tvaru $2^n - 1; n \in \mathbb{N}$
2. Fermatova prvočísla: jsou ve tvaru $2^n + 1; n \in \mathbb{N}$

Do Mersennových čísel naléží i jedno z největších známých prvočísel o hodnotě $2^{43112609} - 1$. A to není náhoda - pro uvedené skupiny existují speciální techniky ověření prvočíselnosti.

**Tvrzení 4**(*základní pozorování o Mersennových a Fermatových prvočíslech*):

1. $p = 2^n - 1$ je prvočíslo $\Rightarrow n$ je prvočíslo též.
2. $p = 2^n + 1$ je prvočíslo $\Rightarrow n$ mocninou dvojky.

Jinak je zajímavé, že ani na mnoho elementárních otázek typu:

1. Je nekonečně tzv. dvojčat ? (tzn. dvojic prvočísel lišících se např. právě o dvě)
2. Je nekonečně prvočísel o jedna větších než mocnina celého čísla ?
3. Existuje nekonečně Mersennových prvočísel ?
4. Je každé prvočíslo $> 3$ součet dvou prvočísel ?

neznáme odpověď. Víme pouze např., že platí:

**Tvrzení 5**(*O výskytu dvojčat*): Existuje nekonečně mnoho párů prvočísel lišících se o $\leq 246$ [20]

Jinak podobných otázek je samozřejmě více. A dohromady vypovídají o jakési "struktuře prvočísel" (pravidlech kterým prvočísla podléhají). Znalost

[20]důkaz provedl James Maynard a kolektiv na základě předchozího objevu Yitanga Zhanga, že existuje nekonečně dvojic lišících se o $< 7.10^7$.

těchto pravidel by pak implikovalo nejen závěr Riemannovy hypotézy (např. skrz vztah v podkapitole 3.4), ale i odpověď na další významnou (a úzce související) otázku soudobé matematiky: "Existuje metoda jak zjistit nejmenší prvočíslo (ozn. $p$), větší než číslo $x$, bez kontroly každého čísla, většího než $x$, které $p$ předchází ?"

Jelikož odpovědi na otázky výše neznáme, zkusme nyní nahlédnout logiku prvočísel alespoň pomocí numerických metod. Budeme sledovat vzdálenosti mezi dvěma po sobě jdoucími prvočísly.

**Definice 6**(*Vzdálenost po sobě jdoucích prvočísel*): Nechť $k \in \mathbb{N}$. Potom $Gap_k(X)$ je počet dvojic prvočísel $(p, q)$, tak že platí $p < q < X \wedge q - p = k$ a neexistuje prvočíslo $z$ tak aby: $p < z < q$.

**Příklad 7**(*Funkční hodnoty $Gap_k(X)$*): Určete $Gap_k(X)$, pro $X = 25$ a $k$ pořadě rovné $2, 4, 6$.

K nalezení řešení užijeme výpis prvočísel na str. 20. Dle něj platí:

1. $Gap_2(25) = 4$, vzdálenost 2 mají prvočísla ve dvojicích: (3,5);(5,7);(11,13);(17,19)
2. $Gap_4(25) = 3$, vzdálenost 4 mají prvočísla ve dvojicích: (7,11);(13,17);(19,23)
3. $Gap_6(25) = 0$

Pro větší $X$ uvádím tabulku výsledků:

| $X =$ | $10^2$ | $10^4$ | $10^6$ | $10^8$ |
|---|---|---|---|---|
| $Gap_2(X)$ | 8 | 205 | 8169 | 440312 |
| $Gap_4(X)$ | 7 | 202 | 8143 | 440257 |
| $Gap_6(X)$ | 7 | 299 | 13549 | 768752 |
| $Gap_8(X)$ | 1 | 101 | 5569 | 334180 |

Z tabulky výše jsou nejvíce zajímavé asi hodnoty $Gap_2(X), Gap_4(X)$, které se liší jen "velmi" málo a to i pro velká $X$.

Nyní se pokusíme zpřesnit závěr, který formuluje tvrzení 4. Využijeme k tomu jednoduchého tzv. "zásuvkového" principu (německy: Schubfach Prinzipel).

**Věta 6**(*Zásuvkový princip*): Nechť $n \in \mathbb{N}$, $M$ je nekonečná množina a množiny $M_1, M_2, \ldots, M_n$ jsou vzájemně disjunktní. Potom platí: $(M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup$

$M_n = M) \implies \exists k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tak že $M_k$ je nekonečná množina.

*Důkaz.* Sporem. Předpokládejme, že všechny množiny $M_1, M_2, \ldots, M_n$ jsou konečné. Označme jako $max$ nejvyšší počet prvků, který obsahuje libovolná z množin. Potom však součet počtu všech prvků všech množin je $< n.max <<$ $\infty$. (tzn. $n.max$ je konečné číslo) $\square$

**Věta 7**(*Nekonečný počet dvojčat - rozšíření*): Platí, že existuje sudé $k \in \mathbb{N}; k \leq 246$, tak, že platí: $Gap_k(X) = \infty \iff X = \infty$.

*Důkaz.* Důkaz. Tvrzení 5 říká, že dvojčat s "mezerami" $\leq 246$ je dohromady nekonečno. Dále platí, že různých disjunktních množin obsahujících dvojčata s danou "mezerou" o velikosti $k \leq 246$ je jen konečně mnoho. Jedna z těchto množin tedy musí obsahovat nekonečno prvků, to plyne přímo ze zásuvkového principu - věty 6. A zřejmě to nemůže být množina obsahující dvojčata s lichou mezerou, neboť jiná taková dvojčata až na dvojici (2,3) neexistují (to plyne z toho, že lichá mezera vynucuje sudost jednoho z uvažovaných čísel, které by měly tvořit dvojče) $\square$

Na závěr podkapitoly uvedu ještě jednu "numerickou" charakteristiku prvočísel a propojení s Riemannovou hypotézou.

**Definice 7**(*Multiplikativně sudé, resp. liché číslo*): Číslo, které lze zapsat jako součin sudého, resp. lichého počtu prvočísel nazýváme multiplikativně sudé, resp. liché.

**Tvrzení 6**(*tvrzení implikující Riemannovu hypotézu*): Nechť $S = \{s; s \leq X \wedge s \text{ je multiplikativně sudé}\}$ a $L = \{l; l \leq X \wedge l \text{ je multiplikativně liché}\}$. Platí: Pokud $\forall X > 1$ je počet prvků $S$ menší než $L$, potom Riemannova hypotéza platí.

Jinak pomocí tvrzení výše Riemannovu hypotézu dokázat nelze - byla totiž ukázána napravdivost předpokladu[21]. Např. pro $X = 906400000$ obsahuje $S$ o 708 více prvků než $L$. Přesto je tvrzení hezkou ukázkou toho, jak Riemannova hypotéza souvisí s různými problémy matematiky, které se jeví zdánlivě odlišně.

[21] Důkaz provedl Lehmann v roce 1960

# 4 Zeta funkce

Hlavním cílem této kapitoly je formulace Riemannovy hypotézy pomocí rozložení kořenů tzv. Riemannovy zeta funkce v komplexní rovině. Předtím než vyslovíme původní znění (a zasadíme jej do stávající matematické teorie), prozkoumáme chování některých objektů převážně komplexní analýzy (které s Riemannovou hypotézou souvisí) a jejich speciálních stavů.

Je zajímavé, že na funkci $\zeta(s)$ je možné nahlížet ještě z jiného úhlu - jako na konkrétní instanci obecnějšího objektu - tzv. Dirichletovy řady, jejíž definici uvádím níže:

## 4.1 Dirichletova řada

**Definice 8**(*Dirichletova řada*): Dirichletova řada $d(s)$ je definována následovně:

$$d(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \equiv \frac{a_1}{1^s} + \frac{a_2}{2^s} + \frac{a_3}{3^s} + \dots,$$

kde $a_n \in \mathbb{C}, s \in \mathbb{C}$, je komplexní proměnná.

Je zřejmé, že když $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \cdots = 1$ je zeta funkce, kterou v bodech $s$ konvergence definujeme formulí (1):

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

rovná $f(s)$ a tedy je pouze speciálním případem Dirichletovy řady.

Jinak $\zeta(s)$ byla původně studována v oboru reálných čísel. I my začneme právě takto.

## 4.2 Výsledky řady pro speciální $s$

Řada (1) má pro vybrané zvolené hodnoty $s$ následující řešení: Pro $s \in \mathbb{R}, s \leq 1$, řada diverguje, např.

$$\zeta(-1) = 1 + 2 + 3 + \cdots = \infty$$

$$\zeta(0) = 1 + 1 + 1 + \cdots = \infty$$

$$\zeta(1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots = \infty$$

Poslední řada se nazývá **harmonická**, důkaz její divergentnosti se často demonstruje již na středních školách a v prvních ročnících vysokých škol. Pro zopakování ho uvádím znovu níže:

**Věta 8**(*Divergence harmonické řady*): Harmonická řada diverguje.

*Důkaz.* Jak je naznačeno uzávorkováním - členy řady (seřazené sestupně) rozdělíme na nekonečně skupinek tak, aby každá měla konečný součet:

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)+\ldots$$

Nyní je zřejmé, že každá závorka výše $>\frac{1}{2}$ a závorek je nekonečně mnoho, proto jejich součet musí být $\infty$. □

Pro hodnoty $s>1$ zase platí, že řada (1) konverguje absolutně. Tato skutečnost okamžitě plyne z nerovnosti níže:

**Věta 9**(*Srovnání (1) s geometrickou řadou*):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}<\frac{1}{1-\frac{1}{2^{s-1}}}$$

*Důkaz.*

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}&=1+\left(\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}\right)+\left(\frac{1}{4^s}+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{6^s}+\frac{1}{7^s}\right)+\cdots<\\&<1+\left(\frac{1}{2^s}+\frac{1}{2^s}\right)+\left(\frac{1}{4^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{4^s}\right)+\cdots=\\&=1+\frac{1}{2^{s-1}}+\left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)^2+\left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)^3+\cdots=\\&=\frac{1}{1-\frac{1}{2^{s-1}}}\end{aligned}$$

□

Detailní studium řad typu (1) začal v roce 1644 Italský matematik P. Mengoli, autor knihy Novae quadraturae arithmetica, která je věnována řadám a jejich součtům. Její součástí je i tzv. Bazilejský problém, neboli hodnota $\zeta(2)$, tj. suma řady:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots$$

O jeho řešení se pokoušelo mnoho významných matematiků (např. Leibniz, Johann, Jacob a Daniel Bernoulli, Stirling a mnoho dalších). Úspěch však slavil až v roce 1734 L. Euler, který nejdříve emprpiricky[22] (a později i formálně) ukázal, že platí: $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$. Abychom Eulerův postup mohli ukázat, je třeba nejdříve prokázat platnost důsledku Taylorova rozvoje - rovnost: $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$ [23], které Euler při výpočtu užívá. Pokud zmíněná technika patří mezi zvládnuté, můžete skočit rovnou na větu 13.

**Věta 10**(*Taylorův rozvoj*): Nechť $f(x)$ je reálná, resp. komplexní nekonečně diferencovatelná[24] funkce v reálném, resp. komplexním bodě $a$ (tzn. $\forall n \in \mathbb{N} \exists f^{(n)}(a)$ tak, že $f^{(n)}(a)$ je n-tá derivace funkce $f(x)$ v bodě $a$). Potom platí:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \tag{6}$$

resp.

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots$$

*Důkaz.* Polynom na pravé straně vztahu (6) - ozn. jej $p(x)$, můžeme obyčejným přeznačením $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ psát ve tvaru:

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n.$$

Nyní budeme předpokládat, že polynom $p(x)$ může být ekvivalentním vyjádřením $f(x)$ a ukážeme, že "koeficienty" $a_n$ (jejichž tvar zatím fakticky neznáme a může být "teoreticky" jakýkoliv) musí nabývat právě tvaru: $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$.

Pokud má být $f(x) = p(x)$, musí pro libovolnou hodnotu $x$ platit, že $\forall n \in \{1, 2, 3, \dots\} : f^{(n)}(x) = p^{(n)}(x)$. (To je zřejmé, neboť kdyby existovala hodnota $x$ pro kterou by $f(x) = p(x)$, ale nerovnali se všechny derivace. Při změně hodnoty $x$ by se funkční hodnoty $f(x)$ a $p(x)$ nezměnily stejně

[22]Poznamenejme, že Euler byl znám svým fenomenálním počtářským uměním, které zde našlo uplatnění, neboť zmíněná řada konverguje velice pomalu. A proto pro zjištění dobrého odhadu součtu řady je nezbytné sečíst obrovské množství jejich členů...

[23]Platnost této rovnosti lze nahlédnout i intuicí. Využití Taylorova polynomu je však mnohem komfortnější a obecnější způsob, kterým lze pohodlně najít rozvoj libovolné jiné (nekonečně diferencovatelné) funkce.

[24]Funkce $f$ je nekonečně diferencovatelná $\overset{Def.}{\iff}$ k $f$ existuje její derivace $f'$, k $f'$ existuje její derivace $f''$ a tak "dále do nekonečna".

a lišily by se.) Nyní položíme $x = a$, tak dostaneme derivacemi $f(x), p(x)$ podmínky pro "koeficienty":

$$f(a) = p(a) = 0!a_0 \implies a_0 = f(a)$$

$$f'(a) = p'(a) = 1!a_1 \implies a_1 = f'(a)$$

$$f''(a) = p''(a) = 2!a_2 \implies a_2 = \frac{1}{2}f''(a)$$

$$f'''(a) = p'''(a) = 3!a_2 \implies a_2 = \frac{1}{3!}f''(a)$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(a) = p^{(n)}(a) = n!a_n \implies a_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)$$

Jinak - zcela intuitivně lze podstatu Taylorova polynomu nahlédnout např. takto. Uvažujme hypoteticky: Nechť je první derivace konstantní na intervalu $(a, x)$. Pak z definice derivace plyne rovnost:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a)$$

Nyní, nechť $f'(a)$ není konst., ale $f''(a)$ ano. Aby byla rovnost výše zachována, je třeba k pravé straně přičíst hodnotu, která je důsledkem růstu, resp. klesání první derivace. Tzn. přičíst výraz:

$$\frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2$$

Naznačenou úvahu o "přidávání členů" reprezentující změnu funkční hodnoty způsobené proměnlivostí nejvyšší derivace funkce $f(x)$ opakujeme donekonečna. Tak už dostáváme přímo dokazovanou rovnost.

