



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV AUTOMATIZACE A INFORMATIKY
INSTITUTE OF AUTOMATION AND COMPUTER SCIENCE

VÝZNAM A VÝPOČET MATEMATICKÉ
KONSTANTY Π

MEANING AND CALCULATION OF THE MATHEMATICAL CONSTANT Π

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

David Geršl

VEDOUcí PRÁCE
SUPERVISOR

Mgr. Monika Dosoudilová, Ph.D.

BRNO 2022

Zadání bakalářské práce

Ústav:	Ústav automatizace a informatiky
Student:	David Geršl
Studijní program:	Strojírenství
Studijní obor:	Aplikovaná informatika a řízení
Vedoucí práce:	Mgr. Monika Dosoudilová, Ph.D.
Akademický rok:	2021/22

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

VÝZNAM A VÝPOČET MATEMATICKÉ KONSTANTY π

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Významná role této konstanty zejména v matematické sféře. Snahy o nejpřesnější výpočet π v éře počítačů. Vlastní snahy o nejpřesnější výpočet této konstanty.

Cíle bakalářské práce:

Význam matematické konstanty π .
Výpočet π pomocí integrálního počtu.
Odhad π pomocí mocninných řad.
Přesnost π s využitím vlastního programování.

Seznam doporučené literatury:

ŠKRÁŠEK, J., TICHÝ, Z.: Základy aplikované matematiky I-III. SNTL, Praha, 1983.
BECKMANN, P.: Historie čísla π . Praha: Academia, 1998.

V Brně, dne

L. S.

doc. Ing. Radomil Matoušek, Ph.D.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

ABSTRAKT

Tato bakalářská práce pojednává o významu a metodách výpočtu matematické konstanty π . Teoretická část se zaměřuje na historii metod výpočtu této konstanty, přičemž nejvýznamnější metody, jako je výpočet integrálním počtem, či mocninnými řadami, jsou podrobně odvozeny v samostatných kapitolách. Praktická část se zabývá náročností výpočtu jednotlivých vzorců a jejich následným srovnáním.

ABSTRACT

This bachelor thesis discusses the meaning and methods for calculating the mathematical constant π . The theoretical part focuses on the history of the methods for calculating this constant, while the most important ones, such as calculating by integral calculus or power series, are derived in detail in separate chapters. The practical part deals with the computational complexity of individual formulas and their subsequent comparison.

KLÍČOVÁ SLOVA

Matematická konstanta π , integrální počet, mocninné řady, výpočet π

KEYWORDS

Mathematical constant π , integral calculus, power series, calculation of π



ÚSTAV AUTOMATIZACE
A INFORMATIKY



2022

BIBLIOGRAFICKÁ CITACE

GERŠL, David. *Význam a výpočet matematické konstanty π* . Brno, 2022. Dostupné také z: <https://www.vutbr.cz/studenti/zav-prace/detail/140968>. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav automatizace a informatiky. Vedoucí práce: Mgr. Monika Dosoudilová, Ph.D.

PODĚKOVÁNÍ

Tímto bych chtěl poděkovat paní Mgr. Monice Dosoudilové, Ph.D. za vstřícnost a pomoc v průběhu zpracování této bakalářské práce.

ČESTNÉ PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že, že tato práce je mým původním dílem, vypracoval jsem ji samostatně pod vedením vedoucího práce a s použitím odborné literatury a dalších informačních zdrojů, které jsou všechny citovány v práci a uvedeny v seznamu literatury.

Jako autor uvedené práce dále prohlašuji, že v souvislosti s vytvořením této práce jsem neporušil autorská práva třetích osob, zejména jsem nezasáhl nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a jsem si plně vědom následku porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona c. 121/2000 Sb., včetně možných trestně právních důsledků.

V Brně dne 20. 5. 2022

.....
David Geršl

OBSAH

1	ÚVOD	17
2	VÝZNAM A VÝSKYT π.....	18
3	HISTORIE ČÍSLA π	20
3.1	STAROVĚK	20
3.1.1	<i>Egypt</i>	20
3.1.2	<i>Babylonie.....</i>	20
3.1.3	<i>Staří Řekové</i>	20
3.1.4	<i>Archimédes (287 př. n. l – 212 př. n. l.).....</i>	21
3.1.5	<i>Indové.....</i>	22
3.1.6	<i>Hebrejci.....</i>	22
3.2	STŘEDOVĚK	22
3.2.1	<i>Fibonacci (asi 1180 – 1250)</i>	23
3.2.2	<i>Madhava ze Sangamagramy (asi 1340 – 1425).....</i>	23
3.3	NOVOVĚK.....	23
3.3.1	<i>Ludolf van Ceulen (1540 – 1610)</i>	24
3.3.2	<i>François Viète (1540 – 1603)</i>	24
3.3.3	<i>John Wallis (1616 – 1703).....</i>	24
3.3.4	<i>James Gregory (1638 – 1675)</i>	25
3.3.5	<i>Isaac Newton (1642 – 1727)</i>	25
3.3.6	<i>John Machin (1686 – 1751).....</i>	25
3.3.7	<i>Leonhard Euler (1707 – 1783).....</i>	26
3.3.8	<i>Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855)</i>	26
3.3.9	<i>Srinivasa Ramanujan (1887-1920).....</i>	26
4	METODY APROXIMACE π.....	28
4.1	ARCHIMÉDOVA METODA	28
4.2	INTEGRÁLNÍ POČET	31
4.2.1	<i>Rozvoj binomické věty.....</i>	31
4.2.2	<i>Funkce popisující kruhové geometrické objekty</i>	33
4.2.3	<i>Cyklometrické funkce</i>	37
4.2.4	<i>Ostatní funkce.....</i>	40
4.3	ROZVOJ DO MOCNINNÝCH ŘAD	41
4.3.1	<i>Taylorův/Maclaurinův rozvoj.....</i>	41
4.3.2	<i>Machin-like vzorce</i>	42
4.3.3	<i>Rapidně konvergující řady.....</i>	47
4.3.4	<i>Kontrola desetinných míst</i>	48
5	MĚŘENÍ VÝPOČETNÍ NÁROČNOSTI JEDNOTLIVÝCH VZORCŮ	50
5.1	SPECIFIKACE ZAŘÍZENÍ	50
5.1.1	<i>Hardware</i>	50
5.1.2	<i>Software.....</i>	50
5.2	DPI JEDNOTLIVÝCH VZORCŮ.....	50
5.3	POROVNÁNÍ GREGORYHO ŘADY A EULEROVA ROZVOJE	52
5.3.4	<i>DPI.....</i>	52

5.3.5	<i>Výpočetní náročnost</i>	53
6	ZÁVĚR	54
7	SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY	55
8	SEZNAM PŘÍLOH	57

1 ÚVOD

Výpočtem π se zabývali lidé již několik tisíc let před Kristem a již před 500 lety byla známa jeho hodnota s takovou přesností, jakou dnes používá NASA pro meziplanetární navigaci. [8] Co se týče využití číslíc za desetinou čárkou pro výpočty v reálném světě, zastavujeme se asi na 38 platné číslici. S takovouto přesností bychom byli schopni vypočítat obvod pozorovatelného vesmíru na šířku vodíkového atomu. Pokud bychom chtěli jít ještě dále, 65 platných číslic stačí, abychom vypočítali obvod vesmíru s odchylkou velkou jako Planckova vzdálenost (nejkratší možná vzdálenost, o které jsme teoreticky schopni získat nějaké informace).

Vyvstává tedy otázka, proč jeho hodnotu lidé v minulosti počítali na x desítek, stovek, a v dnešní době superpočítačů, až tisíců miliard platných číslic. S využitelností při výpočtech veličin (matematických, či fyzikálních) to nemá nic společného. Historicky, podobně jako dnes, šlo matematikům spíše o demonstraci svých schopností a posouvání hranic možností. Ať už šlo o vytvoření nového, sofistikovanějšího vzorce, s kterým se blížili jeho skutečné hodnotě mnohem rychleji, nebo se zkrátka již známou metodou snažili ukázat svoji schopnost numerických výpočtů a odhodlání.

První kapitola této bakalářské práce se pouze krátce věnuje významu π , protože na toto téma by mohla být napsána celá kniha, přičemž jsou zde zahrnuty i ukázky důležitých rovnic, kde se vyskytuje. Jelikož se jedná o vůbec nejstarší matematickou konstantu známou člověku, je v druhé kapitole popsána nejen historie metod jeho výpočtu od starého Egypta až po 20. století, ale také krátce nastíněn historický kontext, který jeho výpočet ovlivňoval. Další kapitola podrobněji popisuje stěžejní metody výpočtu π , přesněji ty nejvýznamnější, které jej revolucionizovaly. První takovou metodou jsou tzv. Archimédovi mnohoúhelníky, které byly používány pro výpočet necelé dvě tisíciletí. Dalším přístupem je integrální počet, a nakonec mocninné řady společně se sofistikovanými vzorci, kterou jsou pomocí nich realizované. Protože se π vyskytuje v mnoha důležitých, nejen matematických, rovnicích, je možné jej vypočítat nejrůznějšími způsoby, tato práce se však bude zaměřovat na vzorce, které byly využity pro jeho výpočet na co nejvyšší přesnost a které jsou odvozeny z principů integrálního počtu, či mocninných řad. Praktická část práce se věnuje náročnosti výpočtu jednotlivých vzorců, které jsou v práci uvedeny, za využití vlastního programování.

2 VÝZNAM A VÝSKYT π

Jedna z nejdůležitějších a zároveň nejpřímočařejších konstant: poměr obvodu kruhu k jeho poloměru. S touto konstantou se můžeme setkat nejen v geometrii, ale i v mnoha dalších oborech matematiky jako je například teorie pravděpodobnosti, teorie čísel, integrální počet, komplexní analýza, topologii apod. I když π není fyzikální konstanta objevuje se ve fyzikálních vztazích jako koeficient, který vyjadřuje geometrické symetrie (kruhové, válcové a kulové) a v některých periodických fyzikálních dějích, zejména harmonických jako kmitání a vlnění. Je to jedna z mála konstant, které se nachází hned ve 4 ze 17 rovnic, které změnilы svět (podle knihy Iana Stewarta), přičemž ve dvou z nich figuruje nepřímо.

17 Equations That Changed the World by Ian Stewart		
1. Pythagoras's Theorem	$a^2 + b^2 = c^2$	Pythagoras, 530 BC
2. Logarithms	$\log xy = \log x + \log y$	John Napier, 1610
3. Calculus	$\frac{df}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$	Newton, 1668
4. Law of Gravity	$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$	Newton, 1687
5. The Square Root of Minus One	$i^2 = -1$	Euler, 1750
6. Euler's Formula for Polyhedra	$V - E + F = 2$	Euler, 1751
7. Normal Distribution	$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\rho^2}}$	C.F. Gauss, 1810
8. Wave Equation	$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$	J. d'Almbert, 1746
9. Fourier Transform	$f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \omega} dx$	J. Fourier, 1822
10. Navier-Stokes Equation	$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \mathbf{T} + \mathbf{f}$	C. Navier, G. Stokes, 1845
11. Maxwell's Equations	$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$ $\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$	J.C. Maxwell, 1865
12. Second Law of Thermodynamics	$dS \geq 0$	L. Boltzmann, 1874
13. Relativity	$E = mc^2$	Einstein, 1905
14. Schrodinger's Equation	$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = H\Psi$	E. Schrodinger, 1927
15. Information Theory	$H = -\sum p(x) \log p(x)$	C. Shannon, 1949
16. Chaos Theory	$x_{t+1} = kx_t(1 - x_t)$	Robert May, 1975
17. Black-Scholes Equation	$\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} - rV = 0$	F. Black, M. Scholes, 1990

Obrázek 1: 17 rovnic které změnilы svět [16]

π vystupuje přímo v rovnicích 7. a 9. a nepřímo v 11. rovnici při výpočtu E (intenzita elektrického pole) a v 14. rovnici při výpočtu \hbar (redukovaná Planckova konstanta). Mezi další významné rovnice obsahující π patří také například:

Einsteinovy rovnice gravitačního pole v obecné teorii relativity

$$R_{ik} - \frac{g_{ik}R}{2} + \Lambda g_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ik} ,$$

Keplerův zákon

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a^3 = \omega^2 a^3 ,$$

Eulerova identita

$$e^{i\pi} + 1 = 0 ,$$

Využití velkého počtu desetinných míst (řádově miliony až miliardy), spočívá ve faktu vypočítat přesně velké množství číslic, a to je pro počítač velmi náročnou operací. Právě toho se dá využít k optimalizaci počítačových komponent (hardwarových i softwarových), což dále rozšiřuje možnosti praktického využití. Kromě výzvy, kterou pro počítače znamená, je výpočet π na několik set tisíc až milionů číslic jednou z metod testů funkčnosti počítače, které se provádějí před jeho spuštěním. Jestli vypočítaný výsledek souhlasí s reálnou hodnotou, musel počítač vykonat miliony aritmetických operací bezchybně, a testem tedy prošel. [5]

