

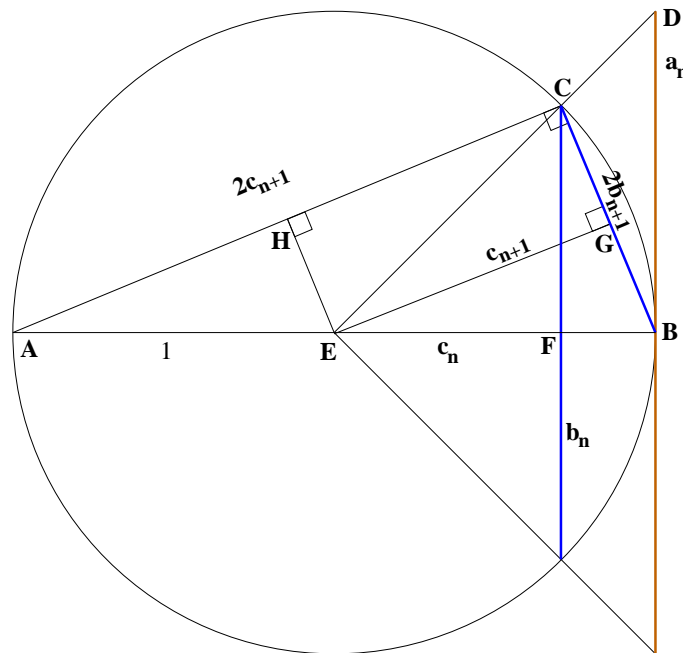
BERECHNUNG DER KREISZAHL PI NACH ARCHIMEDES UND GREGORY

MANFRED PETER

1. DIE METHODE VON ARCHIMEDES

Die erste praktikable Methode zur Berechnung von π stammt von Archimedes. Die Idee besteht darin, einem Kreis mit Radius 1 gleichseitige Dreiecke ein- und umzubeschreiben. Ihre Umfänge liefern dann eine untere und obere Schranke für 2π . Danach werden die Eckenzahlen der ein- und umbeschriebenen Figuren in jedem Schritt verdoppelt, wobei der Umfang der neuen Vielecke aus dem Umfang der schon vorhandenen berechnet wird.

Sei a_n bzw. b_n die halbe Seitenlänge des um- bzw. einbeschriebenen Vielecks im n -ten Schritt ($n = 0$ entspricht den Ausgangs-Dreiecken). Sei ferner c_n der Abstand des Kreismittelpunkts von den Seiten des einbeschriebenen Vielecks.



Das Viereck $CHEG$ hat bei C , H und G einen rechten Winkel, ist also ein Rechteck. Also sind die Seiten EG und HC gleichlang. Daher ist

$$\overline{AC} = 2c_{n+1}. \quad (1.1)$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC kann auf zwei Arten ausgerechnet werden:

$$\frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{CF} = \frac{1}{2}\overline{BC} \cdot \overline{AC} \quad (1.2)$$

Da der Kreis den Radius 1 hat, ist $\overline{AB} = 2$. Mit (1.1) und (1.2) ergibt das

$$b_n = 2b_{n+1}c_{n+1}. \quad (1.3)$$

Nach dem Strahlensatz ist $\overline{BD} : \overline{BE} = \overline{FC} : \overline{FE}$. Das ergibt

$$a_n = \frac{b_n}{c_n}. \quad (1.4)$$

Die Dreiecke ABC und ACF sind rechtwinklig bei C und F und haben bei A einen gemeinsamen Winkel. Also sind sie ähnlich. Damit ist $\overline{AC} : \overline{AB} = \overline{AF} : \overline{AC}$. Das ergibt

$$c_{n+1} = \frac{1 + c_n}{2c_{n+1}}$$

und damit

$$2c_{n+1}^2 = 1 + c_n. \quad (1.5)$$

Jetzt haben wir drei Gleichungen, die wir weiterverarbeiten. Insbesondere gilt (1.4) auch für $n + 1$ statt n , also

$$a_{n+1} = \frac{b_{n+1}}{c_{n+1}}. \quad (1.6)$$

Multipliziert man die linken und rechten Seiten von (1.3) und (1.6) miteinander, so ergibt sich

$$a_{n+1}b_n = 2b_{n+1}^2. \quad (1.7)$$

Ferner folgt aus (1.6), (1.5) und (1.3)

$$a_{n+1} = \frac{2b_{n+1}c_{n+1}}{2c_{n+1}^2} = \frac{b_n}{1 + c_n}.$$

Mit (1.4) ergibt sich daraus

$$a_{n+1} = \frac{b_n}{1 + b_n/a_n} = \frac{a_n b_n}{a_n + b_n}. \quad (1.8)$$

Die beiden Vielecke im n -ten Schritt haben $N = 3 \cdot 2^n$ Seiten der Länge $2a_n$ bzw. $2b_n$. Ist A_n bzw. B_n der Umfang des um- bzw. einbeschriebenen Vielecks, so gilt also

$$A_n = 3 \cdot 2^{n+1}a_n, \quad B_n = 3 \cdot 2^{n+1}b_n.$$

Da diese Formeln auch für $n + 1$ gelten, folgt aus (1.7)

$$B_{n+1}^2 = 9 \cdot 2^{2(n+2)}b_{n+1}^2 = 9 \cdot 2^{2n+3}a_{n+1}b_n = A_{n+1}B_n. \quad (1.9)$$

Ebenso folgt aus (1.8)

$$A_{n+1} = 3 \cdot 2^{n+2}a_{n+1} = 3 \cdot 2^{n+2} \frac{a_n b_n}{a_n + b_n} = \frac{2A_n B_n}{A_n + B_n}. \quad (1.10)$$

Mit (1.9) und (1.10) können A_{n+1} und B_{n+1} aus A_n und B_n mittels Addition, Multiplikation, Division und Wurzelziehen berechnet werden. Die Startwerte sind $A_0 = 6\sqrt{3}$ und $B_0 = 3\sqrt{3}$. Da der Kreis den Umfang 2π hat, gilt

$$\frac{1}{2}B_n < \pi < \frac{1}{2}A_n.$$

Um die Approximationsgüte abzuschätzen, benötigen wir die Ungleichung zwischen arithmetischem und harmonischem Mittel: Für $x, y > 0$ ist

$$0 \leq (x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 = (x + y)^2 - 4xy,$$

d.h.