$\square$

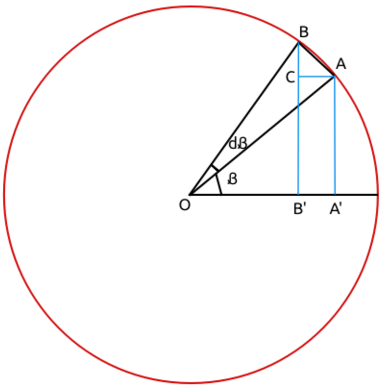
Zajímavé je, že pro $a = 0$ se řada na pravé straně rovnosti (6) často označuje jako Maclaurinova. Nyní se budeme snažit pomocí Taylorova rozvoje zapsat funkci sin. K tomu je zapotřebí její derivace (a jak se později ukáže i derivace funkce cos). Tu odvozuji níže - na jednotkové kružnici.

**Věta 11**(*Derivace sin, cos*): Platí, že:

$$\sin'(x)dx = \cos(x)$$

$$\cos'(x)dx = -\sin(x)$$

*Důkaz.* Z jednotkové kružnice níže vychází, že:




Trojúhelníky $ACB, OA'A$ jsou podobné. Dále je zřejmé, že pokud zvětšíme argument $\sin(\beta)$[25]o $d\beta$, zvětší se $\sin(\beta)$ o délku úsečky $CB$[26] (kterou dále ozn. jako $d\sin(\beta)$). Z trojúhelníku $ACB$ pro $d\sin(\beta)$ platí:

$$d\sin(\beta) = \cos(\beta)|AB|$$

Nyní pokud $d\beta$ se blíží nule (a tedy $d\beta$ "splývá" s tětivou $AB$), platí vztah:

$$d\beta = |AB|$$

Dosazením tohoto vztahu do předchozí rovnice a elementárními úpravami dostáváme:

$$\frac{d\sin(\beta)}{d\beta} = \cos(\beta)$$

Vlevo máme podíl nekonečně malé změny $\sin(\beta)$ ku změně jeho argmunetu $d\beta$. To jest přímo definice derivace funkce $\sin(\beta)$. Derivace $\cos(x)$ se provádí zcela analogicky.

Další důkazy a základní informace o funkci sin lze najít např. v učebnici Zel'doviče [19][27]

[25]Argumenty goniometrickýčh funkcí - úhly, udáváme v obloukové míře, tj. délce oblouku na jednotkové kružnici. Více o této reprezentaci úhlu např v [19].

[26]Užívám zde elementární geometrické reprezentace funkční hodnoty sin. Funkce sin je definována jako poměr délky protilehlé odvěsny ku přeponě. V trojúhelníku $OA'A$ jde o poměr $|A'A| : |OA|$, jelikož $|OA| = 1$ (je to poloměr jednotkové kružnice), je $\sin(\beta)$ právě délka úsečky $A'A$.

[27]Tato učebnice náročností příliš nepřesahuje $S$Š a může velice dobře posloužit jako příprava na studium na VŠ (hlavně pro dvouoborové programy M,F)

Jinak neformálně - intuicí, lze důkaz naznačit např. takto: Tečna v bodě $A$ určuje směr ve kterém mi bude "pokračovat kružnice" (v blízkosti $A$). Nyní tento směr rozdělím na složky - ve směru $y$-ové, resp. $x$-ové osy (na které závisí velikost $\sin(\beta)$, resp. $\cos(\beta)$). Tak opět dostanu pravoúhlý trojúhelník ze kterého plyne, že změna ve směru $y-$ové osy je vzhledem ke změně ve směru tečny (což je pro nekonečně malé změny definice $\sin'(\beta)$) v poměru $\cos(\beta) : 1 = \cos(\beta)$.

$\square$

**Věta 12**(*Taylorův rozvoj/ Maclaurinova řada* $\sin(x)$):

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

*Důkaz.* Využijeme vztahu (6). Položíme $a = 0$ a vyjádříme si derivace $\sin(x)$ za které budeme dosazovat. Platí vztahy níže:

$$\begin{aligned} \sin'(x)dx &= \cos(x), \\ \sin''(x) &= \cos'(x) = -\sin(x), \\ \sin'''(x) &= -\sin'(x) = -\cos(x), \\ \sin''''(x) &= -\cos'(x) = \sin(x) \end{aligned}$$

Z posledního řádku - tzn. rovnosti: $\sin''''(x) = \sin(x)$ dále pro každé $k \in \mathbb{N}$ vychází:

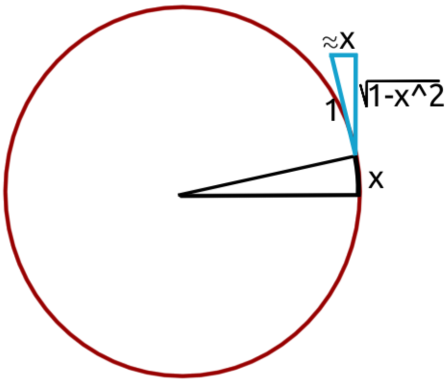
$$\begin{aligned} \sin^{(4k)} &= \sin(x) \implies \sin^{(4k)}(a) = 0 \\ \sin^{(4k+1)} &= \cos(x) \implies \sin^{(4k+1)}(a) = 1 \\ \sin^{(4k+2)} &= -\sin(x) \implies \sin^{(4k+2)}(a) = 0 \\ \sin^{(4k+3)} &= -\cos(x) \implies \sin^{(4k+3)}(a) = -1 \end{aligned}$$

Prostým dosazením do (6) dostáváme:

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin^{(n)}(0)}{n!} x^n = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$\square$

Platnost věty 12 lze však nahlédnout i inuticí, bez užití Taylorova poly-




nomu:
Nechť kružnice na obrázku výše je jednotková. Zřejmě pro malý úhel $x$ (který je dán délkou "oblouku") platí:

$$\sin(x) \approx x$$

Nyní se ptejme jak se odlišuje $\sin(x)$ od $x$ pro "větší" $x$.

Zřejmě když zvětšujeme $x$, tj. délku obloučku o "málo", prodelšuje se oblouček ve směru tečny ke kružnici. Pro $x$ blížící se nule je směr tečny shodný se směrem $y$-ové osy a tedy změna délky $x$ přesně ("jedna ku jedné") odpovídá změně $\sin(x)$. Naznačený princip však platí pouze když $x$ se blíží nule. Pro větší $x$ již tečna nemá směr $y$-ové osy a proto změna délky obloučku ve směru tečny (ozn. $\Delta_1$) již není shodná se změnou velikosti na $y$-ové ose (ozn. $\Delta_2$). Přesněji z modrého trojúhelníku (za podmínky akceptace vztahu: $\sin(x) \approx x$) vychází platnost poměru:

$$\Delta_1 : \Delta_2 = 1 : \sqrt{1 - x^2}$$

Navíc pro malá $x$ platí[28]:

$$\sqrt{1 - x^2} \approx 1 - \frac{x^2}{2}$$

A tedy když se zvětší oblouček o $\Delta x$, $\sin(x)$ se zvětší o $\frac{x^2}{2}\Delta x$ méně. Celkový rozdíl ve zvětšování $x$ a $\sin(x)$ je pak samozřejmě právě integrál: $\int_0^x \frac{x^2}{2} dx = \frac{x^3}{3!}$.
A tedy dostáváme vztah:

$$\sin(x) \approx x - \frac{x^3}{3!}$$

[28]Tuto skutečnost lze nahlédnout prostým umocněním pravé strany. Pro malá $x$ dostaneme prakticky přesně výraz pod odmocninou levé strany.

Pro nalezení přesnější aproximace, resp. úplně přesného vyjádření $\sin(x)$ jako jsme to učinili pomocí Taylorova polynomu, je třeba naznačenou úvahu formalizovat a zobecnit (zřejmě není možné "odůvodňovat" každý člen nekonečné řady zvlášť)...

"Velmi neformální nápověda" pro přidávání dalších členů: Zřejmě ve výrazu $\frac{x^2}{2}$ mělo "správně" namísto $x$ být $\sin(x)$, jehož hodnota je pro větší hodnoty menší jak $x$. Tzn. odečtením $\frac{x^3}{3!}$ v aproximaci $\sin(x)$ jsme odebrali poněkud více, než jsme "měli" a musíme "něco vrátit": $\frac{x^5}{5!}$ (to ale zase bude moc - opět z důvodu záměny $x$ za $\sin(x)$- a bude třeba něco odebrat: $\frac{x^7}{7!}$ atd.)

Neformální úvaha výše je v porovnání s Taylorovým polynomem poměrně "zamotaná", složitá a pro dokazování (v takovéto "nezobecněné a neformální podobě") neefektivní. Na druhou stranu obdobnou úvahu můžeme použít velmi univerzálně i k nahlédnutí mnohých jiných řad. Navíc si myslím, že takové úvahy nejsou ztrátou času, neboť se jimi může výrazně vylepšit "intuitivní vhled" do "skutečné podstaty".

**Věta 13**(*Bazilejský problém*): Platí, že: $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

*Důkaz.* (Eulerův) Následující důkaz trochu "padá z nebe" a je proto dobré nejdříve spíše sledovat správnost jednotlivých úprav a až nakonec se snažit hledat logiku výstavby celého důkazu, jehož hlavní myšlenkou je vyjádření stejné polynomické funkce dvojím způsobem a porovnání jejich koeficientů u $x^2$: Taylorův rozvoj funkce sin v 0 jest:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Položme nyní:

$$P(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x}, x \neq 0 \\ 1, x = 0 \end{cases}$$

Proto:

$$P(x) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots \tag{7}$$

Předchozí kroky, tj. vydělení funkce $\sin(x)$ jsme učinili proto, abychom dostali polynomickou funkci s nenulovým koeficientem u $x^2$, který jak bylo řečeno na začátku budeme srovnávat. Z vlastností funkce $\sin(x)$ dále vyplývá, že nuly funkce $P(x)$ jsou $x = \pi k, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Rozložíme $P(x)$ na součin (pomocí jeho kořenů, stejně jako u běžné polynomické funkce) Ten má tvar:

$$P(x) = \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) . \left(1 + \frac{x}{\pi}\right) . \left(1 - \frac{x}{2\pi}\right) . \left(1 + \frac{x}{2\pi}\right) . \cdots =$$

$$= \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{\pi k}\right) . \left(1 + \frac{x}{\pi k}\right)$$

Tento součin v bodě $x = 0$ koreluje s hodnotou $P(0) = 1$ a lze očekávat, že pro malá $|x|$ konverguje (např. pro $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$ tomu tak jistě je, neboť každá závorka je $\in \langle 0, 1))$. Užitím elementárního vzorce $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$ jej můžeme přepsat:

$$P(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 k^2}\right) = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) . \left(1 - \frac{x^2}{2^2 \pi^2}\right) . \ \cdots$$

Zde se již začíná osvětlovat původní "volba $\sin(x)$" pro výstavbu polynomu. Není přeci náhoda, že v závorkách výše se nám objevují ve jmenovatelích čísla: $1^2, 2^2, 3^3, \ldots,$ což jsou i jmenovatele sčítanců řady $\zeta(2)$. To je právě důsledek kořenů funkce $\sin(x)$.

Nyní, polynomy ve tvaru $ax^2, a \neq 0$ (ze kterých budu moci vytknout koeficient výsledného polynomu u $x^2$) dostávám při roznásobování jediným možným způsobem: "Násobením pravého členu jedné ze závorek jedničkou ve všech zbylých závorkách..."

Z úvahy výše plyne, že $P(x)$ lze obecně přepsat takto:

$$P(x) = 1 - \left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{2^2\pi^2} + \frac{1}{3^2\pi^2} + \ldots\right) x^2 + O(x^2),$$

kde $O(x^2)$ jsou členy vyššího řádu než $x^2$. Srovnáním této řady s (7) (konkrétně srovnáváme koeficienty u $x^2$) zjistíme, že

$$\frac{1}{3!} = \left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{2^2\pi^2} + \frac{1}{3^2\pi^2} + \ldots\right)$$

Přenásobením rovnosti výše $\pi^2$ dostáváme požadované tvrzení. □

Věta výše formuluje správné řešení Basilejského problému. Důkaz však využívá obecně neplatného předpokladu a to, že nekonečný polynom lze zapsat jako součin jednoduchých polynomů, jejichž kořeny jsou kořeny původního polynomu. Ve skutečnosti pro zcela korektní důkaz je třeba užít Weierstrassovu faktorizační větu, více např. na `https://en.wikipedia.org/wiki/`

Weierstrass_factorization_theorem

Abych zachoval tématickou návaznost informací, které prezentuji, uvedu v následující části (až po str. 43 - Eulerův součin) některé další metody výpočtu vybraných funkčních hodnot $\zeta(s)$. Užívám přitom však techniky, které nejsou vyučovány na SŠ: Bernoulliho čísla, Lambertovy a Fourierovy řady.