3 HISTORIE ČÍSLA π

3.1 Starověk

3.1.1 Egypt

O podstatě konstanty π věděli již staří Egypťané. První zmínka o výpočtu π se nachází ve vůbec prvním dochovaném dokumentu vztahujícím se k matematice – Ahmesův papyrus (též Rhindův). Jeho sepsání se datuje okolo roku 1650 př.n.l. právě Ahmesem ze starého Egypta, přičemž vznik jeho obsahu je datován kolem roku 1800-2000 př.n.l. Zde Ahmes předpokládá, že plocha kruhového pole s průměrem 9 jednotek je rovna ploše čtverce se stranou 8 jednotek. [7] Při užití vzorce pro výpočet plochy kruhu $S = \pi r^2$ dostáváme

$$8^2 = \pi (9/2)^2.$$

Egyptská hodnota se tedy rovná

$$\pi = 4 (8/9)^2 \approx 3,16049.$$

3.1.2 Babylonie

Roku 1936 byla objevena asi 320 kilometrů od Babylonu tabulka s písmem pojednávajícím o různých geometrických tvarech a říká se v ní, že poměr obvodu pravidelného šestiúhelníku k obvodu opsané kružnice se rovná $57/60 + 36/60^2$ (zapsáno v dnešní notaci). Babyloňané využívali systém o základu 60 z důvodu znalosti faktu, že obvod pravidelného šestiúhelníku je roven šestinásobku poloměru opsané kružnice. [7] Můžeme proto využít dnešního zápisu $\pi = O/2r$ a dostaneme

$$\frac{3}{\pi} = \frac{57}{60} + \frac{36}{60^2}.$$

Což dává:

$$\pi = \frac{1800}{576} = 3 \frac{1}{8} = 3,125.$$

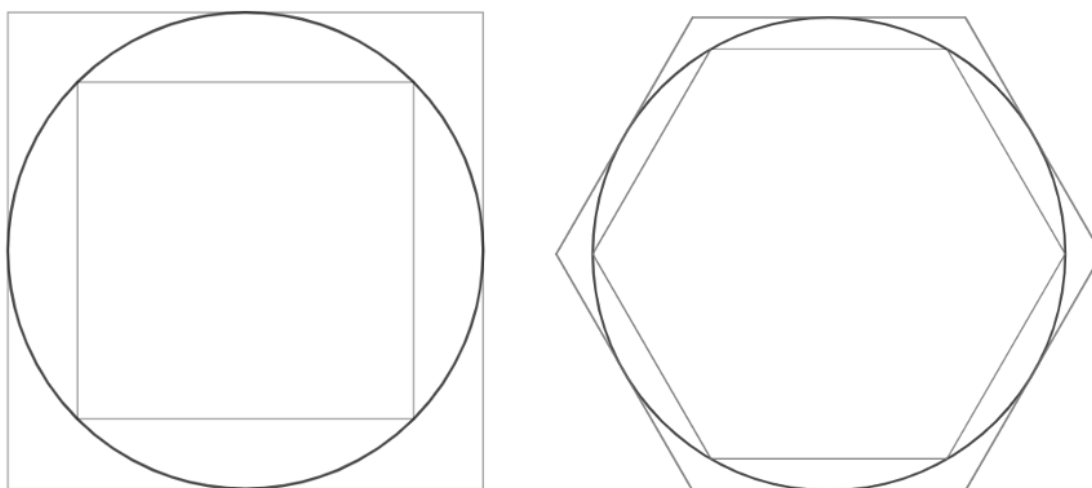
3.1.3 Staří Řekové

Mezi významné přispěvatele nejen k výpočtu π , ale k celé vědě byli Staří Řekové. A to hned v několika ohledech. Mezi významné matematiky té doby patřil například Eukleidés z Alexandrie, který utvořil samotné základy geometrie, jak ji známe dnes, Thalés z Milétu, podle kterého se dne na základních školách vyučuje Thaletova věta a samozřejmě také Pythagoras a mnoho dalších. Pro nás bude důležitý Antifon z Atén. Ten vyslovil „princip vyčerpání“ – tento princip se svou podstatou podobá diferenciálnímu počtu a ovlivňoval matematiky ve výpočtu π až do 17. století (objevení diferenciálního počtu). Zní takto: Jestliže je do kruhu vepsán čtverec a další pravidelné mnohoúhelníky, každý

s dvojnásobným počtem stran (osmiúhelník, šestnáctiúhelník atd.), až je kruh vyčerpán, pak se případně dosáhne mnohoúhelníku, jehož strany budou tak krátké, že se ztotožní s kruhem. Plocha každého mnohoúhelníku, lze určit, tudíž i plochu „výsledného“ mnohoúhelníku, který je ekvivalentní kruhu. [7]

3.1.4 Archimédes (287 př. n. l – 212 př. n. l.)

Jednou z nejdůležitějších osob starověké vědy, ale hlavně pro výpočet π byl Archimédes ze Syrakus. Způsob, jakým jej počítal, se podobal principu vyčerpání od Antifona. Posunul hranice „roven něčemu“ k „libovolně blízko k něčemu“ a dosáhl tak prahu diferenciálního počtu. Archimédes jako první uvedl metodu výpočtu π na libovolnou přesnost. Tato metoda vychází z faktu, že obvod pravidelného mnohoúhelníku vepsaného do kruhu je menší než obvod kruhu, zatímco obvod mnohoúhelníku opsaného je větší. Zvolíme-li dostatečně velký počet stran, budou se obvody vepsaného a opsaného mnohoúhelníku blížit obvodu kruhu mezi nimi s libovolnou přesností. Tato metoda tedy poskytuje horní a dolní ohraničení reálné hodnoty π . [7]



Obrázek 2: Archimédovy mnohoúhelníky

Analogicky můžeme postupovat pro šestiúhelník opsaný. Podobnou technikou rozdvajování stran se Archimédes dostal na mnohoúhelník s 96 stranami, což mu dalo ohraničení pro π v mezích

$$3 \frac{10}{71} < \pi < 3 \frac{1}{7}.$$

V desetinném zápisu:

$$3,140\ 845 < \pi < 3,142\ 858.$$

3.1.5 Indové

Bohužel se žádné zmínky starší, než od Starých Řeků nenašli, takže můžeme jenom spekulovat o tom, kdo přišel na některé věci jako první. Jejich astronomie byla na vysoké úrovni a nejspíš podstatu například Pythagorovy věty znali dávno předtím, než se Pythagoras narodil. Je také pravděpodobné, že k některým výsledkům výpočtu π se dostali podobnou metodou jako Archimédes. V zásadních dílech, které byly nalezeny, je však často uveden pouze výsledek bez postupu. [7]

3.1.6 Hebrejci

Hebrejci, jako takoví nijak významně nepřispěli k výpočtu π . Za zmínku ovšem stojí židovský rabín Nehemiáš, který sepsal vůbec první hebrejské dílo pojednávající o geometrii – *Mišna ha-Midot*, v něm udává hodnotu $\pi = 3$ a $1/7$. Na konci středověku se však věda čím dál více dostávala do konfliktu s náboženstvím a ve verši Starého zákona (1. kniha královská 7:23) je napsáno:

„Udělal moře slité, desíti loket od jednoho kraje k druhému, okrouhlé vůkol, a pět loket byla vysokost jeho, a okolek jeho třidcítí loket vůkol.“ [9]

Což znamená, že ve Starém zákoně se píše $\pi = 3$. Nehemiášova formulace je ovšem opatrná, aby nebyl v přímém rozporu se svatým písmem. Říká že odchylka, která činí $1/7$, připadá na tloušťku stěn moří.

Důvod, proč je dobré se o Nehemiášovi zmínit, je že, jak čas postupoval, podobné konflikty mezi náboženstvím a vědou byly církví tolerovány čím dál méně. Nehemiáš žijící kolem roku 150 n.l. může být považován za symbolickou tečku za spoluprací vědy a náboženství v této době. Postupem času už konflikty byly nejen netolerovány, ale rovnou potlačovány a to často krvavě. [7]

3.2 Středověk

S pádem Západořímské říše přišla pro vědu doba temna. To se jen utvrdilo s nástupem římské církve, která nepřipouštěla žádné odchylky. V tomto období zaznamenáváme mnoho událostí, kdy byly páleny knihy, a to nejen náplně vědecké, ale mnohdy jakékoliv. Toto období začalo ještě před pádem Západořímské říše. Roku 373 n.l. nechal křesťanský císař Valens spálit všechny nekřesťanské knihy. Okolo roku 390 n.l. objevil, a poté nechal kompletně zničit, biskup Theofil pohanský chrám, který byl pozůstatkem známé Alexandrijské knihovny. Dále se také později odehrávaly křižácké výpravy a za zmínku stojí Norská křížová výprava, která proběhla mezi lety 1107-1110. Po obsazení Tripolisu její účastníci spálili přes 100 000 knih muslimské nauky. Podobných událostí se během středověku odehrálo nespočet a my už se nikdy nedozvíme kolik neznámých brilantních myslí s revolučními nápady bylo neprávem umlčeno. Bohužel i po konci středověku pronásledování stoupenců vědy ještě nějakou dobu pokračovalo. Jeden z nejslavnějších takových případů bylo upálení Giordana Bruna v Římě roku 1600, kdy jeho ústy byla

zvolána známa slova „*E pur si muove!*“ („A přece se točí!“), která pak údajně zašeptal i Galileo Galilei, když odcházel od inkvizičního soudu donucen zříct se myšlenek Koperníkova učení o heliocentrismu.

I přes veškeré snahy církve se ovšem do Evropy pomocí obchodu s východem dostali arabské číslice a s nimi tedy i možnost desetinného zápisu, jak jej známe dnes. Toho využil při výpočtu π matematik Leonardo z Pisy (též znám jako Fibonacci). [7]

3.2.1 Fibonacci (asi 1180 – 1250)

Fibonacci při svých výpočtech využil pravidelný mnohoúhelník s 96 stranami, který používal již Archimédes, tudíž nepřišel s žádnou novou metodou výpočtu. Oproti Archimédovi byl ale za pomoci desetinného zápisu schopen určovat odmocniny vycházející z Pythagorovy věty přesněji, díky čemuž objevil novou přesnější aproximaci

$$\pi = \frac{864}{275} \approx 3,141\ 818,$$

kteřá je správná na 3 desetinná místa [1].

3.2.2 Madhava ze Sangamagramy (asi 1340 – 1425)

Odstavec, popisující sled událostí odehrávajících se během středověku, se vztahuje pouze na geografickou oblast Evropy. Dále na východ od působnosti římské církve mohli tehdejší vědní obory vzkvétat bez větších překážek. Jedním z nejvýznamnějších východních vědců byl indický astronom a matematik Madhava ze Sangamagramu. Madhavovi se podařilo uskutečnit mnohé objevy zejména v oblastech infinitezimální počtu, nekonečných řad, trigonometrie, geometrie i algebry. Jako první začal užívat nekonečných řad pro aproximaci trigonometrických funkcí. Tímto způsobem se mu podařilo představit vůbec první nekonečnou řadu pro π . [12]

$$\pi = \sqrt{12} \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \dots \right)$$

3.3 Novověk

Na přelomu 16. a 17. století v Evropě nastala vědecká revoluce. Jednou z největších událostí, která tomu pomohla, byl vynález knihtisku Johannem Gutenbergem. Předtím držela ve vzdělání monopol církve a většina lidí v dobách středověku neuměla číst ani psát. Pracné psaní i opisování knih měli na starost kněží a do rukou veřejnosti se proto knihy téměř nikdy nedostali. Dalším důvodem bylo, že při mořeplavbách za účelem kolonizace, ve kterých bylo neaktivnější Britské impérium, bylo zapotřebí lepších poznatků z astronomie, trigonometrie, lepší navigaci a podobně. Stoupla tedy znovu poptávka po exaktních vědách. [7]

Co se týče výpočtu π , důležité bylo objevení logaritmu Johnem Napierem. Základní myšlenkou, je zjednodušit násobení a dělení tím, že se převede na sčítání a odčítání. [7]

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y \quad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \quad (a, x, y > 0; a \neq 1)$$

Napier společně s dalším matematikem Jobstem Bürgim nezávisle na sobě vytvořili rozsáhlé tabulky logaritmů o různých základech. Existence takových tabulek umožňovala matematikům provádět výpočty s mnohem větší přesností, čehož bylo využito i při výpočtu π . [1]

3.3.1 Ludolf van Ceulen (1540 – 1610)

Jeden z nejobdovnějších matematiků snažících se vypočítat π na co nejpřesnější hodnotu. Počítání π měl jako svůj koníček a ve svém životě několikrát stanovil rekord v počtu desetinných míst. Tato záliba v počítání π by se dala nazvat spíše posedlostí. Nejprve určil 20, potom 32 a nakonec 35 desetinných míst. Metoda, kterou při tom využil byla stejná jako již zmíněná Archimédova – tedy pomocí mnohoúhelníků. Počet stran, který mnohoúhelník, určující tak přesně π , musel mít, byl $2^{62} \approx 10^{18}$. K výpočtu ovšem nemohl využít zmíněných logaritmických tabulek, jelikož zemřel několik let před jejich vydáním Napierem, a proto mu tento výpočet zabral bezmála 20 let. Patrně i z těchto důvodů je π nazýváno jako Ludolfovo číslo. [5]

3.3.2 François Viète (1540 – 1603)

I přestože byl Viète vyučeným právníkem a matematice se věnoval spíše amatérsky, zavedl do terminologie matematiky mnoho nových slov, z nichž se některá užívají dodnes, jako například *koeficient* nebo *negativní*. Přispěl také v mnoha ohledech k aritmetice, trigonometrii a algebře. Na středních školách se dnes učí Viètovy vzorce, sloužící pro rozklad kvadratického polynomu k nalezení jeho kořenů [1]. Svůj výpočet π také realizoval pomocí mnohoúhelníků, avšak na rozdíl od Archiméda začal se čtvercem. Postupným zdvojováním stran dostal první analytický výraz vyjadřující π jako nekonečnou řadu algebraických operací. Dá se zapsat následujícím způsobem

$$\pi = 2 \times \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} \times \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} \times \dots$$

