Obsession de π

JEAN-PAUL DELAHAYE

Grâce à une nouvelle formule pour π, on sait calculer (en base 2) le 400 milliardième chiffre de π sans connaître les autres.

En 1995, nombreux étaient ceux qui pensaient qu'il n'y avait plus grand-chose de spectaculaire à attendre concernant π : sans doute allait-on continuer à progresser dans le calcul des décimales, mais cela se ferait au rythme régulier du perfectionnement des machines, et non pas grâce à des avancées mathématiques nouvelles. La découverte d'une nouvelle formule pour π par une équipe canadienne de l'Université Simon Fraser, à Burnaby, en Colombie-Britannique, et les conséquences de cette découverte prouvent que π reste à la fois riche et énigmatique.

On sait calculer aujourd'hui presque aussi loin que l'on veut les chiffres du nombre π (hélas, en binaire ou en base 16, pas encore dans le système décimal).

LES MACHINES... NE FONT PAS TOUT

Un livre d'histoire sur le calcul de π énonçait, en 1970, qu'il n'y aurait plus rien de nouveau concernant le quadrimillénaire nombre π. Or, dès 1975, la découverte de nouveaux algorithmes de calcul de π et l'application des méthodes de multiplication rapide donnaient un coup d'accélérateur au calcul des décimales de π, ce qui permettait, en quelques années, de passer du million de décimales connues (record atteint, en 1973, par les Français Jean Guilloud et Martine Bouyer) aux six milliards quatre cents millions de décimales en 1995 (record actuel du Japonais Yasumasa Kanada).

Les progrès des microprocesseurs seuls auraient permis de passer de 1 à 500 millions, au mieux, entre 1973 et 1995. L'histoire de π l'avait déjà montré : le progrès mathématique est essentiel pour aller plus loin dans le calcul de ses chiffres, et c'est ce qui donne du sens à cette course (outre l'utilité parfois évoquée de ces calculs pour tester les ordinateurs et leurs logiciels). La méthode que nous allons examiner est d'une nature bien différente, et plus révolutionnaire encore que les méthodes de multiplication rapide : elle est fondée sur la découverte d'une formule qui permet le calcul des chiffres de π très loin sans avoir à calculer ceux qui précèdent.

Selon Stan Wagon, ce nouveau progrès constitue un changement de direction radical dans le cours d'une histoire pourtant aussi ancienne que celle des mathématiques. Il y a quelques mois, si vous aviez demandé à un mathématicien s'il jugeait possible de sauter au dix-milliardième chiffre de π sans avoir à en calculer les précédents, il vous aurait ri au nez : pour tout le monde, c'était impossible. Les mathématiciens sont parfois persuadés, sans véritable preuve, mais en s'appuyant sur leur fameuse et trop commode intuition, de certaines impossibilités qu'un illuminé ou simplement un mathématicien génial sans complexe vient balayer d'un revers de main.

En 1989, les frères Borwein, grands spécialistes des méthodes de calcul de π (voir *Les mathématiciens*, *Pour la Science*, 1996), écrivaient : «Il est raisonnable de spéculer que calculer le *n*-ième chiffre de π n'est pas vraiment plus facile que calculer tous les chiffres jusqu'au *n*-ième.» Il est amusant de remarquer que l'un des frères Borwein appartient à l'équipe qui a démenti ce jugement !

UNE FORMULE NOUVELLE

La découverte de la nouvelle formule est datée avec une grande précision (sans doute grâce aux sauvegardes des fichiers informatiques contenant les traces des calculs qui ont conduit à sa découverte) : le 19 septembre 1995, à 0h29, Simon Plouffe, après un mois de recherche à tâtons, dans le cadre de travaux menés avec David Bailey et Peter Borwein, en s'aidant du programme de calcul formel PSLQ, mais pleinement conscient de ce qu'il cherche (l'utilisation de moyens informatiques pour faire des mathématiques ne signifie pas que le mathématicien devient idiot !), trouve que :

$$\pi = \left(\frac{4}{1}-\frac{2}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{16}\left(\frac{4}{8+1}-\frac{2}{8+4}-\frac{1}{8+5}-\frac{1}{8+6}\right)$$
$$+\frac{1}{16^2}\left(\frac{4}{16+1}-\frac{2}{16+4}-\frac{1}{16+5}-\frac{1}{16+6}\right)+\ldots\ldots$$
$$\pi = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{16^i}\left(\frac{4}{8i+1}-\frac{2}{8i+4}-\frac{1}{8i+5}-\frac{1}{8i+6}\right)$$

Cette fantastique formule permet de calculer n'importe quel chiffre de π en base 2 : vous pouvez calculer directement le 40 milliardième chiffre de π sans calculer les précédents. D'ailleurs, l'équipe canadienne l'a calculé : c'est un '1' suivi de 0010010. Aujourd'hui, personne n'a calculé les 40 milliards de chiffres binaires de π qui précèdent (on y arrivera sans doute dans quelques années, mais, pour l'instant, c'est impossible ou d'un coût tellement énorme que personne ne peut se payer cette folie).