V roce 1750 Euler své závěry výrazně zobecnil. Našel vzorec pro výpočet funkčních hodnot zeta funkce (pro sudé argumenty). V něm se využívají právě zmíněná Bernoulliho čísla, která se "často objevují" na různých "místech" Teorie čísel. Platí následující vztahy:

$$\zeta(2n) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^{2n}} = (-1)^{n-1} \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} B_{2n}. \tag{8}$$

Zde $B_{2n}$ je $2n$-té Bernoulliho číslo; $n-$té Bernoulliho číslo je obecně definováno vztahem níže:

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n \geq 1} B_n \frac{t^n}{n!}, |t| < 2\pi$$

Pro jejich hodnoty platí:

1. $B_n = 0 \iff n \neq 1 \wedge n$ je liché.
2. $B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}$

Další hodnoty lze spočítat např. z rekurentního vzorce níže [29]

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k = 0, n \geq 2, \tag{9}$$

kde

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!},$$

tj. kombinační číslo.

**Příklad 8**(*Hodnota $B_6$*): $B_6 = \frac{1}{42}$.

*Důkaz.* Využijeme rekurentního vztahu (9) a známých vlastností (výše). Postupně spočteme hodnoty: $B_2, B_4, B_6$. Nejdříve v (9) volíme $n = 3$, aby se ve vzorci objevila $B_2$. Dostáváme:

$$1 + 3\left(-\frac{1}{2}\right) + 3B_2 = 0 \implies B_2 = \frac{1}{6}$$

[29]Rekurzivní vzorec je pouze jedním z možných způsobů...Převážně během minulého století bylo odvozeno mnoho jiných vzorců pro výpočet Bernoulliho čísla.

Dále volíme $n = 5$ (a využíváme faktu, že $B_3 = 0$):

$$1 + 5\left(-\frac{1}{2}\right) + 10\frac{1}{6} + 5B_4 = 0 \implies B_4 = -\frac{1}{30}$$

V posledním kroku volíme $n = 7$:

$$1 + 7\left(-\frac{1}{2}\right) + 21\frac{1}{6} + 35\left(-\frac{1}{30}\right) + 7B_6 = 0 \implies B_6 = \frac{1}{42}$$

□

Analogickým způsobem pak lze spočítat i další sudá Bernoulliho čísla. Některá další uvádím v tabulce níže:

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $B_n$ | 1 | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{6}$ | $-\frac{1}{30}$ | $\frac{1}{42}$ | $-\frac{1}{30}$ | $\frac{5}{66}$ | $-\frac{691}{2730}$ | $\frac{7}{6}$ | $-\frac{3167}{510}$ | $\frac{43867}{798}$ | $-\frac{174611}{330}$ |

Nyní ještě ukážeme alespoň jeden výpočet funkční hodnoty zeta funkce.

**Příklad 9**(*Výpočet funkční hodnoty zeta funkce*): $\zeta(14) = \frac{2\pi^{14}}{18243225} \approx 1.000061248$

*Důkaz.* Dosadíme do vztahu (8). Tak dostáváme:

$$\zeta(14) = -\frac{(2\pi)^{14}}{2.14!}\frac{7}{6} = \frac{114688\pi^2}{1,046139494 \times 10^{12}}$$

Po zkrácení dostáváme dokazovanou hodnotu. □

Některé další funkční hodnoty $\zeta(s)$ pro sudá $s$ uvádím již bez výpočtu v tabulce níže.

| $s =$ | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\zeta(s) \approx$ | 1.082323 | 1.017343 | 1.004077 | 1.000995 | 1.000246 |

Z ní je zcela patrné, že posloupnost funkčních hodnot $\zeta(s)$ je klesající a má za limitu (když $s \to \infty$) číslo 1. Tuto skutečnost není těžké nahlédnout - jmenovatelé zlomků sčítaných v (1) díky mocnění na argument "extrémně rychle" rostou. Tím se hodnoty zlomků zmenšují a přispívají do konečné sumy "minimálně" (s výjimkou prvního sčítance, který se nemění a kterým je právě jednotka).

Dále hodnota $\zeta(3)$ je **Apéryho konstanta**. V [15] je dokázáno, že $\zeta(3)$ je iracionální číslo[30]. Platí

$$\zeta(3) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^3} \approx 1,2020569031\ldots$$

Nyní by nás přirozeně mohly zajímat i funkční hodnoty $\zeta(s)$ pro další lichá přirozená čísla. Řešení tohoto problému je avšak ještě náročnější než v případě sudých přirozených čísel. Proto postup jen naznačíme. Vyjdeme z tvrzení níže.

**Tvrzení 7**(*Vyjádření $\zeta(s)$ pomocí Lambertových řad*): Platí, že:

$$\zeta(s) = \frac{k_2\pi^s + k_3 L^+(s) + k_4 L^-(s)}{k_1}, \tag{10}$$

kde $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{N}$ a $L^{\pm}$ je definováno takto:

$$L^{\pm}(l) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^l(e^{2\pi n} \pm 1)}$$

Pro vybraná $s$ pak koeficienty $k_1, k_2, k_3, k_4$ určuje tabulka níže:[31]

| s | k_1 | k_2 | k_3 | k_4 |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 180 | 7 | 0 | 360 |
| 5 | 1470 | 5 | 84 | 3024 |
| 7 | 56700 | 19 | 0 | 113400 |
| 9 | 18523890 | 625 | 74844 | 37122624 |
| 11 | 425675250 | 1453 | 0 | 851350500 |
| 13 | 257432175 | 89 | 62370 | 514926720 |
| 15 | 390769879500 | 13687 | 0 | 781539759000 |

**Příklad 10**(*Vyjádření $\zeta(s)$ pomocí Lambertových řad*): Vyjádřete **Apéryho konstantu** užitím vztahu (10) a tabulky výše.

Dosadíme za $k_1, k_2, k_3, k_4, s = 3$ do (10) a dostáváme:

$$\zeta(3) = \frac{7}{180}\pi^3 + \frac{360}{180}L^-(3) = \frac{7}{180}\pi^3 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3(e^{2\pi n} - 1)}$$

[30]Zajímavé je, že kromě iracionality Apéryho konstanty bylo dokázáno, že existuje dokonce nekonečně mnoho iracionálních čísel ve tvaru $\zeta(2n+1), n \in \mathbb{N}$.
[31]Jejím autorem je kanadský matematik Simon Plouffe.

Z příkladu výše by se mohlo zdát, že jsme si přepisem nijak nepomohli. Ve skutečnosti je však vyjádření $\zeta(s)$ pomocí Lambertových řad ukázkou mocné matematické "techniky řešení"- převodu vybrané úlohy na kombinaci jiných úloh jejichž řešení známe - sčítání Lambertových řad, které vystupují v zápisu patří mezi zmapované techniky.[32]

V tabulce níže opět ukazuji pár konkrétních výsledků. Z nich je opět patrné, že s rostoucími argumenty se $\zeta(s)$ poměrně rychle blíží ke své limitě - jedničce:

| $\zeta(5)$ | $\zeta(7)$ | $\zeta(9)$ | $\zeta(11)$ | $\zeta(13)$ |
|---|---|---|---|---|
| $\approx 1.036928$ | $\approx 1.008349$ | $\approx 1.002008$ | $\approx 1.000494$ | $\approx 1.000123$ |

Nyní ukáži ještě jeden další způsob výpočtu funkčních hodnot $\zeta(s)$, založený na tzv. Fourierových řadách, které však patří mezi "techniky" se kterými se lze běžně setkat až na VŠ (obecný postup výpočtu koeficientů je pak k nalezení ve slovníku komplexní analýzy). SŠ student může bez ztráty návaznosti na další informace přeskočit rovnou na další kapitolu.

Řešení zakládá na zajímavém příkladu, který demonstroval poprvé francouzský matematik Joseph Fourier: Nechť je funkce $f$ definována takto:

$$f(x) := \begin{matrix} 1, & \text{pro } 0 < x < \pi \\ -1, & \text{pro } -\pi < x < 0 \\ 0, & \text{pro } x = 0 \end{matrix}$$

Potom Fourierova řada $f(x)$ je ve tvaru[33]:

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left[\sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{5}\sin(5x) + \dots\right]$$

Neboli platí:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{f(x)}\left[\sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{5}\sin(5x) + \dots\right] \tag{11}$$

V dalších krocích budeme usilovat vhodnými úpravami a dosazeními o to, abychom na pravé straně (11) obdrželi pravou stranu rovnosti (1), nebo její část. Toho lze dosáhnout integrací...

[32] Více o Lambertových řadách k nalezení na: `https://en.wikipedia.org/wiki/Lambert_series`, nebo prakticky v jakékoliv učebnici vysokoškolské komplexní analýzy.

[33] Vyjádření vychází z dosazení do vzorců pro výpočet koeficientů Fourierovy řady. Tyto vzorce - i s odvozením - jsou k nalezení ve slovníku.

Nechť $0 < x < \pi$ (tzn. $f(x) = 1$) a integrujme (11) od 0 do $x$, dostáváme:

$$\frac{\pi}{4}x = (1 - \cos x) + \frac{1}{3^2}(1 - \cos 3x) + \frac{1}{5^2}(1 - \cos 5x) + \dots \qquad (12)$$

Nyní bychom se potřebovali "zbavit" cos, toho lze dosáhnout dosazením za $x = \frac{\pi}{2}$:

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \qquad (13)$$

Nyní už je "viditelné", že pravá strana rovnosti (13) se liší od $\zeta(2)$[34] o řadu $s = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots$, kterou však dostávám přenásobením $\zeta(2)$ číslem $\frac{1}{4}$. A proto platí:

$$\frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}\zeta(2) = \zeta(2) \implies \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

Téměř analogickým způsobem můžeme pokračovat v integrování a získat $\zeta(4)$. Nejdříve však upravíme vztah (12): dosadíme levou stranu (13) za pravou a provedeme pár ekvivalentních úprav. Takto dostáváme:

$$-\frac{\pi}{4}x + \frac{\pi^2}{8} = \cos x + \cos 3x + \cos 5x + \dots$$

Nyní integrujeme vztah výše a dostáváme:

$$-\frac{\pi}{8}x^2 + \frac{\pi^2}{8}x = \sin x + \sin 3x + \sin 5x + \dots$$

A integrujeme ještě jednou - vztah výše od 0 do $x$, dostáváme:

$$-\frac{\pi}{16}x^3 + \frac{\pi^2}{16}x^2 = (1 - \cos x) + \frac{1}{3^4}(1 - \cos 3x) + \frac{1}{5^4}(1 - \cos 5x) + \dots$$

Výše opět dosadíme za $x = \frac{\pi}{2}$ a dostaneme:

$$-\frac{\pi^4}{128} + \frac{\pi^4}{64} = 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots$$

Nyní zcela analogicky vyjádříme rozdíl řady na pravé straně rovnosti výše pomocí $\zeta(4)$. Ze vzniklého vztahu obdržíme, že:

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$$

Nakonec této podkapitoly se zmíním ještě o existenci algoritmu ruské matematičky Ekatheriny Karatsuby, který efektivně umí počítat $\zeta(s)$ pro libovolné celé číslo.[35]

[34] Pracuji zde s vyjádřením pomocí vztahu (1)

[35] Více k nalezení na jejich stránkách: `http://www.ccas.ru/karatsuba/index_e.htm`

## 4.3 Eulerův součin

Jak jsme se již zmínili, Euler studoval řadu (1) a objevil zajímavou rovnost (2). Nyní ji dokážeme.

**Věta 14**(*Věta o Eulerově součinu*[36]): Platí, že

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \in P} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

*Důkaz.* Platí, že

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots \tag{14}$$

Obě strany (14) vynásobíme $\frac{1}{2^s}$:

$$\zeta(s)\frac{1}{2^s} = \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{8^s} + \dots \tag{15}$$

Nyní od (14) odečteme (15).

$$\zeta(s)\left(1 - \frac{1}{2^s}\right) = \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{9^s} + \dots \tag{16}$$

Tímto jsme z pravé strany odstranili všechny členy, které mají ve jmenovateli mocninu čísla 2.

Podobně (16) vynásobíme $\frac{1}{3^s}$ a odečteme vzniklou rovnici od předcházející (15). Tak dostaneme:

$$\zeta(s)\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\left(1 - \frac{1}{3^s}\right) = \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{11^s} + \frac{1}{13^s} + \dots \tag{17}$$

Předchozí úpravou jsme odstranili všechny členy, které mají ve jmenovateli mocninu čísla 3.

Analogickým postupem pokračujeme dále do nekonečna. Z procesu je vidět, že postupně násobíme $\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$, kde $p$ je další prvočíslo a pravá strana konverguje k 1. Výsledkem tedy je

$$\dots\left(1 - \frac{1}{13^s}\right)\left(1 - \frac{1}{11^s}\right)\left(1 - \frac{1}{7^s}\right)\left(1 - \frac{1}{5^s}\right)\left(1 - \frac{1}{3^s}\right)\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\zeta(s) = 1$$

Nyní stačí vydělit rovnici součinem všech kulatých závorek a dostáváme požadované tvrzení. □

[36]Tato věta úzce souvisí se základní větou aritmetiky a často se proto nazývá jako *analytická forma základní věty aritmetiky.* Závislost mezi oběma větami více objasní druhý z důkazů, které uvádím níže.

Věta 14 je prvním propojením funkce zeta s prvočísly (Euler, 1737, [6]).

Jinak platnost tohoto vztahu lze nahlédnout i jinak - zcela intuitivně: Nechť $p \in \mathbb{P} = \{p_1, p_2, p_3, \dots\}$. Potom výrazem $S_p$ budeme rozumět:

$$S_p = \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1},$$

tedy součet geometrické posloupnosti s koeficientem $\frac{1}{p^s}$:

$$S_p = 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{(p^s)^2} + \frac{1}{(p^s)^3} + \dots$$

Nyní můžeme přepsat pravou stranu dokazované rovnosti:

$$\prod_{p \in P} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = S_{p_1}.S_{p_2}.S_{p_3}. \cdots =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{p_1^s} + \frac{1}{(p_1^s)^2} + \frac{1}{(p_1^s)^3} + \dots\right).\left(1 + \frac{1}{p_2^s} + \frac{1}{(p_2^s)^2} + \frac{1}{(p_2^s)^3} + \dots\right). \dots$$

Nyní roznásobíme závorky v součinu. Zřejmě každý sčítanec (výsledného roznásobení) je ve tvaru: $\frac{1}{(p_1^s)^{k_1}.(p_2^s)^{k_2}. \dots}, k_1, k_2, \dots \in \{0, 1, 2, \dots\}$, tedy "produktem" vynásobení právě jednoho sčítance z každé závorky. Dále ze základní věty aritmetiky víme, že číslo $p_1^{k_1} p_2^{k_2}. \dots$ je unikátní prvočíselný rozklad právě jednoho přirozeného čísla. A tedy každý sčítanec lze ztotožnit s nějakým členem řady na levé straně tvaru: $\frac{1}{n^s}$.