Pomocí tohoto výrazu dostal π na přesnost 9 desetinných míst. [7]

3.3.3 John Wallis (1616 – 1703)

Wallis byl duchovní a matematik žijící v Anglii, který významně přispěl v matematických oborech jako je geometrie, trigonometrie a analýze nekonečných řad. Zavedl pojem *řetězový zlomek*, pomocí kterého se dá také vyjádřit π a dále například znak ∞ jakožto popis nekonečna. V neposlední řadě má také částečné zásluhy na objevení infinitezimálního počtu, který navždy změnil (nejen) způsob jakým se počítá π . Wallis hledal obsah čtvrtkruhu se středem v počátku souřadnicového systému a poloměrem $r = 1$, jehož rovnice

již byla známá z Descartovy souřadnicové geometrie. Pomocí zdlouhavého procesu zahrnujícího interpolace a induktivní postupy se mu podařilo vyjádřit π jako nekonečný součin obsahující pouze racionální operace, který v roce 1655 uvedl ve své knize *Arithmetica infinitorum*. [7] Jeho tvar může být zapsán takto

$$\pi = 2 \cdot \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \dots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \dots}$$

3.3.4 James Gregory (1638 – 1675)

Skotský matematik a astronom, který taky přispěl k objevu infinitezimálního počtu. Gregory se pokusil o dokázání transcendentnosti π , ovšem neúspěšně. Byl dobře seznámen s rozvojem trigonometrických funkcí, což mu pomohlo k objevu, že plocha pod křivkou $1/(x^2 + 1)$ v intervalu $(0, x)$ se rovná $\arctan(x)$. S použitím poznatků ze stereometrie a dalšími úpravami posléze dostal první nekonečnou řadu pro π o tvaru

$$\pi = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \dots,$$

kteřá je někdy také označována jako Leibnizova, či Madhavova. [7]

3.3.5 Isaac Newton (1642 – 1727)

V roce 1687 vydal knihu *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, která je často považována za nejvýznamnější vědeckou publikaci všech dob. V této knize popsal 3 pohybové zákony, zákon všeobecné gravitace, odvození Keplerových zákonů popisujících pohyb planet v gravitačním poli slunce a mnoho dalších revolučních myšlenek. Co se týče matematiky obsahovala poznatky o jeho novém objevu diferenciálního a integrálního počtu, který mu kromě řešení fyzikálních problémů pomohl k objevení nových metod výpočtu π . [11] Podrobněji budou tyto metody popsány v kapitole 4.2.

3.3.6 John Machin (1686 – 1751)

Machin jako první dosáhl symbolické hranice 100 desetinných míst. Objev metody, pomocí které toho dosáhl, znamenal další pomyslnou revoluci ve výpočtu π . Machinovi se prostřednictvím trigonometrických vztahů podařilo rozdělit Leibnizovu (Gregoryho) řadu na řady dvě. Tento postup rozdělení Leibnizovy řady se osvědčil a postupně vznikl celý soubor vzorců pro výpočet π , který nese název *Machin-like*. S takovýmto typem vzorce byl mnohokrát pokořen světový rekord ve výpočtu desetinných míst. Vytvoření takovýchto vzorců bude odvozeno v kapitole 4.3.2. [7]

3.3.7 Leonhard Euler (1707 – 1783)

Je mnohými lidmi považován za největšího matematika všech dob. V množství průlomů, které v rozličných oborech matematiky učinil, nemá Euler takřka konkurenci. Za svůj život publikoval přesně 886 knih, které zahrnovaly nové poznatky například z diferenciálního počtu, teorie grafů ale také z mechaniky, optiky a astronomie. V mnoha různých oblastech nejen matematiky se můžeme setkat s rovnicemi, či algoritmy co nesou Eulerovo jméno. Zavedl také spoustu moderních matematických symbolů, které jsou používány dodnes. Jedním z nich je právě označení poměru obvodu kruhu k jeho průměru jakožto řecké písmeno π . Co se týče výpočtu π odvodil vzorec založený na Machinově principu, který byl své doby tím nejefektivnějším. Jedem z dalších významných objevů zahrnující π bylo nalezení řešení tzv. Basilejského problému, který se ptá na součet nekonečné řady převrácených hodnot čtverců přirozených čísel.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Řešení tohoto problému mělo významný dopad na vývoj nejen matematické analýzy ale také na teorie čísel a později i komplexní analýzy. [7]

3.3.8 Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855)

Gauss je dalším geniálním evropským matematikem, který je stejně jako Euler často považován za největšího matematika všech dob. Gauss měl velký přínos v matematických disciplínách jako je algebra, statistika, teorie čísel a v mnoha dalších. Mimo matematiku se zabýval také astronomií, elektrostatikou, či optikou. Stejně jako Euler odvodil vzorec založený na Machinově principu pro výpočet π , který byl ještě efektivnější než ten Eulerův. Především se ovšem na jeho práci zakládá tzv. Gauss-Legendre algoritmus, který byl několikrát využit pro překonání rekordu. Dalším významným objevem zahrnující konstantu π je výsledek tzv. Gaussova integrálu

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi},$$

který hraje významnou roli především ve statistice u popisu různých distribucí pravděpodobnosti. [5]

3.3.9 Srinivasa Ramanujan (1887-1920)

Ramanujan byl mimořádně talentovaný indický matematik, který několik let studoval ve Velké Británii. Mezi jeho disciplíny patřila především teorie čísel, zabýval se však také studiem konečných, nekonečných a hypergeometrických řad. Co bylo na Ramanujanovi tak pozoruhodné kromě jeho intelektu je, že během svého akademického působení v Anglii se zabýval složitými matematickými problémy v oblastech, kde měl velmi malé nebo žádné

vzdělání. Před svým příjezdem do Anglie komunikoval formou dopisů s různými matematiky, například s G. H. Hardyem, kterému v jednom ze svých dopisů poslal následující rovnici, bez uvedení jakékoliv metody postupu

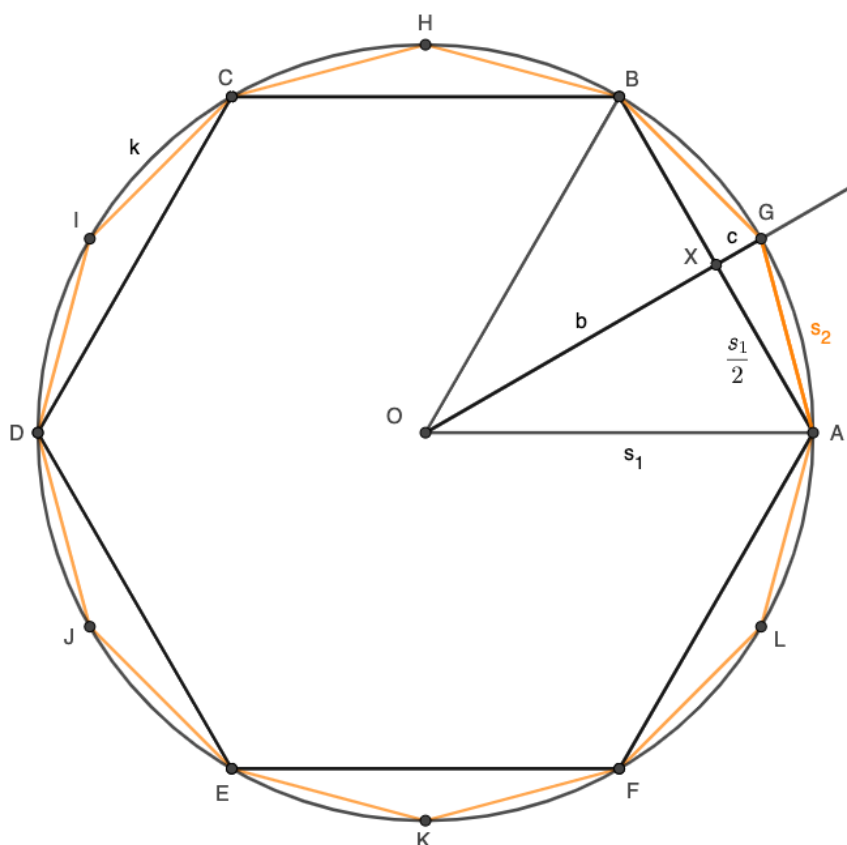
$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{99^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!}{n!^4} \frac{26390n + 1103}{396^{4n}}$$

Ramanujan za svůj život přišel na nejméně 15 podobných rovnic, které je možné využít k výpočtu π , přičemž na jejich principu se zakládá algoritmus, se kterým bylo pokořeno posledních 9 světových rekordů ve výpočtu desetinných míst. [5]

4 METODY APROXIMACE II

4.1 Archimédova metoda

Sestrojíme kružnici k o poloměru s_1 . Do ní vepíšeme pravidelný šestiúhelník ABCDEF. Sestrojíme úsečky OB a OA a vytvoříme tak rovnostranný trojúhelník OAB se stranou délky s_1 . Rozpůlíme úhel BOA a vedeme jeho středem polopřímku. Označíme průsečíky polopřímky se stranou BA jako bod X a s kružnicí k jako bod G. Sestrojíme úsečku GA, která se rovná straně dvanáctiúhelníku vepsaného do kružnice. Pro přehlednost při výpočtech pojmenujeme úsečky: $OX = b$, $XG = c$, $GA = s_2$.



Obrázek 3: Rozdvojování stran pravidelného šestiúhelníku

Způsob, jakým postupoval Archimédes, mohl vypadat asi takto.

Z Pythagorovy věty zjistíme stranu dvanáctiúhelníku s_2

$$s_2 = \sqrt{c^2 + \frac{s_1^2}{2^2}}, \quad (4.1)$$

strana c se rovná

$$c = s_1 - b \quad (4.2)$$

a nakonec stranu b určíme znovu pomocí Pythagorovy věty

$$b = \sqrt{s_1^2 - \frac{s_1^2}{2^2}} \quad (4.3)$$

Podobným postupem za užití rozdělování úhlů bychom postupovali i u šestiúhelníku opsaného. Narozdíl od vepsaného je ale zapotřebí úhel náležící jedné straně šestiúhelníku vnitřní strany rozpůlit dvakrát (na 4x menší úhel) a vést kolmici z průsečíku druhé osy s kružnicí. Průsečíky této kolmice s první osou úhlu a stranou rovnostranného trojúhelníku pak značí dva, vedle sebe ležící, vrcholy dvanáctiúhelníku opsaného. Vzdálenost mezi nimi (délka strany) pak lze opětovně snadno zjistit Pythagorovou větou.

Matematicky bychom tento postup mohli pomocí dnešní terminologie zapsat následovně:

Úhel ve středu pravidelného n -úhelníku náležící jedné straně

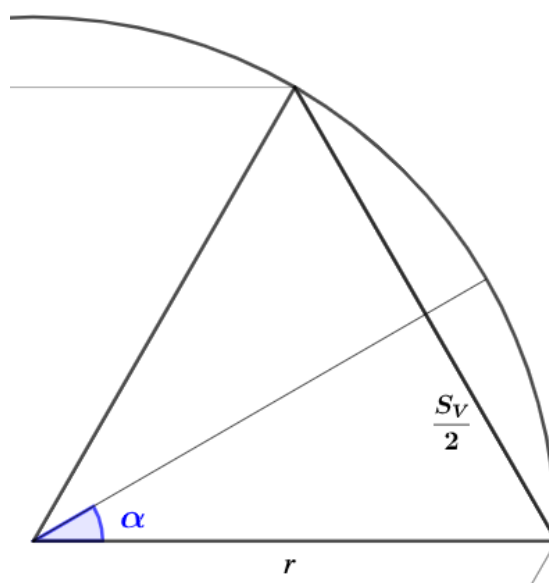
$$\alpha = \frac{2\pi}{n}. \quad (4.4)$$

Tento úhel rozpůlíme pro vytvoření pravého úhlu

$$\alpha = \frac{\pi}{n}. \quad (4.5)$$

Potom se bude rovnat délka jedné strany vepsaného pravidelného mnohoúhelníku

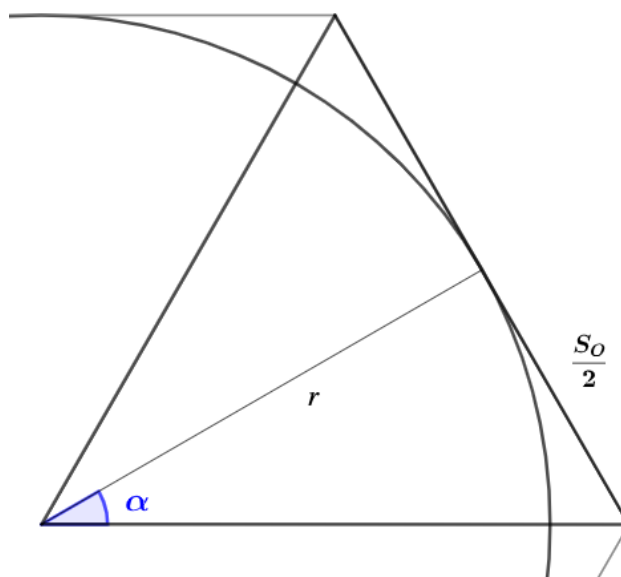
$$s_V = 2r \sin \alpha \quad (4.6)$$



Obrázek 4: Délka strany vepsaného šestiúhelníku

a délka strany opsaného pravidelného mnohoúhelníku

$$s_0 = 2r \tan \alpha \quad (4.7)$$



Obrázek 5: Délka strany opsaného šestiúhelníku

a to nám dává dolní a horní mez ohraničující kruh mezi nimi jako

$$n s_V < 0 < n s_0 . \quad (4.8)$$

Po dosazení dostáváme

$$n 2r \sin \alpha < 2\pi r < n 2r \tan \alpha \quad (4.9)$$

a po vydělení $2r$

$$n \sin \alpha < \pi < n \tan \alpha . \quad (4.10)$$

Jestliže chceme k -krát zdvojnásobit počet stran dostaneme

$$2^k n \sin \frac{\alpha}{2^k} < \pi < 2^k n \tan \frac{\alpha}{2^k} \quad (4.11)$$

Když za k dosadíme velké číslo, bude se horní i dolní mez přibližovat reálné hodnotě π s libovolnou námi zvolenou přesností. [7]

4.2 Integrální počet

Výpočet π pomocí integrálního počtu lze nejčastěji realizovat přes funkce, které nějakým způsobem popisují kruh. Jedná se tedy o funkce popisující různé kruhové geometrické objekty, nebo funkce goniometrické – přesněji přes jejich inverzní zobrazení (cyklometrické funkce). Jde je ale také vypočítat přes funkce, které po geometrické stránce nemají s kruhem nic společného.