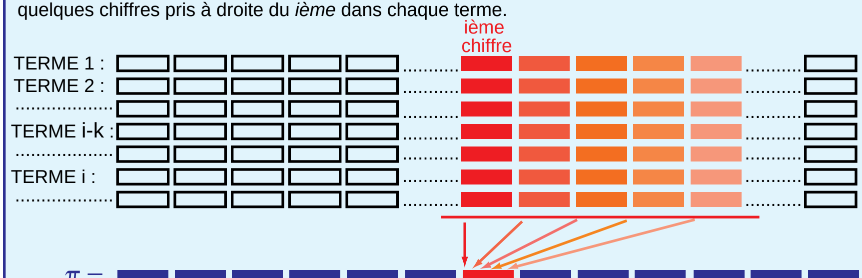
Tout récemment, le 7 octobre 1996, Fabrice Bellard, de l'IRISA, à Rennes, en utilisant les mêmes techniques, a réussi à atteindre le 400 milliardième chiffre binaire de π, qui est aussi un '1' suivi cette fois de 001110000111000.

Pour le calcul de tous les chiffres de π, la nouvelle formule n'est pas exceptionnelle (comparée à d'autres, par exemple, dues à Ramanujan). Voici ce qu'on trouve

CALCUL DU CHIFFRE i (en base 16) DE π

$$\pi = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{16^i}\left(\frac{4}{8\,i+1}-\frac{2}{8\,i+4}-\frac{1}{8\,i+5}-\frac{1}{8\,i+6}\right)$$

Pour connaître le ième chiffre en base 16 de π, on peut négliger les termes trop petits de cette série. Il n'en reste qu'un nombre fini que l'on traite séparément. Pour chacun d'eux on calcule quelques chiffres à droite du *ième* chiffre. Le *ième* chiffre du résultat, la valeur de π, ne dépend que de ces quelques chiffres pris à droite du *ième* dans chaque terme.



en calculant la somme $P(n)$ des n premiers termes de la somme infinie :
$P(1)$=3.141422466422466422466422...
$P(2)$=3.141587390346581523052111...
$P(3)$=3.141592457567435381837004...
$P(4)$=3.141592645460336319557021...
$P(5)$=3.141592653228087534734378...
$P(50)$=3.14159265358979323846264338327950288 4197.

Les chiffres, mais pas les décimales

Indiquons tout de suite qu'aucune formule analogue à celle-ci n'a été trouvée permettant d'accéder rapidement aux chiffres décimaux (c'est-à-dire en base 10) de π indépendamment les uns des autres.

Si c'est π en base 10 qui vous intéresse, rien ne vous permet encore de connaître la quarante milliardième décimale sans avoir calculé celles qui précèdent et donc, à moins de battre très sensiblement le record actuel, cette quarante milliardième décimale vous restera inconnue. En revanche, le passage de la base 2 à la base 4 ou 8 (ou plus généralement 2^n) peut se faire par petits bouts (on regroupe les chiffres), et inversement de la base 2^n à la base 2. Les premières tentatives (déjà très sérieuses) pour trouver une formule analogue à la nouvelle, mais adaptée à la base 10, ont pour l'instant échoué.

En décembre 1996, une méthode de calcul individuel des chiffres décimaux de π n'utilisant que très peu de mémoire (comme celle détaillée ici pour les chiffres binaires) a été proposée par S. Plouffe. Cette astucieuse méthode est fondée sur une ancienne formule de calcul de π et sur des propriétés particulières des coefficients du binôme de Newton. Avec cette méthode, la consommation d'une petite quantité de mémoire doit malheureusement se payer par une durée de calcul bien plus grande qui en empêche l'utilisation pratique pour battre de nouveaux records. Des améliorations de la méthode ne sont toutefois pas impossibles : en ce qui concerne la base 10, les espoirs se concrétisent.

La formule de Bailey-Borwein-Plouffe (que nous appellerons BBP) aurait pu être découverte depuis des siècles, notamment par Euler, qui en a trouvé tant de merveilleuses. En effet, rien dans sa démonstration n'est délicat ni extraordinaire : la difficulté était d'imaginer l'existence d'une telle formule, et de l'écrire. Il a fallu attendre 1995.