Nyní je také zřejmé (opět ze základní věty aritmetiky), že stejný sčítanec nemohu dostat při roznásobení vícekrát. A naopak každé přirozené číslo objevující se ve sčítancích řady na levé straně bude některým "produktem" roznásobení závorek na pravé straně (protože každé prvočíslo je rozložitelné na součin prvočísel - a nám se v závorkách "objevují všechna prvočísla a jejich mocniny"). Tím je rovnost dokázána.

# 5 Nuly zeta funkce a Riemannova hypotéza

Fakty o zeta funkci nalezené v předchozí kapitole nám umožňují zformulovat výsledky, které našel Riemann a jeho předchůdci.

## 5.1 Vlastnosti funkce $\zeta(s)$

Nekonečný součin na pravé straně (2) je nulový $\iff$ některý činitel je rovný nule. To ale zřejmě nemůže nastat pro žádné $s$ (kdy (2) platí $\iff$ $\Re(s) > 1$), neboť aby se činitel $\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$ rovnal nule, musela by kulatá závorka být rovna $\infty$ nebo $-\infty$ což pro žádné prvočíslo nastat nemůže neboť zřejmě platí, že $\left|\Re\left(\frac{1}{p^s}\right)\right| < 1$. Proto platí tvrzení níže.

**Tvrzení 8**(*Oblast kořenů $\zeta(s)$*): Pro každé $s \in \mathbb{C}$, pro které je $\Re(s) > 1$, platí $\zeta(s) \neq 0$.

Tvrzení výše nám zužuje oblast, kde existují nuly zeta funkce.

## 5.2 Nulové body

Nejdříve uvedu definici funkce $\Gamma$, kterou budeme dále využívat.

**Definice 9**(*Gamma funkce*): Funkci Gamma - $\Gamma$ pro komplexní čísla definujeme pomocí integrálu.

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt. \tag{18}$$

Tato definice platí pouze pro $\Re(s) > 0$.

Riemann [17] v roce 1859 dokázal tvrzení:

**Tvrzení 9**(*Vztah mezi $\Gamma$ a $\zeta$*): $\forall s \in \mathbb{C}$ platí

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s) \tag{19}$$

Z formule výše plyne symetrie pro $s$ a $1-s$ a tedy i symetrie dle přímky $\Re(s) = \frac{1}{2}$.[5]

[5] Pozor - hovoříme o symetrii funkcí na jedné ze stran rovnice, nikoliv o $\zeta(s)$!

Nyní uvedu ještě jednu významnou funkcionální rovnost (kterou též poprvé zformuloval Riemann), která elegantně umožňuje nalezení alespoň části nulových bodů $\zeta(s)$.

**Tvrzení 10**(*Vyjádření $\zeta$ pomocí* sin): $\forall s \in \mathbb{C}$ platí

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s)\zeta(1-s). \tag{20}$$

Z tvrzení výše lze snadno vyvodit alespoň některé nulové body $\zeta(s)$. V bodech $s$, pro která je $\zeta(s)$ definována zřejmě platí implikace: $\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) = 0 \implies \zeta(s) = 0$. Pročež levá strana implikace je splněna právě když $s = 2k, k \in \mathbb{Z}$ a $\zeta(s)$ není definována pro $k > 0$. (v těchto bodech má funkce $\Gamma$ singularity) Touto úvahou tedy získáváme nulové body tvaru: $s = 2k, k \in \mathbb{Z}^-$. Dále je budeme označovat jako tzv. *Triviální nulové body.*

## 5.3 Riemannova hypotéza

V 4.1 a 4.2 jsme ukázali, že pro $\Re(s) > 1$ neexistují žádné nulové body a našli jsme všechny nulové body v polorovině $\Re(s) < 0$. Zůstala neprobádaná oblast $0 \leq \Re(s) \leq 1$, která se nazývá *kritický pás*.

Hledání kořenů $\zeta(s)$ v kritickém pásu - tzv. *netriviálních nulových bodů* je jedním z hlavních cílů dnešní analytické teorie čísel. Riemann se problematiku pokoušel objasnit pomocí tzv. *xí funkce* $\xi(s)$ definované následovně

$$\xi(s) = \frac{s}{2}(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) \tag{21}$$

Funkce *xi* zřejmě nemá žádné singularity a je proto celistvá na $\mathbb{C}$. Dále pro ni platí

**Věta 15**(*symetrie $\xi$*): $\forall s \in \mathbb{C}$ platí:

$$\xi(s) = \xi(1-s).$$

*Důkaz.* Nejdříve si vyjádříme obě strany dokazované rovnosti pomocí (21).

$$\frac{s}{2}(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \frac{1-s}{2}(-s)\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s)$$

Nyní je zřejmé, že je třeba vyjádřit jinak - dosadit za $\zeta(s)$. [6] K tomu lze užít vztahu (19), jehož levá strana je dokonce celá obsažena v levé straně rovnosti

[6] Nebo lze samozřejmě dosadit za $\zeta(1-s)$.

výše. Proto se do rovnice výše nejvíce oplatí dosadit za celou levou stranu (19), celou pravou stranu (19):

$$\frac{s}{2}(s-1)\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s) = \frac{1-s}{2}(-s)\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s)$$

Elementárními úpravami dostáváme dokazované tvrzení. $\square$

Z věty 15 tedy plyne, že funkce $\xi(s)$ je symetrická dle přímky $\Re(s) = \frac{1}{2}$. Z této symetrie, Eulerova součinu, tvrzení 8 a vlastností $\Gamma$ plyne tvrzení níže.

**Tvrzení 11**(*Kořeny* $\xi$): $\xi$ může mít nulové body pouze v kritickém pásu $0 \leq \Re(s) \leq 1$. A tyto nulové body korespondují s *netriviálními nulovými body* $\zeta(s)$.[7]

Závěrem shrňme základní vlastnosti $\zeta(s)$ a $\xi(s)$ do tvrzení níže (u vlastností které ještě nebyly zmíněny, příp. dokázány, alespoň naznačíme "odkud" vychází jejich důkaz)

**Tvrzení 12**(*základní vlastnosti* $\zeta(s)$ *a* $\xi(s)$): Platí, že:

1. $\zeta(s)$ má (tzv. *triviální*) nulové body v $s = 2k, k \in \mathbb{Z}^-$.
2. $\zeta(s)$ má pól v bodě $s = 1$ s reziduem rovným 1.
3. $\zeta(\overline{s}) = \overline{\zeta(s)}$. (Toto tvrzení vychází z vlastností konjugovaných čísel)
4. Netriviální nulové body $\zeta(s)$ leží v kritickém pásu, tzn. oblasti $0 \leq \Re(s) \leq 1$ a jsou souměrné dle přímky $\Re(s) = \frac{1}{2}$ (To plyne ze souměrnosti funkce $\xi(s)$) a přímky $\Im(s) = 0$ (To vychází z bodu 3. tohoto tvrzení).
5. Pro všechny nulové body $\zeta(s)$ platí, že $\Re(s) \leq 1$
6. Nulové body $\xi(s)$ jsou ekvivalentní s *netriviálními nulovými body* $\zeta(s)$. (tuto vlastnost dokázal Riemann v práci [17])

[7] Je zřejmé, že pro $s \neq 1$ můžou způsobit nulovost $\xi(s)$ pouze funkce $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ a $\zeta(s)$. Důkaz tvrzení 11 proto spočívá v tom, že ukážeme, že když $\zeta(s)$ a $s$ neleží v kritickém pásu, potom $\left|\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\right| = \infty$ a součin $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) \neq 0$.

# 6 Riemannova hypotéza

Na závěr se dostáváme k hlavnímu předmětu této bakalářské práce: *Riemannově hypotéze*, která implikuje mnohé významné závěry hlavně v teorii čísel: Jedním z nich, (jak bylo uvedeno v kapitole 3) je vztah mezi aproximací pomocí $Li(x)$ a skutečným počtem prvočísel menších než $x$. Další z těch "hmatatelných" implikací je možnost ověření zda číslo je prvočíslem, a to v polynomickém čase[37] např. v rámci Miller- Rabínova testu (který patří mezi nejefektivnější algoritmy pro ověřování. Jeho časová náročnost však bez potvrzení Riemannovy hypotézy není zaručena)

A proč je ověřování prvočíselnosti tak významné téma? Jedním z mnoha důvodů je, že pomocí velkých prvočísel se zabezpečují např. finanční operace, obecně přenos důležitých informací a tedy schopnost jednoduchého rozlišení prvočísla by tyto metody ochrany zcela znehodnotila.

Pro více informací o časových náročnostech a použití prvočísel v zabezpečování doporučuji např. studijní materiály a přednášky ČVUT.

## 6.1 Riemannova hypotéza

Do roku 1837, kdy Dirichlet publikoval článek [5] (ve kterém dokázal, že v každé neohraničené aritmetické posloupnosti, v níž jsou první člen i diference vždy celá čísla bez společného dělitele, se nachází nekonečně mnoho prvočísel), se považovaly aritmetika a matematická analýza za dvě oddělené oblasti matematiky. Až právě tímto článkem Dirichlet položil základy tzv. *analytické teorie čísel* - tj. teorie formulující spojení mezi aritmetikou a matematickou analýzou, kterou později rozvinul i Riemann.

Současná *analytická teorie čísel* se opírá o Riemannův článek [17] z roku 1859 *"O počtu prvočísel menších jako zadaná hodnota"*. Ve své době to byl jediný známý článek v tomto začínajícím odvětví matematiky a jak již bylo

[37] Polynomický čas je termín užívaný převážně v informatice v souvislosti s časovou náročností algoritmu. Vyjadřuje, že existuje nějaký polynom proměnné $n$ stupně $k, k > 1$, (kde $k$ je konstanta a $n$ je proměnná reflektující "velikost" instance, tzn. případu, který řešíme), jehož hodnota představuje nejvyšší možnou časovou náročnost. Důležité je si uvědomit, že $n$ je pouze proměnná závisející na velikosti instance (pokud se instance zvětšuje, $n$ také). A tedy např. v našem případě není $n$ velikost čísla, o kterém rozhodujeme zda je prvočíslem. To je ale zřejmé, neboť "nejhorší" způsob jak ověřit číslo o velikosti $n$ je vyzkoušet dělení menšími přirozenými čísly. Tento způsob by však při špatném vyložení pojmu polynomické náročnosti byl stále lepší než Miller-Rabínův test.

zmíněno - je dodnes aktuální.

V rámci [17] se Riemannovi podařilo objasnit a zformulovat několik souvislostí, zejména mezi funkcemi $\zeta, \Gamma, \pi$ (které byly představeny v předchozím textu) a také prvočíslové funkci $R(x)$ a Möbiovy funkce $\mu(x)$, o kterých se ještě zmíníme. Některé souvislosti mezi zmíněnými funkcemi již v práci byly zmíněny dříve. Uvedeme je nyní (alespoň bodově) znovu, aby bylo zřejmé vymezení obsahu Riemannovy práce [17]. Její součástí mimo jiné je:

1. definice Riemannovy *xí* funkce $\xi(s)$ a její souvislost s nulovými body $\zeta(s)$,
2. definice Riemannovy zeta funkce $\zeta(s)$ pro komplexní proměnnou,
3. dvě funkcionální rovnice pro $\zeta(s)$,
4. analytické pokračování $\zeta(s)$ na $\mathbb{C} \setminus \{1\}$,
5. definice Riemannovy prvočíslové funkce $R(x)$ pomocí funkce $\pi(x)$ a Möbiovy funkce $\mu(x)$,
6. vzorec pro výpočet počtu prvočísel menších jako daná hodnota pomocí funkce $R(x)$ a její vazba s netriviálními nulovými body $\zeta(s)$.

Nyní zformulujeme Riemannovu hypotézu o nulách zeta funkce.

**Riemannova hypotéza:**

*Všechny netriviální nulové body zeta funkce mají reálnou část rovnu* $\frac{1}{2}$.

Hypotéza tedy předpokládá, že každý netriviální nulový bod bude ve tvaru: $s = \frac{1}{2} + it, t \in \mathbb{R}$, kde $i$ je imaginární jednotka.

Ekvivalentním (a původním) vyjádřením hypotézy, které formuloval Riemann jest: *Všechny kořeny funkce $\xi$ jsou reálné.*

Zajímavé také je, že sám Riemann tuto část své matematické tvorby nepovažoval za důležitou [38], o čemž ostatně svědčí citace a komentáře z jeho

[38] V době kdy Riemann hypotézu zformuloval ještě neexistovaly mnohé dokázané implikace její platnosti - zřejmě i proto Riemann podání jejího důkazu nepovažoval za příliš podstatné.

vlastní práce [17].

*"... je velmi pravděpodobné, že všechny kořeny této funkce jsou reálné. Samozřejmě si to vyžaduje rigorózní důkaz. Nyní jsem jeho hledání odložil stranou po několika neúspěšných pokusech, protože není klíčové pro můj další výzkum."*

*Bernhard Riemann, 1859.*

## 6.2 Hardyho věta

Určitý vhled do problematiky hledání netriviálních nulových bodů $\zeta(s)$ podává *Hardyho věta*, kterou H.Hardy publikoval ve svém článku [9] v roce 1914.