Pro názornou ukázkou výpočtu se odkážeme na práci Isaaca Newtona, jednoho ze samotných zakladatelů integrálního počtu. Před ukázkou Newtonovy metody výpočtu bude zapotřebí uvést jeden z jeho objevů popsanych v knize *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. [11]

4.2.1 Rozvoj binomické věty

Uvažujme Pascalův trojúhelník.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & & 1 & 1 & & & \\
 & & & 1 & 2 & 1 & & & \\
 & & 1 & 3 & 3 & 1 & & & \\
 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & & \\
 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & & &
 \end{array}$$

Newton si všiml, že čísla, které obsahuje odpovídají koeficientům členů, vzniklých po rozepsání umocněného dvojčlenu. Čísla v třetí úrovni (od vrcholu) trojúhelníku odpovídají koeficientům rozepsaného dvojčlenu umocněného na druhou, ve čtvrté úrovni dvojčlenu umocněného na třetí a dál. Na základě tohoto faktu definoval tzv. binomickou větu. [11] Její definice vypadá následovně

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad a, b \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{N}. \quad (4.12)$$

Se znalostí této věty postupoval Newton zhruba následujícím způsobem [2]. Dosadíme koeficienty $a = 1$, $b = x$ a větu rozepíšeme

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)x^3}{3!} + \dots \quad (4.13)$$

V uvedené definici si můžeme všimnout, že $n \in \mathbb{N}$, právě z důvodu, že Pascalův trojúhelník obsahuje pouze přirozená čísla. Nic ale Newtonovi nebránilo v dosazení čísla, které nebylo z oboru přirozených čísel [11]. Při dosazení $n = -1$ dostáváme

$$\frac{1}{(1+x)} = 1 - x + \frac{-1(-1-1)x^2}{2!} + \frac{-1(-1-1)(-1-2)x^3}{3!} + \dots \quad (4.14)$$

Což se rovná

$$\frac{1}{(1+x)} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots \quad (4.15)$$

Po ověření, že rovnost platí, se Newton rozhodl dosadit za n i racionální čísla. [2]

Při dosazení $n = 1/2$ dostaneme

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)x^2}{2!} + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)x^3}{3!} + \dots \quad (4.16)$$

Po úpravách dostáváme další nekonečnou alternující řadu.

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \dots \quad (4.17)$$

Newton tímto způsobem transformoval binomickou větu na nekonečný rozvoj (binomickou řadu). Objev tohoto principu mu umožňoval určovat odmocniny z čísel mnohem efektivněji.

Rozvoj binomické věty na binomickou řadu lze zapsat následovně

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} x^k \quad (4.18)$$

Při dosazení za $n = 1/2$ našel Newton spojitost však ještě s něčím jiným. Všiml si, že když z implicitního vyjádření jednotkové kružnice explicitně vyjádří y (pouze nezápornou část), bude tato forma splňovat požadavky pro zmíněný rozvoj binomické věty. [11]

4.2.2 Funkce popisující kruhové geometrické objekty

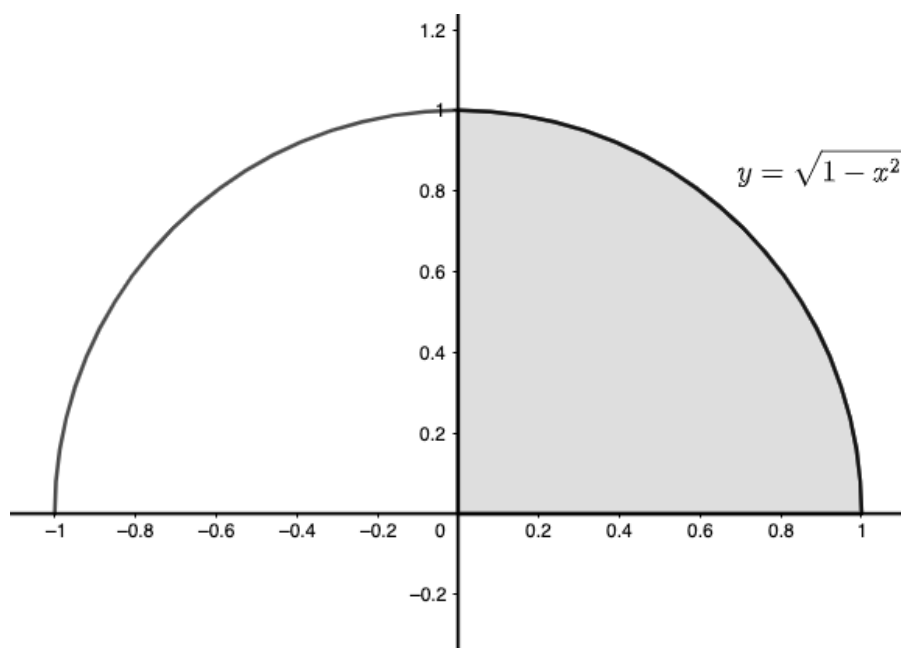
Uvažujme rovnici jednotkové kružnice v kartézské soustavě souřadnic

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (4.19)$$

Nyní vyjádříme explicitně y (pouze nezápornou část)

$$y = \sqrt{1 - x^2} = (1 - x^2)^{1/2} \quad (4.20)$$

Vzniklá rovnice udává půlkruh s poloměrem $r = 1$ a středem v počátku souřadnicového systému.



Obrázek 6: Ukázka výpočtu přes integraci funkce popisující kruhový geometrický objekt

Zde přichází do hry nové poznatky o integrálním počtu. Pomocí integrace (podle Newtona proces hledání antiderivace) jsme schopni zjistit obsah plochy pod křivkou v určitém intervalu spojitě funkce

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (4.21)$$

Počátek intervalu integrace zvolíme $a = 0$, aby druhý člen $F(a)$ vyšel roven nule, čímž se ho zbavíme při vyčíslení. Tímto vznikne čtvrtkruh, jejíž obsah se za použití vzorce

$S = \pi r^2 = \pi/4$ rovná

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx \quad (4.22)$$

Provedeme rozvoj binomické věty podle (4.18) a po úpravách dostáváme

$$\pi = 4 \int_0^1 \left[1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{16} - \dots \right] dx. \quad (4.23)$$

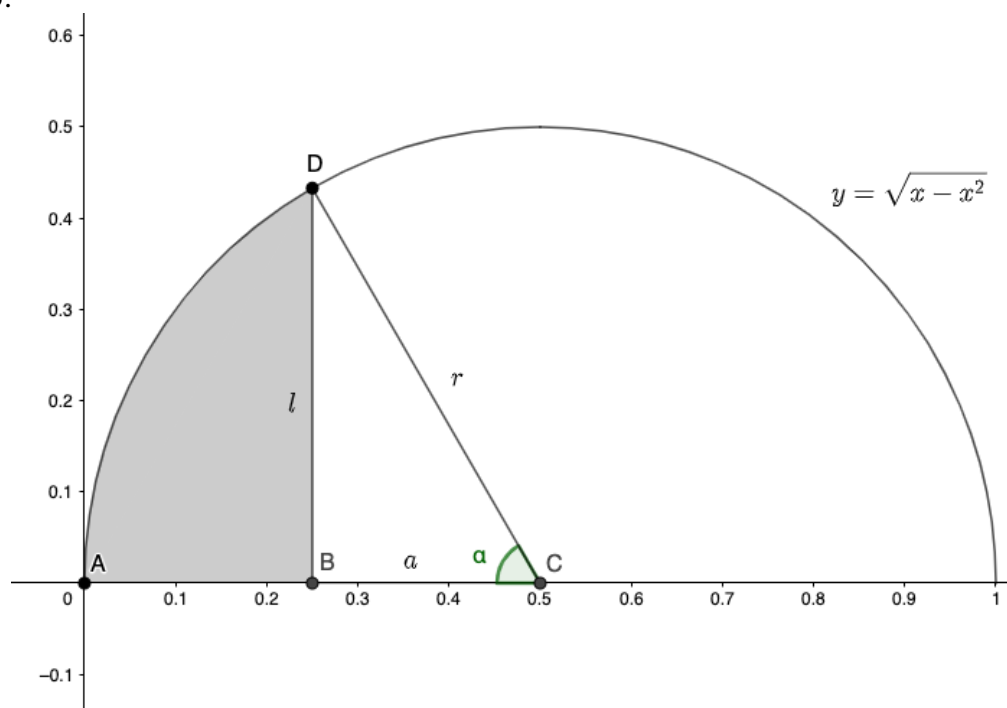
Po integraci a vyčíslení vychází

$$\pi = 4 - \frac{2}{3} - \frac{1}{10} - \frac{1}{28} - \frac{20}{1152} - \dots. \quad (4.24)$$

Zmíněná nekonečná řada aproximuje π s libovolnou přesností. Když se ovšem podíváme na Newtonovu původní práci, zjistíme, že k výpočtu přistupoval poněkud komplikovanějším způsobem. Uvažoval následující rovnici. [7]

$$y = \sqrt{x - x^2} = \sqrt{x}\sqrt{1-x} \quad (4.25)$$

Tato rovnice popisuje půlkruh, který má střed v bodě $C \rightarrow [x, y] = [0.5, 0]$ a má poloměr $r = 0.5$.



Obrázek 7: Newtonův původní způsob výpočtu π pomocí integrálního počtu

Místo integrace na intervalu $\langle 0, 0.5 \rangle$ zvolil interval $\langle 0, 0.25 \rangle$ z důvodu rychlejší konvergence výsledné řady. Aby mohl zjistit hodnotu obsahu vzniklé vyznačené kruhové úseče ABD, zkonstruoval vedle ní pravoúhlý trojúhelník CBD o obsahu S_T , čímž vytvořil kruhovou výseč ACD o obsahu S_V . Z toho dostáváme rovnici

$$S_V - S_T = \int_0^{1/4} \sqrt{x - x^2} dx. \quad (4.26)$$

Stranu l zjistíme Pythagorovou větou

$$l = \sqrt{r^2 - a^2} = \frac{\sqrt{3}}{4}. \quad (4.27)$$

Obsah trojúhelníku CBD

$$S_T = \frac{a \cdot l}{2} = \frac{\sqrt{3}}{32} \quad (4.28)$$

Úhel α

$$\alpha = \arcsin \frac{l}{r} = \frac{\pi}{3} \quad (4.29)$$

Obsah kruhové výseče ACD

$$S_V = \frac{\alpha \cdot r^2}{2} = \frac{\pi}{24} \quad (4.30)$$

Nyní dosadíme do rovnice (4.26)

$$\frac{\pi}{24} - \frac{\sqrt{3}}{32} = \int_0^{1/4} \sqrt{x - x^2} dx \quad (4.31)$$

a vyjádříme π

$$\pi = 24 \left(\frac{\sqrt{3}}{32} + \int_0^{1/4} \sqrt{x} \sqrt{1-x} dx \right). \quad (4.32)$$

Provedeme Newtonův rozvoj binomické věty podle (4.18)

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 24 \int_0^{1/4} \sqrt{x} \left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} - \dots \right) dx \quad (4.33)$$

Po roznásobení, integraci a následných úpravách dostaneme

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 24 \left[\frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{1}{5} x^{5/2} - \frac{1}{28} x^{7/2} - \frac{1}{72} x^{9/2} - \frac{5}{128} x^{11/2} - \dots \right]_0^{1/4}. \quad (4.34)$$