La formule BBP connue, d'autres formules analogues ont été découvertes en quelques mois, pour toutes sortes de constantes mathématiques : comme bien souvent dans le domaine scientifique, quand un coin du voile a été soulevé par une équipe, géniale ou chanceuse, tout un pan de montagne nouveau apparaît. C'est un véritable filon qu'a déterré l'équipe de l'Université Simon Fraser, et l'on n'a pas fini de faire marcher la pelle et la pioche. Peut-être d'ailleurs que ce filon contient des diamants plus gros que celui déjà extrait : l'effervescence règne.

Nous allons expliquer pourquoi la formule BBP permet le calcul du 400 milliardième chiffre binaire de π sans avoir à calculer ceux qui précèdent. Pour la comprendre, il suffit de savoir compter et de maîtriser le jeu des retenues dans une addition.

Comme nous sommes plus habitués à manipuler des nombres écrits en base 10 qu'en base 2 ou 16, nous expliquerons les idées du calcul avec des exemples en base 10. Évidemment ces explications s'adaptent à toutes les autres bases, et c'est en définitive en base 16 (et donc 2) qu'elles sont vraiment utiles.

Comment on utilise la formule BBP

L'explication s'organise autour de quatre idées.

Idée 1. Lorsque l'on additionne de très grands nombres (par exemple, deux nombres de 200 chiffres chacun), on peut savoir ce qui se passe vers le milieu sans avoir à calculer beaucoup : le calcul d'une seule addition des deux chiffres en position 100 ne sera pas toujours suffisant,

NOM	DATE	NOMBRE DE DÉCIMALES
Babyloniens	2000 av. J.C.?	3,125 (3+1/8) 1
Égyptiens	2000 av. J.C.?	3,16045 $(16/9)^2$ 1
Chine	1200 av. J.C.?	3 1
Bible	550 av. J.C.	3 1
Archimède	250 av. J.C.	3,14185 3
Liu Hui	264	3,14159 5
Al-Kashi	1429	14
Van Ceulen	1609	34
Sharp	1699	71
Machin	1706	100
De Lagny	1719	127 calculées, 112 exactes
Rutherford	1824	208 calculées, 152 exactes
Strassnitzky, Dase	1844	200
Clausen	1847	248
Lehmann	1853	261
Rutherford	1853	440
Shanks	1874	707 calculées, 527 exactes
Ferguson	1-1947	710
Ferguson et Wrench	9-1947	808
Smith et Wrench	1949	1 120
Reitwiesner et al (ENIAC)	1949	2 037
Nicholson et Jeenel	1954	3 092
Felton	1957	7 480
Genuys	1-1958	10 000
Shanks et Wrench	1961	100 265
Guilloud et Bouyer	1973	1 001 250
Miyoshi et Kanada	1981	2 000 036
Tamura et Kanada	1982	8 388 576
Kanada, Yoshino et Tamura	1982	16 777 206
Gosper	1985	17 526 200
Bailey	1-1986	29 360 111
Kanada, Tamura,	1-1987	
Kobo et al.	6-1989	134 217 700
Chudnovsky	11-1989	525 229 270
Kanada et Tamura	5-1994	1 073 741 799
Chudnovsky	10-1995	4 044 000 000
Kanada	1996	6 442 450 938
Bailey-Borwein-Plouffe	1996	en base 2, sans calculer tout ce qui précède : 40 milliardième
Bellard	10-1996	en base 2, sans calculer tout ce qui précède : 400 milliardième

mais il n'y a pas besoin de grand-chose de plus.

Imaginons que nous voulions connaître le chiffre en position 100 de l'entier obtenu en additionnant le nombre de 200 chiffres $X = \bullet\bullet\bullet\, a\, b\, c \,\bullet\bullet\bullet$ qui comporte les chiffres décimaux *a, b* et *c* en position 100, 101 et 102 avec le nombre $Y = \bullet\bullet\bullet\, a'b'c' \,\bullet\bullet\bullet$ qui, lui, possède les chiffres décimaux *a', b'* et *c'* en position 100, 101 et 102.

$$\begin{array}{cc} & \bullet\;\bullet\;\bullet\; a\;\; b\;\; c\;\; \bullet\;\bullet\;\bullet \\ + & \bullet\;\bullet\;\bullet\; a'\; b'\; c'\; \bullet\;\bullet\;\bullet \\ \hline = & \bullet\;\bullet\;\bullet\; ?\;\; \bullet\;\; \bullet\;\; \bullet\;\bullet\;\bullet \\ & 101\; 102\; 103 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & a\;\; b\;\; c \\ + & a'\; b'\; c' \\ \hline = & a''\; b''\; c'' \end{array}$$