$$\frac{2xy}{x + y} \leq \frac{x + y}{2}. \quad (1.11)$$

Also ist

$$A_{n+1} \leq \frac{A_n + B_n}{2} \quad (1.12)$$

für alle n . Sei $\delta_n := A_n - B_n$. Dann ist

$$\begin{aligned} \delta_{n+1}(A_{n+1} + B_{n+1}) &= A_{n+1}^2 - B_{n+1}^2 = A_{n+1}(A_{n+1} - B_n) \\ &= A_{n+1} \frac{2A_n B_n - A_n B_n - B_n^2}{A_n + B_n} = A_{n+1} \frac{A_n - B_n}{A_n + B_n} B_n. \end{aligned}$$

Mit (1.12) ergibt sich

$$\delta_{n+1} 2B_n \leq \delta_{n+1} 2B_{n+1} \leq \delta_{n+1} (A_{n+1} + B_{n+1}) \leq \frac{1}{2} B_n \delta_n,$$

also

$$\delta_{n+1} \leq \frac{1}{4} \delta_n. \quad (1.13)$$

Insbesondere folgt

$$0 \leq \frac{1}{2} A_n - \pi \leq \frac{1}{2} \delta_n \leq \frac{1}{2} \delta_0 4^{-n} \quad (1.14)$$

und ebenso $0 \leq \pi - B_n/2 \leq (\delta_0/2)4^{-n}$.

Die Methode von Archimedes wurde bis ins 17. Jahrhundert hinein für Berechnungen von π verwendet. Archimedes selbst verwendete regelmäßige 96-Ecke ($n = 5$) und erhielt

$$3.1408\dots = 3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7} = 3.1428\dots$$

(siehe [1]). Dieses Ergebnis ist fast so gut wie unsere Abschätzung

$$3.1410\dots = \frac{1}{2} B_5 < \pi < \frac{1}{2} A_5 = 3.1427\dots$$

Da Archimedes keine Dezimalschreibweise zur Verfügung hatte, mußte er geschickt runden, um mit Brüchen arbeiten zu können.

Ludolph van Ceulen benutzte diese Methode und einen großen Teil seiner Lebenszeit, um π erst auf 20 Stellen (1596) und dann auf 35 Stellen genau zu berechnen (1615). Das entspricht $n = 59$ und einem Vieleck mit $3 \cdot 2^{59} \approx 1.73 \cdot 10^{18}$ Ecken.

2. DIE METHODE VON GREGORY-MACHIN

Wir leiten zunächst eine Näherungsformel für die Funktion \arctan , die Umkehrfunktion des Tangens, her. Für jede reelle Zahl $q \neq 1$ und jede natürliche Zahl n gilt die Formel für die geometrische Summe

$$1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Wir setzen $q = -t^2$ mit einer neuen Variablen t und erhalten

$$1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots + (-1)^{n-1} t^{2n-2} = \frac{1 - (-t^2)^n}{1 + t^2}. \quad (2.1)$$

Sei jetzt x eine beliebige positive reelle Zahl. Wir integrieren (2.1) von 0 bis x und erhalten

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} - \int_0^x (-1)^n \frac{t^{2n}}{1+t^2} dt.$$

Da $(1+t^2)^{-1}$ die Stammfunktion \arctan hat, ist das erste Integral gleich $\arctan x$. Das zweite Integral werde mit $I_n(x)$ bezeichnet. Addiert man es auf beiden Seiten, so ergibt sich

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + I_n(x) \quad (2.2)$$

mit

$$I_n(x) = \int_0^x (-1)^n \frac{t^{2n}}{1+t^2} dt.$$

Um $I_n(x)$ abzuschätzen, wird der Betrag in das Integral gezogen:

$$|I_n(x)| \leq \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2} dt$$

Schätzt man den Nenner des Integranden nach unten durch 1 ab, so macht man diesen größer. Also ist weiter

$$|I_n(x)| \leq \int_0^x t^{2n} dt = \frac{x^{2n+1}}{2n+1}. \quad (2.3)$$

Formel (2.2) zusammen mit der Abschätzung (2.3) kann zur näherungsweisen Berechnung von $\arctan x$ verwendet werden, wenn x zwischen 0 und 1 liegt. Denn dann ist stets $x^{2n+1} \leq 1$ und damit $|I_n(x)| \leq (2n+1)^{-1}$. Also kann der Fehler $I_n(x)$ beliebig klein gemacht werden, wenn n nur groß genug gewählt wird.

Jetzt benutzen wir diese Formel zur Approximation von π : Setzt man $x = 1$, so folgt aus $\arctan(1) = \pi/4$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} + I_n(1)$$

mit

$$|I_n(1)| \leq \frac{1}{2n+1}.$$

Für $n = 3$ ergibt sich z.B.

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) + 4I_3(1) = 3.46 \dots + \epsilon$$

mit $|\epsilon| \leq 4/7 = 0.57 \dots$

Die schlechte Approximationsgüte der Gregory-Formel für $\pi/4$ kommt daher, daß man in die Formel für $\arctan x$ den Wert $x = 1$ einsetzt. Wenn man π mit Werten von $\arctan x$ in Verbindung bringen könnte, bei denen $0 < x < 1$ und rational ist, so wäre die Approximation viel besser. Denn der Faktor x^{2n+1} in Abschätzung (2.3) wird dann sehr schnell klein mit wachsendem n .

Der Schlüssel dafür ist das Additionstheorem für den Tangens:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

Setzt man $\alpha = \arctan(1/2)$ und $\beta = \arctan(1/3)$, so ergibt sich

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{1/2 + 1/3}{1 - 1/6} = 1$$

und damit $\alpha + \beta = \pi/4$. Also ist

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right).$$

Hier kann die Gregory-Formel mit $x = 1/2$ und $x = 1/3$ benutzt werden.