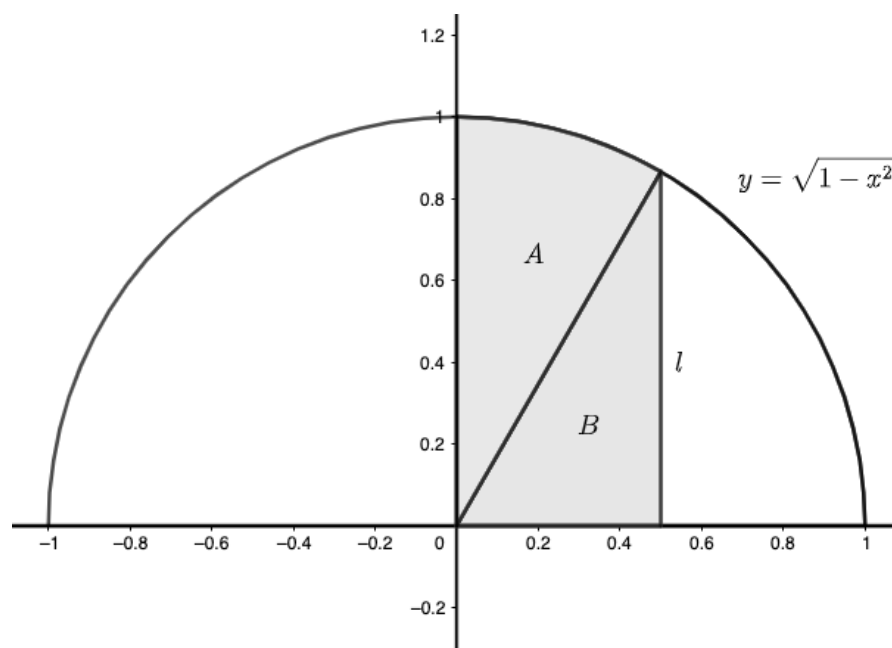
Vyčíslíme a dostáváme výsledek

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 24 \left(\frac{2}{3 \cdot 2^3} - \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{28 \cdot 2^7} - \frac{1}{72 \cdot 2^9} - \frac{5}{704 \cdot 2^{11}} - \dots \right). \quad (4.35)$$

Když se podíváme na (4.34), můžeme si všimnout, že každý další člen se oproti řadě, kterou bychom dostali integrací na intervalu $\langle 0, 0.5 \rangle$, zmenší z $1/2$ na $1/4$ – tedy dvakrát, čímž se zrychlí konvergence. Při sečtení prvních pěti členů se odchýlíme jen o 10^{-5} od správné hodnoty, a abychom se dostali na stejnou přesnost 35ti desetinných míst jako Ludolf se svým mnohoúhelníkem s 2^{62} stranami, stačilo by nám sečíst prvních 50 členů této řady

(4.35). Na rozdíl od Ludolfa však Newton neztrácel s určováním desetinných míst čas a vypočítal jej pouze na 15 desetinných míst. K tomu mu stačilo prvních 22 členů této řady (4.35). [7]

Stejným způsobem jako Newton můžeme urychlit konvergenci výsledné řady u vzorce (4.22) zkrácením intervalu, na kterém integrujeme na polovinu, tedy z $\langle 0,1 \rangle$ na $\langle 0, \frac{1}{2} \rangle$. Tímto nám vznikne obrazec, který můžeme rozdělit na kruhovou výseč o obsahu A a pravoúhlý trojúhelník o obsahu B .



Obrázek 8: Zrychlení konvergence výsledné řady u Obrázku 6

Čímž vzniká nová rovnice:

$$A + B = \int_0^{1/2} \sqrt{1 - x^2} dx \quad (4.36)$$

Úhel mezi přeponou trojúhelníku a osou y můžeme zjistit za pomoci funkce $\arcsin x$. Při využití vzorce pro obsah kruhové výseče $S = \frac{1}{2} \theta \cdot r^2$ dostaneme $A = \frac{1}{2} \arcsin 0,5 = \pi/12$. Obsah B potom bude: $B = \frac{1}{2} \cdot (0,5 \cdot l) = \frac{1}{2} \cdot (0,5 \cdot \sqrt{1 - 0,5^2}) = \sqrt{3}/8$

Po aplikování Newtonova rozvoje binomické věty (4.18) a dosazení dostáváme

$$\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8} = \int_0^{1/2} \left[1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{16} - \frac{5x^8}{128} \dots \right] dx \quad (4.37)$$

a po integraci a vyčíslení nám vyjde

$$\pi = 12 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{48} - \frac{1}{1280} - \frac{1}{14336} - \frac{5}{589824} - \dots \right) - \frac{3\sqrt{3}}{2}. \quad (4.38)$$

Při sečtení 5 členů této řady dostáváme hodnotu vzdálenou o $3 \cdot 10^{-5}$ od reálné hodnoty π . Konverguje tím pádem o trochu pomaleji než řada (4.35), kterou použil pro výpočet Newton.

4.2.3 Cyklometrické funkce

Arkus sinus

S další rovnicí, kterou jsme schopni vypočítat π za pomoci integrálního počtu, také přišel Newton [11]

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}. \quad (4.39)$$

Po rozvoji binomické věty podle (4.18) a dostaneme

$$\arcsin x = \int_0^x \left(1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}t^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}t^6 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}t^8 + \dots \right) dt. \quad (4.40)$$

Po integraci dostáváme

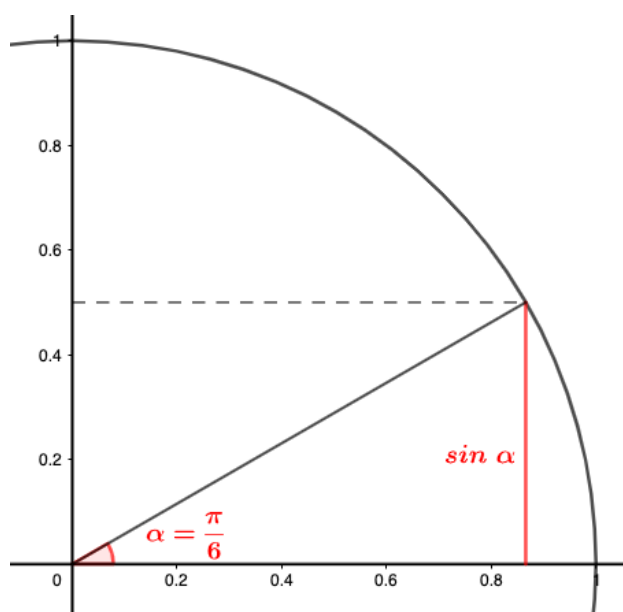
$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \frac{35x^9}{1152} + \dots, \quad x \in (-1, 1) \quad (4.41)$$

Po vyšetření konvergenčního intervalu dosazením krajních hodnot lze ověřit pomocí matematické indukce, že konvergence platí i v bodech $x = 1$ a $x = -1$. [10] Z definice funkce arkus sinus plyne

$$x = \sin \alpha. \quad (4.42)$$

Pokud chceme, aby výsledná řada obsahovala pouze racionální čísla, dosadíme například za $\alpha = 30^\circ = \pi/6$, čímž dostaneme

$$x = \sin \frac{\pi}{6} = 0.5 \Leftrightarrow \arcsin 0.5 = \frac{\pi}{6} \quad (4.43)$$



Obrázek 9: Cyklometrické funkce – arkus sinus

Dosadíme $x = 0.5$ do rovnice (4.41)

$$\arcsin 0.5 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6 \cdot 2^3} + \frac{3}{40 \cdot 2^5} + \frac{5}{112 \cdot 2^7} + \frac{35}{1152 \cdot 2^9} + \dots \quad (4.44)$$

A vyjádříme π z rovnice (4.43)

$$\pi = 6 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6 \cdot 2^3} + \frac{3}{40 \cdot 2^5} + \frac{5}{112 \cdot 2^7} + \frac{35}{1152 \cdot 2^9} + \dots \right). \quad (4.45)$$

Při sečtení 5 členů této řady dostáváme hodnotu vzdálenou o $8 \cdot 10^{-5}$ od reálné hodnoty π .

Další úhel, který splňuje $x \in \mathbb{Q}$ je $\alpha = \pi/2$. Dosazením do rovnice (4.42) nám dá

$$x = \sin \frac{\pi}{2} = 1 \Leftrightarrow \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} \quad (4.46)$$

Po dosazení $x = 1$ do (4.41) a vyjádření π vznikne další řada aproximující π na libovolnou přesnost. Ta ovšem konverguje mnohonásobně pomaleji než (4.45). Sečtením prvních 1000 členů řady, kterou bychom dostali při dosazení $x = 1$, nedostaneme π ani na přesnost jediného desetinného místa. Z tohoto důvodu ji budeme považovat za bezpředmětnou.

Arkus tangens

Za použití této funkce vznikla první nekonečná řada pro π . K její finální podobě (stejně jako u funkce arkus sinus) se dá dostat více způsoby, než jen integrálním počtem a následným rozvojem binomické věty. Platnost následující rovnice, byla známa ještě před samotným objevem integrálního počtu. [7] Lze ji zapsat jako

$$\arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}. \quad (4.45)$$

Provedeme zmíněný rozvoj binomické věty (4.18) a dostaneme

$$\arctan x = \int_0^x (1 - t^2 + t^4 - t^6 + t^8 - \dots) dt. \quad (4.46)$$

Po integraci a vyčíslení vychází

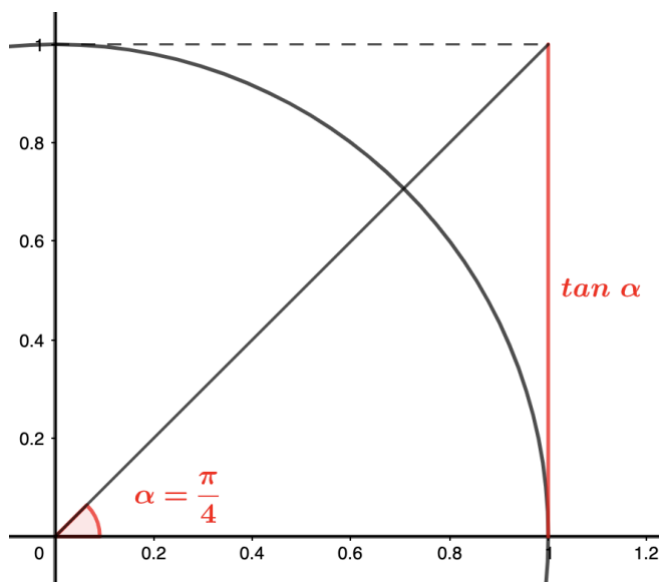
$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \dots, \quad |x| \leq 1. \quad (4.47)$$

Tato řada se nazývá Madhava-Gregoryho, či jen **Gregoryho**. I zde, po vyšetření konvergenčního intervalu, dosazením krajních hodnot, lze ověřit pomocí Leibnizova kritéria, že konvergence platí i v bodech $x = 1$ a $x = -1$. [10] Vzhledem k definici funkce arkus tangens platí

$$x = \tan \alpha, \quad |x| \leq 1 \Rightarrow \alpha \in \left\langle -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right\rangle \quad (4.48)$$

Znovu dosadíme za α takový úhel, aby výsledná řada obsahovala pouze racionální členy. Při dosazení $\alpha = 45^\circ = \pi/4$ do rovnice (4.48) dostaneme:

$$x = \tan \frac{\pi}{4} = 1 \Leftrightarrow \arctan 1 = \frac{\pi}{4} \quad (4.49)$$



Obrázek 10: Cyklometrické funkce – arkus tangens

Dosadíme $x = 1$ do rovnice (4.47)

$$\arctan 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots \quad (4.50)$$

A vyjádřením π z rovnice (4.49) dostaneme výsledek

$$\pi = 4 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots \right) \quad (4.51)$$

Pro získání odchylky menší než 1% od reálné hodnoty π musíme sečíst více než 300 členů této řady. Její rychlost konvergence je tedy mnohem pomalejší, než u řady arcsin 0.5.

Jedná se o známou aproximaci π , která byla objevena 3 lidmi nezávisle na sobě, poprvé už v 13. století. Nazývá se Madhava-Gregory-Leibnizova (někdy Gregory-Leibnizova, či jen **Leibnizova**) – toto jméno reflektuje v jakém pořadí ji jednotliví autoři objevili. [7]

4.2.4 Ostatní funkce

Jak bylo zmíněno na začátku této kapitoly, lze π vypočítat pomocí integrálního počtu také přes funkce, které nemají zdánlivě s kruhovými objekty nic společného. Autorem dvou takových rovnic je Leonhard Euler. [5] První rovnice, na kterou přišel, má tvar

$$\pi = \frac{2 \cdot 6}{5} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}. \quad (4.52)$$

Na druhou rovnici podobného tvaru přišel o 9 let později [5]

$$\pi = 4 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \cdot \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^4}} \quad (4.53)$$

Se zmíněnými rovnicemi (4.52) a (4.53) však nikdo, včetně Eulera, oficiálně rekord ve výpočtu π na největší přesnost nepřekonal. [2]

4.3 Rozvoj do mocninných řad

V předchozí kapitole bylo uvedeno, že lze pomocí rozvoje binomické věty a následné integrace odvodit nekonečnou (mocninou) řadu pro π . Z historie víme, že určité instance takovýchto řad byly známy již před objevením rozvoje binomické věty, či integrálního počtu. Ovšem až roku 1715 byla Brookem Taylorem objevena obecná metoda pro takovýto rozvoj funkcí, splňujících určitá kritéria, do nekonečných mocninných řad. [2]

4.3.1 Taylorův/Maclaurinův rozvoj

Princip Taylorova rozvoje vychází z převodu funkce nepolynomiální na její polynomiální formu, čímž jsme schopni aproximovat její hodnotu v blízkosti nějakého bodu, ve kterém známe její hodnotu (čím blíže k bodu, tím přesnější). Je definován následovně: Necht' $f(x)$ je funkce a bod a je bod ležící v definičním oboru $D(f)$ této funkce. Za předpokladu, že existují derivace všech řádů funkce $f(x)$ v bodě a , lze funkci $f(x)$ zapsat jako Taylorovu řadu této funkce.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots \quad (4.54)$$

kde a je námi zvolený bod, v jehož místě chceme aproximovat hodnotu funkce $f(x)$, a $f^{(n)}(a)$ je hodnota n -té derivace této funkce v bodě a .