**Tvrzení 13**(*Hardyho věta*): Nekonečně mnoho netriviálních nulových bodů $\zeta(s)$ splňuje Riemannovu hypotézu, tzn. mají reálnou část rovnu $\frac{1}{2}$.[39]

## 6.3 Riemannova hypotéza a prvočísla

Klíčový význam Riemannovy hypotézy spočívá v jejím propojení s prvočíslovou větou níže.

**Tvrzení 14**(*Prvočíselná věta - Dirichlet*): Nechť $\pi(x)$ je počet prvočísel menších, nebo rovných $x$ a $Li(x)$ odpovídá definici na str. 23. Pak platí

$$\pi(x) \sim Li(x).$$

V roce 1901 Koch v [10] dokázal následující větu.

**Tvrzení 15**(*"Zpřesnění prvočíselné věty"- Koch*): Z pravdivosti Riemannovy hypotézy plyne platnost rovnosti

$$\pi(x) = Li(x) + O(\sqrt{x}\ln(x)). \tag{22}$$

Nyní kdybychom substituovali $x^\epsilon$ za $\ln(x)$, mohli bychom (22) přepsat jako

$$\pi(x) = Li(x) + O(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}), \tag{23}$$

pro libovolně malé číslo $\epsilon$.

Platí, že z (22) $\implies$ (23). Opačné tvrzení avšak obecně neplatí.

[39] Takovým je např. bod blízký hodnotě $s = \frac{1}{2} + 14,134725142i$

## 6.4 Riemannova funkce $R(s)$ a Möbiova funkce $\mu(s)$

Riemann v práci [17] v roce 1859 definoval novou funkci $R(x)$, která se nazývá *Riemannova prvočíselná funkce.*[40] Zmíněná funkce se definuje řadou

$$R(x) = \pi(x) + \frac{1}{2}\pi(\sqrt{x}) + \frac{1}{3}\pi(\sqrt[3]{x}) + \frac{1}{4}\pi(\sqrt[4]{x}) + \ldots, x \in \mathbb{R} \tag{24}$$

Z povahy funkce $\pi(x)$ plyne následující věta.

**Věta 16**(*Konečnost Riemannovy prvočíselné funkce*): Řada (24) je konečná.

*Důkaz.* Protože $\sqrt[n]{x} \to 1$, pak pro dostatečně velká $n$ je $\sqrt[n]{x} < 2$ a pro takové hodnoty je funkce $\pi$ nulová. □

Funkce $R(x)$ je - jak $\pi(x)$- stupňovitá. To lze snadno nahlédnout, neboť platí, že když $x$ je prvočíslo, pak se funkční hodnota zvýší o 1. Když $x$ je čtverec nějakého prvočísla, pak se hodnota zvýší o $\frac{1}{2}$ (protože se $\pi(\sqrt{x})$ zvýší o 1) atd. Podobně, když $x$ je $n$-tá mocnina prvočísla, pak se $R(x)$ zvýší o $\frac{1}{n}$.

Formuli (24) lze invertovat, jak dokážeme ve větě níže.

**Věta 17**(*Vyjádření $\pi(x)$ pomocí $R(x)$*): Platí

$$\pi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} R(\sqrt[n]{x}) = \tag{25}$$

$$= R(x) - \frac{1}{2}R(\sqrt{x}) - \frac{1}{3}(\sqrt[3]{x}) - \frac{1}{5}(\sqrt[5]{x}) + \frac{1}{6}(\sqrt[6]{x}) - \frac{1}{7}(\sqrt[7]{x}) + \frac{1}{10}(\sqrt[10]{x}) - \ldots,$$

kdy funkce $\mu(s)$ je Möbiova funkce definována takto:

$$\mu(n) := \begin{cases} 0, & \text{pro n obsahující v prvočíselném rozkladu druhou mocninu prvočísla} \\ 1, & \text{pro n, které je součinem sudého počtu vzájemně různých prvočísel} \\ -1, & \text{pro n, které je součinem lichého počtu vzájemně různých prvočísel} \end{cases}$$

*Důkaz.* Náznak. Myšlenkou důkazu je vyjádření rozdílu $\pi(x)$ a $R(x)$ pomocí $R(x)$. Platí, že:

$$R(x) - \pi(x) = \frac{1}{2}\pi(\sqrt{x}) + \frac{1}{3}\pi(\sqrt[3]{x}) + \frac{1}{4}\pi(\sqrt[4]{x}) + \frac{1}{5}\pi(\sqrt[5]{x}) + \ldots$$

[40] V původní práci [17] je označena $f$, což je nyní značení obecné funkce, proto se namísto toho používá $R(x)$.

Je ihned viditelné, že členy na pravé straně rovnosti výše jsou první členy vyjádření $\frac{1}{2}R(\sqrt{x}), \frac{1}{3}R(\sqrt[3]{x}), \frac{1}{4}R(\sqrt[4]{x}), \ldots$ - dle (24)

Kdybychom od $R(x)$ odečetli $\frac{1}{2}R(\sqrt{x}), \frac{1}{3}R(\sqrt[3]{x}), \frac{1}{4}R(\sqrt[4]{x}), \ldots$ "odebrali" bychom však "více", než "potřebujeme". Platí totiž např. že $\frac{1}{2}R(\sqrt{x})$ obsahuje ve svém rozepsání $\frac{1}{4}\pi(\sqrt[4]{x})$ tj. první člen $\frac{1}{4}R(\sqrt[4]{x})$. A tedy kdybychom odečítali jak $\frac{1}{2}R(\sqrt{x})$, tak i $\frac{1}{4}R(\sqrt[4]{x})$, odečetli bychom $\frac{1}{4}\pi(\sqrt[4]{x})$ hned 2x.

Ze zobecnění tohoto vhledu se dostáváme k odůvodnění podmínky nulové funkční hodnoty $\mu(n)$. Je zřejmé, že pokud platí: $n = p^k.a, a \in \mathbb{N}, k \in \{2, 3, \ldots\}$, je výraz $\frac{1}{n}\pi(\sqrt[n]{x})$ součástí vyjádření $\frac{1}{p}R(\sqrt[p]{x})$ a tedy $\frac{1}{n}R(\sqrt[n]{x})$ už nepotřebujeme odečítat ani přičítat, proto $\mu(n) = 0$ když $n$ v prvočíselném rozkladu obsahuje druhou (nebo samozřejmě i větší) mocninu prvočísla.

Zbývá vysvětlit "střídavé přičítání a odečítání" způsobené nabýváním funkční hodnoty $\mu(n) = 1$, resp. $\mu(n) = -1$:

Označme termínem sudá, resp. lichá řada: $\frac{1}{r_1}R(\sqrt[r_1]{x})$, resp. $\frac{1}{r_2}R(\sqrt[r_2]{x})$, kde $r_1$, resp. $r_2$ lze zapsat jako součin lichého, resp. sudého počtu různých prvočísel. Nyní víme, že každé číslo $n$ lze jednoznačně zapsat jako součin prvočísel $p_1, p_2, \ldots, p_k, k \in \mathbb{N}$[41]. Ptejme se - kolik sudých a lichých řad obsahují tentýž člen $\frac{1}{n}\pi(\sqrt[n]{x})$? A jaký je rozdíl jejich celkového výskytu v sudých řadách a lichých řadách ?

Odpověď na tuto otázku naznačím na konkrétním příkladu: Nechť člen $A$ (jehož výskyty budeme počítat) je ve tvaru:

$$A = \frac{1}{n}\pi(\sqrt[n]{x}),$$

kde $n = p_1p_2p_3p_4p_5$.

Nyní označme $P_L$, resp. $P_S$ počet všech výskytů $A$ ve všech lichých, resp. sudých řadách. Zřejmě platí že $A$ je součástí liché řady $L_5 = \frac{1}{n}R(\sqrt[n]{x})$ (tvoří její první člen) a každé další liché řady tvaru: $L_1 = \frac{1}{n_1}R(\sqrt[n_1]{x})$, resp. $L_3 = \frac{1}{n_3}R(\sqrt[n_3]{x})$, kde $n_1$, resp. $n_3$ je jedno vybrané prvočíslo, resp. součin právě tří prvočísel z rozkladu $n$. Nyní zřejmě řada tvaru $L_1$, resp. $L_3$ je $\binom{5}{1}$, resp. $\binom{5}{3}$ (vybíráme jedno, resp. tři prvočísla z pěti) a řada $L_5$ je jediná (tj. je jich $\binom{5}{5}$)

[41]To nám říká základní věta aritmetiky

Proto platí:

$$P_L = \binom{5}{1} + \binom{5}{3} + \binom{5}{5}$$

Zcela analogicky bychom dospěli k závěru, že platí:

$$P_S = \binom{5}{2} + \binom{5}{4}$$

Nyní užijeme základního vztahu pro kombinační čísla:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Dostáváme:

$$P_L = P_S + 1$$

Z rovnosti výše plyne, že budeme-li odčítat liché řady a přičítat sudé dostaneme: $-A$ (a samozřejmě nějaké další členy), to jest však přesně počet $A$, které musíme odečíst od $R(x)$, abychom se dostali na $\pi(x)$. Zobecněním této úvahy lze odůvodnit přítomnost funkce $\mu$ ve vzorci a v konečném důsledku platnost celé rovnosti. $\square$

V následujících dvou kapitolách představuji (velice stručně a bez hlubšího vysvětlení) základní objekty a vztahy, které úzce souvisí s Riemannovou hypotézou a v souvislosti s jejím studiem se objevují v literatuře. Použité techniky výrazně přesahují rámec znalostí, které lze získat na SŠ. I student VŠ (stejně jako já) může následující shledat za obtížné.

V kapitole 8 uvádím možnost rozšíření $\zeta(s)$. V kapitole 7 podávám základní přehled pojmů komplexní analýzy, kterým prakticky není vyhnutí při dalším studiu odborné literatury na toto téma.

# 7 "Slovník" základních pojmů komplexní analýzy

Ať už přistupujeme k Riemannově hypotéze prakticky z jakéhokoliv "směru", její studium zpravidla zakládá na kombinaci matematických vztahů (často vrcholných a nedořešených) a také četného množství pojmů převážně komplexní analýzy. V této kapitole proto uvádím přehled některých základních definic a poznatků. Ne všechny se vyskytují v této práci, pro jakékoliv další studium se však jedná o absolutní minimum nezbytné k pochopení myšlenek obsažených v literatuře.[42] Poznatky dělím do čtyř podkapitol - první dvě sdružují poznatky dle náročnosti (SŠ vs VŠ), druhé dvě dle temat (analytické funkce a jejich rozšíření vs Fourierovy řady).

Nejdříve však lehce odbočím a zopakuji definici "obecné" mocniny.

**Definice 10**( *"Obecná" mocnina*): Nechť $z$ je základ mocniny a $n$ exponent. Pokud neřeknu jinak $z \in \mathbb{R}$.

1. $n \in \mathbb{N}$, potom definujeme mocnění jako opakované násobení - rekurentně:
$$z^1 = z,$$
$$z^{n+1} = z^n.z$$
2. $n \in \mathbb{Z}, z \neq 0$. Tento případ je fakticky už zavedený v bodě 1., stačí přidání podmínky $z \neq 0$. Zřejmě totiž pomocí druhé rovnosti v bodě 1., ze které vyjádříme $z^n$
$$z^n = \frac{z^{n+1}}{z},$$
jsme schopni vyjádřit každou celočíselnou mocninu. Někdy se alternativně pro zavedení používá známých vztahů:
$$z^0 = 1,$$
$$z^{-n} = \frac{1}{z^n}.$$
3. $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$. Mocnění na zlomek $\frac{p}{q}$ definujeme pomocí odmocniny:
$$z^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{z^p}$$

[42]Podrobněji bývají následující informace popsány v materiálech určených ke studiu vysokošloských předmětů typicky označovaných jako matematická analýza/komplexní analýza. Hezké zpracování vybraných pojmů avšak nabízí i gymnaziální učebnice z řady Prometheus.

4. $n \in \mathbb{R}$[43]

$$z^n = \lim_{r \to n, r \in \mathbb{Q}} z^r$$

Nyní zbývá definovat mocninu o komplexním základu nebo exponentu.[44].

5. $z \in \mathbb{C}, z = r[\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)], \alpha \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{R}$:

$$z^n := (r[\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)])^n = (re^{i\alpha})^n = r^n e^{i\alpha n} = r^n[\cos(n\alpha)+i\sin(n\alpha)]$$

6. $z, n \in \mathbb{C}, z = r[\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)], \alpha \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}^+$:

$$z^n = e^{n(i\alpha + \ln(r))}$$

**Příklad 11**(*Obecná mocnina*):

1. Aproximujte $2^\pi, 3^\pi$ nahrazením $\pi$ racionálními čísly.
2. Vypočtěte:
   (a) $2^i$
   (b) $3^{-i}$
   (c) $4^{2-3i}$

ŘEŠENÍ:

1. Aproximace:

| Aproximace π | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Desetinné číslo | Zlomek | Aproximace $2^\pi$ | Diference | Aproximace $3^\pi$ | Diference |
| 3.1 | 31/10 | 8.57418770029035 | 0.250790 | 30.13532569892 | 1.408955 |
| 3.14 | 314/100 | 8.81524092701289 | 0.009737 | 31.48913565246 | 0.055145 |
| 3.142 | 3142/1000 | 8.82746992033567 | -0.002492 | 31.55840042249 | -0.014120 |
| 3.1416 | 31416/10000 | 8.82502276524438 | -0.000045 | 31.54453529059 | -0.000255 |
| 3.14159 | 314159/100000 | 8.8249615950599 | 0.000016 | 31.54418874035 | 0.000092 |
| 3.141593 | 3141593/1000000 | 8.82497994607072 | -0.000002 | 31.54429270502 | -0.000012 |

Z tabulky výše, kde jsou za exponent vybrána některá zaokrouhlení $\pi$ intuitivně plyne trend, že při blížení exponentu hodnotě $\pi$ (která v tabulce též vystupuje jen jako zaokrouhlení, avšak řádově přesnější) se

[43]Definice mocnění na reálný exponent se často na SŠ opomíjí. Fakticky je ale nezbytnou prerekvizitou k tomu, abychom mohli kreslit grafy exponenciálních funkcí jako "souvislé křivky", tj. bez vynechání obrazů pro iracionální vzory, o jejichž hodnotách bez takové definice nemůžeme nijak rozhodnout.