Eine noch bessere Formel, die ebenfalls mit dem Additionstheorem bewiesen werden kann, stammt von Machin [15]:

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$$

Setzt man hier die Gregory-Formel ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} = & \frac{4}{5} - \frac{4}{3 \cdot 5^3} + \frac{4}{5 \cdot 5^5} - \frac{4}{7 \cdot 5^7} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{4}{(2n-1)5^{2n-1}} \\ & - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{5 \cdot 239^5} - \frac{1}{7 \cdot 239^7} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)239^{2n-1}} \right) + R_n \end{aligned} \quad (2.4)$$

mit

$$R_n = 4I_n\left(\frac{1}{5}\right) - I_n\left(\frac{1}{239}\right).$$

Für diesen Fehler gilt die Abschätzung

$$|R_n| \leq \frac{4}{2n+1} \left(\frac{1}{5}\right)^{2n+1} + \frac{1}{2n+1} \left(\frac{1}{239}\right)^{2n+1}. \quad (2.5)$$

Aufgrund der Potenzen in dieser Abschätzung ist die Gregory-Machin-Formel wesentlich besser zur Approximation von π geeignet als die Gregory-Formel allein. Die Fehler-Abschätzung (2.5) ist sogar besser als bei der Methode von Archimedes (1.14). Die Formel (2.4) hat gegenüber der Archimedes-Methode außerdem den Vorteil, daß keine Quadratwurzeln berechnet werden müssen.

3. BERECHNUNGEN MIT DEM COMPUTER

Nach der Entdeckung der Gregory-Reihe wurde diese zusammen mit Formeln vom Machin-Typ zur Berechnung von π benutzt.

Die letzte von Hand durchgeführte Berechnung stammt von Ferguson aus dem Jahr 1946. Er erhielt 620 Stellen. 1947 und 1949 benutzten er und zwei Mitarbeiter einen Tischrechner, um π auf 1120 Stellen zu berechnen.

Ein programmierbarer elektronischer Rechner wurde zum ersten Mal 1949 eingesetzt. Auf dem ENIAC berechnete Reitwiesner 2037 Stellen in 70 Stunden. Die Millionen-Stellen-Grenze wurde 1973 durchbrochen, als Guilloud und Bouyer 1.001.250 Stellen in 23 Stunden und 18 Minuten berechneten. Zum letzten Mal wurde eine Formel vom Machin-Typ 1981 eingesetzt; Miyoshi und Kanada fanden damit 2.000.036 Stellen in 137 Stunden.

Mitte der 70er Jahre entdeckte man wesentlich schnellere Verfahren, die auf tiefen mathematischen Theorien beruhen. Ein solches Verfahren geht auf Ramanujan (1914) zurück, aber die Gültigkeit seiner Formel wurde erst wesentlich später bewiesen. Ein anderes Verfahren benutzt das arithmetisch-geometrische Mittel (AGM, siehe [6]), das schon von Gauß Anfang des 19. Jahrhunderts untersucht wurde.

Tamura setzte 1982 zum ersten Mal eines dieser neuen Verfahren ein und berechnete π mit dem AGM auf 2.097.144 Stellen in 7 Stunden und 14 Minuten. In neuester Zeit liegt der Weltrekord für die meisten berechneten Stellen von π abwechselnd bei Kanada, der das AGM verwendet, und bei den Chudnovsky-Brüdern, die Ramanujans Formel benutzen. 1999 berechnete Kanada 206.158.430.000 Stellen von π ([2], [3]).

4. ALLGEMEINE ARCHIMEDES- UND GAUSS-ITERATION

Das Verfahren von Archimedes ist ein Spezialfall des folgenden Iterationsschemas:

$$\begin{aligned} a_0 &= \alpha, \\ b_0 &= \beta, \\ a_{n+1} &= M(a_n, b_n), \quad n \geq 0, \\ b_{n+1} &= M'(a_{n+1}, b_n). \end{aligned} \tag{A}$$

Dabei seien M, M' Mittelwertfunktionen und $\alpha, \beta > 0$. Eine Funktion $M : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ heißt *Mittelwertfunktion*, wenn gilt:

- (1) M ist stetig.
- (2) Für $0 < a \leq b$ gilt $a \leq M(a, b) \leq b$.
- (3) Für $a, b > 0$ gilt $M(a, b) = M(b, a)$.
- (4) Für $a, b > 0$ mit $M(a, b) = a$ ist stets $a = b$.

Man erhält das Archimedes-Verfahren aus (A), wenn

$$M(a, b) := H(a, b) := \frac{2ab}{a+b}$$

das *harmonische Mittel* und

$$M'(a, b) := G(a, b) := \sqrt{ab}$$

das *geometrische Mittel* ist und die Startwerte $\alpha := 6\sqrt{3}$, $\beta := 3\sqrt{3}$ gewählt werden (siehe (1.9), (1.10)).

Ein verwandtes Iterationsschema ist gegeben durch

$$\begin{aligned} a_0 &= \alpha, \\ b_0 &= \beta, \\ a_{n+1} &= M(a_n, b_n), \quad n \geq 0, \\ b_{n+1} &= M'(a_n, b_n). \end{aligned} \tag{G}$$

Für die Konvergenz der Folgen (a_n) und (b_n) gilt das folgende allgemeine Ergebnis.

Theorem 4.1 (Foster, Phillips [11]). *Für alle $\alpha, \beta > 0$ konvergieren die durch (A) rekursiv definierten Folgen (a_n) und (b_n) gegen einen gemeinsamen Grenzwert $MM'(\alpha, \beta) > 0$. Ebenso konvergieren die durch (G) definierten Folgen gegen einen gemeinsamen Grenzwert $\overline{MM}'(\alpha, \beta) > 0$.*

Die Rekursionsgleichungen (1.9) und (1.10) und Abschätzung (1.14) zeigen, daß

$$HG(6\sqrt{3}, 3\sqrt{3}) = 2\pi.$$

Obwohl die Iterationsschemata (A) und (G) sich ähneln, ist ihre Konvergenzrate doch sehr verschieden. Die durch (A) definierten Folgen konvergieren linear, während die durch (G) definierten Folgen quadratisch konvergieren. Zur präzisen Formulierung sei $\gamma := MM'(\alpha, \beta)$ im Fall (A) und $\gamma := \overline{MM}'(\alpha, \beta)$ im Fall (G). Ferner seien

$$\delta_n := a_n - \gamma, \quad \epsilon_n := b_n - \gamma, \quad n \geq 0,$$

die Abweichungen der Folgenglieder vom gemeinsamen Grenzwert.