Tout est une question de retenues. Supposons qu'on calcule la somme des deux entiers *abc* et *a'b'c'* comme on le ferait pour une addition habituelle de deux nombres entiers à trois chiffres et qu'on obtienne *a"b"c"*. Posons-nous la question : quand *a"* est-il bon ? C'est-à-dire : quand *a"* est-il le chiffre qu'on obtiendrait en position 100 en faisant complètement l'addition des 200 chiffres de *X* et des 200 chiffres de *Y* ?

La réponse est simple : *a"* sera bon sauf si $b + b' = 9$ et $c + c' = 9$, car alors, tout dépendra de ce qui se passe à droite dans la grande addition. S'il y a une retenue à reporter, celle-ci se propagera jusqu'au $a + a'$ qu'il faudra changer, sinon elle ne se propagera pas. De cela, il résulte que, sauf malchance (au plus une fois sur 100), on tombera sur le bon chiffre *a"* dans l'addition en se contentant de calculer avec trois additions de deux chiffres. De plus, si malchance il y a, on le saura et on pourra donc aller voir un peu plus à droite et calculer avec quatre ou cinq chiffres pour être certain d'avoir le bon *a"*.

Donc, à condition d'aller voir un peu à droite (mais pas bien loin), on est certain de ce qu'on calcule au milieu de la grande addition sans avoir à la faire entièrement.

Ce principe s'applique aussi quand on additionne successivement plusieurs grands entiers ou quand on multiplie un grand entier par un petit entier (on appelle ainsi un entier de quelques chiffres, 30 ou 50 au plus) : on sait avec certitude ce qui se passe au milieu en se contentant de calculer un peu à droite de ce qui nous intéresse. «Un peu», en pratique, signifie quelques dizaines de chiffres, mais qu'est-ce qu'un calcul sur 30 chiffres ou 50 chiffres lorsqu'on évite la manipulation de milliards de chiffres.

Nous venons de voir qu'on peut additionner localement de grands entiers ou multiplier localement un grand entier par un petit. En revanche, ce n'est pas vrai pour la multiplication de deux grands entiers ou pour la division (sinon, il y a longtemps qu'on saurait calculer les chiffres de π par le milieu).

Idée 2. On peut calculer le *n*-ième chiffre (pensez à *n* égal à 10 milliards), d'un nombre de la forme $1/(k\ 16^i)$ en base 16 en ne faisant qu'une série de petits calculs.

Pour faciliter la compréhension, comme précédemment, nous nous plaçons en base 10, et nous allons expliquer comment on peut calculer le *n*-ième chiffre décimal de $1/(k\ 10^i)$ en ne faisant que des petits calculs. Prenons $n = 1\ 000$ (pour alléger un peu), $i = 35$, $k = 49$. Nous voulons calculer le 1 000^e chiffre décimal de $1/(49\ 10^{35})$.

Chacun sait que, pour multiplier un nombre décimal par 10, il suffit de décaler la virgule d'un chiffre vers la droite. Donc, le 1 000^e chiffre décimal de $1/(49\ 10^{35})$ est le 999^e chiffre de $1/(49\ 10^{34})$, qui est le 998^e de $1/(49\ 10^{33})$, etc. Donc, finalement, on a à calculer le 965^e chiffre de 1/49.

En utilisant encore le principe du décalage, on trouve que ce chiffre est le même que le premier chiffre après la virgule de $10^{964}/49$.

Imaginons que nous réussissions à calculer le reste *r* de la division de 10^{964} par 49 sans avoir à manipuler de grands nombres (c'est l'idée 3), alors : $10^{964} = 49\ q + r$, avec *q* entier et $r < 49$, et donc : $10^{964}/49 = q + r / 49$.

Puisque *q* est un entier, le premier chiffre après la virgule de $10^{964}/49$ est le même que le premier chiffre après la virgule de $r/49$, ce qui est facile à déterminer (car $r < 49$) en faisant la division (qui est une division entre petits entiers).

Donc, au total (sous réserve qu'on puisse facilement calculer le reste de la division de 10^{964} par 49), nous savons comment calculer le 1 000^e chiffre décimal de $1/(49\ 10^{35})$ et, plus généralement, n'importe quel chiffre isolé, même très loin en base *p,* d'un nombre de la forme $1/(n\ p^i)$ si *n* est un petit entier.