Speciální případ Taylorových řad vznikne, rozhodneme-li se aproximovat hodnotu funkce v okolí bodu $a = 0$. Takové řady se nazývají Maclaurinovy.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots \quad (4.55)$$

Řady, které jsme dostali pro cyklometrické funkce, po rozvoji binomické věty a následné integraci, můžeme zapsat obecnější formou jako Maclaurinovy řady.

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)! x^{2n+1}}{4^n (n!)^2 (2n+1)}, \quad |x| \leq 1 \quad (4.56)$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| \leq 1 \quad (4.57)$$

Právě rozvoj funkce arkus tangens do řady (4.57) byl v historii jednou z nejčastěji využívaných řad pro výpočet π . Jedná se pouze o formální zápis již zmiňované Gregoryho řady (4.47), u které při dosazení $x = 1$ dostaneme řadu Leibnizovu (4.51). Problém pomalé konvergence této řady vyřešil bez jakékoliv modifikace jejího tvaru Abraham Sharp dosazením $x = \sqrt{1/3}$ místo $x = 1$. Z čehož dostal řadu

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \dots \right) \quad (4.58)$$

se kterou se mu podařilo roku 1699 vypočítat π na 72 desetinných míst. I když se jednalo o dosavadní rekord, způsob výpočtu, jakým ho dosáhl, nebyl ničím inovativní. [7]

4.3.2 Machin-like vzorce

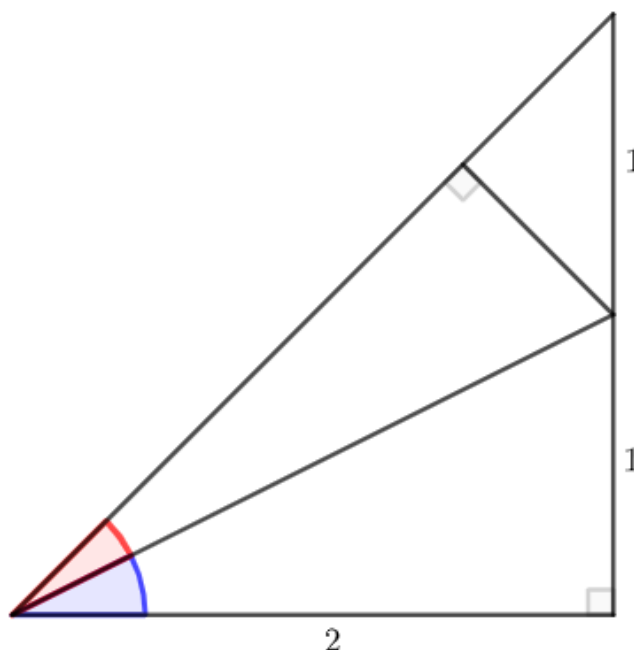
Tyto vzorce vznikají na principu rozdělení úhlu $\pi/4 = \arctan 1$ na lineární kombinaci úhlů o menší hodnotě. Takovýchto kombinací úhlů, do jakých jde $\arctan 1$ rozdělit, je nekonečně mnoho, žádoucí je proto hledat takové, jejichž vlastnosti poskytnou kompromis mezi rychlou konvergencí a „snadným“ výpočtem. Tyto vzorce mají tvar

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^N a_n \arctan \frac{1}{b_n}, \quad a_n, b_n \in \mathbb{Q}, \quad (4.59)$$

přičemž jeden ze způsobů, jak je lze sestavit, využívá trigonometrického vzorce

$$\arctan \alpha = \arctan \beta + \arctan \frac{\alpha - \beta}{1 + \alpha\beta}. \quad (4.60)$$

Rozdělení úhlu $\arctan 1$ lze dobře vizualizovat s jedním z nejtriviálnějších Machin-like vzorců, který objevil Leonhard Euler



Obrázek 11: Ukázka principu rozdělení úhlu $\arctan 1$

$$\arctan 1 = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} \quad (4.61)$$

Euler k rovnici (4.61) nepřidal žádné vysvětlení v podobě vzorce, který by využil k jejímu odvození, popř. k potvrzení její platnosti, jednoduše tuto rovnici uvedl v jedné ze svých publikací jako zřejmý fakt. Ověřit platnost této rovnice lze snadno pomocí vzorce (4.60) nebo za využití Pythagorovy věty. [14]

John Machin

Před odvozením Machinovy metody je třeba uvést jeden vztah z trigonometrie

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}. \quad (4.62)$$

Machin se nepokoušel do řady arkus tangens dosazovat argument x , ale jeho převrácenou hodnotu $1/x$. Při dosazení $\alpha = \beta$ a následovně $\tan \gamma = 1/5$ do (4.62) dostaneme

$$\tan 2\gamma = \frac{2 \tan \gamma}{1 - \tan^2 \gamma} = \frac{5}{12}. \quad (4.63)$$

Tuto operaci zdvojnásobení úhlu provedeme ještě jednou, z čehož po úpravách dostaneme

$$\tan 4\gamma = \frac{2 \tan 2\gamma}{1 - \tan^2 2\gamma} = \frac{120}{119} \approx 1,008. \quad (4.64)$$

Machin se tak dostal k výsledku téměř rovnému 1, s kterým by dostal Leibnizovu řadu (4.51), s jejíž výsledkem byl dobře obeznámen. Aby se tedy dostal ke známému výsledku $\pi/4$, zjistil rozdíl úhlů za užití již zmíněného vzorce (4.62). Při dosazení $\alpha = 4\gamma$, $\beta = -\pi/4$ do (4.62) dostaneme

$$\tan\left(4\gamma - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan 4\gamma - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \cdot \tan 4\gamma} \quad (4.65)$$

$$\tan\left(4\gamma - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\frac{120}{119} - 1}{1 + 1 \cdot \frac{120}{119}} = \frac{1}{239} \quad (4.66)$$

Rozdíl těchto úhlů je

$$4\gamma - \frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{239} \quad (4.67)$$

Výsledná rovnost má potom tvar

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239} \quad (4.68)$$

Výsledná rovnice za užití řady Gregoryho řady (4.47) má tvar

$$\pi = 16 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \dots \right) - 4 \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{5 \cdot 239^5} - \dots \right). \quad (4.69)$$

Zde si můžeme všimnout důvodu, proč je takovéto rozdělení Leibnizovy řady pro výpočet výhodné. Čím menší je úhel, tím více se urychlí konvergence příslušné řady, což můžeme vidět především u druhé řady v (4.69). [1]

Leonhard Euler

Jeden ze zajímavých, méně známých, Eulerových objevů týkajících se nekonečných řad byla transformace řady pro arkus tangens (4.57) na řadu s mnohem rychlejší konvergencí [15]

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!} \frac{x^{2n+1}}{(1+x^2)^{n+1}}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (4.70)$$

Tato řada může být při dosazení $x = 1$, stejně jako Leibnizova řada (4.51), využita pro výpočet π . Pro odchylku menší než 1% však stačí sečíst pouze 6 jejích členů, oproti nejméně 300 u té Leibnizovy. Co se týče rozvoje řady arkus tangens, přišel Euler ještě s jedním vzorcem.

$$\arctan \frac{x}{y} = \arctan \frac{ax-y}{ay+x} + \arctan \frac{b-a}{ab+1} + \arctan \frac{c-b}{cb+1} + \dots \quad (4.71)$$

Jestliže například dosadíme za a, b, c lichá čísla dostaneme

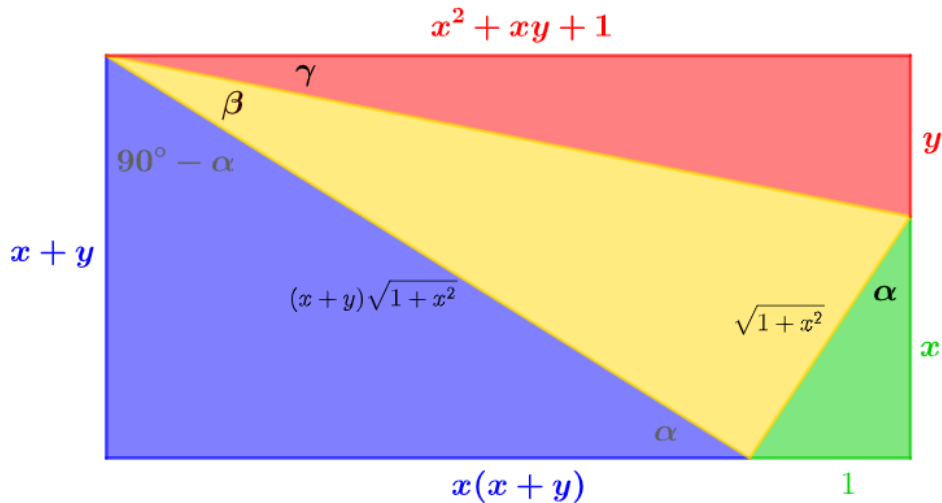
$$\frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{8} + \arctan \frac{1}{18} + \dots \quad (4.72)$$

Euler hledal pro výpočet π řady, s co největší rychlostí konvergence. Rozhodl se navázat na Machina s jeho technikou. Nejenže Machin-like vzorců objevil hned několik, ale rovnou odvodil univerzální vzorec pro jejich vytvoření, který má tvar

$$\arctan \frac{1}{x} = \arctan \frac{1}{x+y} + \arctan \frac{y}{x^2+xy+1}, \quad x, y \in \mathbb{Z}. \quad (4.73)$$

Platnost tohoto vzorce lze poměrně snadno odvodit za použití jednoduchých geometrických vztahů následujícím způsobem:

Nejprve sestrojíme pravoúhlý trojúhelník (zelený) o délce odvěsen 1 a x . α . Dále sestrojíme nový (modrý) pravoúhlý trojúhelník tak, že vezmeme rozměry původního trojúhelníku a vynásobíme je $x+y$. Modrý trojúhelník následně otočíme o 90° a přiložíme k zelenému trojúhelníku tak, aby úhel mezi jejich přeponami byl 90° . Dalším krokem je sestřit takový pravoúhlý trojúhelník (červený), aby odvěsny všech 3 trojúhelníků utvořili obdélník. Vznikne nám tak další (žlutý) pravoúhlý trojúhelník, který je uprostřed tohoto obdélníku. Nakonec označíme ostré úhly v každém trojúhelníku námi zvolenou proměnnou.



Obrázek 12: Geometrický "důkaz" Eulerova vzorce pro sestavení Machin-like vzorce [17]

Z levého horního rohu obdélníku pak vznikne rovnice

$$90^\circ - \alpha + \beta + \gamma = 90^\circ \rightarrow \alpha = \beta + \gamma. \quad (4.74)$$

Pythagorovou větou zjistíme délky potřebných stran. Z obrázku pak se znalostí rovnice (4.74) lze snadno ověřit, že

$$\arctan \frac{1}{x} = \arctan \frac{1}{x+y} + \arctan \frac{y}{x^2 + xy + 1}. \quad (4.75)$$

Euler pokračoval dál ve snaze najít řadu pro arkus tangens, co konverguje rychleji než všechny ostatní. Řadu, kterou našel má tvar

$$\arctan x = \left(\frac{y}{x}\right) \left(1 + \frac{2}{3}y + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}y^2 + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7}y^3 + \dots\right), \quad (4.76)$$

kde $y = x^2/(1+x^2)$, z čehož vychází po úpravách za použití Machinovy metody

$$\pi = 20 \arctan \frac{1}{7} + 8 \arctan \frac{3}{79}. \quad (4.77)$$

To byla té doby nejrychleji konvergující řada pro výpočet π . Při sečtení pouhých 5 členů obou řad vyjde výsledek vzdálený o 10^{-9} od té reálné (za použití Gregoryho řady (4.47)). Euler se zde ale nezastavil, řady ze vzorce (4.77) pomocí chytrých substitucí, s rozsáhlými znalostmi algebry, upravil takovým způsobem, aby byli co nejlehčí pro numerický výpočet. [14]

$$\pi = \left\{ \begin{aligned} &\frac{28}{50} \left[1 + \frac{2}{3} \left(\frac{2}{100}\right) + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \left(\frac{2}{100}\right)^2 + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} \left(\frac{2}{100}\right)^3 + \dots \right] \\ &+ \frac{30\,336}{100\,000} \left[1 + \frac{2}{3} \left(\frac{144}{100\,000}\right) + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \left(\frac{144}{100\,000}\right)^2 + \dots \right] \end{aligned} \right\} \quad (4.78)$$

Eulerovi se údajně tímto způsobem podařilo pouze s tužkou a papírem vypočítat přesně 20 desetinných míst během jediné hodiny [7]. Podobně jak Newton však s honbou za co nejpřesnější aproximací neztrácel čas.