Theorem 4.2 (Foster, Phillips [11]). (1) *Sind M und M' zweimal stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, so gilt für die durch (A) rekursiv definierten Folgen*

$$\delta_{n+1} = \frac{1}{4}\delta_n + O(\delta_n^2), \quad \epsilon_{n+1} = \frac{1}{4}\epsilon_n + O(\epsilon_n^2).$$

(2) *Sind M und M' dreimal stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, so gilt für die durch (G) rekursiv definierten Folgen*

$$\delta_{n+1} = O(\delta_n^2), \quad \epsilon_{n+1} = O(\epsilon_n^2).$$

Ein Teil von (1) wurde für das Archimedes-Verfahren schon in (1.13) gezeigt.

Die durch (G) definierten Folgen konvergieren also wesentlich schneller als die durch (A) definierten. Es wäre deshalb interessant, ein Verfahren des Typs (G) zu finden, das π berechnet. Darauf soll in Abschnitt 7 eingegangen werden.

Man kann die Schemata (A) und (G) als Spezialfälle des allgemeinen Schemas

$$(a_0, b_0) = (\alpha, \beta), \quad (a_{n+1}, b_{n+1}) = T(a_n, b_n), \quad n \geq 0,$$

mit einer Abbildung $T : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ auffassen. Für (A) ist dabei $T(a, b) := (M(a, b), M'(M(a, b), b))$ und für (G) ist $T(a, b) := (M(a, b), M'(a, b))$ zu wählen. Man ist hier jedoch weit von einer Situation entfernt, in der der Banachsche Fixpunktsatz anwendbar wäre, da in beiden Fällen alle Punkte (a, a) , $a > 0$, Fixpunkte sind.

5. DIE ARCHIMEDES-ITERATION FÜR ARITHMETISCHES, GEOMETRISCHES UND HARMONISCHES MITTEL

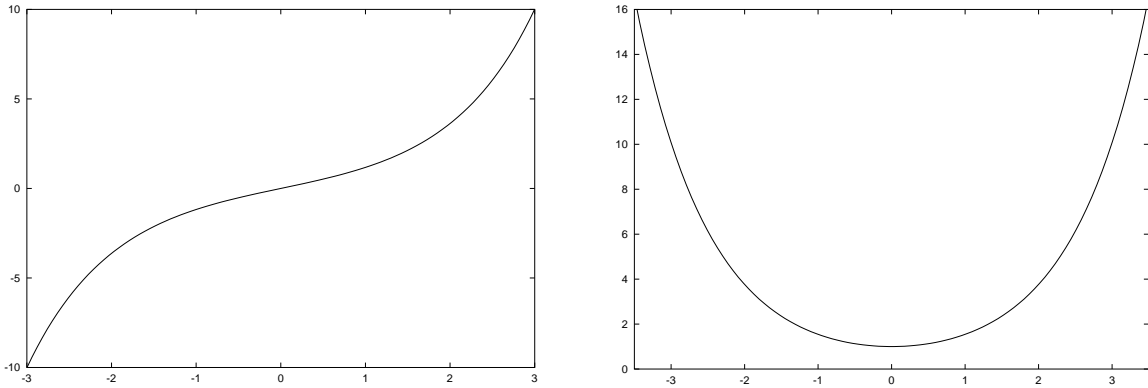
Neben den trigonometrischen Funktionen benötigen wir die Hyperbelfunktionen

$$\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Aus den Rechenregeln für die Exponentialfunktion ergibt sich sofort

$$\begin{aligned} \cosh^2(x) - \sinh^2(x) &= 1, \\ \sinh(2x) &= 2 \sinh(x) \cosh(x), \quad \cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x). \end{aligned}$$

Die Funktion \sinh bildet \mathbb{R} bijektiv auf sich ab. Ihre Umkehrfunktion wird mit arsinh bezeichnet. Die Funktion \cosh bildet $[0, \infty)$ bijektiv auf $[1, \infty)$ ab. Ihre Umkehrfunktion wird mit arcosh bezeichnet.



Der Graph von \cosh hat die Form einer durchhängenden Kette unter dem Einfluß ihres eigenen Gewichts.

Die folgenden Ergebnisse stammen aus [9]:

$$HG(\alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \arccos\left(\frac{\beta}{\alpha}\right), & \alpha > \beta > 0, \\ \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}} \operatorname{arcosh}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right), & \beta > \alpha > 0, \end{cases} \quad (5.1)$$

$$AG(\alpha, \beta) = HG(\alpha^{-1}, \beta^{-1})^{-1},$$

$$GH(\alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{\beta}{\sqrt{\beta/\alpha - 1}} \arccos\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right), & \beta > \alpha > 0, \\ \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta/\alpha}} \operatorname{arcosh}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right), & \alpha > \beta > 0, \end{cases} \quad (5.2)$$

$$GA(\alpha, \beta) = GH(\alpha^{-1}, \beta^{-1})^{-1}.$$

Die Funktionen AH und HA lassen sich nicht auf elementare Funktionen zurückführen. Es gilt

$$HA(\alpha, \beta) = AH(\alpha^{-1}, \beta^{-1})^{-1}, \quad AH(\alpha, \beta) = \beta F\left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right),$$

wobei

$$F(x) = 2^{-1/4} \sqrt{x} e^{\delta(x)} \left(\sum_{n \geq 0} c_n \left(\frac{2}{x} \right)^n \right), \quad x > \frac{1}{2},$$

mit

$$\delta(x) := 2 \sum_{r \geq 1} \frac{1}{(2r-1) \sinh(\pi^2(2r-1)/\log 2)} \cos\left(\frac{(2r-1)\pi \log x}{\log 2}\right), \quad x > 0,$$

$$c_n := (-1)^n \prod_{k=1}^n \frac{4^{k-1} - 2}{4^k - 1}, \quad n \geq 0.$$

Zum Beweis von (5.1) und (5.2) gibt es mehrere Möglichkeiten.