Idée 3. Le calcul du reste de la division de 10^{964} par 49 est facile et peut se faire sans avoir à manipuler de grands nombres.

Pour calculer ce reste, on utilise «l'arithmétique modulo 49», qui consiste à soustraire 49 autant de fois que c'est nécessaire dès qu'on l'a dépassé. Par exemple, $35 + 45 = 80 = 31$, $3 \times 45 = 135 = 37$, etc.

Le calcul du reste de la division de 10^{964} par 49 est alors ramené au calcul de 10^{964} dans cette «arithmétique modulo 49» où le module d'une somme est la somme des modules, etc., et l'on procède comme suit.

Calcul de proche en proche de 10^2, 10^4, 10^8, etc., modulo 49 :

$10^2 = 100 = 2$; $10^4 = 2^2 = 4$; $10^8 = 4^2 = 16$; $10^{16} = 16^2 = 256 = 11$; $10^{32} = 11^2 = 121 = 23$; $10^{64} = 23^2 = 529 = 39$; $10^{128} = 39^2 = 1521 = 2$; $10^{256} = 2^2 = 4$; $10^{512} = 4^2 = 16$.

Décomposition de 964 en somme de puissance de 2 :

$964 = 512 + 256 + 128 + 64 + 4$

$10^{964} = 10^{512 + 256 + 128 + 64 + 4} =$

$16 \times 4 \times 2 \times 39 \times 4 = 25$.

On n'utilise que des petits nombres, et aucune manipulation n'est vraiment longue (même si, à la place de 1 000, on avait mené les calculs avec dix milliards).

Idée 4. On exploite maintenant la formule BBP, qui nous indique que le nombre π est une somme de termes dont pour chacun il est facile (d'après ce qu'on vient de voir) de connaître le 10-milliardième chiffre en base 16.

$$\pi = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i}\left(\frac{4}{8i+1} - \frac{2}{8i+4} - \frac{1}{8i+5} - \frac{1}{8i+6}\right)$$

Il semble qu'il y ait quand même une difficulté, car cette somme est infinie. Mais $1/16^i$ diminue très rapidement quand *i* augmente, et donc seuls les premiers termes de la série ont à être pris en compte (bien sûr, tout cela est soigneusement évalué). En définitive, connaître le dix-milliardième chiffre en base 16 de π a été ramené à une suite de petits calculs sur de petits entiers et on n'a jamais eu à mémoriser des milliards de chiffres comme cela était le cas pour toutes les méthodes de calcul de π jusqu'à présent (y compris la méthode du compte-gouttes).

Pour terminer le calcul et avoir les chiffres binaires de π, on utilise la connaissance du *n*-ième chiffre en base 16 de π. Ce *n*-ième chiffre donne les chiffres binaires de π de rang $4n - 3$, $4n - 2$, $4n - 1$ et $4n$ par remplacement de chaque chiffre en base 16 par quatre chiffres binaires en suivant la règle :

$0 \rightarrow 0000$, $1 \rightarrow 0001$, $2 \rightarrow 0010$, $3 \rightarrow 0011$,
$4 \rightarrow 0100$, $5 \rightarrow 0101$, $6 \rightarrow 0110$, $7 \rightarrow 0111$,
$8 \rightarrow 1000$, $9 \rightarrow 1001$, $A \rightarrow 1010$, $B \rightarrow 1011$,
$C \rightarrow 1100$, $D \rightarrow 1101$, $E \rightarrow 1110$, $F \rightarrow 1111$.

Voici quelques résultats donnés par D. Bailey, P. Borwein et S. Plouffe dans leur article sur la nouvelle formule et ses extensions. Précisons que D. Bailey fut le premier à atteindre 29 millions de décimales en 1986 (sa plaque minéralogique de voiture, paraît-il, est P314159) et que P. Borwein est connu pour avoir trouvé avec son frère de nombreuses et très efficaces formules de calcul de π, dont certaines sont utilisées par le Japonais Y. Kanada pour atteindre ses records ($A = 10$, $B = 11$, ..., $F = 15$).

π en base 16 à partir de la position :

10^6 : 26C65E52CB4593
10^7 : 17AF5863EFED8D
10^8 : ECB840E21926EC

10^9 : 85895585A0428B

10^{10} : 921C73C6838FB2

Les auteurs ont programmé ces calculs sur les ordinateurs de la NASA, où D. Bailey travaille. Comme s'ils craignaient qu'on ne les accuse de dilapider l'argent du contribuable américain dans des calculs absurdes, ils précisent qu'ils n'ont utilisé les machines que pendant qu'elles étaient inoccupées.