Novodobé vzorce

První výpočet π na elektronickém počítači ENIAC od firmy IBM byl realizován roku 1949 za využití původního vzorce se kterým přišel Machin (4.68). V následujících letech, byl tento vzorec ještě několikrát použit pro pokošení rekordu ve výpočtu na co největší počet desetinných míst. V roce 1958 na 10000 míst, v roce 1959 na 16167 míst, a nakonec v roce 1961 na 20000 míst. Ještě téhož roku 1961 byla překonána hranice 100 000 desetinných míst Danilem Shanksem a Johnem Williamem Wrenchem. Vzorec, jenž přitom využili má tvar

$$\pi = 24 \arctan \frac{1}{8} + 8 \arctan \frac{1}{57} + 4 \arctan \frac{1}{239} \quad (4.79)$$

Využitím tohoto vzorce, který objevil v roce 1896 Frederik Carl Mülertz Størmer, zvýšili rychlost výpočtů zhruba 20 krát. S dalšími dvěma Machin-like vzorci byla roku 2002 pokořena hranice bilionu desetinných míst, přesněji $1,24 \cdot 10^{12}$ desetinných míst, přičemž první z nich (4.80) objevil opět zmíněný Frederik Størmer. [2]

$$\frac{\pi}{4} = 44 \arctan \frac{1}{57} + 7 \arctan \frac{1}{239} - 12 \arctan \frac{1}{682} + 24 \arctan \frac{1}{12943} \quad (4.80)$$

$$\frac{\pi}{4} = 12 \arctan \frac{1}{49} + 32 \arctan \frac{1}{57} - 5 \arctan \frac{1}{239} + 12 \arctan \frac{1}{110443} \quad (4.81)$$

4.3.3 Rapidně konvergující řady

Ramanujan

Jeden z pionýrů novodobého výpočtu π nebyl nikdo jiný než geniální matematik Srinivasa Ramanujan. Jeho nejznámější, již zmíněná, rovnice oficiálně publikovaná roku 1914 při jeho pobytu v Anglii, má tvar

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{99^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)! 26390n + 1103}{n!^4 396^{4n}}. \quad (4.82)$$

Pro přesnost 15 desetinných míst stačí sečíst pouhé 2 členy této řady. Rychlost konvergence této a podobných řad převyšovala ty ostatní několikanásobně. Jakým způsobem Ramanujan k tomuto a dalším podobným vzorcům přesně došel je dodnes záhadou. V době této publikace údajně neměl dostatečné znalosti v matematických oborech, které k odvození takovýchto vzorců byly potřebné. [5] Trvalo ještě 70 let, než byl odvozen zobecněný tvar Ramanujanových rovnic, jenž odhalil odkud pochází jejich tvar. [4] Fundamentálně tyto rovnice vycházejí ze speciálního typu analytických funkcí komplexní proměnné. Pro odvození takovýchto vzorců je však zapotřebí znalost matematiky na vyšší úrovni, která je nad rámec této práce.

Chudnovsky

Autory tohoto algoritmu jsou bratři Čudnovští, kteří jej publikovali roku 1988. Princip tohoto algoritmu je založen na Ramanujanových vzorcích pro π a je často považován za nejefektivnější způsob, jakým lze vypočítat π na co největší přesnost. Má tvar

$$\frac{1}{\pi} = 12 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (6n)! (545140134n + 13591409)}{(3n)! (n!)^3 (640320)^{3n + \frac{3}{2}}}. \quad (4.83)$$

Pro co nejrychlejší výpočet byl upraven do tvaru

$$\pi = \frac{426880\sqrt{10005}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (6n)! (545140134n + 13591409)}{(3n)! (n!)^3 (-262537412640768000)^n}}. \quad (4.84)$$

Sečtení každého dalšího členu řady v děliteli přidá v průměru 15 desetinných míst. S tímto vzorcem (4.83) byla v roce 1989 překonána hranice miliardy desetinných míst. Přičemž posledních 9 rekordů bylo stanoveno s tímto vzorcem. Nynější rekord ve výpočtu desetinných míst π z 14.8.2021 je **62,831,853,071,796 desetinných míst**, což se zhruba rovná $2\pi \cdot 10^{13}$. [2]

4.3.4 Kontrola desetinných míst

BBP algoritmus

Název algoritmu BBP publikovaného roku 1995 vychází ze jmen jeho objevitelů – David H. Bailey, Peter B. Borwein a Simon Plouffe. [6] S tímto algoritmem lze určit n -tou číslici (popř. řetězec číslic) π v hexadecimální základu bez nutnosti výpočtu těch předešlých. Extrakce číslic je pak založená na následujícím vzorci

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n} \left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6} \right). \quad (4.85)$$

Před objevením toho vzorce našli jeho autoři, ještě jeden podobný, jednodušší, o tvaru

$$\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}, \quad (4.86)$$

kterým lze spočítat číslice v binárním základu čísla $\log(2)$ začínající na libovolné pozici. Důležitý je u (4.85) a (4.86) záporný exponent o příslušném základu „posouvající“ řádovou čárku doleva o jednu číslici s každou další iterací. Princip extrakce číslic demonstrujeme pro zjednodušení na vzorci pro (4.86) $\log(2)$.

Předpokládejme, že chceme vypočítat několik binárních číslic následujících po prvních d binárních číslicích (tj. několik binárních číslic začínajících na pozici $d + 1$). To je ekvivalentní výpočtu $\{2^d \log 2\}$, kde $\{\}$ označuje zlomkovou („desetinnou“) část čísla. Můžeme tedy napsat

$$\begin{aligned} \{2^d \log 2\} &= \left\{ \left(\sum_{n=1}^d \frac{2^{d-n}}{n} \right) + \sum_{n=d+1}^{\infty} \frac{2^{d-n}}{n} \right\} \\ &= \left\{ \left(\sum_{n=1}^d \frac{2^{d-n} \bmod n}{n} \right) + \sum_{n=d+1}^{\infty} \frac{2^{d-n}}{n} \right\}. \end{aligned} \quad (4.87)$$

Operátor $\bmod n$, v čitateli první sumy, je z důvodu, že nás zajímá pouze zlomková část kvocientu při dělení číslem n . První suma se skládá z d členů, z nichž každý je kvocientem celých čísel ne větších než k , které lze dělit a poté sčítat pomocí počítačové aritmetiky s pohyblivou řádovou čárkou - *floating-point arithmetic*. Pro druhou sumu (řadu) je třeba sečíst pouze několik členů, protože se rychle stanou tak malými, že mohou být zanedbány.

Co je na tomto algoritmu tak efektivní je, že na číselník první sumy ($2^{d-n} \bmod n$) může být implementován algoritmus pro binární mocnění, který je velmi rychlý (oproti normální umocňování). Algoritmus binárního mocnění funguje na principu faktorizace exponentu založené na jeho binárním rozkladu. Například číslo 3^{17} lze zapsat jako

$$3^{17} = (((3^2)^2)^2) \cdot 3 \quad (4.88)$$

kde bude místo 16 operací násobení bude zapotřebí jen 5.

Při aplikaci tohoto algoritmu na zmíněnou rovnici (4.85) pro výpočet π je zapotřebí ji rozdělit na 4 řady, které budou mít tvar

$$\Sigma_i = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n(8n+i)} \quad (4.89)$$

kde index i odpovídá jednotlivým číslům v příslušných jmenovatelích zlomků ve vzorci (4.85). Jestliže chceme vypočítat několik hexadecimálních číslic následujících po prvních d hexadecimálních číslicích (tj. začínajících na pozici $d+1$), vypočítáme $\{16^d \cdot \pi\}$, kde $\{ \cdot \}$ označuje zlomkovou („desetinnou“) část čísla, stejně jako u příkladu $\log(2)$. Z původního vzorce (4.85) tedy dostaneme

$$\{16^d \cdot \pi\} = \{4\{16^d \cdot \Sigma_1\}\} - \{2\{16^d \cdot \Sigma_4\}\} - \{16^d \cdot \Sigma_5\} - \{16^d \cdot \Sigma_6\} \quad (4.90)$$

Zde na jednotlivé řady aplikujeme stejný princip jako u příkladu $\log(2)$

$$\{16^d \Sigma_i\} = \left\{ \left(\sum_{n=0}^d \frac{16^{d-n} \bmod (8n+i)}{8n+i} \right) + \sum_{n=d+1}^{\infty} \frac{16^{d-n}}{8n+i} \right\} \quad (4.91)$$

Po dosazení tohoto vzorce do (4.90) dostáváme výsledek, pomocí kterého jsme schopni spočítat hexadecimální číslici na libovolné pozici bez počítání těch předešlých. [6]

Dva roky od publikace tohoto algoritmu byla objevena nová efektivnější forma, kterou odvodil Fabrice Bellard. Obě formy tohoto algoritmu byly v posledních letech hojně využívány pro kontrolu nových desetinných míst při stanovování rekordů. [2]

5 MĚŘENÍ VÝPOČETNÍ NÁROČNOSTI JEDNOTLIVÝCH VZORCŮ

Tato část se bude zaměřovat především na měření rychlosti konvergence jednotlivých vzorců, které byli uvedeny v minulých kapitolách. Přesněji na výpočet hodnoty DPI (Digits Per Iteration), která určuje poměr správných desetinných míst k počtu iterací. DPI vyjadřuje pouze rychlost konvergence určitého vzorce, nezohledňuje jeho výpočetní náročnost.

5.1 Specifikace zařízení

5.1.1 Hardware

Apple MacBook Pro 2017 13"
Procesor: 2,3 GHz dvoujádrový Inter Core i5
Paměť: 8 GB 2133 MHz

5.1.2 Software

Operační systém: macOS Monterey
Programovací jazyk: Python 3.8.3
Využité knihovny/moduly: mpmath 1.2.0

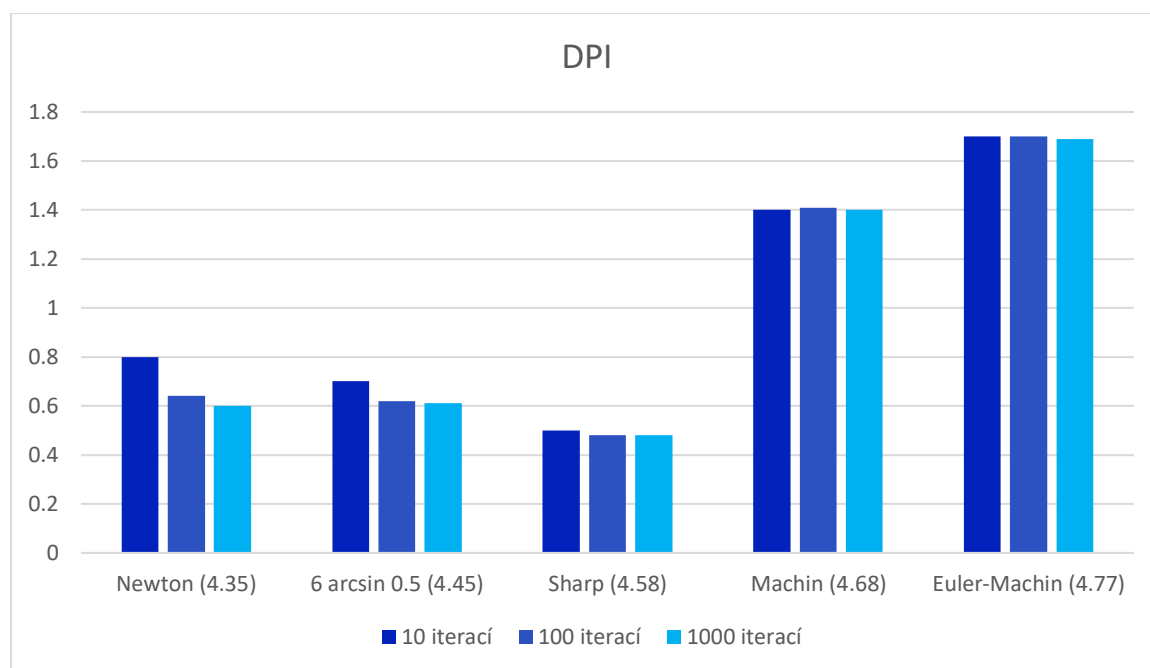
5.2 DPI jednotlivých vzorců

Způsob výpočtu DPI můžeme zapsat následující jednoduchou rovnicí

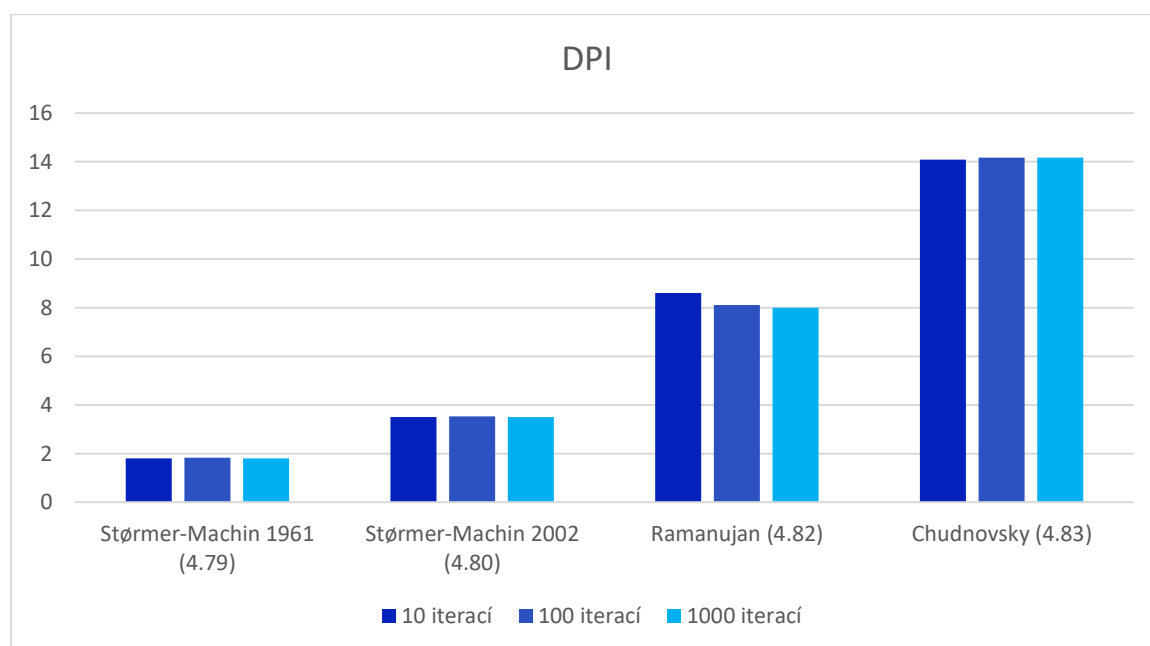
$$DPI = \frac{n_decimal_places}{n_iterations}, \quad (5.1)$$

kde $n_decimal_places$ značí správná desetinná místa a $n_iterations$ značí počet iterací, který je zapotřebí k získání těchto správných desetinných míst.