5.1. Rechnerischer Beweis im Fall HG mit den Verdoppelungsformeln. Der Fall $\alpha > \beta > 0$ in (5.1) ist eine Verallgemeinerung des Archimedes-Verfahrens und kann wie dieses durch Vergleich des Kreisbogens mit Sehnenlängen und Tangentenabschnitten hergeleitet werden. Der Fall $\beta > \alpha > 0$ hat keine geometrische Deutung. Beide Fälle können ohne geometrische Argumente hergeleitet werden, da für die Folgen (a_n) und (b_n) explizite Formeln existieren:

$$a_n = \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} 2^n \tan\left(\frac{\Theta}{2^n}\right), \quad b_n = \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} 2^n \sin\left(\frac{\Theta}{2^n}\right),$$

mit $\Theta := \arccos(\beta/\alpha)$ für $\alpha > \beta > 0$, und

$$a_n = \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}} 2^n \tanh\left(\frac{\Theta}{2^n}\right), \quad b_n = \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}} 2^n \sinh\left(\frac{\Theta}{2^n}\right),$$

mit $\Theta := \operatorname{arcosh}(\beta/\alpha)$ für $\beta > \alpha > 0$. Diese Formeln folgen leicht durch Induktion nach n . Für $n = 0$ ist

$$a_0 = \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \tan \Theta = \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \frac{\sqrt{1 - \beta^2/\alpha^2}}{\beta/\alpha} = \alpha,$$

$$b_0 = \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \sin \Theta = \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \sqrt{1 - \beta^2/\alpha^2} = \beta,$$

für $\alpha > \beta > 0$, und

$$a_0 = \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}} \tanh \Theta = \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}} \frac{\sqrt{\beta^2/\alpha^2 - 1}}{\beta/\alpha} = \alpha,$$

$$b_0 = \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}} \sinh \Theta = \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}} \sqrt{\beta^2/\alpha^2 - 1} = \beta,$$

für $\beta > \alpha > 0$. Ferner folgt mit den Verdoppelungsformeln

$$\begin{aligned} H(a_n, b_n) &= \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} 2^{n+1} \frac{\tan(\Theta/2^n) \sin(\Theta/2^n)}{\tan(\Theta/2^n) + \sin(\Theta/2^n)} \\ &= \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} 2^{n+1} \frac{\sin(\Theta/2^n)}{1 + \cos(\Theta/2^n)} = \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} 2^{n+1} \frac{2 \sin(\Theta/2^{n+1}) \cos(\Theta/2^{n+1})}{2 \cos^2(\Theta/2^{n+1})} \\ &= a_{n+1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G(a_{n+1}, b_n) &= \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} 2^n \sqrt{2 \tan\left(\frac{\Theta}{2^{n+1}}\right) 2 \sin\left(\frac{\Theta}{2^{n+1}}\right) \cos\left(\frac{\Theta}{2^{n+1}}\right)} \\ &= b_{n+1}, \end{aligned}$$

für $\alpha > \beta > 0$, und

$$\begin{aligned} H(a_n, b_n) &= \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}} 2^{n+1} \frac{\tanh(\Theta/2^n) \sinh(\Theta/2^n)}{\tanh(\Theta/2^n) + \sinh(\Theta/2^n)} \\ &= \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}} 2^{n+1} \frac{\sinh(\Theta/2^n)}{1 + \cosh(\Theta/2^n)} = \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}} 2^{n+1} \frac{2 \sinh(\Theta/2^{n+1}) \cosh(\Theta/2^{n+1})}{2 \cosh^2(\Theta/2^{n+1})} \\ &= a_{n+1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G(a_{n+1}, b_n) &= \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}} 2^n \sqrt{2 \tanh\left(\frac{\Theta}{2^{n+1}}\right) 2 \sinh\left(\frac{\Theta}{2^{n+1}}\right) \cosh\left(\frac{\Theta}{2^{n+1}}\right)} \\ &= b_{n+1}, \end{aligned}$$

für $\beta > \alpha > 0$.

Mit den expliziten Formeln kann jetzt (5.1) gezeigt werden. Wegen

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{x} = 1$$

ergibt sich

$$HG(\alpha, \beta) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \Theta \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(\Theta/2^n)}{\Theta/2^n} = \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \Theta$$

für $\alpha > \beta > 0$ und

$$HG(\alpha, \beta) = \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}} \Theta$$

für $\beta > \alpha > 0$.

5.2. Geometrischer Beweis im Fall GH mit den Verdoppelungsformeln. Für die zu (5.2) gehörenden Folgen (a_n) und (b_n) existieren ebenfalls explizite Formeln. Sie lauten:

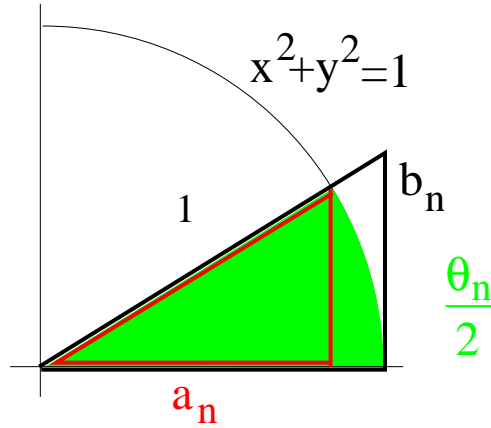
$$a_n = \frac{\beta}{\sqrt{\beta/\alpha - 1}} 2^{n-1} \sin\left(\frac{\Theta}{2^{n-1}}\right), \quad b_n = \frac{\beta}{\sqrt{\beta/\alpha - 1}} 2^n \tan\left(\frac{\Theta}{2^n}\right),$$

mit $\Theta := \arccos(\sqrt{\alpha/\beta})$ für $\beta > \alpha > 0$, und

$$a_n = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta/\alpha}} 2^{n-1} \sinh\left(\frac{\Theta}{2^{n-1}}\right), \quad b_n = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta/\alpha}} 2^n \tanh\left(\frac{\Theta}{2^n}\right),$$

mit $\Theta := \operatorname{arcosh}(\sqrt{\alpha/\beta})$ für $\alpha > \beta > 0$. Man kann sie genauso wie für (5.1) durch Induktion nach n beweisen. Aber im Gegensatz zu (5.1) gibt es hier sowohl für $\beta > \alpha > 0$ als auch für $\alpha > \beta > 0$ eine geometrische Deutung.