[44]K tomu užívám samozřejmě definici komplexního čísla (Definice 11), polárního vyjádření (Tvrzení 16), Eulerova vztahu (Věta 18), vše lze v případě neznalosti najít níže.

blíží i hodnota celé mocniny k $2^\pi$, resp. $3^\pi$.[45]

Je dobré si však uvědomit, že tento trend obecně neplyne ihned z definice (a samozřejmě už vůbec ne z pár členů posloupnosti racionálních čísel aproximujících $\pi$). Hodnota aproximace by se klidně mohla přibližovat ke skutečné hodnotě jakkoliv jinak: např. tak, že při blížení hodnoty exponentu (k $\pi$) střídavě odchylka nejdříve stoupá, pak klesá. Tyto "výkyvy" by se například mohly donekonečna opakovat, jen s tím, že pro exponent "nekonečně blízko" $\pi$ už by byly "nekonečně" malé, aby bylo vyhověno definici pomocí limity...

2. K řešení použijeme definici 10:

   (a) Jelikož $z = 2 \in \mathbb{R}$, je $\alpha = 0$ a vztah v bodě 6. lze obecně zjednodušit:
   $$z^n = e^{n\ln(z)}$$
   Dosadíme za $n = i$ a $z = 2$, dostáváme:
   $$2^i = e^{i\ln(2)} = \cos(\ln(2)) + i\sin(\ln(2))$$
   Z odvození "zjednodušeného" vzorce plyne důležitá geometrická reprezentace: Když reálné číslo umocňujeme na $k-$násobek imaginární jednotky, reprezentace výsledné hodnoty (v kartézské soustavě souřadnic) vždy leží na jednotkové kružnici a $k\ln(z)$ je velikost úhlu, který svírá spojnice bodu a počátku s osou $x$.

   (b) Z geometrické reprezentace odvozené v případě (a) plyne, že:
   $$7^{-3i} = \cos(-3\ln(7)) + i\sin(-3\ln(7)) = \cos(3\ln(7)) - i\sin(3\ln(7))$$

   (c) Zřejmě platí:
   $$4^{2-3i} = 4^2.4^{-3i} = 4^2[(\cos(-3\ln(4)) + \sin(-3\ln(4))]$$
   Z hlediska geomtrického se mění pouze to, že reprezentant výsledku - bod, leží na kružnici (se středem v počátku) o poloměru $z^{Re(n)}$, kde $Re(n)$ je reálná část $n$. Určení úhlu se nemění.

[45] Pomineme-li vliv zaokrouhlení, které občas "dočasně" diferenci zvýší.

## 7.1 Pojmy prezentované na SŠ

Zde uvedu přehled pojmů, které se alespoň okrajově zmiňují na středních školách.

**Definice 11**(*Komplexní číslo*): Řekneme, že z je komplexní číslo $\iff$ lze z zapsat jako: $z = a + bi$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ a $i$ je komplexní jednotka.

Je asi patrné, že každému komplexnímu číslu lze jednoznačně přiřadit bod v rovině - prostoru $\mathbb{R}^2$. To občas může být poměrně výhodné - pro zjednodušení představ a zápisu komplexních čísel a operaci s nimi., např. na komplexní číslo: $z_1 = 5 + 3i$ se tedy někdy odvolává jako na bod: $[5, 3]$ (a říká se, že $z_1$ přísluší bod [5,3].), obecně $z = a + bi$ lze zaměňovat za bod: $[a, b]$.

Nyní když komplexní číslo mohu reprezentovat jako bod v $\mathbb{R}^2$ mohu zobecnit ekvivalentní způsoby zápisu bodu (např. pomocí polárních souřadnic) v rovině na komplexní čísla. To formalizuji níže.

**Tvrzení 16**(*Polární vyjádření komplexního čísla*): Nechť $z \in \mathbb{C}$ přísluší bod $[a, b]$. Potom $z$ přísluší také bod $[r \cos \theta, r \sin \theta]$, kde $r$ je délka vektoru $(a, b)$ a $\theta = \arctan \frac{b}{a}$

Arctangent je inverzní funkcní k tangentu, ale pouze na intervalu $I = \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$. Jinými slovy jinou funkční hodnotu, než tu obsaženou v $I$ funkce arctangent nevrátí jako obraz. Proto "polární" vyjáření v $T_1$ řeší pouze komplexní čísla $a \geq 0$. Tento nedostatek - poněkud náročně- odstraníme níže pomocí Eulerova čísla, jehož definici nejdříve zopakuji.

**Definice 12**(*Eulerovo číslo*): Nechť Eulerovo číslo označíme $e$. Potom platí:

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2.71828182$$

Eulerovo číslo lze vyjádřit i jiné podobě. Tu budeme používat častěji a proto ji též uvedu.

**Tvrzení 17**(*Ekvivalentní vyjádření e*): Platí:

$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots$$

**Tvrzení 18**(*Zápis pomocí Eulerova čísla:*): Nechť $z = a + bi$ a $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (norma komplexního čísla). Potom $z = |z|.e^{i\theta}$, kde $\theta = \frac{1}{i} \ln(\frac{z}{|z|})$.

Platnost vztahu výše lze nahlédnout i jinak - než-li dosazením za $\theta$, lze užít tzv. Eulerova vztahu: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, který lze dokázat např. z definice Eulerova čísla, ze vztahu mocnění Eulerova čísla a z Taylorových rozvojů funkcí $\sin, \cos$. Důkaz naznačím níže.

**Věta 18**(*Eulerův vztah*): $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

*Důkaz.* Náznak: Předpokládejme platnost (vztah mocnění Eulerova čísla):

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

,kde $z \in \mathbb{C}$. Potom však platí:

$$e^{i\theta} = 1 + \frac{i\theta}{1!} + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} \dots$$

Užitím jednoduchého důsledku definice komplexní jednotky $((1+4k)i = i, (2+4k)i = -1, (3+4k)i = -i, (4k)i = 1$, kde $k \in \mathbb{N})$ si mohu rozdělit sčítance na členy, které jsou násobkem $i$ a které nikoliv. Neboli:

$$e^{i\theta} = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \frac{\theta^8}{8!} + \dots + \frac{i\theta}{1!} - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{i\theta^5}{5!} - \frac{i\theta^7}{7!} + \dots$$

Z tohoto tvaru už je okamžitě vidět, že "levá část"je Taylorův rozvoj $\sin\theta$ a "pravá" $i\cos\theta$.

□

**Definice 13**(*Komplexní funkce*): Řekneme, že f je komplexní funkce $\iff$ definiční obor a obor hodnot f jsou neprázdné množiny, obsahující koplexní čísla.

## 7.2 Pojmy prezentované na VŠ

**Tvrzení 19**(*"Rozložitelnost" komplexní funkce na 2 reálné*): Obraz komplexního vzoru: $z = a + bi$ každé komplexní funkce můžeme spočíst pomocí dvou reálných funkcí: $f(a+bi) = f_1(a,b) + if_2(a,b)$, kde $f_1, f_2$ zobrazují z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}$.

**Definice 14**(*Holomorfická funkce*): Řekneme, že funkce $f$ je holomorfická $\iff$ $f$ je komplexní funkce jedné či více proměnných, která komplexně diferencovatelná v nějakém okolí každého bodu definičního oboru $f$.

Definice výše používá pojem: komplexně diferencovatelná funkce, který proto dodefinovávám níže.

**Definice 15**(*Komplexní diferenciace*): Řekneme, že komplexní funkce $f$ je komplexně diferencovatelná v bodě $a \in \mathbb{C} \iff$

$$\exists f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Nyní uvedu poměrně zajímavé tvrzení (bez důkazu) vypovídající o základní vlastnosti holomorfických funkcích.

**Tvrzení 20**(*Nekonečná diferencovatelnost*): Každá holomorfická funkce je nekonečně diferecovatelná.

**Definice 16**(*Analytická funkce*): Nechť $D$ je definiční obor funkce $f$. Pak řekneme, že funkce $f$ je analytická $\iff \forall x \in D$ : existuje okolí $O$ bodu x takové, že funkce $f(z)$ (kde $z \in O$) může být zapsána jako konvergetní mocninná řada, tj. funkce ve tvaru:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-x)^n$$

Někdy budeme hovořit o funkci analytické v bodě B - funkci, která je definovaná na nějakém okolí B, na kterém je zároveň analytická.

**Tvrzení 21**(*Alternativní definice analytické funkce*): Funkce je analytická $\iff$ když je v každém bodě definičního oboru nekonečně diferencovatelná $\iff$ když ji v nějakém okolí každého bodu lze vyjádřit pomocí Taylorova rozvoje (neboli Taylorův rozvoj na příslušném okolí konverguje k funkci bodově.)

**Definice 17**(*Bodová konvergence*): Nechť $(f_n)$ je posloupnost funkcí mající stejný definiční obor (ozn. D) a obor hodnot. Potom řekneme, že $(f_n)$ bodově konverguje k $f \iff$ platí:

$$\forall x \in D : \lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$$

**Tvrzení 22**(*Alternativní definice holomorfické funkce*): Funkce je holomorfická $\iff$ je analytická a je komplexní proměnné.

Je vidět, že analytická a holomorfní funkce jsou v "běžném slova smyslu" téměř stejné pojmy - u holomorfní funkce požadujeme navíc pouze, aby proměnné (argumenty funkce) byly komplexní. V běžné literatuře se tyto dva pojmy dokonce zaměňují (pokud nemůže dojít z kontextu k nedorozumnění)

**Definice 18**(*Poloměr konvergence*): Nechť $f$ je funkce ve tvaru mocninné řady. Potom jejím poloměrem konvergence je největší z čísel $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots,$ kde tyto čísla reprezentují velikosti okolí libovolných bodů, na kterých je $f$ konvergentní.

**Definice 19**(*Singularita*): Řekneme, že funkce f má v bodě a singularitu $\iff$ f není v bodě a diferencovatelná, anebo není analytická.

**Definice 20**(*Pól*): Funkce $f$ má v bodě $z$ pól $n$-tého řádu $\overset{def}{\iff}$ $\lim_{x \to z} f(x) = \infty \wedge \lim_{x \to z} (x-z)^n f(x) \neq \infty$

V dalších pojmech komplexní analýzy jsou vysloveny vlastnosti množin: otevřenost a souvislost. Jejich definice opakuji níže.

**Definice 21**(*Otevřenost*): Řekneme, že $M$ je otevřená množina (topologického či metrického prostoru) $\overset{def}{\iff}$ $\forall m \in M$ platí, že nějaké okolí $m$ je také součástí $M$.

Definice výše může chybně svádět k závěru, že pokud je $M$ otevřená množina musí vždy obsahovat všechny prvky daného prostoru. (Neboli když k nějakému prvku $m$ je v $M$ obsaženo nějaké okolí $m$ a k prvkům tohoto okolí jsou v $M$ obsažena zase jejich okolí, zdá se, že $M$ nevyhnutelně musí obsáhnout celý prostor) Toto však není obecně pravda. Vyvrátím to příkladem níže.

**Příklad 12**(*Otevřená množina*): Dokažte, že interval $I = (a, b)$, kde $a, b \in \mathbb{R} \;\wedge\; a \neq b$ je otevřená množina.

Vyjdeme z definice 21. Bez újmy na obecnosti, řekněme že platí: $a < b$. Je zřejmé, že každý prvek $I$ (ozn. $i$) lze vyjádřit jako: $i = a + k_1 = b - k_2$, kde $k_1, k_2 > 0$. Nyní nechť $k = min(k_1, k_2)$. Potom okolí $i$: $(i - k, i + k)$ je celé obsaženo v $I$. Jelikož stejným způsobem hledáme okolí pro libovolné $i$ z $I$, je $I$ otevřená množina.[46]

**Definice 22**(*Souvislost*): Řekneme, že $M$ je souvislá $\overset{def}{\iff}$ $M$ nelze rozdělit na dvě neprázdné a disjunktní otevřené množiny.

[46]Stejný důkaz lze prezentovat i intuitivně: Jelikož není možné vybrat nejmenší a největší prvek z $I$, k libovolně zvolenému $i$ z $I$ existují větší a menší prvky. A tyto prvky zřejmě tvoří interval, tzn. z nich lze vybrat okolí $i$.

**Definice 23**(*Meromorfní funkce*): Funkce $f$ je meromorfní na $\mathbb{C}$ $\overset{def.}{\iff}$ je holomorfní na otevřené, souvislé podmnožině $\mathbb{C}$, bez bodů, kde má $f$ póly.

**Definice 24**(*Laurentova řada*): Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ a $P = (a_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ je posloupnost kompexních čísel. Potom $L(z_0, P) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ je Laurentova řada se středem $z_0$ příslušná posloupnosti $P$.

**Definice 25**(*Reziduum*): Nechť $z_0$ je singulární bod meromorfní funkce $f(z)$ a $L(z_0, P)$ je vyjádření $f(z)$ na okolí $z_0$. Potom číslo $a_{-1} \in P$ nazýváme reziduem $f(z)$ v $z_0$.

**Definice 26**(*Souvislost po částech*): Řekneme, že funkce $f(x)$ je po částech souvislá na intervalu $I$ $\overset{def.}{\iff}$ jsou $f(x)$ a $f'(x)$ v $I$ po částech spojitá, tzn. existuje nejvýše konečně mnoho bodů z $I$ ve kterých je $f(x)$, nebo $f'(x)$ nespojitá.

**Definice 27**(*Normalizace funkce*): Nechť funkce $f(x)$ je na intervalu $I$ po částech spojitá. Potom řekneme, že funkce $f_N(x) = \frac{1}{2}[\lim_{a\to x^-} f(a) + \lim_{b\to x^+} f(b)]$ je tzv. normalizovaná funkce k funkci $f(x)$.