LES CLASSES DE COMPLEXITÉ ET π

D'un point de vue théorique, qu'est-ce qu'apportent la nouvelle formule pour π et les formules du même genre trouvées depuis? Plusieurs choses importantes.

La classe de Steven SC_2 est celle des nombres dont on peut calculer les chiffres binaires en «temps polynomial» et en «espace log-polynomial». Lorsqu'un nombre est dans SC_2, pour en connaître le n-ième chiffre binaire, on doit calculer pendant (par exemple) n^2 secondes et utiliser log n mémoires : le temps de calcul augmente, en fonction du numéro n de la décimale qu'on veut connaître, au plus comme un polynôme en n, et la mémoire nécessaire au calcul augmente au plus comme un polynôme en $\log(n)$ (c'est-à-dire lentement, car $\log_{10}(10) = 1$, $\log_{10}(100) = 2$, $\log_{10}(1000) = 3$, etc.).

La nouvelle formule pour π ne permet pas de calculer le n-ième chiffre plus rapidement que les méthodes connues avant elle (et qui nécessitaient toutes le calcul des chiffres précédents) ; en revanche, elle permet de calculer ce n-ième chiffre sans avoir à utiliser et gérer une trop importante quantité de mémoire (ce qui est l'obstacle factuel pour ces calculs) : la nouvelle formule montre que π appartient à la classe de Steven SC_2, ce que tout le monde ignorait avant (et jugeait même improbable).

La découverte de S. Plouffe, en 1996, devrait permettre d'étendre le résultat théorique à la base 10 et à toute base. Pour la base 2, il y a une conséquence pratique remarquable : pour calculer des millions de chiffres de π, il n'est plus nécessaire de programmer des calculs en arithmétique exacte, c'est-à-dire de développer de longs programmes spécialisés dans la manipulation des entiers de très grande taille. En utilisant les méthodes décrites plus haut, on peut se contenter de l'arithmétique de base de l'ordinateur (arithmétique d'une ou deux dizaines de chiffres bien souvent) et donc, avec un programme court de quelques dizaines de lignes, on calcule les chiffres binaires de π très très loin. Ce qui, en définitive, autorise l'accès à des chiffres binaires de π que personne, avant,ne connaissait.

Bien sûr, d'autres limites (celles dues au temps de calcul) bornent encore l'endroit qu'on peut atteindre dans π : π est infiniment long, et nous n'en connaîtrons jamais qu'une infime partie!

L'exploitation de la nouvelle formule de π n'est pas terminée. Programmée plus soigneusement encore qu'elle ne l'a été depuis les quelques mois qu'elle est connue, ou en utilisant des ordinateurs parallèles, il est certain qu'elle va donner des chiffres bien au-delà du 400 milliardième. D'après S. Plouffe, on devrait rejoindre la 10^{15e} position binaire de π dans un proche avenir, ce qui, il n'y a pas longtemps, était considéré comme définitivement impossible ou réservé à nos arrière petits-enfants! Le fractionnement du travail de calcul sur une multitude de petites machines, qu'autorise la nouvelle formule, rend facile l'établissement de nouveaux records, et cela même si l'on exige de ne prendre en

LA DÉSESPÉRANTE BANALITÉ DE π

En 1995 le Japonais Kanada a calculé 6 442 450 000 décimales de π.
En prenant en compte les 6 milliards premières, on a trouvé les apparitions suivantes des différents chiffres :

0 : 599 963 005	1 : 600 033 260
2 : 599 999 169	3 : 600 000 243
4 : 599 957 439	5 : 600 017 176
6 : 600 016 588	7 : 600 009 044
8 : 599 987 038	9 : 600 017 038

La vitesse avec laquelle les fréquences approchent de 1/10 est conforme à ce qu'on obtiendrait avec un tirage au hasard. L'écart doit diminuer comme $1/\sqrt{n}$, ce qui semble être le cas puisque la fréquence du '7' par exemple est :

0	pour les 10 premières décimales
0,08	pour les 100 premières décimales
0,095	pour les 1000 premières décimales
0,097	pour les 10000 premières décimales
0,10025	pour les 100000 premières décimales
0,0998	pour les 1000000 premières décimales
0,1000207	pour les 10000000 premières décimales

Avec les 10 millions premières décimales de π, on peut engendrer deux millions de séries de 5 chiffres qu'on peut assimiler à des mains de Poker. On calcule quel est le nombre statistiquement attendu de certaines configurations de Poker pour des mains tirées au hasard (si on jouait avec un jeu ayant 10 sortes de cartes différentes au lieu de 13). On s'aperçoit alors que ce qu'on trouve pour les mains de poker tirées des décimales de π ressemblent à celles qu'on aurait par de véritables tirages aléatoires.