Výsledky měření jsou rozděleny do dvou grafů – *Graf 1* a *Graf 2*, přičemž vzorce jsou seřazeny v chronologickém pořadí jejich objevení. DPI je u každého z nich měřeno pro 10, 100 a 1000 iterací. U vzorců, které využívají rozvoj funkce arkus tangens je aplikována Gregoryho řada (4.47).



Graf 1: DPI jednotlivých vzorců



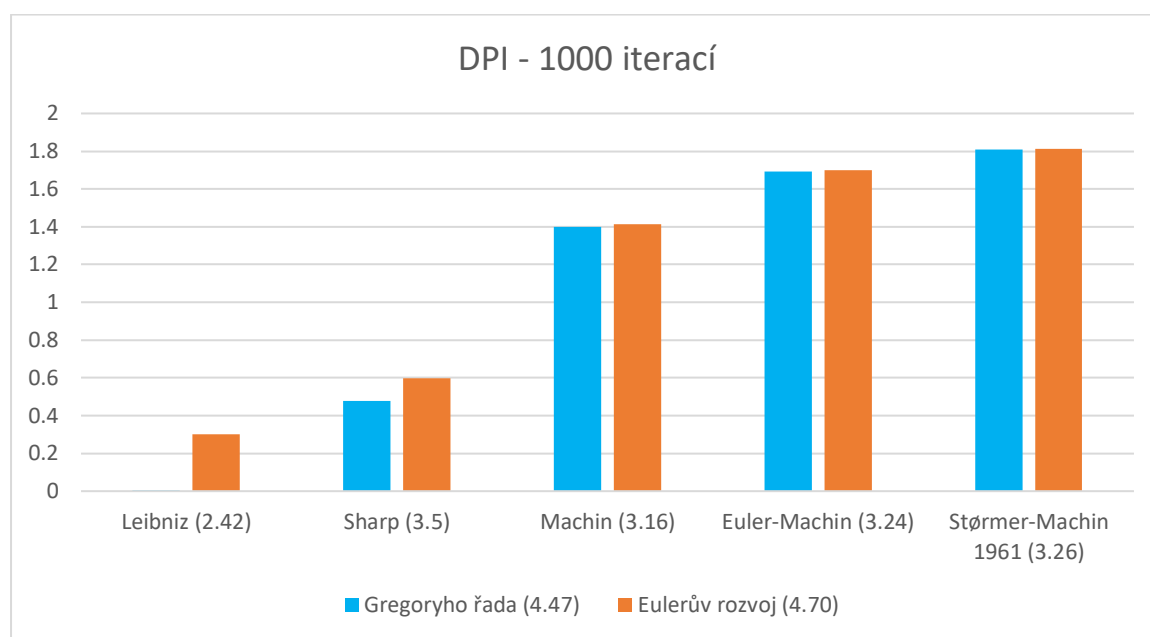
Graf 2: DPI jednotlivých vzorců

Z výsledků měření můžeme vidět, že u většiny vzorců má DPI s rostoucím počtem iterací tendenci mírně klesat. Největší takový pokles je u Newtonova vzorce, kde po 1000 iteracích klesne o necelých 25%. U všech vzorců se DPI po 1000 iteracích ustálí na téměř konstantní hodnotu, která se při dalších iteracích může měnit, ovšem s odchylkami menšími než 1%.

5.3 Porovnání Gregoryho řady a Eulerova rozvoje

5.3.4 DPI

Jak bylo zmíněno, vzorce, v *Grafu 1* a *Grafu 2*, obsahující rozvoj řady arkus tangens, využívají Gregoryho řadu (4.47). Rozvoj funkce arkus tangens však lze ještě provést Eulerovým rozvojem (4.70). V *Grafu 3* jsou data s DPI jednotlivých funkcí při aplikaci zmíněných rozvojevů s využitím vzorce (5.1)



Graf 3: DPI s využitím Gregoryho řady vs. Eulerova rozvoje

Výsledná data z měření DPI v *Grafu 3* ukazují, že využitím Eulerova rozvoje jsme u některých vzorců výrazně zrychlili jejich konvergenci. Jelikož jsou některé rozdíly hodnot v *Grafu 3* téměř nerozeznatelné pouhým okem, byla vytvořena *Tabulka 1*, která obsahuje data z *Grafu 3*.

Vzorec	DPI – 1000 iterací	
	Gregoryho řada	Eulerův rozvoj
Leibniz	0.002	0.301
Sharp	0.479	0.599
Machin	1.400	1.415
Euler-Machin	1.693	1.699
Størmer-Machin 1961	1.808	1.813

Tabulka 1: DPI s využitím Gregoryho řady vs. Eulerova rozvoje

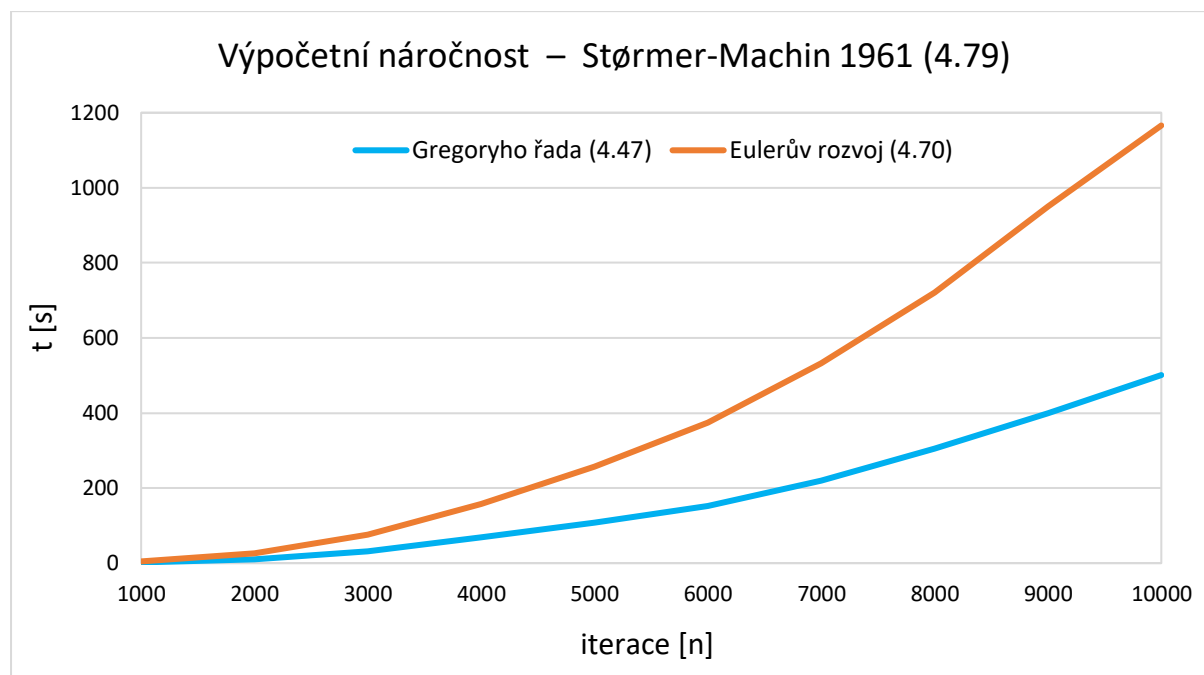
U Leibnizovy řady se DPI po 1000 iteracích zvýší o 15050 % a u vzorce, který využil Sharp o 25 %. U původního Machinova vzorce se však DPI zvýší pouze o 1.1 %, u Eulerova vzorce o 0.4 % a u Størmerova, se kterým byl pokořen rekord 100000 desetinných míst roku 1961, o 0,3 %.

Z takovýchto výsledků lze vyvodit, že čím vyšší je DPI určitého vzorce, tím menší je rozdíl mezi aplikací Gregoryho řady, či Eulerova rozvoje, co se týče rychlosti konvergence.

5.3.5 Výpočetní náročnost

Mimo rychlost konvergence je důležité také zohlednit výpočetní náročnost vzorce. Data v *Grafu 3* indikují, že aplikace Eulerova rozvoje vykazuje při vzorcích s vysokým DPI pouze velmi malé procentuální přírůstky oproti aplikaci Gregoryho řady. Pokud se ovšem provádí výpočet na miliardy až biliony desetinných míst, každé vylepšení se počítá.

V *Grafu 4* je proto znázorněna časová náročnost výpočtu vzorce Størmer-Machin 1961 s využitím Gregoryho řady a Eulerova rozvoje. Je nutno podotknout, že ani jedna z metod není nijak optimalizovaná.



Graf 4: Výpočetní náročnost Gregoryho řady vs. Eulerova rozvoje

Z výsledků měření v *Grafu 4* můžeme vidět, že výpočetní náročnost při aplikaci Eulerova rozvoje je signifikantně větší. Zisk v podobě nepatrně rychlejší konvergence je v tomto případě naprosto irelevantní vzhledem k mnohem delšímu času výpočtu.

Jediný vzorec, u kterého by bylo výhodné užít Eulerův rozvoj oproti Gregoryho řadě je Leibnizova řada (4.51). V tomto případě by ale rychlost konvergence byla i tak mnohonásobně menší než u všech ostatních vzorců.

6 ZÁVĚR

Předmětem této bakalářské práce bylo především zpracování rešerše na téma významu matematické konstanty π a podrobnější odvození důležitých metod výpočtu. Důraz byl kladen na výpočet pomocí integrálního počtu a mocninných řad.

Na závěr byly s programovacím jazykem Python, za využitím knihovny *mpmath*, pro výpočty s vysokou přesností, srovnány jednotlivé klíčové vzorce, které byly v práci odvozeny, či jen uvedeny. Důraz byl kladen na rychlost konvergence. Na výsledcích lze pozorovat průběžné zdokonalování vzorců, včetně několika revolučních objevů. Druhá část srovnává dvě různé metody pro rozvoj mocninných řad, přičemž je zde zohledněn kromě rychlosti konvergence aspekt výpočetní náročnosti. Z výsledků srovnání těchto metod můžeme vidět, že při výpočtu na vysoký počet desetinných míst je třeba zohlednit i jiné atributy vzorce, než je rychlost konvergence, například komplexnost, možnosti následné optimalizace a podobně.

7 SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

- [1] ABRAROV, S. M.; QUINE, B. M. An iteration procedure for a two-term Machin-like formula for pi with small Lehmer's measure. *arXiv preprint arXiv:1706.08835*, 2017.
- [2] AGARWAL, Ravi P.; AGARWAL, Hans; SEN, Syamal K. Birth, growth and computation of pi to ten trillion digits. *Advances in difference equations*, 2013, 2013.1: 1-59.
- [3] STEWART, Ian. *In pursuit of the unknown: 17 equations that changed the world*. Hachette UK, 2012.
- [4] ANDREWS, George E. An analytic generalization of the Rogers-Ramanujan identities for odd moduli. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 1974, 71.10: 4082-4085.
- [5] ARNDT, Jörg; HAENEL, Christoph. *Pi-unleashed*. Springer Science & Business Media, 2001.
- [6] BAILEY, David H. *The bbp algorithm for pi*. Lawrence Berkeley National Lab.(LBNL), Berkeley, CA (United States), 2006.
- [7] BECKMANN, Petr. *Historie čísla π* . Vydání druhé, revidované. Přeložil Libor PÁTÝ. Praha: Academia, 2021. Galileo. ISBN 978-80-200-3133-4
- [8] BERTIGER, Willy, et al. Sub-centimeter precision orbit determination with GPS for ocean altimetry. *Marine Geodesy*, 2010, 33.S1: 363-378.
- [9] *Bible svatá, aneb, Všecka svatá písma Starého i Nového zákona: podle posledního vydání Kralického z roku 1613*. Ilustroval Gustave DORÉ. V Praze: Knižní klub, 2007. ISBN 978-80-242-1694-2.
- [10] ČERMÁK, Jan a Luděk NECHVÁTAL. *Matematika III*. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2016. ISBN 9788021454002.
- [11] DUNHAM, William. *Journey through genius: The great theorems of mathematics*. New York, 1990.
- [12] IKEYAMA, Setsuro. Power series expansions in India around AD 1400. In: *Seki, Founder of Modern Mathematics in Japan*. Springer, Tokyo, 2013. p. 133-147.
- [13] NISHIYAMA, Yutaka. MACHIN'S FORMULA AND PI. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 2013, 82.3: 421-430.
- [14] SANDIFER, Ed. *How Euler did it*. Washington, DC: Mathematics Association of America, 2006.

- [15] SOFO, Anthony; NIMBRAN, Amrik Singh. Euler-like sums via powers of log, arctan and arctanh functions. *Integral Transforms and Special Functions*, 2020, 31.12: 966-981.
- [16] STEWART, Ian. *In pursuit of the unknown: 17 equations that changed the world*. Hachette UK, 2012.
- [17] WU, Rex H. Proof Without Words: Euler's Arctangent Identity. *Mathematics Magazine*, 2004, 77.3: 189.

8 SEZNAM PŘÍLOH

Příloha: 2022_BP_GERSL_211069_Calculate_pi.zip