## 7.3 Úvod do analytických funkcí a jejich rozšiřování na komplexní rovinu

Připomeňme definici analytické funkce.

**Definice 28**(*Analytická funkce*): Komplexní funkce $f(z)$ je *analytická* $\overset{def.}{\iff}$ $f(z)$ je možné v okolí každého bodu $z_0$ z jeho definičního oboru vyjádřit jako součet mocninné řady $\overset{def.}{\iff}$ v okolí bodu $z_0$ pro $f(z)$ platí:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k \tag{26}$$

Zaměřme se nyní na speciální případ Dirichletovy řady, když platí $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \cdots = 1$. Tato řada, ozn. (1)* je vlastně shodná s (1), s tím rozdílem, že (jako každá Dirichletova řada) je definována i pro komplexní čísla. Je tedy důležité analyzovat jejich reálné a imaginární části.

Lze ukázat, že divergentnost závisí jen na reálné části, tzn. že platí tvrzení:

**Tvrzení 23**(*Konvergence (1)**): (1)* diverguje pro $\Re(s) \leq 1$ a konverguje pro $\Re(s) > 1$.

Nyní se věnujme rozšíření reálné funkce (beroucí za argumenty a vracející obrazy ve tvaru reálných čísel) na funkci komplexní (která pracuje se vzory i obrazy z komplexních čísel). Je zřejmé, že takovou úpravu reálné funkce by mohlo jít učinit mnoha způsoby, neboť z chování funkce na reálných číslech nijak jednoznačně neplyne její "příslušné- analogické" chování na číslech komplexních. Je proto dobré si uvědomit, že přiřazený význam k pojmu: "rozšíření funkce na komplexní rovinu" je věcí definice - matematické úmluvy.

**Definice 29**(*Rozšíření analytické funkce*): Nechť $f$, resp. $f'$ je definována na $D$, resp. $D'$ a platí $D \subset D'$. Řekneme, že $f'$ je (analytickým) rozšířením funkce $f \iff \forall x \in D : f(x) = f'(x)$.

Zjednodušeně řečeno, rozšíření funkce $f_1$ je každá funkce $f_2$, která vrací stejné funkční hodnoty jako $f_1$ pro nějakou množinu vzorů $M$ a navíc definuje funkční hodnoty pro alespoň jeden další vzor, který není součástí $M$.

Rozšíření funkce lze trochu přirovnat k hledání "pokračování logické řady": Mějme např. "řadu":

$$0, 3, 8, 15, 24, \ldots$$

Nyní bychom mohli chtít nalézt nějaké pravidlo - "předpis", které bude definovat prvních pět členů řady stejným způsobem (to je analogií k zachování funkčních hodnot $f_2$ na $M$), ale zároveň nám umožní hledat členy další...(to je analogií k tomu, že $f_2$ definuje obrazy i pro vzory mimo $M$)

"Rozšířením" by pak zde mohla být "řada" daná předpisem pro $n$-tý člen: $n^2 - 1$, která prvních 5 členů definuje stejně jak je zadáno a navíc definuje dokonce nekonečno dalších členů, které následují.

**Tvrzení 24**(*Jednoznačnost rozšíření*): Nechť $f$, resp. $f_1$, resp. $f_2$ jsou definovány na $D$, resp. $D_1$, resp. $D_2$. Potom platí: $(D \subset D_1 \cup D_2 \wedge \forall x \in D : f_1(x) = f_2(x) = f(x)) \Rightarrow f_1 = f_2$ na $D_1 \cup D_2$.

Jinak při rozšiřování funkce nejčastěji postupujeme tak, že nejdříve nalezneme nějakou funkční rovnost - na "malém" definičním oboru D, který následně rozšíříme. Tento postup si prakticky ukážeme na rozšíření např. Riemannovy funkce (v kapitole 8).

Nyní asi přirozeně vyvstávají otázky:

1. Jak hledat rozšíření obecně ?
2. A jak nalézt rozšíření na největším možném definičním oboru ?

Hlavně z důvodu velkého rozsahu mé práce na otázky výše odpovídat nebudu. Pouze čtenáře nasměruji:

Na otázku 1. odpovídá koncept tzv. Univerzálního rozšíření (anglicky: Universal cover) a na otázku 2. lze hledat odpověď v rámci konceptu tzv. Riemannových ploch (anglicky: Riemann surfaces).

## 7.4 Fourierovy řady

V naší práci užití Fourierových řad demonstujeme na důkazech vybraných funkčních hodnot funkce $\zeta(s)$. Další - a nejspíše nejvýznamnější aplikací pak jsou diferenciální rovnice. Jinak obecně lze říci, že Fourierova řada je vlastně obyčejné vyjádření funkce pomocí trigonomické řady. [47]

**Definice 30**(*Fourierovy řady*): $F(x)$ je Fourierova řada $\overset{Def.}{\Longleftrightarrow}$

$$F(x) = \alpha + \sum_{n=1}^{s} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

, kde $\alpha, a_1, a_2, \ldots, a_s, b_1, b_2, \ldots, b_s$ jsou konstanty.

Dále ukážeme obecný způsob jak dopočítat výše uvedené konstanty. Nejdříve však uvedu pár pomocných tvrzení, na kterých zmíněný postup zakládá.

**Tvrzení 25**(*Lemma A: součin goniometrických funkcí*): $\forall x, y \in \mathbb{R}$ platí:

$$sin(x).sin(y) = 1/2[cos(x-y) - cos(x+y)]$$

$$cos(x).cos(y) = 1/2[cos(x-y) + cos(x+y)]$$

$$sin(x).cos(y) = 1/2[sin(x-y) + sin(x+y)]$$

Pravdivost tvrzení lze nahlédnout na jednotkové kružnici přímo, nebo je možné užít vzorce pro součty argumentů goniometrických funkcí.

[47] Přívlastek Fourierova tedy přidáváme spíše pro zdůraznění toho, že řada byla nalezena postupem, který vymyslel stejnojmenný matematik.

**Věta 19**(*Lemma B: integrál součinu goniometrických funkcí*): Platí, že

$$\int \sin(mx)\sin(nx)dx = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]; m \neq n \\ \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin(2m)x}{2m}\right); m = n \end{cases},$$

$$\int \sin(mx)\cos(nx)dx = \begin{cases} -\frac{1}{2}\left[\frac{\cos(m-n)x}{m-n} + \frac{\cos(m+n)x}{m+n}\right]; m \neq n \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\cos 2mx}{2m}\right); m = n \end{cases},$$

$$\int \cos(mx)\cos(nx)dx = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} + \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]; m \neq n \\ \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2mx}{2m}\right); m = n \end{cases}$$

*Důkaz.* Každou integrovanou funkci přepíšeme pomocí vzorců uvedených v lemmě A. Tak se integrace součinu převede na integraci součtu, kterou jednoduše provedeme jako součet integrací. Ukáži postup pro vztah první, ostatní případy se řeší analogicky:

$$\int \sin(mx)\sin(nx)\ dx = \int \frac{1}{2}[\cos(mx - nx) - \cos(mx + nx)]\ dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \cos((m-n)x)\ dx - \frac{1}{2}\int \cos((m+n)x)\ dx$$

Nyní argumenty funkce *cos* substituji[48] po řadě proměnnými $t_1, t_2$. Tak dostáváme:

$$dt_1 = (m-n)\ dx; dt_2 = (m+n)\ dx$$

Po dosazení mohu integrály zapsat jako:

$$\frac{1}{2}\int \frac{\cos(t_1)}{m-n}\ dt_1 - \frac{1}{2}\int \frac{\cos(t_2)}{m+n}\ dt_2$$

Z toho už je požadovaný závěr snadno vidět. □

Nyní již můžeme demonstrovat způsob výpočtu konstant.

**Věta 20**(*Metoda dopočtu koeficientů Fourierovy řady*): Nechť pro funkci $f(x)$ na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$ platí:

$$f(x) = \alpha + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

Potom pro koeficienty platí:

[48] užitím integrační - substituční metody

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(x).cos(nx)\ dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(x).sin(nx)\ dx$$

$$\alpha = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi} f(x)dx$$

*Důkaz.* Důkaz provedeme pouze pro $a_n$, pro $b_n$ a $\alpha$ se vede analogicky.

Vynásobíme první rovnost $\cos(nx)$ a zintegrujeme člen po členu za využití pravidla: "integrace součtu je součet integrací". Hodnoty jednotlivých integrálů pak spočteme pomocí vztahů níže[49]:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin(mx).\sin(nx)\ dx = \begin{cases} 0; m \neq n \\ \pi; m = n \neq 0 \end{cases}$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin(mx).\cos(nx)\ dx = 0$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos(mx).\cos(nx)\ dx = \begin{cases} 0; m \neq n \\ \pi; m = n \neq 0 \end{cases}$$

Takto dostáváme:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \alpha\cos(nx)dx + \pi a_n$$

Ze sudosti $\cos(nx)$ dále vychází, že integrál na pravé straně rovnosti je nula. Po vydělení rovnosti $\pi$ dostáváme požadované tvrzení. □

Nyní ukážeme postup dopočtu koeficientů na příkladě.

**Příklad 13**(*Vyjádření funkce pomocí Fourierovy řady*): Najděte k funkci $x\cos x$ na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$ její Fourierovu řadu.

ŘEŠENÍ: Dle věty 20 vyjádříme koeficienty $a_n, b_n$:

[49] Tato pravidla plynou ihned z lemmy B, obyčejným dosazením mezí do obecných integrálů.

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(x).cos(nx)\ dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} x.cos(x).cos(nx)\ dx = 0$$

Rovnost výše vychází z toho, že funkce $x\cos x$ je lichá, $cos(nx)$ sudá a meze integrálu mají opačné znaménko a stejnou absolutní velikost. Analogicky rovnost níže vychází z toho, že integrujeme součin dvou lichých a jedné sudé funkce.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(x).sin(nx)\ dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{+\pi} x.cosx.sin(nx)\ dx$$

Užitím vztahů níže:

$$\int\limits_{0}^{+\pi} x.sin(\lambda x)\ dx = (-1)^{\lambda+1}\frac{\pi}{\lambda}; \lambda \in \{1, 2, \dots\}$$

$$\int\limits_{0}^{+\pi} 2x.cos(x)sin(vx)\ dx = \int\limits_{0}^{+\pi} x(sin(v+1)x + sin(v-1)x)\ dx,$$

které nedokazuji, neboť pro nás nebudou více podstatné (s výjimkou tohoto příkladu), po krácení dostáváme:

$$b_n = \frac{(-1)^n + 1}{n+1} + \frac{(-1)^n}{n-1} = (-1)^n \frac{2n}{n^2-1}$$

$$b_1 = -1/2$$

Zbývá určit velikost $\alpha$. Dle vzorce ve větě 20 platí:

$$\alpha = \int\limits_{0}^{2\pi} x\cos x\ dx$$

To lze užitím základní integrační metody Per partes upravit na tvar:

$$\alpha = [x\sin x + \cos x]_0^{2\pi} = 0$$

Proto

$$x\cos x = -\frac{1}{2}\sin x + 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^2-1}\sin(nx).$$

# 8 Možnosti rozšíření $\zeta(s)$

## 8.1 Rozšiřování definičního oboru

Ukážeme, že nekonečné řady mohou definovat funkci pouze v některé oblasti jejího definičního oboru.

Například, řada $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, která definuje funkci $(1-x)^{-1}$, ale pouze pro $x \in (-1, 1)$.

Otázkou je, jak dodefinovat funkci pro ostatní hodnoty $x$. Již Euler se pokoušel nalézt odpověď. Řešení avšak našel až B. Riemann. Zopakujme nejdříve pojem: analytické pokračování.

**Definice 31**(*Analytické pokračování*): Mějme dvě nedizjunktní oblasti $S_1$ a $S_2$ a nechť $f_1(z)$ je analytická funkce na $S_1$. Jestliže existuje funkce $f_2(z)$, která je analytická na $S_2$ a $f_2(z) = f_1(z)$ pro všechny $z \in S_1 \cap S_2$, pak $f_2(z)$ nazveme *analytickým pokračováním* funkce $f_1(z)$ v oblasti $S_2$.

B. Riemann [17] v roce 1859 dokázal, že funkci $\zeta(s)$ je možné rozšířit analytickým pokračováním na celou komplexní rovinu s výjimkou bodu $s = 1$, ve kterém má $\zeta(s)$ pól s reziduem rovným 1.

Proto uvedeme rigorózní definici zeta funkce $\zeta(s)$.

**Definice 32**(*Riemannova zeta funkce*): Riemannova zeta funkce $\zeta(s)$ je analytickým pokračováním Dirichletovy řady (1)* na celou komplexní rovinu s výjimkou bodu $s = 1$.

## 8.2 Integrální rozšíření funkce $\zeta(s)$

Řadu (1)* přepíšeme následujícím způsobem:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots =$$

$$= \frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s} + \frac{2}{2^s} - \frac{2}{3^s} + \frac{3}{3^s} - \frac{3}{4^s} + \frac{4}{4^s} - \frac{4}{5^s} + \frac{5}{5^s} - \frac{5}{6^s} + \cdots =$$

$$= 1\left(\frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s}\right) + 2\left(\frac{1}{2^s} - \frac{1}{3^s}\right) + \cdots =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n \left( \frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} \right) = s \sum_{n=1}^{\infty} n \int\limits_{n}^{n+1} x^{-s-1} dx,$$

kde poslední rovnost dostáváme tak, že integrujeme derivaci funkce $\frac{1}{x^s}$, která nabývá hodnot $\frac{1}{n^s}, \frac{1}{(n+1)^s}$ při dosazení mezí integrálu (tj. $n$, resp. $n+1$) za $x$...