	Nombre attendu	Nombre trouvé
les 5 décimales distinctes	604 800	604 976
2 décimales identiques (une paire)	1 008 000	1 007 151
deux paires	216 000	216 520
3 décimales identiques (brelan)	144 000	144 375
un full (paire + brelan)	18 000	17 891
un carré	9 000	8 887
5 décimales identiques	200	200

D'autres études ont été faites et personne jusqu'à présent n'a jamais trouvé de propriété statistique remarquable des décimales de π, qui apparaissent donc désespérément banales.
Le nombre π semble aléatoire. Mais ce serait aller trop vite en besogne que de conclure cela car :
- d'une part, rien n'est démontré : on ne sait même pas si tous les chiffres sont utiles (personne n'a prouvé que p ne se termine pas par 2020020002...) ;
- d'autre part, satisfaire certaines propriétés statistiques n'est pas suffisant pour être considéré comme aléatoire. Le nombre de Champernowne, 0,123456789101112131415..., n'est pas du tout aléatoire et pourtant il est normal en base 10 et donc il satisfait aussi les tests de fréquence envisagés plus haut.
La nouvelle formule de Bailey Borwein et Plouffe pour la première fois depuis des siècles offre une perspective de progrès dans la connaissance des propriétés générales des chiffres binaires de π.

compte que les chiffres dont on connaît tous les chiffres précédents.

Plus important encore, la formule BBP ouvre la porte à une étude mathématique générale des chiffres de π qui est restée décevante jusqu'à présent. La seule chose démontrée concernant les chiffres de π est que jamais ils ne se répètent périodiquement : sinon, π serait rationnel (rapport de deux entiers), ce qui n'est pas le cas, comme on le sait depuis 1766 grâce à une démonstration du mathématicien Lambert. Rien d'autre n'est connu sur les propriétés des chiffres de π (le fait qu'il soit transcendant, comme l'a montré Lindemann en 1882, ne fournit aucune propriété intéressante de ses chiffres).

Parce qu'elle donne un accès plus immédiat aux chiffres de π que toutes les formules connues jusqu'à présent, la nouvelle formule permettra peut-être de prouver que les chiffres de π sont équitablement répartis (un tel nombre est appelé normal), ce qui a été constaté, mais jamais démontré. Ce serait une avancée remarquable. À défaut, peut-être pourra-t-on trouver des motifs réguliers dans ces chiffres ou une certaine structure, éventuellement complexe, mais différente de celle d'une suite aléatoire. Ce serait formidable, car tous les tests statistiques faits jusqu'à présent sur les chiffres binaires ou décimaux de π n'ont amené que la conclusion qu'ils étaient d'une désespérante banalité.

S. Plouffe juge possible une telle avancée : «Je crois que la preuve que log(2) ou π sont normaux en base 2 n'est pas loin et je n'écarte pas même une formule directe qui donnerait la *n*-ième position de log(2) en binaire en temps linéaire.» D'autres mathématiciens, tels D. Bailey et J. Shallit, croient aussi à une avancée proche sur ces questions bloquées depuis deux siècles.

Des formules analogues à celle trouvée par S. Plouffe ont été découvertes, qui montrent, par exemple, que π^2, $\pi\sqrt{2}$, log(2) sont dans la classe de Steven SC_2. Pour les logarithmes, quelque chose d'étonnant se produit : on a trouvé des formules pour log(2), log(3), ..., log(22), mais pas pour log(23). Il se peut que, pour une majorité d'entiers, log*(n)* soit dans SC_2. Peut-être même le sont-ils tous, mais cela reste à prouver.

La passion que S. Plouffe éprouve pour π n'est pas nouvelle. En 1975, il avait mémorisé 4 096 décimales de π (le record actuel est de plus de 42 000). Il figurait à ce titre dans le *Livre des records*. Il est amusant de voir que, 20 ans après, il participe à une découverte de premier ordre concernant π.

Pour mémoriser les décimales de π, il raconte qu'il les prenait par groupes de 100, les écrivait plusieurs fois et réussissait ainsi à les connaître grâce à sa mémoire photographique des chiffres. Pour ne pas oublier les décimales apprises, il s'isolait régulièrement dans le noir pour les réciter. Après son record de 4 096, il réussit à atteindre 4 400, et décida alors de s'arrêter. Cette connivence avec les chiffres rappelle celle d'Euler et de Ramanujan.