5.2.1. Der Fall des Kreises.



Beim Kreis $x^2 + y^2 = 1$ ist der Flächeninhalt des Sektors mit Öffnungswinkel Θ_n (im Bogenmaß) gleich $\Theta_n/2$. Ist a_n bzw. b_n der Flächeninhalt des zugehörigen inneren bzw. äußeren Dreiecks, so ist

$$\begin{aligned} a_n &\leq \frac{\Theta_n}{2} \leq b_n, \\ a_n &= \frac{1}{2} \cos \Theta_n \sin \Theta_n = \frac{1}{4} \sin(2\Theta_n), \\ b_n &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan \Theta_n = \frac{1}{2} \tan \Theta_n. \end{aligned}$$

Wählt man $\Theta_n = \Theta/2^n$ für ein festes $0 < \Theta < \pi/2$, so ist

$$A_n := 2^{n+1} a_n \leq \Theta \leq 2^{n+1} b_n =: B_n \quad (5.3)$$

mit

$$A_n = 2^{n-1} \sin\left(\frac{\Theta}{2^{n-1}}\right), \quad B_n = 2^n \tan\left(\frac{\Theta}{2^n}\right).$$

Damit ist

$$\begin{aligned} H(A_{n+1}, B_n) &= \frac{2^{n+1} \sin(\Theta/2^n) 2^n \tan(\Theta/2^n)}{2^n \sin(\Theta/2^n) + 2^n \tan(\Theta/2^n)} = 2^{n+1} \frac{\sin(\Theta/2^n)}{1 + \cos(\Theta/2^n)} \\ &= 2^{n+1} \frac{2 \sin(\Theta/2^{n+1}) \cos(\Theta/2^{n+1})}{2 \cos^2(\Theta/2^{n+1})} = B_{n+1}, \end{aligned}$$

$$G(A_n, B_n) = \sqrt{2^{2n-1} 2 \sin\left(\frac{\Theta}{2^n}\right) \cos\left(\frac{\Theta}{2^n}\right) \tan\left(\frac{\Theta}{2^n}\right)} = A_{n+1},$$

d.h. die Folgen (A_n) und (B_n) werden durch Schema (A) mit $M = G$ und $M' = H$ erzeugt mit Startwerten $\alpha = A_0 = \sin \Theta \cos \Theta$ und $\beta = B_0 = \tan \Theta$. Ferner ist nach (5.3)

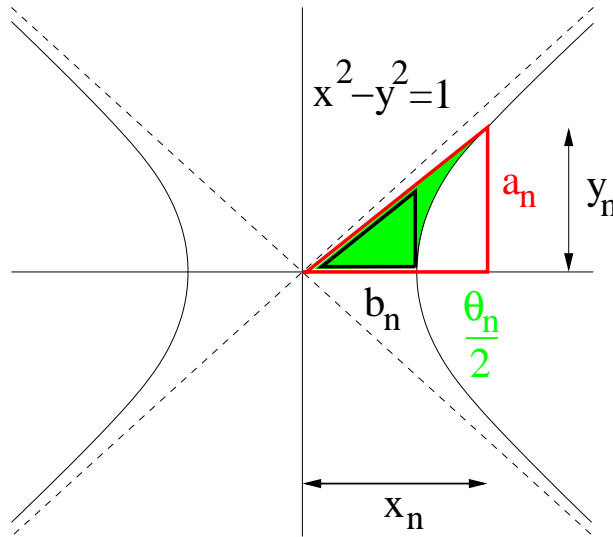
$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n = \Theta.$$

5.2.2. *Berechnung des Arcus-Kosinus.* Setzt man also $\Theta := \arccos t$ für ein festes $0 < t < 1$, so ist $\alpha = \sqrt{1-t^2}t$, $\beta = \sqrt{1-t^2}/t$ und $\lim A_n = \lim B_n = \arccos t$. Wählt man schließlich die Startwerte $\alpha = t^2$ und $\beta = 1$, d.h. die alten Startwerte werden mit $t(1-t^2)^{-1/2}$ multipliziert, so werden die Folgenglieder auch mit diesem Faktor multipliziert und es folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \arccos t.$$

Also kann Schema (A) mit $M = G$ und $M' = H$ zur Berechnung des Arcuscosinus verwendet werden.

5.2.3. *Der Fall der Hyperbel.*



Der Flächeninhalt des zur Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$ gehörenden Sektors ist

$$\frac{\theta_n}{2} := \int_0^{y_n} x \, dy - \frac{1}{2} x_n y_n = \int_0^{y_n} \sqrt{1+y^2} \, dy - \frac{1}{2} x_n y_n.$$

Die Substitution $y = \sinh t$ ergibt $dy = \cosh t \, dt$ und damit

$$\begin{aligned} \frac{\theta_n}{2} &= \int_0^{\operatorname{arsinh} y_n} \cosh^2 t \, dt - \frac{1}{2} x_n y_n = \int_0^{\operatorname{arsinh} y_n} \frac{1}{2} (\cosh(2t) + 1) \, dt - \frac{1}{2} x_n y_n \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \sinh(2t) + t \right]_0^{\operatorname{arsinh} y_n} - \frac{1}{2} x_n y_n \\ &= \left[\frac{1}{2} \sinh t \cosh t \right]_0^{\operatorname{arsinh} y_n} + \frac{1}{2} \operatorname{arsinh} y_n - \frac{1}{2} \sqrt{1+y_n^2} y_n \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{arsinh} y_n, \end{aligned}$$

d.h. $y_n = \sinh \Theta_n$, $x_n = \cosh \Theta_n$. Damit ist

$$\begin{aligned} a_n &\geq \frac{\Theta_n}{2} \geq b_n, \\ a_n &= \frac{1}{2} x_n y_n = \frac{1}{2} \cosh \Theta_n \sinh \Theta_n = \frac{1}{4} \sinh(2\Theta_n), \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{y_n}{x_n} = \frac{1}{2} \tanh \Theta_n.$$