Nechť dále $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$, kde $\lfloor x \rfloor$ je celá část a $\{x\}$ je zlomková část $x$. Když $\lfloor x \rfloor$ je vždy rovná $n$ pro $x \in \langle n, n+1)$, můžeme psát:

$$\zeta(s) = s \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{n}^{n+1} \lfloor x \rfloor x^{-s-1} dx = s \int\limits_{1}^{n+1} \lfloor x \rfloor x^{-s-1} dx$$

Dosazením za $\lfloor x \rfloor = x - \{x\}$ dostáváme:

$$\zeta(s) = s \int\limits_{1}^{n+1} x^{-s} dx - s \int\limits_{1}^{n+1} \{x\} x^{-s-1} dx \implies$$

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s \int\limits_{1}^{\infty} \{x\} x^{-s-1} dx. \tag{27}$$

Jelikož $0 \leq \{x\} < 1$, nevlastní integrál ve formuli (27) konverguje $\iff$ $\int_1^\infty x^{-\sigma-1} dx$ konverguje $\iff$ $\Re(s) = \sigma > 0$ (Platnost poslední ekvivalence celkem snadno vyplývá z porovnání $\int_1^\infty x^{-1-\sigma} dx$ s řadou $\sum_{n=2}^\infty n^{-1-\sigma}$, jejíž podmínky pro konvergenci již máme dokázány.)

Tento nevlastní integrál definuje analytickou funkci proměnné $s$ v oblasti $\Re(s) > 0$. To znamená, že v této oblasti funkce na pravé straně (27) zadává analytické pokračování funkce zeta a člen $\frac{s}{s-1}$ vyjadřuje její singularitu v bodě $s = 1$ s reziduem 1.

Další možné rozšíření $\zeta(s)$ lze nalézt pomocí funkce $\Gamma$.

## 8.3 Rozšíření pomocí funkce $\Gamma$

Funkce $\Gamma$ má následující vlastnost:

**Věta 21**(*O Gamma funkci*): Platí, že: $\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s}$.

*Důkaz.*

$$\Gamma(s+1) = \int\limits_{0}^{\infty} e^{-t} t^s dt$$

Nyní užijme věty matematické analýzy - tzv. Per partes. Volíme $u' = e^{-t}, v = t^s$. Tak dostáváme, že

$$\Gamma(s+1) = [-e^{-t}t^s]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-t}t^{s-1}dt = s\Gamma(s)$$

Rovnici výše vydělíme $s$ a dostáváme požadovaný závěr. □

Z věty 21 a z příkladu níže plyne, že funkce $\Gamma$ je vlastně zobecněním faktoriálu.

**Příklad 14**($\Gamma(1)$): Platí, že $\Gamma(1) = 1$.

*Důkaz.* Dosaďme do (18). Elementárními úpravami dostáváme:

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} = [-e^{-t}]_0^\infty = -e^{-\infty} - (-e^0) = 1$$

□

Nyní připomeňme *Jacobiho theta funkci* - užijeme ji při důkazu následující věty.

**Definice 33**(*Theta funkce*): Jacobiho theta funkci - $\Theta(x)$ definujeme

$$\Theta(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-n^2\pi x}$$

Theta funkce má významnou symetrii, kterou též využijeme.

**Tvrzení 26**(*Symetrie* $\Theta(x)$): $\forall x > 0$ $\Theta(x)$ splňuje funkcionální rovnici

$$\Theta(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\Theta(x^{-1})$$

Mezi funkcemi $\zeta$ a $\Gamma$ existuje následující vztah

**Věta 22**(*analytické pokračování* $\zeta$ *pomocí funkce* $\Gamma$.): Platí:

$$\zeta(s) = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(\frac{s}{2})}\left[\frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty (x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}})\left(\frac{\Theta(x)-1}{2}\right)dx\right]. \tag{28}$$

*Důkaz.* Vyjdeme z "rozepsání" Gamma funkce pro argument $\frac{s}{2}$. Platí, že

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int\limits_0^\infty e^{-t} t^{\frac{s}{2}-1} dt$$

Zavedeme substituci $t = n^2\pi x$ (ve které platí: $dt = n^2\pi dx$) Tak dostáváme

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int\limits_0^\infty e^{-n^2\pi x} (n^2\pi x)^{\frac{s}{2}-1} n^2\pi dx$$

Elementárními úpravami ("konstanty vytáhneme" před integrál a užijeme ekvivaletní úpravy rovnice) obdržíme:

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) n^{-s}\pi^{-\frac{s}{2}} = \int\limits_0^\infty x^{\frac{s}{2}-1} e^{-n^2\pi x} dx.$$

Nyní sečteme dohromady všechny rovnice, které dostaneme z rovnice výše tak, že za $n$ dosadíme postupně každé číslo z $\mathbb{N}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) n^{-s}\pi^{-\frac{s}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_0^\infty x^{\frac{s}{2}-1} e^{-n^2\pi x} dx.$$

Dále výrazy v součinu, neobsahující $n$ "přesunu před sumu"(To zřejmě mohu udělat, neboť nezáleží, zda násobím konstantou každý sčítanec zvlášť nebo všechny sčítance "dohromady") a upravím. [50]

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)\pi^{-\frac{s}{2}} = \int\limits_0^\infty x^{\frac{s}{2}-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi x}\right) dx$$

Nyní vyjádříme obsah kulaté závorky pomocí $\Theta(x)$ a osamostatníme $\zeta(s)$ ekvivelentními úpravami...

$$\zeta(s) = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(\frac{s}{2})} \int\limits_0^\infty x^{\frac{s}{2}-1} \left(\frac{\Theta(x)-1}{2}\right) dx \tag{29}$$

Využitím symetrie $\Theta(x)$ v tvrzení 26 lze "část integrace od 0 do 1" přepsat pomocí integrálu s mezemi 1 a $\infty$. Platí

$$\int\limits_0^1 x^{\frac{s}{2}-1}.\left(\frac{\Theta(x)-1}{2}\right) dx = \int\limits_1^\infty x^{-\frac{s}{2}+1}.\left(\frac{\Theta(x)x^{\frac{1}{2}}-1}{2}\right) dx$$

Přepsáním integrálu v rovnici (28) pomocí vztahu výše a následnou úpravou již obdržíme požadovaný závěr. □

[50] Také už se začíná "objasňovat" volba předchozí substituce - "díky" výrazu $n^{-s}$ se v sumě přes všechna $n$ obdrží $\zeta$ funkce.

Vyjádření $\zeta(s)$ ve větě 22 dává analytické pokračování (1)* na celé $\mathbb{C}$ kromě $s = 1$ a $s = 0$. [51]

Nakonec podkapitoly uvedu ještě jedno možné rozšíření pomocí $\Gamma$ funkce. Již bez důkazu.

**Tvrzení 27**(*Alternativní rozšíření $\zeta$ funkce pomocí* $\Gamma$):

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int\limits_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx \iff \Re(s) > 1$$

Vztah výše je poměrně zajímavým kompromisem mezi předchozími rozšířeními - nepůsobí tak komplexně jak (28), zároveň však také dává do souvislosti důležitou hodnotu - Eulerovu konstantu $e$ (jejíž "dobré" pochopení bude nejspíš celým klíčem k řešení všech otázek, které s Riemannovou hypotézou souvisí - $e$ totiž vystupuje v umocňování na komplexní exponent, které je součástí každého z výše uvedených rozšíření).

[51] To plyne z vlastností $\Theta(x)$, jejichž funkční hodnoty exponenciálně klesají a v důsledku zaručují konvergenci pravé části součtu uvnitř hranaté závorky.

**Seznam použitých vět (ty uvádím s důkazy):**

| strana | číslo věty | název věty |
|---|---|---|
| 16 | 1. | Základní věta aritmetiky |
| 18 | 2. | Náležitost dělitele k faktorizaci |
| 18 | 3. | Euklidova věta o prvočíslech |
| 23 | 4. | Věta o počtu prvočísel |
| 23 | 5. | Dirichletova aproximace |
| 27 | 6. | Zásuvkový princip |
| 28 | 7. | Nekonečný počet dvojčat- rozšíření |
| 30 | 8. | Divergence harmonické řady |
| 30 | 9. | Srovnání (1) s geometrickou řadou |
| 31 | 10. | Taylorův rozvoj |
| 32 | 11. | Derivace $\sin, \cos$ |
| 34 | 12. | Taylorův rozvoj/MacLaurenova řada sin |
| 36 | 13. | Basilejský problém |
| 43 | 14. | O Eulerově součinu |
| 46 | 15. | Symetrie $\xi$ |
| 51 | 16. | Konečnost Riemannovy prvočíselné funkce |
| 51 | 17. | Vyjádření $\pi(x)$ pomocí $R(x)$ |
| 58 | 18. | Eulerův vztah |
| 64 | 19. | Lemma: integrál součinu goniometrických funkcí |
| 64 | 20. | Metoda dopočtu koeficientů Fourierovy řady |
| 69 | 21 | O gamma funkci |
| 69 | 22 | Analytické pokračování pomocí gamma funkce |

## Seznam použitých tvrzení (ty uvádím bez důkazů):

| strana | číslo tvrzení | název tvrzení |
|---|---|---|
| 21 | 1. | O frekvenci výskytu prvočísel |
| 22 | 2. | Limita frekvence výskytu prvočísel |
| 25 | 3. | Průměrná výchylka náhodné chůze |
| 26 | 4. | Základní pozorování o Mersennových a Fermatových číslech |
| 26 | 5. | O výskytu dvojčat |
| 28 | 6. | Tvrzení implikující Riemannovu hypotézu |
| 40 | 7. | Vyjádření $\zeta(s)$ pomocí Lambertových řad |
| 45 | 8. | Oblast kořenů $\zeta(s)$ |
| 45 | 9. | Vztah mezi $\Gamma$ a $\xi$ |
| 46 | 10. | Vyjádření $\zeta(s)$ pomocí sin |
| 47 | 11. | kořeny $\xi$ |
| 47 | 12. | základní vlastnost $\zeta(s)$ a $\xi(s)$ |
| 50 | 13. | Hardyho věta |
| 50 | 14. | Prvočíselná věta - Dirichlet |
| 50 | 15. | Zpřesnění prvočíselné věty - Koch |
| 57 | 16. | Polární vyjádření komplexního čísla |
| 57 | 17. | Ekvivalentní vyjádření $e$ |
| 57 | 18. | Zápis pomocí Eulerova čísla |
| 58 | 19. | Rozložitelnost komplexní funkce na dvě reálné |
| 59 | 20. | Nekonečná diferencovatelnost |
| 59 | 21. | Alternativní definice analytické funkce |
| 59 | 22. | Alternativní definice holomorfické funkce |
| 62 | 23. | Konvergence (1)* |
| 62 | 24. | Jednoznačnost rozšíření |
| 63 | 25. | Lemma A: Součin goniometrických funkcí |
| 69 | 26. | Symetrie $\Theta(x)$ |
| 71 | 27. | Alternativní rozšíření $\zeta$ funkce pomocí $\Gamma$ |

# Reference


[1] ATIYAH, M. F. *The Riemann Hypothesis* [online]. [cit. 2019-03-27]. Dostupné z: https://ep00.epimg.net/descargables/2018/09/25/b133e2bf9a3e7bb55f5fae26dcf9b8c0.pdf

[2] BOOKER, Andrew R. *Turing and the Riemann Hypothesis.* Notices of the American Mathematical Society. 2006, **53**(10), 1208-1211. Dostupné z: https://www.ams.org/notices/200610/fea-booker.pdf

[3] COURANT, Richard. *Differential and integral calculus vol. I.,II.*. Blackie & son. 1936

[4] DAVENPORT, H. *Higher arithmetics.* Cambridge university press. 2008

[5] DIRICHLET, Peter Gustuv Lejeune. *Sur l'usage des series infinies dans la théories des nombres.* J. Reine Angew. Math. 1838, (18), 259-274.

[6] EULER, Leonhard. *Variae observationes circa series infinitas.* Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae. 1737, 160-188.

[7] GAVRILOV, N.I. *The proof of the Riemann Hypothesis on the distribution of the zeros of the zeta-function.* Nauch. Ezhegodnik Odessk. Gos. Univ. 1961, No. 2, 7-40.

[8] HADAMARD, Jacques. *Sur la distribution des zéros de la function $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétique.* Bull. Soc. Math. France, 1896, 24, 199-220.

[9] HARDY, G. H. *Sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann.* 1914, (158), 1012-1024. Dostupné z: https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3111d/f1014.image.r=

[10] KOCH, Helge. *Sur la distribution des nombres premiers.* Acta Math. 1901, 24, 159-182. DOI: 10.1007/BF02403071. Dostupné z: http://projecteuclid.org/euclid.acta/1485882091

[11] KVASZ, Ladislav. Studijní materiál k předmětu dějiny analýzy - přednáška 7.

[12] LAUGWITZ, Detlef. *Bernhard Riemann - Turning Points in the Conception of Mathematics.* Birkhäuser. 1999

[13] MAZUR, B., STEIN, W. *Prime Numbers and the Riemann Hypothesis.* Cambridge University press. 2016

[14] NEEDHAM, Tristan. *Visual complex analysis.* Oxford university press. 1998

[15] NESTRENKO, Yu. V. *An elementary proof of the irrationality of* $\zeta(3)$. Moscow Univ. Math. Bull. 2009, **64**:4, 165-171. Dostupné z: `http://www.springerlink.com/index/10.3103/S0027132209040056`

[16] RIEMANN, B. *Collected papers.* Kendrick press. 2004

[17] RIEMANN, B. *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse.* Monatsberichte der Berliner Akademie. 1859 `https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/cb/Ueber_die_Anzahl_der_Primzahlen_unter_eienr_gegebenen_Grösse.pdf`

[18] VESELÝ, Jiří. *Komplexní analýza pro učitele.* Nakladatelství Karolinum. 2000

[19] ZEL'DOVIČ, J. B. *Vyššia matematika pre začiatočníkov.* ALFA, Vydavatel'stvo technickej a ekonomickej literatúry. 1973

,