Les mathématiques expérimentales

L'équipe de l'Université Simon Fraser qui a découvert la nouvelle formule pour π participe et anime un groupe de mathématiciens qui préconisent une nouvelle pratique des mathématiques. Pour eux, les mathématiques à la fin du XIX^{e} siècle sont devenues abstraites parce que tout (ou presque) ce qui pouvait être trouvé «à la main» l'avait été. Ils soutiennent qu'avec les ordinateurs une nouvelle ère de mathématiques concrètes et expérimentales doit se développer.

L'interaction entre un logiciel de calcul numérique ou formel et un mathématicien permet d'explorer des domaines où la longueur et la complexité des manipulations symboliques ne sont plus des obstacles. L'ordinateur assiste le mathématicien en effectuant des tâches fastidieuses comme la dérivation, le calcul de primitives, la factorisation des polynômes, etc. La recherche de mises en correspondance numériques peut être menée à grande échelle, et la démonstration automatisée de formules intermédiaires complexes est confiée à des programmes.

Même si la formule de D. Bailey, P. Borwein et S. Plouffe avait pu être découverte sans ordinateur, elle l'a été avec ! C'est à la suite d'une exploration consciente menée par Simon Plouffe que la formule est apparue, exploration où l'intelligence du mathématicien et le pouvoir de manipulation symbolique extraordinaire des programmes informatiques ont travaillé en symbiose. Une fois la formule trouvée, il fallait la démontrer. Cela aurait pu être fait à la main, mais l'aide d'un programme rendit la tâche plus facile (précisons toutefois que la démonstration trouvée a été vérifiée sans ordinateur).

Aujourd'hui, ces mathématiciens qui préconisent l'utilisation de l'ordinateur pour trouver de nouvelles «vérités» mathématiques poursuivent des travaux qui avaient été plus ou moins abandonnés à cause de la complexité de calculs qu'il n'était pas envisageable de poursuivre à la main. Le grand mathématicien indien Ramanujan, qui avait un don mathématique exceptionnel pour trouver des formules (dont certaines concernent π), avait réussi à aller un peu plus loin que ses prédécesseurs ; aujourd'hui, grâce aux ordinateurs et aux mathématiciens expérimentateurs, son travail se poursuit.

Ordinateurs et vérités mathématiques

Ces recherches posent de nouveaux problèmes à la philosophie des mathématiques, car, par exemple, il arrive qu'une formule soit découverte par interaction avec l'ordinateur sans qu'on réussisse à en donner la preuve. Dans un tel cas, les mathématiciens expérimentateurs ne considèrent pas que la formule est vraie : ils acceptent la distinction classique entre *vérité prouvée* et *vérité constatée* (distinction qui n'existe sans doute pas en physique). Leur conception expérimentale des mathématiques ne préconise donc pas d'identifier mathématiques et physique.

L'ordinateur est une aide, mais c'est au mathématicien humain, aujourd'hui encore, de dire si une affirmation mathématique a été prouvée ou non, et cela *(1)* même lorsque c'est un ordinateur qui a permis de formuler cette affirmation ; *(2)* même s'il est intervenu de manière essentielle dans l'élaboration de la preuve ; *(3)* même si, pour des raisons de complexité, on ne peut se passer de calculs ou de raisonnements faits par ordinateur pour mener à terme la démonstration. Aucun des mathématiciens du domaine ne démontrera seul, à la main, le théorème tout nouveau que «le 400 milliardième chiffre binaire de π est un 1», mais c'est eux qui décident de la vérité d'une telle affirmation.

Jean-Paul DELAHAYE est directeur adjoint du Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille du CNRS.
e-mail delahaye@lifl.fr

V. ADAMCHIK et S. WAGON, *Pi : a 2000-Year Search Change Direction,* Manuscrit, 1995.

D.H. BAILEY, P.B. BORWEIN et S. PLOUFFE, *On the Rapid Computation of Various Polylogarithmic Constants,* Manuscrit, 1996.

D.H. BAILEY, J.M. BORWEIN, P.B. BORWEIN et S. PLOUFFE, *The Quest for Pi*, Manuscrit, 1996.

S. PLOUFFE, *Sur la n-ième décimale des nombres transcendants ou la 10 milliardième décimale (hex) de π est 9*, Manuscrit de notes pour une conférence, 1996.

I. STEWART, *Les algorithmes compte-gouttes*, in *Pour La Science*, n° 215, septembre 1995.