Mit Θ_n , A_n und B_n wie im Fall des Kreises ist dann

$$A_n \geq \Theta \geq B_n,$$

$$A_n = 2^{n-1} \sinh\left(\frac{\Theta}{2^{n-1}}\right), \quad B_n = 2^n \tanh\left(\frac{\Theta}{2^n}\right).$$

Mit den gleichen Umformungen wie im Fall des Kreises zeigt man

$$B_{n+1} = H(A_{n+1}, B_n), \quad A_{n+1} = G(A_n, B_n).$$

Setzt man $\Theta := \operatorname{arcosh} t$ für ein $t > 1$, so sind die Startwerte

$$\alpha = A_0 = \frac{1}{2} \sinh(2\Theta) = \sinh \Theta \cosh \Theta = \sqrt{t^2 - 1} t,$$

$$\beta = B_0 = \tanh \Theta = \sqrt{t^2 - 1}/t.$$

Ferner ist $\lim A_n = \lim B_n = \Theta = \operatorname{arcosh} t$.

5.2.4. *Berechnung des natürlichen Logarithmus.* Die Funktion arcosh kann auf die Logarithmus-Funktion zurückgeführt werden. Setzt man $t = (\tau + \tau^{-1})/2$ für ein $\tau > 1$, so ist

$$\tau + \frac{1}{\tau} = 2t = 2 \cosh \Theta = e^\Theta + e^{-\Theta},$$

und wegen $\tau, e^\Theta > 1$ folgt $\tau = e^\Theta$, d.h. $\Theta = \log \tau$. Für die Startwerte gilt

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(\tau - \frac{1}{\tau}\right) \frac{1}{2} \left(\tau + \frac{1}{\tau}\right) = \frac{1}{4} \left(\tau^2 - \frac{1}{\tau^2}\right),$$

$$\beta = \frac{1}{2} \left(\tau - \frac{1}{\tau}\right) 2 \left(\tau + \frac{1}{\tau}\right)^{-1} = \frac{\tau^2 - 1}{\tau^2 + 1}.$$

Wählt man schließlich die Startwerte $\alpha = (\tau + \tau^{-1})^2/4$ und $\beta = 1$, d.h. die alten Startwerte werden mit $(\tau^2 + 1)(\tau^2 - 1)^{-1}$ multipliziert, so ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n = \frac{\tau^2 + 1}{\tau^2 - 1} \operatorname{arcosh} t = \frac{\tau^2 + 1}{\tau^2 - 1} \log \tau.$$

Also kann Schema (A) mit $M = G$ und $M' = H$ auch zur Berechnung des Logarithmus verwendet werden.

6. DIE GAUSS-ITERATION FÜR ARCHIMEDISCHES, GEOMETRISCHES UND HARMONISCHES MITTEL

Wir benötigen das folgende vollständige elliptische Integral erster Art:

$$E(\alpha, \beta) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + \alpha^2)(x^2 + \beta^2)}}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Integrale dieser Art treten bei der Berechnung des Umfangs einer Ellipse aus den Hauptachsen auf. Im Gegensatz zum Flächeninhalt kann der Umfang im Allgemeinen nicht durch elementare Funktionen ausgedrückt werden.

Dann gilt für die durch das Iterationsschema (G) erzeugten Folgen:

$$\overline{AG}(\alpha, \beta) = \frac{\pi}{E(\alpha, \beta)}, \quad (6.1)$$

$$\overline{GA}(\alpha, \beta) = \overline{AG}(\beta, \alpha) = \frac{\pi}{E(\alpha, \beta)},$$

$$\overline{HG}(\alpha, \beta) = \overline{AG}(\alpha^{-1}, \beta^{-1})^{-1} = \frac{1}{\pi}E(\alpha^{-1}, \beta^{-1}),$$

$$\overline{GH}(\alpha, \beta) = \overline{HG}(\beta, \alpha) = \frac{1}{\pi}E(\alpha^{-1}, \beta^{-1}),$$

$$\overline{AH}(\alpha, \beta) = \sqrt{\alpha\beta}, \quad (6.2)$$

$$\overline{HA}(\alpha, \beta) = \overline{AH}(\beta, \alpha) = \sqrt{\alpha\beta}.$$

Dabei ist stets $\alpha, \beta > 0$ vorausgesetzt.

Das Ergebnis (6.1) kann z.B. in [14] gefunden werden. Es war schon Gauß bekannt und wurde von ihm zur numerischen Berechnung der Integrale $E(\alpha, \beta)$ verwendet, da das Iterationsschema (G) quadratische Konvergenz aufweist. Im Fall (6.2) ist das Iterationsschema (G) nichts anderes als das Heron-Verfahren zum Wurzelziehen; dieses wiederum ist ein Spezialfall des Newton-Verfahrens, das bekanntlich quadratische Konvergenz besitzt. Man kann (6.2) auch so deuten, daß die Komposition des arithmetischen und harmonischen Mittels das geometrische Mittel liefert.

Um (6.2) zu beweisen, seien (a_n) und (b_n) definiert durch

$$\begin{aligned} a_0 &= \alpha, & a_{n+1} &= A(a_n, b_n) = \frac{1}{2}(a_n + b_n), & n &\geq 0, \\ b_0 &= \beta, & b_{n+1} &= H(a_n, b_n) = \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n}. \end{aligned}$$

Dann ist a_nb_n unabhängig von n , da

$$a_{n+1}b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n} = a_nb_n$$

für alle $n \geq 0$ gilt. Also ist $a_nb_n = a_0b_0 = \alpha\beta$ für alle $n \geq 0$. Damit folgt

$$\overline{AH}(\alpha, \beta)^2 = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n\right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n\right) = \alpha\beta,$$

d.h.

$$\overline{AH}(\alpha, \beta) = \sqrt{\alpha\beta}.$$

Ferner ist

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{\alpha\beta}{a_n} \right), \quad n \geq 0,$$

d.h. (a_n) ist gemäß dem Heron-Verfahren zur Berechnung von $\sqrt{\alpha\beta}$ definiert.

7. MODERNE BERECHNUNGEN VON π MIT DEM ARITHMETISCH-GEOMETRISCHEN MITTEL

Wählt man $M = A$ und $M' = G$ in (G), so läßt sich die in Satz 4.2 behauptete quadratische Konvergenz ganz einfach nachrechnen. Zunächst gilt für $x, y > 0$ stets

$$0 \leq \frac{1}{2}(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = \frac{1}{2}(x + y) - \sqrt{xy},$$

d.h. $G(x, y) \leq A(x, y)$. Ferner gilt Gleichheit genau dann, wenn $x = y$ ist. Sei jetzt $\alpha > \beta > 0$ und

$$\begin{aligned} a_0 &= \alpha, & a_{n+1} &= \frac{1}{2}(a_n + b_n), & n &\geq 0, \\ b_0 &= \beta, & b_{n+1} &= \sqrt{a_n b_n}. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Dann ist stets $0 < b_n < b_{n+1} < a_{n+1} < a_n$. Das wird jetzt durch Induktion nach n gezeigt. Für $n = 0$ ist $0 < \beta = b_0 < a_0 = \alpha$. Ist ferner $0 < b_n < a_n$ für ein n , so ist

$$b_n = \sqrt{b_n^2} < \sqrt{a_n b_n} = b_{n+1} < \frac{1}{2}(a_n + b_n) = a_{n+1} < \frac{1}{2}(a_n + a_n) = a_n.$$

Also ist (a_n) streng monoton fallend, (b_n) streng monoton wachsend, und beide Folgen sind beschränkt. Daher existieren die Grenzwerte

$$a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \quad b := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Führt man in (7.1) den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ durch, so folgt

$$a = \frac{1}{2}(a + b), \quad b = \sqrt{ab}.$$

Jede dieser Gleichungen liefert schon $a = b$. Also existiert $\overline{AG}(\alpha, \beta) = \lim a_n = \lim b_n$, und es ist stets

$$b_n < \overline{AG}(\alpha, \beta) < a_n, \quad n \geq 0.$$

Sei jetzt $c_n := \sqrt{a_n^2 - b_n^2}$ für $n \geq 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= \sqrt{\frac{1}{4}(a_n + b_n)^2 - a_n b_n} = \sqrt{\frac{1}{4}(a_n - b_n)^2} = \frac{1}{2}(a_n - b_n) \\ &= \frac{1}{2} \frac{a_n^2 - b_n^2}{a_n + b_n} = \frac{c_n^2}{4a_{n+1}} \leq \frac{c_n^2}{4\overline{AG}(\alpha, \beta)}. \end{aligned}$$

Also ist

$$0 < a_n - \overline{AG}(\alpha, \beta), \overline{AG}(\alpha, \beta) - b_n \leq a_n - b_n = 2c_{n+1}, \quad c_{n+1} \ll c_n^2.$$

Da in (6.1) noch das elliptische Integral $E(\alpha, \beta)$ auftritt, kann man aus $\overline{AG}(\alpha, \beta)$ nicht ohne weiteres π ableiten. Man benötigt dafür noch weitere Eigenschaften elliptischer Integrale. Das Ergebnis lautet wie folgt ([5], [7], [16]): Man definiere die Folgen (a_n) , (b_n) , (c_n) , (p_n) und (s_n) rekursiv durch

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{2}(a_n + b_n), & a_0 &:= 1, \\ b_{n+1} &= \sqrt{a_n b_n}, & b_0 &:= \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ c_{n+1}^2 &= a_{n+1}^2 - b_{n+1}^2, \\ s_{n+1} &= s_n - 2^{n+1} c_{n+1}^2, & s_0 &:= \frac{1}{2}, \\ p_{n+1} &:= \frac{2a_{n+1}^2}{s_{n+1}}. \end{aligned}$$

Dann ist $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \pi$.

LITERATUR

- [1] ARCHIMEDES, Measurement of a circle, in [4], S. 7–14
- [2] D.H. BAILEY, J.M. BORWEIN, P.M. BORWEIN, Ramanujan, modular equations, and approximations to Pi, Amer. Math. Month. 96(1989), 201–219
- [3] D.H. BAILEY, J.M. BORWEIN, P.B. BORWEIN, S. PLOUFFE, The quest for Pi, Math. Int. 19(1997), 50–57
- [4] L. BERGGREN, J.M. BORWEIN, P.B. BORWEIN, Pi: A Source Book, New York, Springer, 1997
- [5] J.M. BORWEIN, P.B. BORWEIN, The arithmetic-geometric mean and fast computation of elementary functions, SIAM Review 26(1984), 537–552
- [6] J.M. BORWEIN, P.B. BORWEIN, Pi and the AGM, Wiley, 1987
- [7] R.P. BRENT, Fast multiple-precision evaluation of elementary functions, J. Assoc. Comput. Mach. 23(1976), 242–251
- [8] B.C. CARLSON, Algorithms involving arithmetic and geometric means, Amer. Math. Monthly 78(1971), 496–505
- [9] D.M.E. FOSTER, G.M. PHILLIPS, The arithmetic-harmonic mean, Math. Comp. 42(1984), 183–191
- [10] D.M.E. FOSTER, G.M. PHILLIPS, A generalization of the Archimedean double sequence, J. Math. Anal. Appl. 101(1984), 575–581
- [11] D.M.E. FOSTER, G.M. PHILLIPS, Double mean processes, Inst. Math. Appl. 22(1986), 170–173
- [12] D.H. LEHMER, On the compounding of certain means, J. Math. Anal. Appl. 36(1971), 183–200
- [13] G. MIEL, On calculations past and present: The Archimedean algorithm, Amer. Math. Monthly 90(1983), 17–35
- [14] D.J. NEWMAN, A simplified version of the fast algorithms of Brent and Salamin, Math. Comp. 44(1985), 207–210
- [15] Pi and the Fibonacci numbers:
<http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibpi.html>
- [16] E. Salamin, Computation of π using arithmetic-geometric mean, Math. Comp. 135(1976), 565–570

MATHEMATISCHES INSTITUT, ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT, ECKERSTR. 1, 79104 FREIBURG

E-mail address: manfred.peter@math.uni-freiburg.de

URL: <http://web.mathematik.uni-freiburg.de/mi/zahlen/home/peter>